Barcelona 1 - IV - 1952

Prof. Henri Milloux

Cauderan

Monsieur le Professeur,

Je vous prie de m'excuser si je vous écris a la machine mais je considere qu'une lettre avec des formules mathématiques, sera plus facile a lire.

Il-y-a quelques mois j'ai trouvé des résultats qui donnent des relations entre le nombre de valeurs asymptotiques d'une fonction entiere d'ordre fini et les types de ces valeurs asymptotiques (c'est-a-dire la rapidite avec laquelle la fonction approche de la valeur asymptotique); en resume, des précisions du théoreme de Denjoy-Carleman-Ahlfors. Dans mes recherches pour étendre cette précision a l'ordre infini, les résultats que j'ai obtenus sont tout a fait généraux, mais moins precise que votre théoreme de Compositio Mathematica T. 1 pag. 305-313, tandis que tout me faisais croire qu'on devait arriver a des resultats aussi précis que le votre. En cherchant la cause de ce psendo paradoxe je crois avoir prouvé que la démonstration de votre théoreme n'est pas completement générale et par suite, que peut-etre le théoreme n'est pas non plus général.

Votre démonstration s'appuie sur l'affirmation que l'inégalité

$$(1) \qquad [M(r,f)]^{12/5} < K \frac{\log \log M(r(1+\eta), f)}{\log r}$$

a lieu uniquement pour des valeurs exceptionnelles de r ; quelle que soit la fonction entiere $f(z)$ et quelle que soit la quantite positive η . En réalié pour que la démonstration de votre theoreme fut valable

Il serait nécessaire que les valeurs de r qui satisfont a l'inegalité deduite de (1) en remplaçant l'expression $r(1+\eta)$ par $r^{1+\eta}$, soient elles aussi exceptionnelles; mais si ceci fut vrai il le serait aussi a fortiori pour (1).

Comme je vous l'indique ci-dessus j'ai démontré le théoreme suivant

Théoreme.- Etant donnée une fonction positive non décroissante $\psi(x)$ telle que $\lim \psi(x) = \infty$ lorsque $x \to \infty$, il existe toujours une fonction entiere $f(z)$ telle que, quelle que soit $\eta > 0$, l'inegalité

$$M(r, f) < \psi[M(r(1+\eta), f)]$$

soit satisfaite pour $r > r_0(\eta, f)$

Puisque $\log r$ croit beaucoup plus lentement que $M(r, f)$ le théoreme antérieur démontre que, pour une classe (construite ad hoc, il est vrai) de fonctions entieres, les valeurs de r qui verifient l'inegalite (1) ne sont pas exceptionnelles pour aucune valeur de η. Il n'est pas nécessaire de vous faire remarquer que le theoreme ci-dessus n'est pas en opposition avec le theoreme de Borel car dans celui-ci $\eta \to 0$ tandis que dans le mien η est une quantité positive aussi petite que l'on voudra, mais fixe.

La démonstration du theoreme que je vous indique peut se faire de la maniere suivante:

A partir de la suite $\{n_K\}$ que nous laisserons d'abord indéterminée, on peut définir la $\{R_K\}$ par les conditions: $R_K \leq R_{K+1}$,

$$R_0 = \cdots R_{n_1} = \frac{1}{2}, \quad R_{n_K+1} = \cdots = R_{n_{K+1}} = K + \frac{1}{2} \quad (K \geq 1)$$

Par suite, quelle que soit $\{n_K\}$ on aura toujours $K > R_{n_K}$, et d'après cela. on peut définir une suite $\{n_K\}$ telle que, par exemple, $n_1 = 0$ et

$$\left[K^{n_k}/(R_0 R_1 \cdots R_{n_k})\right]^2 < \Psi\left[(K+1)^{n_{k+1}}/(R_0 R_1 \cdots R_{n_{k+1}})\right]$$

Avec cette définition nous écrirons

$$f(z) = \sum_0^\infty \frac{z^n}{R_0 R_1 \cdots R_n};$$

évidemment $f(z)$ est une fonction entière.

D'ailleurs, on voit facilement que pour $r > 6/\eta$ il existe au moins un entier K tel que

$$r < K < K+1 < r(1+\eta/3)$$

en ecrivant donc

$$\mu(r) = \max_{n \geq 0}\left[r^n/(R_0 R_1 \cdots R_n)\right]$$

nous déduirons des définitions de $\{R_k\}$ et $\{n_k\}$, que c'on a

(2) $$\left[\mu(r)\right]^2 < \Psi\left[\mu(r(1+\eta/3))\right]$$

pour $r > 6/\eta$.

De plus, d'aprés un résultat trés connu de Valiron (An.Sci.Ec.Norm. Sup T. 37, pag. 219-253 theorem IX pag. 240) on a

(3) $$M(r, f) < \left[\mu(r)\right]^2$$

excepté dans une suite d'intervales dans lesquels la variation de $\log r$ est finie. Par suite, si r est suffisamment grande, il existe une valeur r' qui vérifie (3) et telle que $r < r' < r(1+\eta/3)$; et d'aprés (2) on aura finalement

$$M(r;f) < M(r';f) < [\mu(r')]^2 < [\mu(r(1+\eta/3))]^2 <$$

$$< \psi[\mu(r(1+\eta/3)^2)] = \psi[M(r(1+\eta), f)],$$

c'est-a-dire, le théorème. En réalite dans la derniere inegalité nous supposons $(1+\eta/3)^2 < 1+\eta$; mais cette condition ne restreint pas la généralite de la démonstration

Je pense publier tous les resultats, dont je vous parle dans cette lettre, dans un travail qui paraitra dans Collectanea Mat. de Barcelona mais avant de le faire je désire connaitre votre opinion autorisce

En vous remercient d'avance pour votre obligeance, veuillez agréer Monsieur le Professeur láassurance de mes sentiments les plus distingués.