Barcelona 1 de Marzo de 1952

Dr. Don Jose Mª Orts
Barcelona

Distinguido Prof. y amigo: Segun le prometi durante mi ultima visita al Seminario la indico a continuación la demostración detallada de un resultado que permite afirmar que el teorema de Milloux de Compositio Mathématica T. 1 pag. 305-313 es falso para una clase de funciones enteras de orden infinito, contrariamente a lo que afirma el Prof. Milloux

Dicho Prof., basa su resultado en la afirmación de que la desigualdad

$$(1) \qquad [M(r,f)]^{42/5} < K \frac{\log \log M(r(1+\varepsilon),f)}{\log r}$$

se cumple unicamente para valores excepcionales de r, cualesquiera que sean la función entera $f(z)$ y la cantidad positiva ε; donde $M(r,f)$ representa el máximo de $|f(z)|$ en la circunferencia $|z|=r$ y K es una constante positiva cualesquiera. En realidad para que el teorema de Milloux fuese totalmente válido seria necesario que la afirmación que acabamos de reproducir fuese validad incluso sustituyendo en la desigualdad (1) la expresion $r(1+\varepsilon)$ por $r^{1+\varepsilon}$, pero dejando aparte este pequeño error, que seria facil de corregir voy a demostrar un teorema que permite afirmar la existencia de una clase de funciones enteras para las cuales la desigualdad (1) se cumple para todos los valores de $r > r^*(\varepsilon, f)$ donde r^* depende unicamente de ε y de la función entera $f(z)$ (en consecuencia, con mayor motivo se cumplira la desigualdad deducida de la (1) mediante la sustitución señalada de $r(1+\varepsilon)$ por $r^{1+\varepsilon}$).

Dado que $\log r$ crece muy lentamente comparado con $M(r,f)$, basta demostrar la existencia de una clase de funciones enteras que para $r > r^*$ cumplen

(2) $$[M(r,f)]^{43/5} < \log\log M(r(1+\varepsilon), f)$$

En realidad demostrare la existencia de funciones enteras que cumplen desigualdades mucho mas restrictivas que la (2), a saber, demostrare el resultado siguiente.

TEOREMA.- Dada una función no decreciente $\psi(x)$ que tienda al infinito cuando $x \to \infty$, existe una función entera $f(z)$ tal que, cualquiera que sea $\varepsilon > 0$, para $r > r^*(\varepsilon, f)$, satisface a

$$M(r,f) < \psi[M(r(1+\varepsilon), f)]$$

Me interesa señalar que el crecimiento de ψ puede ser tan lento como se quiera, con la sola condición

$$\lim_{x=\infty} \psi(x) = \infty$$

La demostración de este teorema puede efectuarse como sigue

Sea $\{r_k\}$ la sucesión definida por $r_0 = 1$ y por

$$r_k = r_{k-1}\left(1 + \frac{1}{k}\right) \qquad (k \geq 1)$$

Ademas, a partir de la sucesión $\{n_k\}$, que de momento dejaremos indeterminada, definiremos la $\{R_k\}$ por las condiciones

$$R_0 = 1, \qquad R_k \leq R_{k+1} \qquad (k \geq 0)$$

y

$$R_{n_k+1} = \cdots = R_{n_{k+1}} = r_k\left(1+\frac{1}{2k+2}\right)$$

Por lo tanto, cualquiera que sea $\{n_k\}$ se cumplirá siempre $r_k > R_{n_k}$ y en consecuencia, podremos definir una sucesión $\{n_k\}$ tal que, si escribimos para simplificar las formulas

$$\varphi(K) = r_k^{n_k}/(R_0 R_1 \cdots R_{n_k})$$

cumpla las siguientes condiciones

$$n_0 = 0, \qquad [\varphi(K)]^2 < \Psi(\varphi(K+1))$$

Con estas definiciones podremos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{R_0 R_1 \cdots R_n}$$

evidentemente $f(z)$ es ~~la~~ una función entera. La definición de $\{r_k\}$ nos permite afirmar que dada $\varepsilon > 0$ para todo valor de r suficientemente grande existe al menos un valor de K que verifica

(3) $$r < r_k < r_{k+1} < r(1+\varepsilon/3)$$

escribiendo pues

$$\mu(r) = \max_{n \geq 0} [r^n/(R_0 R_1 \cdots R_n)]$$

deduciremos de (3) y de las definiciones anteriores

(4) $$[\mu(r)]^2 < \Psi[\mu(r(1+\varepsilon/3))]$$

Ahora bien, segun un resultado conocido (Valiron, Ann Sci. Ec.

Norm. Sup T. 37) suprimiendo una sucesion de intervalos en los cuales la variación de $\log r$ es finita, se verifica

$$M(r,f) < [\mu(r)]^2$$

Puesto que en los intervalos suprimidos la variación de $\log r$ es finita, si r es suficientemente grande existira siempre un valor r' no suprimiendo tal que

$$r < r' < r\left(1+\frac{\varepsilon}{3}\right)$$

y por lo tanto se cumplirá

$$M(r,f) < M(r',f) < [\mu(r')]^2 < [\mu(r(1+\varepsilon/3))]^2$$

recordando pues la (4), para $r > r^*(\varepsilon,f)$, tendremos

$$M(r,f) < [\mu(r(1+\varepsilon/3))]^2 < \psi[\mu(r(1+\varepsilon/3)^2)] <$$

$$< \psi[M(r(1+\varepsilon),f)]$$

o sea el teorema; en realidad ~~xxxxxx~~ para demostrar las ultimas desigual gualdades hemos supuesto que ε verifica

$$\left(1+\frac{\varepsilon}{3}\right)^2 < 1+\varepsilon$$

pero esta condición no restringe la generalidad de la demostración

Atentamente le saluda su s.s. y amigo

F Sunyer