Distinguido y querido amigo: Excuseme mi tardanza en contestar ~~a la sup~~ a su ~~carta~~ ~~pero~~ ~~su~~ esta tardanza ha sido debida en primer lugar a que en los primeros dias tuve que salir con mucha frecuencia y además a que tenía la convicción de que resultaría fácil demostrar la imposibilidad de la existencia de una función con las propiedades que a Vd le sugería y que iba dejándolo de un dia para otro

y luego al intentar
desarrollar la demostra-
ción vi que no era tan fácil que ~~solamente~~
~~era fallada cuando x~~
~~$\leq x/2$~~

ción vi que no ~~era~~ solo
no era tan fácil como
me parecía sino que
tan solo lograba
demostrarlo cuando
$x' < x/2$. Con todo creo
probable que con otra
~~demostración~~ pueda ~~lograr~~
~~o afirmarlo~~ método
pueda demostrarse
la imposibilidad men-
cionada incluso cuando
$x/2 \leq x' < x$ pero hasta
ahora no me ha sido
posible dar con dicho
método.

A continuación le expongo suscintamente la demostración que he obtenido cuando $\alpha \leq$ $\pi/2$, a fin de que Vd pueda comprobar si he comprendido correctamente las condiciones que debe cumplir la función que a Vd le interesa. Voy ~~a de~~ ~~petarlas~~ a indicarle las que utilizo para la demostración. Se trata de demostrar que no existe una función $f \in$ [illegible] holomorfa en el ángulo $|\varphi| < \alpha\frac{\pi}{2}$ y además

que en todo ángulo interior
se cumple uniformemente
$|f(t)| = O(|\cancel{\ } t^{-\delta}|)\ (\delta > 0)$ y
finalmente $\int^\infty f(t)\, t^n\, dt < \cancel{\ }\, \underline{\alpha' n}$
además como ~~habitualmente~~ es
habitual para ~~en~~ ~~el problema de~~
los momentos de Stieltjes supongo que $f(t)$ es positiva
en la totalidad del eje
real positivo.

Supongamos $\alpha' < \alpha'' < \alpha/2$
y sea $\beta = 1/\alpha''$ $t_n = (e\alpha'' n)^{\alpha''}$
y $t'_n = (\alpha'' n/e)^{\alpha''}$ entonces resulta
fácil demostrar que

$$\int_{t'_n}^{t_n} (e^{-t^\beta} - f(t))^+ t^n\, dt > K_n \int_{t'_n}^{t_n} e^{-t^\beta}\, dt$$

donde $\lim K_n > 0$ cuando $n \to \infty$
aplicando la desigualdad de
Schwarz resulta

$$\int_{t'_n}^{t_n} ((1 - f(t)e^{t^\beta})^+ \cancel{dt})^2\, dt > K'_n\, t_n^{1-\beta/2}$$

donde $\lim K'_n = K > 0$. Esto demuestra que la desigualdad

$$f(t) < e^{-t^{\beta}}$$

se cumple entre t'_n y t_n en una sucesión de intervalos la suma de ~~cuyas longitudes~~ las longitudes de los cuales es superior a $K'_n t_n^{1-\beta/2}$. Sea $\alpha'' < \alpha_0/2 < \alpha/2$ y efectuemos la transformación

$$F(z) = f(z^{\alpha_0})$$

resulta que entre $z_n = t_n^{1/\alpha_0}$ y $z'_n = t_n'^{1/\alpha_0}$ la desigualdad

$$F(z) < e^{-z^{\alpha_0 \beta}}$$

se cumple en una sucesión de intervalos de longitud total superior a $K''_n z_n^{1-\alpha_0\beta/2}$

Sea C_n el círculo centrado en un punto del eje real y que pase por z_n y z'_n y C'_n el círculo concéntrico al anterior y de radio la mitad aplicando un teorema de Milloux resulta que en el interior de C'_n se cumple

$\log|F(z)| < \cancel{\ldots} - K_n'' z^{\alpha_0 \beta/2}$

~~como la sucesión de los C_n ...~~

~~... ... ...~~

estas ~~c...~~ desigualdades junto con el hecho de que $F(z)$ es acotada en el semi-plano $|\arg z| < \pi/2$ permite demostrar ~~...~~ teniendo en cuenta que suponemos $\alpha_0 \beta > 2$ que

$$F(z) \equiv 0$$

lo cual demuestra la imposibilidad señalada

Comprendo que los ~~que~~ valores ~~que~~ de α' que a Vd le interesan ~~...~~ principalmente son los próximos a α de Mandelbrojt no puedo indicarle sobre estos nada con seguridad pero creo probable que tampoco exista para estos valores ninguna función con las propiedades señaladas

No poseo ~~las~~ dos últimas notas en los CR y me interesan