~~Distinguido y querido amigo;~~ El teorema de Titchmarsh escribiendo la conclusión

$\log f(re^{\theta i}) \sim (-1)^q e^{\rho\theta i} r^\rho \pi\lambda \operatorname{cosec}(\rho - q)$

donde q es el mayor entero inferior a ρ

puede generalizarse para cualquier orden finito ρ ~~excepto~~ no entero; para el caso del orden entero la formula se complica y ya no puede hablarse de una verdadera generalización. Para el orden infinito ~~como creo que en la conclusión del teorema a la [illegible] inferior conservar la existencia de un factor con las propiedades del $e^{i\rho\theta}$~~ no conozco ninguna generalización de este teorema. Tal vez mediante los resultados de Denjoy (Jour de Math T 6 serie 6 sobre todo los del capitulo primero y empleando quizá al mismo tiempo los de K L Hiong (Jour de Math T 14 serie 9) podria ~~intentarse~~ lograrse la generalización mencionada. De todos modos ~~Pero~~ lo creo muy improbable, sobre todo conservando un factor con las propiedades del $e^{\rho i}$ que figura en la conclusión del teorema de Titchmarsh, y me parece que unicamente se obtendria una acotación superior del crecimiento del producto canónico, producto que por otra parte no se halla completamente definido cuando el orden es infinito.

Comprendo que le horrorice meterse con la teoria de Blumenthal pues es ~~bastante~~ pesada al contrario del que desarrolla K N Hiong en la memoria citada mas arriba y cuyos resultados puede precisarse aun mas segun el fasciculo 89 del Memorial des Sci Math.

En cuanto a la comparación del orden de las series de Dirichlet

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{\lambda_n z} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |A_n| e^{|\lambda_n z|}$$

~~Ahora~~ cuando $\lambda_n \geq 0$ lo lógico es definir el orden como lo hace Ritt (Am Math Jour T. 50) y puesto que suponer $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ de densidad máxima ~~in~~finita Vd tiene razón en que serán del mismo orden ahora bien cuando los λ_n son reales pero tienen signos diferentes la primera serie crecerá lo mismo cuando $x \to +\infty$ que cuando $x \to -\infty$ (donde $z = x + iy$), por lo ~~tanto~~ creo conveniente modificar la definición del orden dada por Ritt en la siguiente forma. Sea

$$M(x) = \max\left[\operatorname*{extr}_{|y|<\infty} |f(x+iy)|, \operatorname*{extr}_{|y|<\infty} |f(-x+iy)|\right]$$

entonces el orden puede definirse por

$$\rho = \lim_{x \to +\infty} \frac{\log \log M(x)}{x}.$$

Con esta definición el orden de las dos series será el mismo: esto resulta fácilmente de los resultados de Ritt o bien de los de Sugimura (Math Zeits 29 pag 264) teniendo en cuenta que $\{\lambda_n\}$ tiene densidad máxima finita. Yo creo aunque que no lo he demostrado, que cuando los λ_n son números complejos es posible asimismo definir el orden de forma apropiada y de modo que las dos series continúen siendo del mismo orden.

Un abrazo de su buen amigo y colega

[illegible] San Juan 30 Junio 1953