Barcelona 3 noviembre de 1960

0439

INSTITUT D'ESTUDIS CATALANS MCMVII
UAB Biblioteca de Ciències i d'Enginyeries
fundació FERRAN SUNYER I BALAGUER

Prof. R. San Juan
Madrid

Querido San Juan:

Referente a lo que me ~~xxxx~~ habla en su carta fecha 24 pp. octubre, yo creo que cuando Katznelson dice "D'apres une generalisation du theoreme de Weierstrass", se refiere al resultado que afirma que dada una funcion $f(x)$ cuyas m primeras derivadas son continuas, y dado un $\varepsilon > 0$, es posible determinar un polimonio $P(x)$ tal que

$$\max_{|x|\leq 1} |f^{(k)}(x)-P^{(k)}(x)| \leq \varepsilon \quad \text{para } 0 \leq k \leq m,$$

pero como Vd. dice no es una verdadera generalización.

En cuanto a la demostración de la formula de la linea -3, para m=1 y para m=2, yo tampoco he podido encontrarlo, pero para $m \geq 3$, yo creo que puede demostrarse del siguiente modo: Sea $P(x)$ el polinomio de grado n-1 que da la mejor aproximación de $f^{(m)}(x)$ en el intervalo $[-1, 1]$, entonces se ve facilmente que es posible, integrando sucesivamente y eligiendo convenientemente las constantes de integración determinar un polinomio $Q(x)$ tal que

$$(1) \qquad \max_{|x|\leq 1} |f^{(k)}(x)-Q^{(k)}(x)| \leq \max_{|x|\leq 1} |f^{(m)}(x)-P^{(m)}(x)|/(m-k)! = B_n(f^{(m)})/(m-k)!$$

(yo supongo que $B_n(g)$ viene definida por

$$B_n(g) = \min_{p \in R} \max_{|x|\leq 1} |g(x)-p(x)|$$ R es el conjunto de los polinomios de grado inferior a n

pero no lo se seguro pues no he podido consultar la obra de Bernstein citada por Katznelson). Entonces de las desigualdades (1) se deduce inmediatamente, para $m \geq 3$,

$$E_{m+n}(f) \leq B_n(f^{(m)}) e^2 2^{-m} + 2^{-m} \leq B_n(f^{(m)}) + 2^{-m}.$$

Cuando m=0 la demostración es inmediata.

El fracaso de la demostración que le expongo para m=1 y m=2 tal vez es debido a que las desigualdades (1) pueden precisarse por un procedimiento que desconozco.

En relación al desarrollo de Runge yo creo que considerando la totalidad de las funciones holomorfas en un recinto, Vd. tiene razon de que es imposible elegir las α_n fijas, o por lo menos no veo como podria demostrarse la posibilidad de tal elección. Por el contrario cuando se toman en consideración unicamente las funciones holomorfas y acotadas en el recinto (no acotadas en conjunto, sino unicamente acotadas individualmente) es posible determinar una sola sucesión $\{\alpha_n\}$ que sea la misma para cada una de las funciones que consideramos.

Hoy he recibido el oficio dirigido a Corominas que hare llegar a su poder, no tenia la dirección, pero he telefoneado a su madre y me la ha

INSTITUT D'ESTUDIS CATALANS MCMVII
UAB
Biblioteca de Ciències i d'Enginyeries
fundació FERRAN SUNYER I BALAGUER

dado. Hoy mismo le escribire .

Cuando estuve en El Escorial Vd. me dijo el nombre del Academico que la Academia de Ciencias habia nombrado para los tribunales de la fundación March de este año. Como no lo recuerdo, mucho le agradeceria tuviera la amabilidad de indicármelo de nuevo.

El viaje de Madrid a Barcelona, via Valencia, lo hicimos felizmente La huerta valenciana nos encantó, por lo bien cuidada, y supongo que en primavera debe ser aun más bella.

Mis primas me encargan atentos saludos para Vd. Un fuerte abrazo de su buen amigo