Barcelona 4 Decembre 1945

Monsieur J. Hadamard

Paris

Monsieur,

Par une lettrè de mon cousin M. F. Carbona j'apprends, avec vive satisfaction, que votre extrême amabilité vous a conduit à vous offrir pour correspondre épistolairement avec moi sur mes recherches mathematiques afin de m'orienter.

Je me dois pas vous faire remarquer, l'intérêt que j'avais de recevoir une orientation, car ma formation, autodidactique fait quelle me soit plus nécessaire que pour tout autre personne: mais je ne pouvais espérer la resevoir d'une si grande autorite.

Suivant les indications de mon cousin, je vous exposerai le sujet de mes investigations actuelles et en même temps, je vous ferai conaître les resultats qui me paraissent les plus intéressants de ceux que j'ai obtenus.

Pour ne pas fatiguer votre attention avec une lettre interminable, je ne vous détaillerai pas les démonstrations, mais, si pour juger mes travaux, il vous est nécessaire de connaître mes démonstrations, j'attends de votre amabilite que vous voudrez bien me le comuniquer et alors je vous donnerai tous les détails.

Dans une Note aux Comptes Rendus T. I35 pag.I309-I3II.Année I902) vous avez indiqué l'existence d'une relation entre les lacunes des séries de Taylor qui représentent des fonctions entieres et leurs valeurs exceptionelles. Dans ce même ordre d'idées aprés avoir précisé le theorème IV du chapitre III d'un travail de m. G. Pólya (Unersuchungen uber Lucken und Singularitaten von Potenzreihen. Math. Zeit. B 29 pag.622) et un résultat de Wiman (Arkiv.for Math. B I pag.327) j'ai pu démontrer en employant ces précisions, les deux théoremes suivants

Théorème I: Soit

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{n_k}$$

une fonction entiere d'ordre entier ρ_0 et d'ordre précisé $\rho(r)$ et soit $D(1)$ la densite maxime de la suite des n_k. Si

$$1^{\circ}:\ D(1)<\frac{1}{\rho_0}$$

$$2^{\circ}:\ \lim_{r=\infty} \frac{r^{\rho_1(r)}}{r^{\rho(r)}}=0$$

où $\rho_1(r)$ est un nouvel ordre précisé, quelques soient les fonctions entières $f_0(z)$ et $f_1(z)$ d'ordre égal ou inferieur à $\rho_1(r)$ les zeros x_n de

$$f_0(z)\cdot F(z)-f_1(z)$$

satisfont à

$$\lim_{n=\infty} \frac{|x_n|}{V_1(n)}=0$$

ou $V_1(n)$ représente la fonction inverse de $r^{\rho_1(r)}$

C'est-à-dire, l'existence d'un ensemble de lacunes avec des propriétés déterminées fait disparaitre le cas exceptionnel possible quand l'ordre est entier.

Théoreme II: Soit

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{n_k}.$$

une fonction entiere d'ordre entier ρ_0 et d'ordreprécisé $\rho(r)$ Si

$$1^{\circ}:\ D(1)<\frac{1}{\rho_0}$$

$$2^{\circ}\ \lim_{r=\infty} \frac{\log M(r,F)}{r^{\rho(r)}}>b$$

quelques soient les deux fonctions entières $f_0(z)$ et $f_1(z)$ d'ordre inferieur à $\rho(z)$ les zéros x_n de

$$f_0(z)F(z)-f_1(z)$$

satisfont à

$$\overline{\lim_{n=\infty}}\frac{|x_n|}{V(n)}\leq b_1$$

où b_1 est indépendante de $f_0(z)$ et $f_1(z)$, et $V(n)$ représente la fonction inverse de $z^{\rho(z)}$

Maintenant en écrivant

$$D(0)=\overline{\lim_{K=\infty}}\frac{K}{n_K}$$

et utilisant, au lieu du résultat qui précise celui de M. Polya, un theoreme de M. Mandelbrojt (Series Lacunaires. théoreme fondamental chap. II pag. 13) on peut obtenir deux théoremes tout-à-fait semblables aux deux antérieurs, avec la seule difference que la condition première est substituée par

$$D(0)<\frac{A(\rho_0)}{\rho_0}$$

où

$$A(\rho_0)>\frac{1}{2},\quad \lim_{\rho_0=\infty}A(\rho_0)=A$$

donc la valeur de A est 0,6950......

Ces deux derniers théoremes ne sont pas des cas particuliers des deux antérieurs, ni inversement, car peuvent se présenter les deux cas suivants

$$1^{\circ}\qquad D(0)\leq\frac{A(\rho_0)}{\rho_0}\qquad D(1)>\frac{1}{\rho_0}$$

et

$$2^{\circ}\qquad D(0)>\frac{A(\rho_0)}{\rho_0}.\qquad D(1)\leq\frac{1}{\rho_0}$$

Les cas où les fonctions sont d'ordre infini rend nécessaires quelques definitions preliminaires.

Definissions alors $b(K)$ quand K est un entier, comme le maximum de $\frac{k+l}{n_{k+l}}$ lorsque l décrit la suite des nombre $0, 1, 2, \ldots$ jusqu'à l'infini et liniel entre deux valeurs entiers de k alors soit $K(x)$ la fonction définie par

$$2K(x) \log x = b(K(x))x$$

et finalement définissons la fonctions $b_1(x)$ qui nous intéresse par

$$b_1(x) = b(K(x))$$

De plus, je dois vous avertir que dans le théoreme qui suit quand je parle d'ordre je me rèffère aux ordres définis par M. K.L.Hiong (Sur les fonctions entieres et les fonctions meromorphes d'ordre infini Jour. Math. Série 9 T. IV 1935)

En utilisant le théoreme de M. Mandelbrojt cité anterieurement on peut démontrer le théoreme .

Théoreme III: Soit

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{n_k}$$

une fonction entière d'ordre $W(z)$. Si $b_1(x)$ satisfait à

$$b_1(x) < \frac{1}{x^{\beta}} \qquad (\beta > 0)$$

et si $W_0(z)$, $W_1(z)$ et $W_2(z)$ ordres respectifs de $f_0(z)$, $f_1(z)$ et $f_2(z)$ sont tels que

$$W_0(z) < [W(z)]^{\theta} \qquad \left(\theta < 1, \quad \theta < \frac{\beta}{1-\beta}\right)$$

$$W_i(z) < [W(z)]^{\theta'} \qquad (i = 1, 2 \qquad \theta' = 1)$$

il est impossible que soit satisfaite l'identité

$$f_0(z)F(z) - f_1(z) \equiv f_2(z)e^{\varphi(z)}$$

où $\varphi(z)$ est une fonction entière quelconque.

J'ai l'impression quant à la condition imposée a $b_1(x)$ dans le theoreme précédent, qu'il est possible qu'elle ne soit pas imposée par la question, et puise, par conséquent, être ameliore en employant une autre demonstration. J'ai tenté de l'obtenir en utilisant, au lieu des ordres de M. Hiong, une classe d'ordres qui decoulent d'un resultat de M. R. Nevanlinna (Bull.Sc.math.1931) mais jusqu'à présent mes tentatives ont échoué.

J'ai obtenue aussi, entre autres, des resultats semblables aux t théoremes de M. Landau et de M. Schottky, et un criterium de normalite, dans lequels l'idée commune est la substitution dans les théoremes anciennes d'une valeur exceptionele par un emsemble de lacunes avec des propriétés déterminées.

Dans l'attente de votre opinion dont je vous remercie à l'avance, recevez Monsieur, l'expression de mes sentiments les plus respectueux.

F. Sunyer i Balaguer, Calle Angel Guimera 3 pral. 2(Sarria) Barcelona
Espagne