Diumenge 1 de nov. de 1953

Amic Sunyer:

Defineixo el conjunt excepcional de punts on que $f(x)$ no és un polinomi de la mateixa manera que en la lletra anterior. Com deia, el conjunt P en qüestió és perfecte. Es tracta, doncs, de demostrar que és absurd suposar que el conjunt P tingui punts a l'interior de $[a, b]$.

Per començar constatem que cap derivada pot ésser totalment nula sobre cap tros de P. En efecte, si fos $f^{(k)}(x) = 0$ per $x \in \Delta \cap P$ aleshores tindriem $f^{(n)}(x) = 0$ per $n \geq k$ i $x \in \Delta \cap P$ i els polinomis contigus serien de grau $< k$, puix ~~tots~~ els extrems a_i d'intervals contigus verificarien $f^{(n)}(a_i) = 0$ per $n = k, k+1, \ldots$. Per tant, tant en els punts de Δ que pertanyen a P, com en els altres, tindriem

$$f^{(k)}(x) = 0 \quad \text{per} \quad x \in \Delta,$$

es a dir, $f(x)$ seria un polinomi en Δ, que per hipòtesi conté punts de P, d'on, contradicció.

Aquesta remarca ens permetia afirmar que existeix un $x_1 \in P$ tal que $f'(x_1) \neq 0$ i per tant

$$f'(x) \neq 0 \quad \text{per} \quad x \in \Delta_1$$

on Δ_1 conté al seu interior x_1.

Igualment podem trobar $x_2 \in \Delta_1 \cap P$ i $\Delta_2 \subset \Delta_1$, $x_2 \in \Delta_2$ de manera que

$$f''(x) \neq 0 \quad \text{per} \quad x \in \Delta_2$$

Prosseguint indefinidament el mateix raonament definirem una successió d'intervals encaixonats $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \cdots \supset \Delta_n \supset \cdots$ contenint sempre punts de P tals que

$$f^{(n)}(x) \neq 0 \quad \text{per} \quad x \in \Delta_n$$

i això implica l'existència ~~de~~ d'almenys un punt en el qual totes les derivades serien no nul·les, el que contradeix l'hipòtesi del teorema.

Això ens permet constatar que la suposició de que P contingui punts interiors a $[a, b)$ es contradictòria. Que és el que volíem demostrar.

Per a demostrar el mateix teorema per els quocients diferencials es tenen les següents armes que es dedueixen de la memoria de Denjoy:

1er Si una funció admet en tots els punts d'un segment quocients diferencials n-essims, aleshores per tot conjunt perfecte P n'existeix un tros on respect d'ell (exclusió de les $f(x)$ per a les x exteriors al conjunt) els $n-1$ primers quocients diferencials son continus.

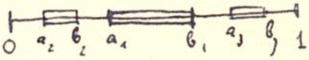
2ona En les mateixes hipòtesis, $f_n(x)$ és una derivada n-èssima ordinaria ~~en un~~ respecte de P en un ~~sub~~conjunt de P dens sobre P (tot punt de P és punt d'acumulació del subconjunt)

En aquestes armes s'hi pot afegir, segons la nostra tesi, que tots els teoremes de valor mig valen per els quocients diferencials, fins i tot, si en comptes de prendre f i f_n prenem f_p $(p < n)$ i f_n, malgrat que f_n no sigui ~~la derivada~~ el quocient diferencial d'ordre $n-p$ de f_p.

Jo, no obstant, per estendre el teorema al cas dels quocients diferencials només en valc de les dues proposicions 1^{a} i 2^{a}, prescindint dels teoremes del valor mig, els quals introdueixen o poden introduir punts exteriors a P, i compliquen. També hi faig intervenir l'estructura diferencial de P (de manera senzilla) i l'ordre de l'increment de la funció sobre els intervals contigus.

La demostració és complicada i la deixo en el tinter. Miraré de simplificar-la. Potser Vd. en trobarà un altre tenint en compte els resultats de Denjoy, que he compulsat totalment.

Si deia que si se suprimia la condició de que la funció fos infinitament derivable el teorema era fals.

El contra-exemple és el següent sigui P el conjunt de Cantor: 

. Definim $f(x)$ en P per la fòrmula $f(x) = (0 \sum_i x)(b_i - a_i)^2$ on $(0 \Sigma x)$ indica que la sumació inclou a tots els $(b_i - a_i)^2$ corresponents a tots els intervals que caen entre 0 i x. Aleshores es veu que la derivada en els punts de P respecte de P es sempre nula. Si aleshores completem la definició de f en els contigus fent

$$f(x) = f(a_i) + (b_i - a_i)^2 \left[- \frac{2(x-a_i)^3}{(b_i-a_i)^3} + 3\,\frac{(x-a_i)^2}{(b_i-a_i)^2} \right]$$

per $x \in [a_i, b_i]$ $i = 1, 2, \cdots$, aleshores és fàcil veure que $f(x)$ segueix essent derivable en els punts de P respecte del continu $[0,1]$. De manera que per $x \in [0,1]$ tenim

$$f'(x) = 0 \text{ per } x \in P \quad i \quad f^{IV}(x) = 0 \text{ per } x \notin P.$$

, es a dir, en cada punt hi ha una derivada nula i, no obstant, la funció $f(x)$ no és evidentment un polinomi. Cal afegir, però, que en els punts de P no existeixen sempre les derivades fins a l'ordre 4.

Això suggereix el teorema: Si $f(x)$ ~~es derivable~~ admet n derivades en cada punt i en cada punt n'hi ha almenys una de nula, $f(x)$ és un polinomi de grau $< n$.

El teorema es demostra si fa o no fa de la mateixa manera. Els punts de O son aleshores els punts que en tot un entorn f és un polinomi de grau $< n$. El demés consisteix en seguir la mateixa demostració.

El teorema fals de què parlava és el següent

Si per cada $x \in [a, b]$ existeix $n = n(x)$ tal que $f^{(n)}(x) \geq 0$ aleshores existeix un n_0 tal que per tot $x \in [a, b]$ i $\underline{\underline{\text{tot } n \geq n_0}}$ es té:

$$f^{(n)}(x) \geq 0 .$$

Si fem $f(x) = ex - e^x$ per $0 = a \leq x \leq b < 1$ aleshores hi ha sempre una derivada positiva en cada punt, la primera, mentre totes les altres son negatives. El teorema, doncs, és absolutament fals, descaradament fals.

Em sembla, però, que s'haurien de seguir analitzant les possibles generalitzacions.

Us saluda cordialment el vostre bon amic

Ernest Corominas

P.S. Si substituim la ~~relació~~ condició $n \geq n_0$ per $n = n_0$, el teorema canvia molt i segueix essent una generalització del teorema demostrat. Jo m'inclino a creure que es cert.

Diumenge

Amic Sunyer:

Definicions: Per cada x de $[a,b]$ sigui $n(x)$ tal que $f^{(n(x))}(x) \neq 0$ i $f^{(m)}(x) = 0$ per tot $m > n(x)$.

Hipòtesi $n(x)$ es finita per cada x de $[a,b]$.

Direm que $f(x)$ és un polinomi en el punt x quan $f(x)$ és un polinomi en un entorn de x.

Evidentment si $f(x)$ es un polinomi en un punt de x també ho és en tots els punts d'un cert entorn. De manera que el conjunt O de tots els punts de l'interval (a,b) $(a < x < b)$ en els quals $f(x)$ és un polinomi és un conjunt obert. No cal dir que si $f(x)$ continua és un polinomi en cada un dels punts d'un interval, $f(x)$ és un polinomi en el segment corresponent (segment = interval + extrems).

Ens proposem demostrar per reducció a l'absurd que O, que a priori pot ésser vuit, coincideix amb l'interval (a,b).

Suposem, doncs, que $O \neq (a,b)$.

Demostrem, ara, que en algun tros del complementari F' de O, $n(x)$ es afitada. Entenem per tros una part no vuida de F' conjunt de tots els elements de F' que pertanyen a un segment.

Si un tros de F' té un sol element, $n(x)$ hi és afitada, car $n(x)$ queda circumscrita a un sol i únic valor de x. ~~En aquest cas~~ De manera que si

F té punts isolats, n'hi ha prou de prendre un tros de F' que contingui un sol ~~de~~ punt per a que $n(x)$ hi sigui afitada. Deixem aquest cas banal, es a dir, estudiem el cas en que F' no conté punts isolats (conjunt perfecte).

Suposem, ara, que el conjunt perfecte F no contingui cap tros on $n(x)$ hi sigui afitada. Aleshores en qualsevol tros de F' ~~hi~~ podem elegir un x tal que $n(x) > k$, i això val per qualsevol $k > 0$. Aquesta remarca ens permetrà fer els infinits raonaments següents:

Prenem un x, x_1, de F' ~~interior~~ a $[a, b]$ tal que $n(x_1) > 0$. Per la definició de $n(x_1)$ sabem que $f^{(n(x_1))}(x_1) \neq 0$. Prenem aleshores un tros $\Delta_1 F'$ de F', contenint en el seu interior a x_1, i suficientment petit a fi i efecte de que la variació de~~l~~ la funció ~~sigui prou pet~~ contínua $f^{(n(x_1))}(x)$ sigui ~~prou petita per a~~ inferior a $|f^{(n(x_1))}(x_1)|$, es a dir, tal que $f^{(n(x_1))}(x) \neq 0$ per tot $x \in \Delta_2 F'$. Per a l'anterior remarca podem elegir $x_2 \in \Delta_1 F'$ tal que $n(x_2) > n(x_1)$ (fem $k = n(x_1)$) i després elegir un tros $\Delta_2 F'$ de $\Delta_1 F'$ a l'interior del qual hi hagi x_2 (de la mateixa manera que abans) tal que $f^{(n(x_2))}(x) \neq 0$ per $x \in \Delta_2 F'$. Repetint aquest raonament indefinidament tindrem

$$f^{(n(x_i))}(x) \neq 0 \quad \text{per tot } x \in \Delta_i F'$$

~~essent~~ on

$$F' \supset \Delta_1 F' \supset \Delta_2 F' \supset \dots \supset \Delta_i F' \supset \dots$$

pel fet d'ésser perfectes i encaixonats inclouen, almenys, un x_0, pel qual doncs tenim

$$f^{(n(x_i))}(x_0) \neq 0 \qquad i = 1, 2, \ldots$$

i

$$n(x_1) < n(x_2) < \cdots < n(x_i) < \cdots$$

el que implica

$$n(x_0) = \infty$$

contra el que hem suposat. És absurd, doncs, suposar que no hi ~~hauria~~ hagi almenys un tros de F' on $n(x)$ sigui afitada.

Una altra remarca ens permetrà acabar el raonament. Si a_i es extrem ~~de segment~~ d'un interval contigu a un tros de F' ~~on $n(x)$ es~~, $n(a_i)$ dona precisament el grau del polinomi, que és $f(x)$ en (a_i, b_i). Per tant si $n(x)$ és afitada en ~~tots els punts~~ en un tros $\Delta F'$ de F' els graus dels polinomis contigus admeten la mateixa fita. Per tant si c i d son els extrems de $\Delta F'$ (poden ésser extranys a $\Delta F'$) aleshores $n(x)$ es afitada en tot el segment $[c, d]$, es a dir, existeix un ordre ν de derivació (qualsevol nombre superior a la fita) per al qual $f^{(\nu)}(x) = 0$ en $[c, d]$. En altres paraules, $f(x)$ és un polinomi en tot el segment $[c, d]$.

Si, per tant, F' conté altres elements, ademés de a i b aleshores podrem ~~donar~~ un tros no buit $\Delta F'$ de F

en el qual $u(x)$ es afitada i on el interior dels extrems de ΔF_q f serà un polinomi. Es a dir f serà un polinomi en punts de F', el que contradeix la definició de F'. Queda, doncs, demostrat que f és un polinomi únic en $[a, b]$.

– – – – –

I els quocients diferencials? C'est toute une autre histoire, mon vieux! No veig pas com es pot demostrar. No obstant hi ha molts recursos a emprar abans de poguer dir res. Em sembla, però, que la cosa és complicada, car la peça mestra de l'anterior demostració és la continuïtat universal de les derivades ordinàries. Els recursos senzills fallen en bloc.

La generalització que sembla més que probable és la següent: Si per cada x_0 de $[a,b]$ es pot donar $P_{x_0}(x)$ (polin.) tal que ~~per cada x_0~~

$$f(x) - P_{x_0}(x) = o\left[(x-x_0)^n\right] \qquad x \to x_0$$

per a qualsevol n, aleshores $P_{x_0}(x)$ es independent de x_0 i $f(x)$ coincideix amb el polinomi únic $P_{x_0}(x)$.

La demostració que us dono és evidentment no transfinita, com calia esperar.

Records de la vostra mare. Una forta encaixada del vostre

Ernest Corominas