Definicions i Notacions: P designa un conjunt ~~de se~~ perfecte de diàmetre $\delta(P)$ que té per intervals contigus els intervals $[a_j, b_j]$ $(j=1,2,\dots)$. P_1 designarà el conjunt dels punts de regió especial de P ($=P$ menys els punts a_j, b_j) i O el complementari de P.

Sigui $j(x)=\infty$ per $x\in P_1$ i $j(x)=j$ per $x\notin P_1$ on j es tal que $x\in[a_j,b_j]$. Sigui $j_n(x)=j(x)$ quan $j(x)<n$ i $j_n(x)=n$ quan $j(x)\geq n$.

Sigui $p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x), \dots$ una successió de polinomis tals que $p_1(x)\not\equiv p_2(x)$ ~~definits~~ i tals que verifiquin la següent condició recurrent sobre n:

(1) $$\left|p_{n+1}^{(r)}(x)-p_{j_n(x)}^{(r)}(x)\right|<\varepsilon_{n+1} \quad \text{per } x\in\delta(P) \text{ i } r=0,1,\dots,n-1$$

(2) $$p_{n+1}^{(r)}(a_j)=p_{j_n(x)}^{(r)}(a_j)$$
$$p_{n+1}^{(r)}(b_j)=p_{j_n(x)}^{(r)}(b_j) \qquad \text{per } j=1,2,\dots,n-1,\ r=0,1,\dots,n$$

essent els ε_{n+1} nombres positius tals que

(3) $$\sum \varepsilon_n<\infty$$

Les condicions (2) permeten afirmar que la funció ~~p_{n+1}~~ $p_{j_{n+1}}(x)$, que està formada per trossos dels polinomis $p_1(x), p_2(x), \dots p_{n+1}(x)$ amb els punts de jintura a_j, b_j $j=1,\dots,n$, té derivades fins a l'ordre n. Per recurrencia ~~que~~ de les condicions (2) queda demostrat que les funcions $p_{j_n(x)}(x)$ tenen derivades fins a l'ordre $n-1$, ~~sigui~~ essent n arbitrari.

Per el lema demostrat sabem aleshores que un cop

fixats els polinomis $p_1, \dots, p_n$ i per tant $p_{j_n(x)}(x)$ existeixen sempre polinomis $p_{n+1}(x)$ que verifiquen simultaniament les condicions (1) i (2).

Tota successió definida de la manera precedent ~~com~~ i totes les seves successions de derivades convergeixen uniformement en $\delta(P)$.

En efecte, per tota parella ε, i es pot definir $n_i(\varepsilon)$ tal que

(4) $$\sum_{m > n_i(\varepsilon)} \varepsilon_m < \varepsilon$$

(5) $$n_i(\varepsilon) > i$$

Aleshores donat ε es verifica

$$|p_s^{(i)}(x) - p_t^{(i)}(x)| < \varepsilon \quad \text{per tot } s > t > n_i(x) \text{ i per tot } x \in \delta(P)$$

En efecte si $x \in P_1$ de (1) es segueix

$$|p_s^{(i)}(x) - p_t^{(i)}(x)| \leq \sum_{m=t}^{s-1} |p_{m+1}^{(i)} - p_m^{(i)}| < \sum_{m=t}^{s-1} \varepsilon_m < \sum_{m=t}^{\infty} \varepsilon_m$$

~~d'on~~ i per tant d'acord amb (4) i (5) tenim

$$|p_s^{(i)}(x) - p_t^{(i)}(x)| < \varepsilon$$

puix ~~n_i~~ $t > n_i(x)$.

Per altra part si $x \notin P_1$ i $x \in \delta(P)$ aleshores per cada ~~x~~ existeix un j tal que $x \in [a_j, b_j]$ i d'acord amb (1), (4) (5) i $s > t > n_i(x)$ tindrem

$$|p_s^{(i)}(x) - p_t^{(i)}(x)| < |p_s^{(i)}(x) - p_j^{(i)}(x)| + |p_t^{(i)} - p_j^{(i)}| < \varepsilon_s + \varepsilon_t < \varepsilon$$

Queden, doncs, demostrades les convergencies uniformes.

Per últim per ~~m~~ $x \in [a_j, b_j]$ i $n > j$ segons (2) tenim

$$|p_n(x) - p_j(x)| < \varepsilon_n \text{, es a dir, } \lim_{n \to \infty} p_n(x) = p_j(x)$$

de manera que $\lim p_n(x)$ és infinitament derivable en $\delta(P)$ i és un polinomi en els punts de δ que varía amb els intervals contigus Q.V.D.