0009
UAB Biblioteca de Ciències i d'Enginyeries
Fundació FERRAN SUNYER I BALAGUER

Barcelona 16, 6, 99

Monsieur Emile Picard

Secrétaire perpétuel de l'Academie des Sciences

Quai Conti 25

Paris VIe

Monsieur: Je vous envoie ci-joint une correction d'une démonstration d'un corollaire, qui se trouve dans le "Cours d'Algèbre Supérieure" de Monsieur Serret.

Ce qui m'a décidé a vous envoyer cette correction c'est seulement le fait que ce corollaire sert à démontrer (tant dans la démonstration qu'a donné Monsieur Bertrand, que dans celles de Monsieur Serret et de Monsieur Cauchy) l'improtant théorème de Monsieur Bertrand, sur l'indice (quand cet indice est superieur a 2) des systèmes de substitutions conjugées.

Si vous jugez cette correction suffisamment intéressante pour etre publié dans le "Bulletin des Sciences Mathématiques"; sa publication dans cette importante Revue serait, pour moi, une grande satisfaction. Mais si pour un motif quelconque, vous ne le jugez pas publiable ou si vous preferez lui donner un autre emploi je vous serai infiniment reconnaissant, d'avoir l'extrême amabilité de me faire savoir votre opinion, qui pour moi, aura une valeur extraordinaire.

Je suis un simple étudiant passionné pour l'étude des mathématiques et j'ai por vous la plus profonde et respectueuse admiration, et pour tant, votre opinion me serait très précieuse et d'un grand profit en même temps qu'un grand honneur.

Espèrant que vous ne me refuserez pas cette suplique.

Daignez accepter Monsieur avec mes remerciements anticipés l'assurance de ma considération la plus respectueuse à la par qu'admirative.

F. Suñer i Balaguer

Mon adresse est: F. Suñer i Balaguer
Carrer Angel Guimerá num.3 pral 2a
Barcelona (Espagne)

0009
UAB Biblioteca de Ciències i d'Enginyeries
Fundació FERRAN SUNYER I BALAGUER

N O T E

Correction d'ume demonstration d'un corollaire de la théorie des groupes de substitutions

Dans la 7 édition (je ne sais si elle existe dans d'autres éditions) du "Cours d'Algebre Superieure" de Monsieur Serret (Tome 2) et au Nº 44I j'ai répère une incorrection .

Voici le contenu du Nº en question

" THÉORÈME X. Si un système de substitutions conjuguées relatif à n lettres ne renferme pas toutes les substitutions circulaires du troisième ordre formées avec n-I lettres, mais qu'il contienne toutes celles que l'on peut former avec n-2 des lettres données, les substitutions du système qui déplacent les deux autres lettres ne peuvent que les échanger entre elles. Le nombre n est supposé supérieur à 4."

Soient

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-3}, b_0, b_1$$

les n lettres données, G le système que l'on considère, et G' le système conjugué formé par celles des substitutions de G qui ne déplacent aucune des lettres b_0, b_1; par hypothèse le système G renferme toutes les substitutions circulaires du troisième ordre que l'on peut former avec les n-2 lettres a. Désignons par T une substitution de G qui n'appartienne pas à G' et qui n'échange pas entre elles les lettres b_0 et b_1.

" Si T déplace b_0 pour la substituer à a_1 et qu'elle ne déplace pas b_1 ou que, déplaçant b_1, elle la substitue à b_0, soient a_1 et a_2 les deux lettres qui seront remplacées par deux lettres quelconques données, a_i, a_j; comme la substitution $U=(a_1, a_2, a_3)$ appartient à G, il en est de même de $TUT^{-1}=(b_0, a_i, a_j)$ donc le système G renferme toutes les substitutions circulaires du troisième ordre qu'on peut former avec n-I des lettres données, ce qui est contre l'hypothèse."

"Si T substitue b_0 et b_1 à a_0 et a_1, a_2 à a_i, la substitution $U=(a_0, a_1, a_2)$ appartenant à G, il en sera de même de $TUT^{-1}=(b_0, b_1, a_i)$. Or cette dernière substitution remplace a_i par b_0, et b_0 par b_1; on rentre donc dans le cas précédent, qui est incompatible avec notre hypothèse, comme on vient de le voir."

"Il résulte de là que la substitution T ne peut qu'échanger les lettres b_0, b_1 entre elles; elle sera donc de la forme $T=(b_0, b_1)\,S$, S étant une substitution de G'. On voit aussi que le système G s'obtiendra en multipliant entre eux le système G' et le système formé de deux substitutions I, (b_0, b_1). En conséquence, l'ordre du système G et double de l'ordre du système G'."

"REMARQUE.- La démonstration précédente exige que le nombre des lettres a soient au moins égales 3, et que l'on ait en conséquence n 4. Le théorème ne subsiste pas pour n=4."

"COROLLAIRE.- Si un système de substitutions conjuguées relatif à n lettres renferme les.

$$I.2.3\ldots(n-2)\,\frac{N}{n(n-I)}$$

substitutions formées avec n -2 des lettres données, mais qu'il ne renferme pas toutes celles quón peut former avec n-I lettres, son ordre sera égal au quotient de N par l'un des deux nombres $\frac{n(n-I)}{2}$, $n(n-I)$. Si le système ren-

FERME

0009
UAB Biblioteca de Ciències i d'Enginyeries
FONS FERRAN SUÑER I BALAGUER

ferme seulement les $\frac{N}{2n(n-1)}$ substitutions du premier genre formées avec n-2 lettres, mais qu'il ne contienne pas toutes celles que l'on peut former avec n-I lettres, son ordre sera égal au quotient de N par l'un des deux nombres n(n-I), 2n(n-I)."

"En effet, par hypothése, l'ordre de G' est $\frac{N}{n(n-1)}$ ou $\frac{N}{2n(n-1)}$; et le même nombre exprimera l'ordre de G, si ce système n'a que les seules substitutions de G'. Dans le cas contraire, toute substitution de G qui n'appartient pas à G' déplace circulairement les deux lettres non contenues dans G', car autrement G posséderait toutes les substitutions circulaires du troisième ordre qu'on peut former avec n-I lettres, et cela est contre l'hypothèse. Alors, d'après le théorème précédent, l'ordre de G est double de l'ordre de G'."

Jusqu'a la fin de la démonstration stricte du théoreme tout est correct mais à continuation quand il affirme que " S est une substitution de G' etc." il se trompe.

Pour le voir et donner une démonstration correcte nous commencerons par remarquer, que le système G' qui contient toutes les substitutions circulaires de troisième ordre que l'on peut former avec les n-2 lettres $a_0, a_1, \ldots, a_{n-3}$, sera, d'après un théoreme bien connu de la théorie des substitutions, composé de toutes les substitutions formées avec ces n-2 lettres (groupe symétrique) où bien des toutes ces mêmes substitutions qui sont du premier genre (groupe altérne). Dans le premier cas l'affirmation de que S est une substitution de G' est evidente, mais dans le second cas, cette affirmation peut être erronée.

En effet, soient I, U_1, U_2, ..., U_k $(k=\frac{(n-2)!}{2})$ les substitutions de G'. Toutes ces substitutions sont du premier genre, selon l'hypothèse.

Soient aussi $(b_0, b_1,)S_1, (b_0, b_1)S_2, \ldots, (b_0, b_1)S_l$ les substitutions restantes de G.

Les S contiennent où bien une substitution du second, genre et il est aisé, en ce cas, de demontrer qu'elles, pour que G soit un système de substitutions conjuguées, doivent les contenir toutes, où bien elles n'en contienent aucune.

Dans le premier cas les S ne peuvent contenir aucune substitution du premier genre, puisque si S_1 en est et $S_2, S_3, \ldots, S_{k+1}$ sont les k substitutions du second genre, les produits de $(b_0, b_1,)S_1$ par chacune des substitutions $(b_0, b_1)S_2, \ldots, (b_0, b_1)S_{k+1}$ seront les k substitutions du second genre des n-2 lettre a_0, ~~a~~ et par conséquent G' contiendra toutes les substitutions du second genre de ces n-2 lettres ce qui est contre l'hypothése.

Dans le deuxième cas les S seront les k substitutions du premier genre, comune il est facile de demontrer; de plus, dans ce second cas, l'affirmation de M. Serret est juste, mais, dans le premier cette affirmation est fausse,

Dans tous les cas ques nous avons étudié (y compris le cas où G' contient toutes, les substitutions formées avec les n-2 lettres a_0, ~~a~~) l'ordre du système G est double (s'il contient d'autres substitutions de celles de G') de l'ordre de G'; et par conséquent, comme il ne peuvent pas se présenter d'autres cas, le corollaire est encore demontré.

F. Suñer i Balaguer.

Note:
Moyennant la notion de groupe intransitif il est très facile aussi de donner une démonstration correcte de ce corollaire. Mais pour signaler l'erreur cité il m'a paru plus avantageuse la démonstration que j'ai donné.

INSTITUT D'ESTUDIS CATALANS
UAB Biblioteca de Ciències i d'Enginyeries
fundació FERRÀN SUNYER I BALAGUER

0009

Barcelona 16 / 6/ 1934.

Monsieur Emile Picard
Secrétaire perpétuel de l'Academie
des Sciences
Quai Conti, 25
Paris VIº

Monsieur: Je vous envoie ci-joint une correction d'une démonstration d'un corollaire, qui se trouve dans le "Cours d'Algebre Supérieure" de Monsieur Serret.

Ce qui m'a décide a vous envoyer cette correction c'est seulement le fait que ce corollaire sert a démontrer (tant dans la dèmonstration qu'a donné Monsieur Bertrand, que dans celles de Monsieur Serret et de Monsieur Cauchy) l'important théorème de Monsieur Bertrand, sur l'indice (quand cet indice est superieur a 2) des systèmes de substitutions conjugées.

Si vous jugez cette correction suffisamment interéssante pour etre publié dans le "Bulletin des Sciences Mathématiques"; sa publication dans cette importante Revue serait, pour moi, une grandé satisfaction. Mais si pour un motif quelconque, vous ne le jugez pas publiable ou si vous preferez lui donner un autre emploi je vous serai infiniment reconnaissant, d'avoir l'estreme amabilité de me faire savoir votre opinion, qui pour moi, aura une valeur extraordinaire.

Je suis un simplé étudiant passionné pour l'étude des mathématiques et j'ai pour vous la plus profonde et respectueuse admiration, et pour tant, votre opinion me serait très précieuse et d'un grand profit en meme temps qu'un grand honneur.

Esperant que vous ne me refuserez pas cette suplique.

Daignez accepter Monsieur avec mes remerciements anticipés l'assurance de ma considération la plus respectueuse à la par qu'admirative.

Mon adresse est: F. Suñer i Balaguer
Carrer Angel Guimerà núm. 3 pral.2ª
Barcelona (Espagne)

0009
UAB Biblioteca de Ciències i d'Enginyeries
fundació FERRAN SUNYER I BALAGUER

N O T E

Correction d'une demonstration d'un corollaire de la théorie des groupes de substitutions

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

Dans la 7 édition (je ne sais si elle existe dans d'autres éditions) ou "Cours d'Algebre Superieure" de Monsieur Serret (Tome 2) et au Nº 441 je répère une incorrectiona.

Voici le contenue du Nº en question

"THEOREME X.- Si un système de substitutions conjugées relatif à n lettres ne referme pas toutes les substitutions circulaires du troisième ordre formées avec $n-1$ lettres, mais qu'il contienne toutes celles que l'on peut former avec $n-2$ des lettres données, les substitutions du système qui deplacent les deux autres lettres ne peuvent que les échanger entre elles. Le nombre n est supposé supérieur à 4.

Soient

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-3}, b_0, b_1$$

les n lettres données, $\mathcal{G}$ les système que l'on considère, et $\mathcal{G}'$ le système conjugué formé par celles des substitutions de $\mathcal{G}$ qui ne deplacent aucune des lettres b_0, b_1; par hypothèse le système $\mathcal{G}$ referme toutes les substitutions circulaires du troisième ordre que l'on peut former avec les $n-2$ lettres a Désignons par T une substitution de $\mathcal{G}$ qui n'apartienne pas à $\mathcal{G}'$ et qui n'achange pas entre elles les lettres b_0 et b_1.

" Si T déplace b_0 pour la substituer à a_1 et qu'elle ne déplace pas b_1 ou que, deplaçant b_1 elle la substitue à b_0, soint a_2 et a_3 les deux lettres qui seront remplacées par deux lettres quelconques données, $a_i\, a_j$; comme la substitution $\mathcal{U}=(a_1, a_2, a_3)$ appartient à $\mathcal{G}$ il en est de même de $T\mathcal{U}T^{-1}=(b_0, a_i, a_j)$ donc le système $\mathcal{G}$ referme toutes les substitutions circulaires du troisieme ordre qu'on peut former avec $n-1$ des lettres données, ce qui est contre l'hipothèse".

" Si T substitue b_0 et b_1 à a_0 et a_1, a_2 à a_i, la substitutions $\mathcal{U}=(a_0, a_1, a_2)$ appartenant à $\mathcal{G}$, il en sera de même de $T\mathcal{U}T^{-1}=(b_0, b_1, a_i)$ Or cette derniere substitution remplace a_i par b_0 et b_0 par b_1; on rentre donc dans les cas précèdent, qui est incompatible avec notre hipothése, comme on vient de le voir".

"Il resulte de là que la substitution T ne peut qu'eghanger les lettres $b_0\, b_1$ entre elles; elle sera donc de la forme $T=(b_0, b_1)S$, S étant une substitution de $\mathcal{G}'$ On voit aussi que le système $\mathcal{G}$ s'obtiendra en multipliant entre eux le système $\mathcal{G}'$ et le système formé de deux substitutions $1, (b_0, b_1)$ En conséquence, l'ordre du système $\mathcal{G}$ et double de l'ordre du système $\mathcal{G}'$.

"REMARQUE.- La demonstration precédante exige que le nombre de lettres a soint au moins égale a 3, et que l'on ait en conséquence $n>4$ Le théorème ne subsiste pas pour $n=4$

"COROLLAIRE.- Si un système de substitutions conjugées relatif à n lettres renferme les.

$$1.2.3\ldots(n-2)=\frac{N}{n(n-1)}$$

substitutions formées avec $n-2$ des lettres données, mais qu'il ne referme pas toutes celles qu'on peut former avec $n-1$ lettres, son ordre sera egal au quotient de N par l'un deux nombres $\frac{n(n-1)}{2}$, $n(n-1)$ Si le système referme seulement les $\frac{N}{2n(n-1)}$ substitutions du primer genre formées avec $n-2$ lettres mais qu'il ne contienne pas toutes celles que l'on paut former avec $n-1$ lettres son ordre sera egal au quontient de N par l'un de deux nombres $n(n-1)$, $2n(n-1)$.

"En effet, par hypothése, l'ordre de $\mathcal{G}'$ est $\frac{N}{n(n-1)}$ ou $\frac{N}{2n(n-1)}$ et le

0009

Biblioteca de Ciències

même nombre exprimera l'ordre de $\mathcal{G}$ si ce système n'a que les seules substitutions de $\mathcal{G}'$ Dans le cas contraire, toute substitutions de $\mathcal{G}$ qui n'apartient pas à $\mathcal{G}'$ déplace circulairement les deux lettres non contenues dans $\mathcal{G}'$ car autrement $\mathcal{G}$ posséderait toutes les substitutions circulaires du troisieme ordre qu'on peut former avec $n-1$ lettres, et cela est contre l'hypothèse. Alors d'après le thèoreme precedent, l'ordre de $\mathcal{G}$ et double de l'ordre de $\mathcal{G}'$

Jusqu'a la fin de la demonstration stricte du theorème tout est correcte mais à continuation quand il afirme que "S est une substitution de $\mathcal{G}'$ etc. il se trompe.

Pour le voir et donner une demonstration correcte nous commencerons par remarquer, que le système $\mathcal{G}'$ qui contient toutes les substitutions circulaires de troisième ordre que l'on peut former avec les $n-2$ lettres a sera, d'après un thèoreme bien connu de la theorie des substitutions composé de toutes les substitutions formées avec ces $n-2$ lettres (groupes symètriques) oú bien de toutes ces memes substitutions qui sont du premier genre (groupe altèrne). Dans le premier cas l'affirmation de que S est une substitution de $\mathcal{G}'$ est evidante, mais dans le second cas, cette afirmation paut etre erronée.

En effet, soient $1, 2b_1, 2b_2, \ldots\ldots 2b_K$ $(K = \frac{(n-2)!}{2})$ les substitutions de $\mathcal{G}'$. Toutes ces substitutions sont du premier genre, selon l'hypothèse.

Soient aussi $(b_0, b_1) S_1, (b_0, b_1) S_2, \ldots, (b_0, b_1) S_f$ les substitutions restantes de $\mathcal{G}$.

Les S contiennent où bien une substitution du second, genre et il est aise, en ce cas, de demontrer qu'elles, pour que $\mathcal{G}$ soit un système de substitutions conjuguées, doivent les contenir toutes où bien elles n'en contienent aucune.

Dans le premier cas les S ne peuvent contenir aucune substitution du premier genre, puisque si S_1 en est et $S_2 S_3, \ldots S_{K+1}$, sont les K substitutions du second genre les produits de $(b_0, b_1) S_1$ par chacun des substitutions $(b_0 b_1) S_2 \ldots (b_0 b_1) S_{K+1}$ seron les K substitutions de second genre des $n-2$ lettres a et par canséquent $\mathcal{G}'$ contiendra toutes les substitutions du second genre de ces $n-2$ lettrescce qui est contre l'hypothèse.

Dans le deuxième cas les S seront les K substitutions du premier genre, comune il est facile de demontrer; de plus, dans ce second cas, l'afirmation de M. Serret est juste, mais, dans le premier cette afirmation est fausse,

Dans tous les cas ques nous avons etudiés (y compris le cas oú $\mathcal{G}'$ contient toutes, les substitutions formées avec les $n-2$ lettres a) l'ordre du système $\mathcal{G}$ est double (s'il contient d'autres substitutions de celles de $\mathcal{G}'$)) de l'ordre de $\mathcal{G}'$; et par consequent, comme el ne peuvent pas se présenter d'autres cas, les corollaires est ancore demontrer.

F. Suñer i Balaguer.

Note: Moyennant la notion de group intransitif il est très facile aussi de donner une demonstration correcte de ce corollaire. Mais pour signaler l'erreur cité il m'a parme plus avantageuse la demonstration que j'ai donne.