CONSEJO SUPERIOR DE INVESTIGACIONES CIENTIFICAS

INSTITUTO «JORGE JUAN» DE MATEMÁTICAS

EL DIRECTOR

SERRANO, 123 - MADRID

Querido Sunyer: Voy a preguntarle si Vd conoce una generalización, para orden infinito de un teorema de Titchmarsh (Theory of functions pag 271). También lo trae Pólya en los ejercicios de Análisis. Pero para ahorrarle tiempo le copio el teorema

Sea $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots \to +\infty$ y $n(r)$ el nº de las $\lambda_n \leq r$; $n(r) \sim \lambda r^\rho$ para $r \to +\infty$, siendo $\lambda > 0$ y $0 < \rho < 1$ constantes. Llamando

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{\lambda_n}\right)$$

es

$$\log f(re^{\theta i}) \sim e^{i\theta\rho} \frac{\pi\lambda}{\operatorname{sen}\pi\rho} r^\rho \qquad \text{para } r \to \infty,\ -\pi < \theta < \pi$$

Mi pregunta es si se conoce algún teorema análogo para funciones enteras de orden infinito; por ejemplo con $\lambda_n \sim \log n$. Me aterra meterme con la teoría de Blumenthal (monografía Borel) del ~~orde~~ género generalizado. Para $1 \leq \rho < 2$, ~~en que se~~ mas exactamente cuando basta un solo factor de convergencia e^{-z/λ_n}, subsiste el teorema; pero no se pasa naturalmente del orden finito mientras no se ponga en vez de ρ una $f(r) \to \infty$

Anoche le escribí y olvidé preguntarle por este teorema que hace tiempo necesito y hoy me vuelve a aparecer. Quizá Vd este cansado de saberlo dados sus conocimientos profundos de funciones enteras.

Un abrazo de su colega y amigo

Ricardo San Juan

Otra cuestión: si $\{\lambda_n\}$ tiene densidad máxima finita ¿son del mismo orden las funciones enteras $\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{\lambda_n z}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} |A_n| e^{|\lambda_n||z|}$? Creo que sí al menos para $\lambda_n \geq 0$