E C U A C I O N E S   E N T R E   D E R I V A D A S

P A R C I A L E S   D E   P R I M E R   O R D E N

1.- Ecuaciones lineales.- La integración de una ecuación lineal homogénea

(1)

en la que .... dependen solamente de las variables ..... se reconduce inmediatamente a la integración del sistema diferencial

(2)

pues sabido que toda solución: = (......) de (1) es una integral primera de (2) y recipocramente: Conocidas n-1 integrales primeras de (2) ..... . la solución general de (1) será:

donde es una función arbitraria.

Consideremos ahora una ecuación lineal de tipo general:

(3)

donde las dependen de las variables y de la función z . Para reducir esta ecuacional tipo anterior emplearemos un método general que permite reducir toda ecuación de primer orden a otra de orden que no contiene la función z . Tomemos, para mayor generalidad, la ecuación:

(4)

y sea:

(5)

una ecuación total que la función implícita (.....) por ella definida sea solución de (4). Por satisfacer a (5) esta función implícita, sus derivadas vendrán dadas por:

y por haber supuesto que satisfacía también a (4)

(6)

que unida a la

nos da las dos relaciones a que tiene que satisfacer la z . De aquí se deduce que todas las soluciones

El plano tangente a una superficie integral S en el punto x,y,z, tiene por ecuación:

La ecuación (7) expresa que este plano debe pasar por la recta

de forma que el problema de la integración de (7) puede expresarse geométricamente:

A todo punto (x,y,z,) se la hace corresponder la recta (8); se trata de hallar las superficies tales que el plano tangente en un punto N pase por la recta (8) correspondiente al punto N.

Consideremos las lineas L del espacio que sean tangentes en cada uno de sus puntos a las rectas (8); llamaremos a estas líneas curvas características. Toda superficie integral S está formada por un sistema simplemente infinito de características: en efecto, en cada punto N de la superficie está, en el plano tangente, la recta (8) correspondiente. Podemos,pue determinar las curvas de la superficie S que son tangentes en cada punto a la recta (8) ~~correspondiente~~ y estas curvas son características,es decir, tenemos S surcada por un haz de tales curvas. Reciprocamente toda superficie que esté engendrada por un haz de características stasiface a la condición geométrica exigida, y es, por tanto, una superficie integral.

Traduciendo analíticamente este procedimiento geométrico obtendremos el método de resolución antes expuesto: las ecuaciones diferenciales de las características serán:

y conocidas dos integrales primeras de este sistema las ecuaciones características vendran dadas por

(9)

donde son constantes arbitrarias. Un sistema simplemente infinito de características se obtendrá imponiendo una relación entre los parámetros

y la superficie engendrada por aquellas características se obtendrá eliminando los parámetros entre las relaciones (9), (10), obteniendo

de acuerdo con la teoría general antes expuesta.

El caso general de n variable sin dependientes es susceptible de una interpretación geométrica enteramente análoga en un hiperespacio de n - 1 dimensiones

Ejemplos: 1º.- Sea la ecuación

las ecuaciones diferenciales de las características serán

que admite las dos integrales primeras

que son haces de planos de aristas

de la primera de las ecuaciones (6) darán igualadas a cero soluciones de la ecuación (4). Pero la primera de (6) es una ecuación en que no figura la función ; obtendremos, pues, por cada solución de esta ecuación otra de la ecuación dad (4), que es lo que pretendíamos probar. Sin embargo hay que advertir que en el caso general, para hallar todas las soluciones de (4), hay que hallar todas las soluciones del sistema (6) y podrá suceder que exista alguna

tal que al imponer a z la segunda de las condiciones (6) quede staisfecha automaticamente sin ser la solución de la ecuación en derivadas parciales, por ella representada. Más precisamente; sustituyamos esta en (6)

y aunque no sea solución, es decir , puede ser que la z definida por la ecuación:

será solución a nuestro problema siempre que se anule como consecuencia de = . Así sucedería, por ejemplo, si hecho el cálculo resultase

En resumen:

Se obtienen soluciones de la ecuación igualando a cero las soluciones de la como ecuación de ; Para saber si así se han obtenido todas las soluciones se requiere un ulterior examen.

Apliquemos este resultado a la ecuación (3): las soluciones de la ecuación:

darán, igualadas a cero,

otras tantas soluciones de la ecuación primitiva (3). Aplicándole el método señalado al principio de este número, podemos afirmar:

Si ..... son integrales primeras distintas del sistema

toda función ( ) definida por la relación

(función arbitraria)

es una solución de la ecuación (3).

2.- <u>Interpretación geométrica</u>: Consideremos, para fijar ideas, el caso de dos variables independientes

(7)