

ORÚS : ASTRONOMÍA.2

u7  
✓

### 3. PROBLEMA DE LOS DOS CUERPOS

#### 3.1 Ecuación del movimiento relativo

Sean  $m_1$  y  $m_2$  las masas de dos puntos materiales y  $r$  la distancia entre ambos. Supondremos  $m_1 > m_2$  y llamaremos primario al punto de masa  $m_1$  y secundario al de masa  $m_2$ .

De acuerdo con la ley de la gravitación, el primario atrae al secundario, según la recta que los une, con una fuerza  $\underline{F}_1$  de módulo:

$$F_1 = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \quad (1)$$

siendo  $G$  la constante de la gravitación:  $G = 6,67 \cdot 10^{-8}$  c.g.s.

Introduciendo el vector  $\underline{r}$  de origen en  $m_1$  y extremo en  $m_2$ , la expresión vectorial de la fuerza  $\underline{F}_1$  es:

$$\underline{F}_1 = - G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^3} \underline{r} \quad (2)$$

Según el principio de acción y reacción, el primario es atraído por el secundario con una fuerza:

$$\underline{F}_2 = - \underline{F}_1 = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^3} \underline{r} \quad (3)$$

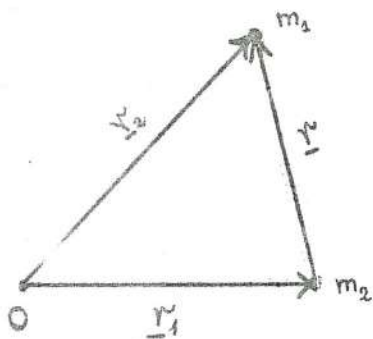


fig 1

Sean ahora  $\underline{r}_1$  y  $\underline{r}_2$  los vectores de posición del primario y del secundario, respectivamente, referidos a un sistema coordenado de origen  $O$ . (fig. 1), Se verifica la relación:

$$\underline{r} = \underline{r}_2 - \underline{r}_1 \quad (4)$$

Si sobre los puntos de masas  $m_2$  y  $m_1$  no actúan otras fuerzas que las mencionadas,

podemos escribir sus ecuaciones de movimiento en la forma:

$$m_2 \ddot{\underline{r}}_2 = -G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^3} \underline{r} \quad (5)$$

$$m_1 \ddot{\underline{r}}_1 = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^3} \underline{r}$$

Derivando dos veces en (4) y sustituyendo después los valores dados por (5) resulta:

$$\ddot{\underline{r}} = \ddot{\underline{r}}_2 - \ddot{\underline{r}}_1 = - \frac{G(m_1 + m_2)}{r^3} \underline{r}$$

o sea:

$$\ddot{\underline{r}} = - \frac{\mu}{r^3} \underline{r} \quad (6)$$

habiendo hecho, para simplificar:

$$\mu = G(m_1 + m_2) \quad (7)$$

La relación (6) es la ecuación del movimiento relativo del secundario con respecto al primario.

### 3.2 Integral de las áreas

Si designamos por  $\underline{v} = \dot{\underline{r}}$  la velocidad relativa del secundario, según (6):

$$\dot{\underline{v}} = \ddot{\underline{r}} = - \frac{\mu}{r^3} \underline{r} \quad (8)$$

y si calculamos  $\frac{d}{dt} (\underline{r} \wedge \underline{v})$ , teniendo en cuenta (8), obtenemos:

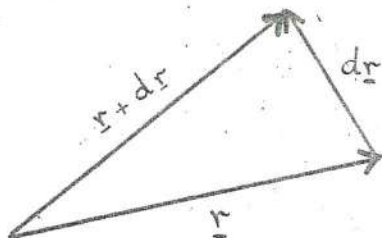
$$\frac{d}{dt} (\underline{r} \wedge \underline{v}) = \dot{\underline{r}} \wedge \underline{v} + \underline{r} \wedge \dot{\underline{v}} = - \frac{\mu}{r^3} \underline{r} \wedge \underline{r} = \underline{0}$$

Luego, integrando:

$$\underline{r} \wedge \underline{v} = \underline{c} \quad (9)$$

relación que constituye la integral de las áreas. La constante vectorial de integración  $\underline{c}$  es la constante de las áreas (equivale a tres constantes escalares).

El área del triángulo elemental de la fig.2 puede expresarse como módulo del vector:



$$d\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{r} \wedge d\vec{r}$$

Se define como velocidad areolar la derivada con respecto al tiempo del área barrida por el radio vector:

fig. 2

$$\dot{\vec{A}} = \frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{2} \vec{r} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{2} \vec{r} \wedge \vec{v} = \frac{1}{2} \vec{c} \quad (10)$$

lo que suministra una interpretación vectorial de la constante de las áreas:

$$\vec{c} = 2 \dot{\vec{A}}$$

o sea: la constante de las áreas es el doble de la velocidad areolar.

Integrando (10) se obtiene:

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{c} t + \vec{k} \quad (11)$$

que expresa la ley de las áreas: "las áreas barridas por el radio vector en tiempos iguales son iguales" (segunda ley de Kepler).

Multiplicando escalarmente por  $\vec{r}$  ambos miembros de (9), es:

$$\vec{c} \cdot \vec{r} = (\vec{r} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{r} = 0$$

Por tanto, el vector  $\vec{r}$  se mantiene perpendicular al vector constante  $\vec{c}$  y se mueve en el plano ortogonal a  $\vec{c}$  por el primario, luego: el secundario describe una órbita plana alrededor del primario.

### 3.3. Ecuación de la órbita relativa

Calculemos  $\frac{d}{dt} (\vec{v} \wedge \vec{c})$  teniendo en cuenta las relaciones (8) y

(9): recordando que  $\vec{c}$  es constante y utilizando además las igualdades  $r^2 = \vec{r} \cdot \vec{r}$

$$r \dot{r} = \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = \vec{r} \cdot \vec{v} :$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\underline{v} \wedge \underline{c}) &= \dot{\underline{v}} \wedge \underline{c} = - \frac{\mu}{r^3} \underline{r} \wedge (\underline{r} \wedge \underline{v}) = - \frac{\mu}{r^3} \left[ (\underline{r} \cdot \underline{v}) \underline{r} - (\underline{r} \cdot \underline{r}) \underline{v} \right] = \\ &= - \frac{\mu}{r^3} (\underline{r} \cdot \dot{\underline{r}} - r^2 \dot{v}) = \mu \frac{\underline{r} \cdot \underline{v} - \dot{r} r}{r^2} = \mu \frac{d}{dt} \left( \frac{\underline{r}}{r} \right) \end{aligned}$$

Integrando se obtiene:

$$\underline{v} \wedge \underline{c} = \frac{\mu}{r} \underline{r} + \mu \underline{e}$$

siendo  $\mu \underline{e}$  la constante vectorial de integración, es decir:

$$\underline{v} \wedge \underline{c} = \mu \left( \frac{1}{r} \underline{r} + \underline{e} \right) \quad (12)$$

Si ahora calculamos  $c^2$  teniendo en cuenta (9) y (12):

$$c^2 = \underline{c} \cdot \underline{c} = (\underline{r} \wedge \underline{v}) \cdot \underline{c} = \underline{r} \cdot (\underline{v} \wedge \underline{c}) = \mu \underline{r} \cdot \left( \frac{1}{r} \underline{r} + \underline{e} \right) = \mu (r + \underline{r} \cdot \underline{e})$$

y hacemos:

$$p = \frac{c^2}{\mu} \quad (13)$$

obtenemos, finalmente:

$$p = r + \underline{r} \cdot \underline{e} \quad (14)$$

que es la ecuación de la órbita relativa.

Para interpretarla introduzcamos el ángulo  $V$ , anomalía verdadera, formado por los vectores  $\underline{r}$  y  $\underline{e}$ . (fig. 3):

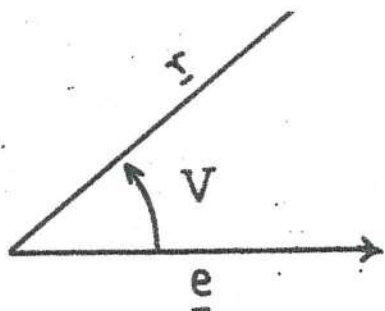


fig.3

$$p = r + r e \cos V = r (1 + e \cos V)$$

y despejando  $r$ :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos V} \quad (15)$$

que es la ecuación polar focal de una cónica de parámetro  $p$  dado por (13) y

excentricidad  $e$  (módulo de  $\underline{e}$ ). El primario ocupa uno de los focos de la cónica y el vector  $\underline{e}$  tiene la dirección del radio

vector del vértice principal más próximo al primario, al que se le llama periasastro. Podemos, pues, enunciar: "en su movimiento relativo el secundario describe

una cónica en uno de cuyos focos se encuentra el primero" (primera ley de Kepler).

La naturaleza de la cónica (15) depende del valor de su excentricidad  $e$ : si  $e < 1$  será elipse, si  $e = 1$  parábola y si  $e > 1$  hipérbola. En el primer y tercer casos, designando por  $a$  y  $b$  los semiejes, el valor del parámetro es  $p = \frac{b^2}{a}$ . Si la cónica es una elipse, el semieje  $a$  recibe el nombre de distancia media, pues, en efecto, es la media aritmética de las distancias máxima y mínima del secundario.

Por la segunda ley de Kepler el movimiento será periódico de periodo  $P$ , con un movimiento medio  $n = \frac{2\pi}{P}$  (radianes por unidad de tiempo).

Según (10), tomando módulos:

$$c = 2 \dot{A} = 2 \frac{\pi a b}{P} = n a b$$

y según (13):

$$\mu = \frac{c^2}{p} = \frac{n^2 a^2 b^2}{p} = n^2 a^3 = 4\pi^2 \frac{a^3}{P^2}$$

o sea:

$$n^2 a^3 = \mu \quad (16)$$

lo cual nos dice que para todas las elipses que tengan igual  $\mu$ : "los cuadrados de los periodos son proporcionales a los cubos de las distancias medias" (tercera ley de Kepler).

Consideremos las constantes de integración  $\underline{c}$  y  $\underline{e}$ , cada una de las cuales equivale a tres constantes escalares. Dichas constantes no son independientes, ya que se trata de dos vectores perpendiculares. En efecto: multiplicando escalarmente por  $\underline{c}$  ambos miembros de (12) y recordando que  $\underline{c} \cdot \underline{r} = 0$ , tendremos:

$$0 = \underline{c} \cdot (\underline{v} \wedge \underline{c}) = \mu \left( \frac{1}{r} \underline{c} \cdot \underline{r} + \underline{c} \cdot \underline{e} \right) = \mu \underline{c} \cdot \underline{e}$$

es decir:

$$\underline{c} \cdot \underline{e} = 0 \quad (17)$$

Se tienen pues cinco constantes independientes, que corresponden a las cinco condiciones que en el espacio determinan una cónica con un foco prefijado.

Recordemos que la ecuación de la órbita se ha obtenido por integración de la ecuación diferencial vectorial de segundo orden (6). La solución de este tipo de ecuación depende de seis constantes arbitrarias. La sexta constante aparecerá cuando expresemos  $\underline{r}$  y  $\underline{v}$  en función de  $t$ ; puede tomarse para la misma, la época de paso por el periastro  $T$ .

En función de esta constante  $T$  y contando las áreas a partir del periastro, de la ley de las áreas (11) se deduce, para  $t = T$ :

$$\underline{0} = -\frac{1}{2} \underline{c} T + \underline{k}$$

de donde:

$$\underline{k} = -\frac{1}{2} \underline{c} T$$

y, por tanto:

$$\underline{A} = \frac{1}{2} \underline{c} t - \frac{1}{2} \underline{c} T = \frac{1}{2} \underline{c} (t - T) \quad (18)$$

relación que fija la posición del secundario sobre su órbita.

Calculemos ahora la velocidad en función del radio vector. Multiplicando vectorialmente (12) por  $\underline{c}$  se obtiene:

$$\mu \underline{c} \wedge \left( \frac{1}{r} \underline{r} + \underline{e} \right) = \underline{c} \wedge (\underline{v} \wedge \underline{c}) = (\underline{c} \cdot \underline{c}) \underline{v} - (\underline{c} \cdot \underline{v}) \underline{c} = c^2 \underline{v}$$

y despejando  $\underline{v}$ :

$$\underline{v} = \frac{\mu}{c^2} \underline{c} \wedge \left( \frac{1}{r} \underline{r} + \underline{e} \right)$$

y recordando (13):

$$\underline{v} = \frac{1}{p} \underline{c} \wedge \frac{\underline{r}}{r} + \frac{1}{p} \underline{c} \wedge \underline{e} \quad (19)$$

Así pues, podemos descomponer  $\underline{v}$  como suma de dos vectores no ortogonales:

$\frac{1}{p} \underline{c} \wedge \frac{\underline{r}}{r}$  de módulo constante  $\frac{c}{p}$  y dirección normal a  $\underline{r}$ , y  $\frac{1}{p} (\underline{c} \wedge \underline{e})$

de módulo constante  $\frac{c e}{p}$  y dirección la del eje menor, a  $90^\circ$  de  $\underline{e}$  en el sentido del movimiento. Componiendo ambos vectores se obtiene una circunferencia

como hodógrafa del movimiento (Hodógrafa de Hamilton).

Su radio vale  $\frac{c}{p}$  y su centro se encuentra sobre la normal al eje principal por el foco  $O$  y a una distancia  $\frac{c e}{p}$  del mismo.

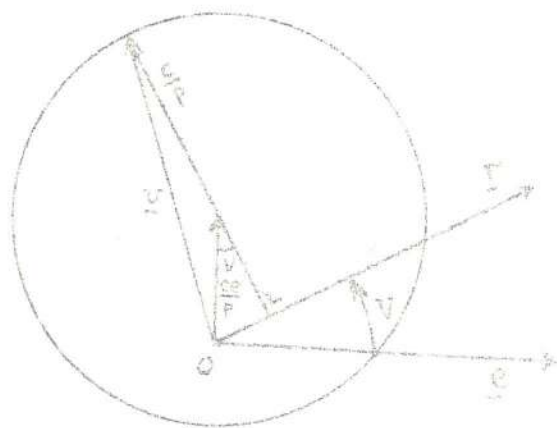


fig. 4

De la fig. 4 se deducen también, sin dificultad, las componentes radial y perpendicular de la velocidad en función de la anomalía verdadera:

$$v_r = \frac{c}{p} e \sin V$$

$$v_p = \frac{c}{p} (1 \pm e \cos V)$$

### 3.4 Integral de la energía

Multiplicando escalarmente por  $\underline{v}$  ambos miembros de (8) se obtiene:

$$\underline{v} \cdot \dot{\underline{v}} = - \frac{\mu}{r^3} (\underline{v} \cdot \underline{r}) = - \frac{\mu}{r^3} (\underline{r} \cdot \dot{\underline{r}}) = - \frac{\mu}{r^3} r \dot{r} = - \frac{\mu}{r^2} \dot{r} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{r} \right)$$

y como, por otra parte:

$$\frac{1}{2} \frac{d(v^2)}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\underline{v} \cdot \underline{v}) = \underline{v} \cdot \dot{\underline{v}}$$

Resulta:

$$\frac{1}{2} \frac{d(v^2)}{dt} = \mu \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{r} \right)$$

e integrando, finalmente:

$$\frac{1}{2} v^2 = \frac{\mu}{r} + h \quad (20)$$

relación que constituye la integral de la energía). La constante escalar de integración  $h$  se llama constante de la energía y, evidentemente, es dependiente de las constantes de integración  $c$  y  $e$ . Según (20), el módulo de la velocidad del secundario sólo depende de su distancia al primario, pues  $\mu$  y  $h$  se mantienen constantes durante el movimiento.

Calculemos ahora la constante  $h$  de la energía en función de las constantes vectoriales  $c$  y  $e$ . Multiplicando escalarmente (19) por si misma:

$$\begin{aligned} v^2 = \underline{v} \cdot \underline{v} &= \left[ \frac{1}{p} c \wedge \left( \frac{1}{r} \underline{r} + \underline{e} \right) \right]^2 = \frac{1}{p^2} c^2 \left( \frac{1}{r} \underline{r} + \underline{e} \right)^2 = \\ &= \frac{c^2}{p^2} \left( 1 + e^2 + 2 \frac{1}{r} \underline{r} \cdot \underline{e} \right) \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta las igualdades (13) y (14):

$$v^2 = \frac{\mu}{p} \left( 1 + e^2 + 2 \frac{1}{r} (p - r) \right) = \mu \left( \frac{2}{r} + \frac{e^2 - 1}{p} \right)$$

Si identificamos con (20) se deduce:

$$h = \frac{1}{2} \mu \frac{e^2 - 1}{p}$$

o, en función de  $c$  y  $e$ :

$$h = \frac{1}{2} \frac{\mu^2}{c^2} (e^2 - 1) \quad (21)$$

Como que  $\frac{\mu^2}{2 c^2} > 0$ , según que la órbita sea elíptica, parabólica

o hiperbólica,  $e \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} 1$ , según (21) será  $h \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} 0$ , y, por tanto, según (20), la velocidad en el infinito será imaginaria, nula o real, respectivamente.

Además, para la elipse,  $p = a(1 - e^2)$ ,  $h = -\frac{1}{2} \frac{\mu}{a}$ , y sustituyendo en (20):

$$v^2 = \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad (22)$$

fórmula muy útil, también válida para la parábola y la hipérbola sin más que poner  $\infty$  y  $-a$  en lugar de  $a$ , respectivamente.

Si la órbita es circular de radio  $r$ , según (22):

$$v_c^2 = \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{r} \right) = \frac{\mu}{r}$$

la velocidad  $v_c$  recibe el nombre de velocidad circular:

$$v_c = \sqrt{\frac{\mu}{r}}$$

Si la órbita es parabólica, la velocidad a la distancia  $r$  vale:

$$v_e = \sqrt{\frac{2\mu}{r}}$$

y recibe el nombre de velocidad de escape a dicha distancia. Comparando ambas velocidades resulta:

$$v_e = \sqrt{2} v_c$$

### 3,5 Movimiento elíptico

El estudio del movimiento elíptico de un astro se simplifica notablemente introduciendo los ángulos o anomalías que definimos a continuación:

Anomalía verdadera: es el ángulo  $V = \widehat{POQ}$  formado por el radio vector del astro  $Q$  y la dirección del periastro  $P$ .

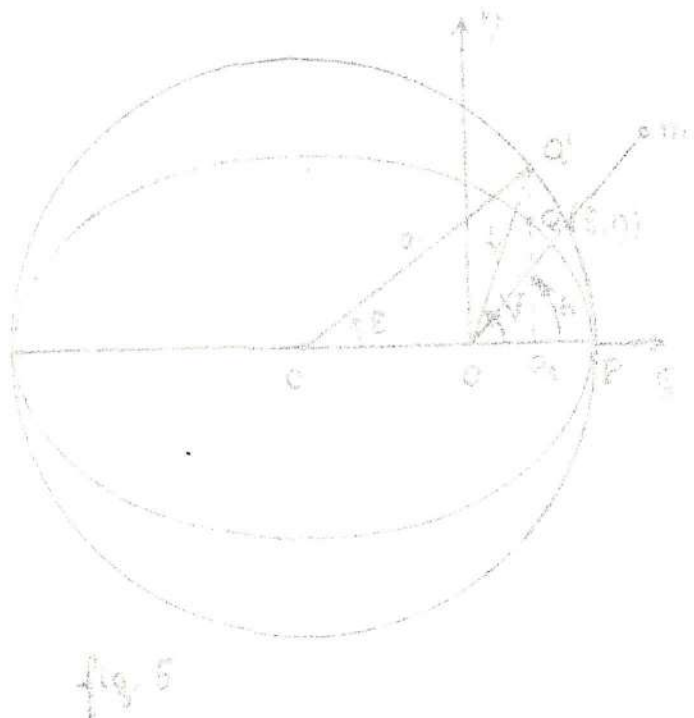
Anomalía excéntrica: es el ángulo  $E = \widehat{PCQ'}$  formado por el radio  $CQ'$ , siendo  $Q'$  la intersección con el círculo principal de la elipse de la normal por  $Q$  al eje mayor, y la dirección del periastro  $CP$ .

Anomalía media: es el ángulo  $M$  descrito con vértice en el foco  $O$ , en

sentido antihorario y a partir de la dirección del periastro, por un astro ficticio que gira con velocidad angular igual al movimiento medio  $n$ . Si empezamos a contar el tiempo en el instante de paso del astro por el periastro, la anomalía media valdrá  $nt$ , y en general será:

$$M = n (t - T)$$

si designamos por  $T$  la época de paso por el periastro.



Consideremos ahora un sistema de ejes cartesianos  $\xi \eta$ , con origen en el foco  $D$ , y sean  $(\xi \eta)$  las coordenadas del secundario  $Q$  en dicho sistema. Se verifica:

$$\xi = r \cos V = CQ_1 - CO = a \cos E - ae = a(\cos E - e)$$

y, teniendo en cuenta que:

$$\frac{a \sin E}{b} = \frac{Q_1 Q'}{Q_1 Q} = \frac{a}{b}, \text{ también } b = r \sin V = b \sin E = a \sqrt{1-e^2} \sin E$$

De esta forma obtenemos  $\xi$  y  $\eta$  en función de una sola variable, la anomalía excéntrica:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= r \cos V = a (\cos E - e) \\ \eta &= r \sin V = a \sqrt{1-e^2} \sin E \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Tomando  $a$  como unidad, en el mismo sistema de ejes se tiene:

$$\left. \begin{aligned} X = \frac{\xi}{a} &= \frac{r}{a} \cos V = \cos E - e \\ Y = \frac{\eta}{a} &= \frac{r}{a} \sin V = \sqrt{1-e^2} \sin E \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

que son las llamadas coordenadas reducidas del secundario.

De las relaciones (23), elevando el cuadrado y sumando ordenadamente,

Obtenemos:

$$r^2 = a^2 \left[ (\cos E - e)^2 + (1 - e^2) \sin^2 E \right] = a^2 (1 - e \cos E)^2$$

y siendo  $a > 0$ ,  $e < 1$  y  $|\cos E| \leq 1$ , extrayendo la raíz cuadrada:

$$r = a(1 - e \cos E) \quad (25)$$

fórmula que suministra el radio vector en función de la anomalía excéntrica.

Si queremos relacionar las anomalías verdadera y excéntrica, consideremos la primera de (23) y (25):

$$\left. \begin{aligned} r \cos V &= a (\cos E - e) \\ r &= a (1 - e \cos E) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Restando miembro a miembro:

$$r(1 - \cos V) = a \left[ 1 - e \cos E - \cos E + e \right]$$

o sea:

$$2r \sin^2 \frac{V}{2} = a(1 + e)(1 - \cos E) = 2a(1 + e) \sin^2 \frac{E}{2} \quad (27)$$

y, sumando miembro a miembro:

$$r(1 + \cos V) = a \left[ 1 - e \cos E + \cos E - e \right]$$

o sea:

$$2r \cos^2 \frac{V}{2} = a(1 - e)(1 + \cos E) = 2a(1 - e) \cos^2 \frac{E}{2} \quad (28)$$

Dividiendo ordenadamente (27) y (28):

$$\tan^2 \frac{V}{2} = \frac{1 + e}{1 - e} \tan^2 \frac{E}{2}$$

o, también:

$$\tan \frac{V}{2} = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \tan \frac{E}{2} \quad (29)$$

fórmula que suministra la anomalía verdadera en función de la excéntrica.

Relacionemos, finalmente, las anomalías media y excéntrica. Partiendo de la ley de las áreas en su forma polar:

$$r^2 \frac{dV}{dt} = c$$

y recordando:

$$c = 2 \dot{A} = n a b$$

se tiene:

$$2 dA = n a b dt = r^2 dV$$

e integrando ahora entre 0 y V, valores que, respectivamente, corresponden a la época T de paso por el periastro y a una época t cualquiera:

$$M = n (t - T) = \frac{1}{a b} \int_0^V r^2 dV \quad (30)$$

Para efectuar la integración indicada, calculemos dV diferenciando en (29):

$$\frac{1}{2} \frac{dV}{\cos^2 \frac{V}{2}} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \frac{1}{2} \frac{dE}{\cos^2 \frac{E}{2}}$$

y tengamos en cuenta (28) y operemos:

$$dV = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \frac{\cos^2 \frac{V}{2}}{\cos^2 \frac{E}{2}} dE = \frac{a \sqrt{1-e^2}}{r} dE = \frac{b}{r} dE \quad (31)$$

Sustituyendo en la integral (30) y recordando (25):

$$M = \frac{1}{a b} \int_0^V r (r dV) = \int_0^E (1 - e \cos E) dE = E - e \sin E$$

obtenemos de esta forma la relación buscada:

$$M = E - e \sin E \quad (32)$$

que se denomina ecuación de Kepler.

Para resolverla observemos, en primer lugar, que si en (32) damos a M un valor comprendido entre  $K \pi$  y  $(K+1) \pi$  (K entero), dicha ecuación admite una única raíz entre tales límites. En efecto, si ponemos

$$\psi(E) = E - e \sin E - M$$

se tiene  $\psi(K \pi) < 0$  y  $\psi((K+1) \pi) > 0$ , y además:

$$\psi(E) = 1 - e \cos E$$

es siempre positiva. Luego, la función  $\psi(E)$ , creciente en el intervalo  $[K\pi, (K+1)\pi]$  y que toma en sus extremos valores de distinto signo, tiene una única raíz en dicho intervalo.

Entre el gran número de métodos propuestos para resolver la ecuación de Kepler citaremos los dos siguientes:

Método gráfico: Dibujada una senoide, expresando el argumento en radianes,

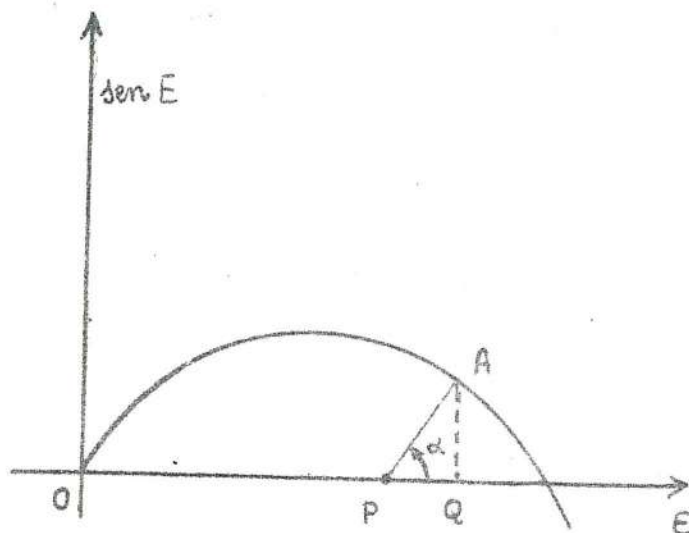


fig. 6

por P, tal que  $OP = M$ , se traza una recta que forme con el eje de abscisas un ángulo  $\alpha$  tal que  $\cot \alpha = e$ ; la abscisa OQ del punto A de intersección de dicha recta con la senoide es  $OQ = E$ . En efecto:

$$E = OQ = OP + PQ = OP + QA \cot \alpha = M + e \sin E.$$

Si la escala es grande, en la mayoría de los casos, este método permite obtener E con una

aproximación de un grado, sirviendo este valor aproximado como argumento inicial para aplicar otros métodos.

Método numérico: Sirve para corregir el valor de la anomalía excéntrica encontrado con el método gráfico. Diferenciando la ecuación de Kepler (32):

$$dM = DE (1 - e \cos E)$$

o, también, tomando incrementos:

$$\Delta E = \frac{\Delta M}{1 - e \cos E} \quad (33)$$

Consideremos que el valor de M de partida es  $M_0$  y que con el método gráfico se ha obtenido un valor de E igual a  $E_0$ , que llevado a la ecuación de Kepler nos da un valor de M igual a  $M_1$ ;  $\Delta M_1$  vendrá dado por  $M_0 - M_1$ ; ello permitirá aplicar (33) sustituyendo E por  $E_0$  con lo cual obtendremos un  $E_1 = E_0 + \Delta E_0$  que será más aproximado. Con este valor de  $E_1$  puede volverse a (32) y reiterar

el proceso cuantas veces sea preciso.

También existen tablas a doble entrada que suministran directamente  $E$  en función de  $e$  y de  $M$ .

### 3.6 Desarrollos en serie

Obtengamos ahora los desarrollos en serie de las anomalías excéntrica y verdadera y del radio vector en función de la anomalía media y de la excentricidad.

Desarrollo en serie de la anomalía excéntrica: Expresaremos  $E$  por desarrollo en serie de Mac-Laurin de potencias de  $e$ , considerando  $M$  como parámetro. Para hallar los distintos términos del mismo, derivaremos sucesivamente la ecuación de Kepler:

$$M = E - e \sin E; \quad \text{para } e = 0, \quad E_0 = M$$

$$0 = \frac{dE}{de} (1 - e \cos E) - \sin E; \quad \text{para } e = 0, \left( \frac{dE}{de} \right)_0 = \sin M$$

$$0 = \frac{d^2 E}{de^2} (1 - e \cos E) + \left( \frac{dE}{de} \right)^2 e \sin E - 2 \frac{dE}{de} \cos E;$$

$$\text{para } e = 0, \left( \frac{d^2 E}{de^2} \right)_0 = 2 \sin M \cos M = \sin 2M, \quad \text{etc.}$$

y aplicando la fórmula de Mac-Laurin:

$$E = M + e \sin M + \frac{e^2}{2} \sin 2M + \frac{e^3}{8} (2 \sin 3M - \sin M) + \dots \quad (34)$$

Desarrollo en serie del radio vector: Recordando la ecuación de Kepler:

$M = E - e \sin E$  y la expresión del radio vector:  $r = a (1 - e \cos E)$ , derivando la primera respecto a  $E$  tenemos:

$$\frac{dM}{dE} = 1 - e \cos E = \frac{r}{a}$$

y de aquí:

$$\frac{a}{r} = \frac{dE}{dM}$$

Calcularemos  $\frac{dE}{dM}$  a partir de (34), considerando  $e$  constante:

$$\frac{a}{r} = \frac{dE}{dM} = 1 + e \cos M + e^2 \cos 2M + \frac{e^3}{8} (9 \cos 3M - \cos M) + \dots \quad (35)$$

de donde, desarrollando en serie por división:

$$r = a \left[ 1 - e \cos M + \frac{e^2}{2} (1 - \cos 2M) + \frac{3}{8} e^3 (\cos M - \cos 3M) + \dots \right] \quad (36)$$

Desarrollo en serie de la anomalía verdadera: Teniendo en cuenta la ley de las áreas:

$$r^2 \frac{dV}{dt} = n a^2 \sqrt{1 - e^2}$$

y que

$$M = n(t - T), \quad dM = n dt,$$

sustituyendo  $dt$  y despejando  $dV$ , se deduce:

$$dV = \left( \frac{a}{r} \right)^2 \sqrt{1 - e^2} dM$$

De (35) se obtiene, elevando al cuadrado y ordenando según las potencias de  $e$ :

$$\left( \frac{a}{r} \right)^2 = 1 + 2e \cos M + \frac{e^2}{2} (5 \cos 2M + 1) + \frac{e^3}{4} (13 \cos 3M + 3 \cos M) + \dots$$

y desarrollando  $\sqrt{1 - e^2} = (1 - e^2)^{1/2}$ :

$$\sqrt{1 - e^2} = 1 - \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{8} e^4 + \dots$$

Multiplicando estas dos series se tiene:

$$dV = \left[ 1 + 2e \cos M + \frac{5}{2} e^2 \cos 2M + \frac{e^3}{4} (13 \cos 3M - \cos M) + \dots \right] dM$$

e integrando y observando que para  $V = 0$ ,  $M = 0$  (por lo que la constante de integración será nula), finalmente:

$$V = M + 2e \sin M + \frac{5}{4} e^2 \sin 2M + \frac{e^3}{12} (13 \sin 3M - 3 \sin M) + \dots \quad (37)$$

Expresemos ahora en función de  $M$ . mediante desarrollos en serie de potencias de la excentricidad, las coordenadas reducidas anteriormente definidas ( 24 ):

$$\left. \begin{aligned} X &= \cos E - e \\ Y &= \sqrt{1 - e^2} \sin E \end{aligned} \right\}$$

Recordando que  $r = a (1 - e \cos E)$ , despejando  $\cos E$  y teniendo en cuenta (36):

$$\cos E = \frac{1 - \frac{r}{a}}{e} = \cos M - \frac{e}{2} (1 - \cos 2M) + \frac{3e^2}{8} (\cos 3M - \cos M) + \dots$$

y restando  $e$  de esta última expresión:

$$X = \cos M - \frac{e}{2} (3 - \cos 2M) + \frac{3e^2}{8} (\cos 3M - \cos M) + \dots \quad (38)$$

Por otra parte, de la ecuación de Kepler  $M = E - e \sin E$ , despejando  $\sin E$  y teniendo en cuenta (34):

$$\sin E = \frac{E - M}{e} = \sin M + \frac{e}{2} \sin 2M - \frac{e^2}{8} (3 \sin 3M - \sin M) + \dots$$

y multiplicando por el desarrollo de  $\sqrt{1 - e^2}$  obtenido anteriormente:

$$Y = \sin M + \frac{e}{2} \sin 2M + \frac{e^2}{8} (3 \sin 3M - 5 \sin M) + \dots \quad (39)$$

### 3.7 Movimiento parabólico

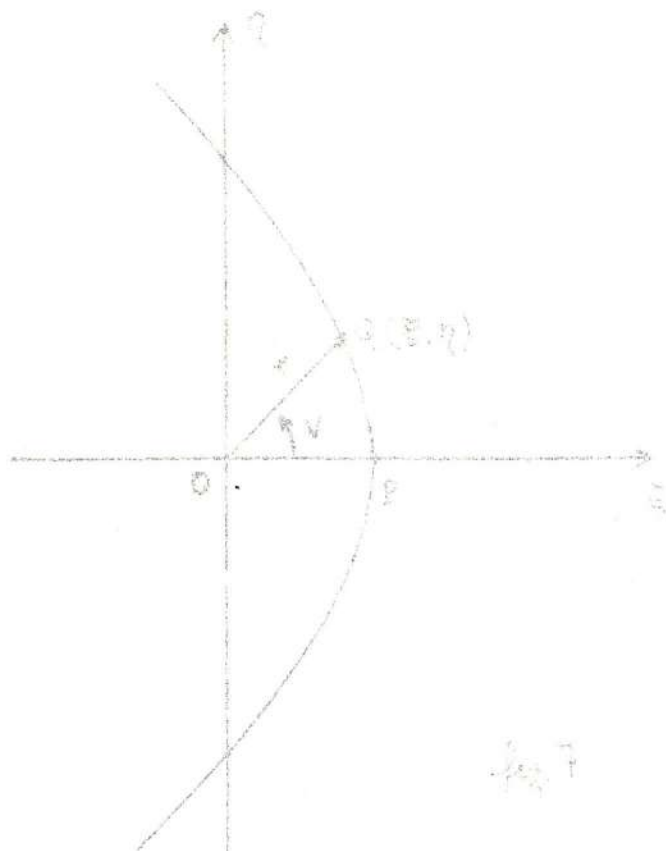
En (3.3) hemos encontrado como ecuación de la órbita relativa del secundario con respecto al primario:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos V}$$

Si el movimiento es parabólico,  $e = 1$  y  $p = 2q$ , siendo  $q$  la distancia del foco al periastro, con lo cual la ecuación de la órbita podrá ponerse en la forma:

$$r = \frac{q}{\cos^2 \frac{V}{2}} \quad (40)$$

Consideremos ahora un sistema de coordenadas rectangulares  $\xi, \eta$  con origen en el foco 0. Según (40) se verificará:



$$\xi = r \cos V = q \frac{\cos^2 \frac{V}{2} - \sin^2 \frac{V}{2}}{\cos^2 \frac{V}{2}} = q(1 - \tan^2 \frac{V}{2})$$

$$\eta = r \sin V = q \frac{2 \sin \frac{V}{2} \cos \frac{V}{2}}{\cos^2 \frac{V}{2}} = 2q \tan \frac{V}{2}$$

y haciendo  $\tan \frac{V}{2} = s$ :

$$\left. \begin{aligned} \xi &= q(1 - s^2) \\ \eta &= 2qs \\ r &= q(1 + s^2) \\ V &= 2 \arctan s \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Se trata, pues, de determinar  $s$ , ya que una vez calculada tendremos inmediatamente las coordenadas cartesianas y polares del astro en su órbita.

Partiendo de la ley de las áreas en su forma polar y recordando (13):

$$r^2 \frac{dV}{dt} = c = \sqrt{\mu p} = \sqrt{2 \mu} q$$

de donde, según (40):

$$dt = \frac{1}{\sqrt{2 \mu} q} r^2 dV = \frac{r^{3/2}}{\sqrt{2 \mu}} \frac{dV}{\cos^4 \frac{V}{2}}$$

Integrando ahora entre  $t$  y  $T$ , teniendo en cuenta que para  $t = T$  es  $V = 0$ :

$$t - T = \frac{q^{3/2}}{\sqrt{2\mu}} \int_0^U \left(1 + \tan^2 \frac{V}{2}\right) \frac{d \frac{V}{2}}{\cos^2 \frac{V}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\mu}} q^{3/2} \left(\tan \frac{V}{2} + \frac{1}{3} \tan^3 \frac{V}{2}\right)$$

El movimiento parabólico viene, pues, regido por la ecuación:

$$\sqrt{\frac{\mu}{2q^3}} (t - T) = \tan \frac{V}{2} + \frac{1}{3} \tan^3 \frac{V}{2} \quad (42)$$

Siendo creciente el segundo miembro de (42) cuando  $V$  varía entre  $x$  y  $y$ ,  $\tan \frac{V}{2}$  entre  $-\infty$  y  $+\infty$ , conocido el primer miembro de dicha relación, ésta constituye una ecuación de tercer grado en  $\tan \frac{V}{2}$ , con una única raíz real, que ha sido tabulada para diversos valores del primer miembro.

Si no se dispone de tablas, la ecuación (42), cúbica en  $\tan \frac{V}{2}$ , puede resolverse fácilmente haciendo:

$$\tan \frac{V}{2} = 2 \cot 2\gamma = \cot \gamma - \tan \gamma \quad (43)$$

de donde:

$$\tan^3 \frac{V}{2} - 3 \tan \frac{V}{2} + \cot^3 \gamma - \tan^3 \gamma$$

Teniendo en cuenta estas relaciones y haciendo, además:

$$\tan \gamma = \sqrt[3]{\tan \frac{\beta}{2}} \quad (44)$$

(42) se transforma en:

$$\sqrt{\frac{\mu}{2q^3}} (t - T) = \frac{1}{3} \left( \cot \frac{\beta}{2} - \tan \frac{\beta}{2} \right) = \frac{2}{3} \cot \beta$$

o, finalmente:

$$\tan \beta = \frac{\frac{2}{3} \sqrt{\frac{2q^3}{\mu}}}{t - T} \quad (45)$$

Las relaciones (43), (44) y (45) resuelven el problema.

### 3.8 Elementos de una órbita

Para definir la posición de un astro en una cierta época, en general, es necesario conocer siete cantidades, denominadas elementos de la órbita, si bien en algunos casos particulares son suficientes seis elementos ( caso de los satélites artificiales y de los pequeños planetas), o, aún, cinco elementos (caso de los cometas de órbita parabólica).

La posición de la órbita con respecto a un triedro fundamental de referencia  $X, Y, Z$ , queda determinada por medio de tres de dichos elementos, sus ángulos de Euler  $\Omega$ ,  $i$ ,  $\omega$  (fig. 8), La intersección del plano de la órbita con el plano fundamental de referencia  $X, Y$ , recibe el nombre de línea de los nodos. Hay un nodo ascendente  $N$ , extremo en el que el as-

tro pasa a la región de las  $Z$  positivas, y otro diametralmente opuesto o nodo descendente.

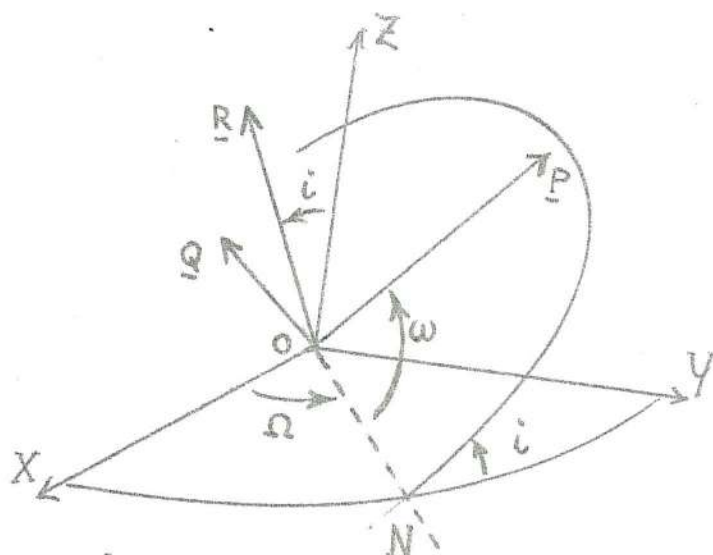


fig. 8

$\Omega$  es el argumento del nodo, o ángulo formando por el eje  $X$  y la dirección del nodo ascendente ( si el plano fundamental de referencia es el ecuador,  $\Omega$  es la ascensión recta del nodo ascendente, y si es la eclíptica,  $\Omega$  es la

longitud del nodo ascendente).

$i$  es la inclinación de la órbita, o ángulo de los planos de la órbita y fundamental. Si  $0 \leq i < 90^\circ$  el movimiento se llama directo, y si  $90^\circ \leq i < 180^\circ$ , retrógrado.

$\omega$  es el argumento del periastro, o ángulo que forman la línea de los nodos y la dirección del periastro, contado en el sentido del movimiento a partir del nodo ascendente:  $0 \leq \omega < 360^\circ$ .

Los dos elementos que determinan la magnitud y la forma de la órbita suelen ser el semieje mayor  $a$  y la excentricidad  $e$ . En algunos casos estos dos elementos se sustituyen por la distancia del periastro  $q = a(1-e)$  y la distancia del apoastro  $q' = a(1+e)$ . Si se trata de una órbita parabólica basta con un solo elemento, la distancia del periastro  $q = \frac{p}{2}$ .

Finalmente, para definir la posición del astro en una determinada época aún son necesarios otros dos elementos: el periodo de revolución  $P$ , o el movimiento medio  $n = \frac{2\pi}{P}$ , y la época de paso por el periastro  $T$ , o la anomalía media  $M_0$  en una época  $t_0$  (o también la anomalía media en la época  $G = -nT$ ).  $P$  es necesario si no se conoce  $\mu$ ; en caso contrario, la relación (16)  $\mu = n^2 a^3$  nos suministra fácilmente el valor de  $n$  y, por tanto, de  $P$ . Tal es el caso de un satélite artificial o de un pequeño planeta.

Actualmente, los tres ángulos de Euler se sustituyen por tres constantes vectoriales,  $\underline{P}$ ,  $\underline{Q}$ ,  $\underline{R}$ , tres vectores unitarios ligados a la órbita y definidos como sigue:

$\underline{R}$  perpendicular al plano de la órbita.

$\underline{P}$  en el plano de la órbita y en el sentido del periastro.

$\underline{Q}$  en el plano de la órbita y perpendicular a  $\underline{P}$ :  $\underline{Q} = \underline{R} \wedge \underline{P}$ .

Nos proponemos obtener, ahora, la matriz del cambio de base para pasar del sistema  $\underline{P} \underline{Q} \underline{R}$  al  $\underline{X} \underline{Y} \underline{Z}$  (fig. 8); recordemos para ello las matrices estudiadas en (1.2) y apliquémoslas a nuestro problema. Efectuaremos en primer lugar un giro de ángulo  $-\omega$ , alrededor de  $\underline{R}$ , que vendrá definido por la matriz  $\underline{R}_3(-\omega)$ :

$$\underline{R}_3(-\omega) = \begin{bmatrix} \cos \omega & -\sin \omega & 0 \\ \sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A continuación efectuaremos un segundo giro de ángulo  $-i$  alrededor de la línea de los nodos  $\underline{N}$  (posición que ha pasado a ocupar  $\underline{P}$  después del primer giro). Este segundo giro vendrá definido por la matriz  $\underline{R}_1(-i)$ :

$$R_1(-i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{bmatrix}$$

Después de este giro, que equivale a abatir el plano de la órbita sobre el plano fundamental, R coincidirá con Z.

Por último giraremos alrededor de  $R \equiv Z$  un ángulo  $-\omega$ , siendo la matriz correspondiente  $R_3(-\omega)$ :

$$R_3(-\omega) = \begin{bmatrix} \cos \omega & -\sin \omega & 0 \\ \sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Con este giro llevamos a coincidir P con X y Q con Y.

Efectuando el producto de las tres matrices obtenemos:

$$M = \begin{bmatrix} P_x & Q_x & R_x \\ P_y & Q_y & R_y \\ P_z & Q_z & R_z \end{bmatrix} = R_3(-\omega) R_1(-i) R_3(-\omega) \quad (46)$$

que es la buscada matriz de cambio de base:

$$= M = \begin{bmatrix} \cos \omega & -\sin \omega & 0 \\ \sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \omega & -\sin \omega & 0 \\ \sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Identificando obtenemos las constantes vectoriales en función de los ángulos de Euler:

$$\left. \begin{aligned} \underline{P} &= \begin{bmatrix} \cos \omega \cos \omega - \sin \omega \cos i \sin \omega \\ \sin \omega \cos \omega + \cos \omega \cos i \sin \omega \\ \sin i \sin \omega \end{bmatrix} \\ \underline{Q} &= \begin{bmatrix} -\cos \omega \sin \omega - \sin \omega \cos i \cos \omega \\ -\sin \omega \sin \omega + \cos \omega \cos i \cos \omega \\ \sin i \cos \omega \end{bmatrix} \\ \underline{R} &= \begin{bmatrix} \sin \omega \sin i \\ \cos \omega \sin i \\ \cos i \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

La matriz  $M$  es ortogonal, ya que entre los vectores  $\underline{P}$   $\underline{Q}$   $\underline{R}$  existen las relaciones:

$$\underline{P} \cdot \underline{P} = \underline{Q} \cdot \underline{Q} = \underline{R} \cdot \underline{R} = 1 \quad \underline{P} \cdot \underline{Q} = \underline{P} \cdot \underline{R} = \underline{Q} \cdot \underline{R} = 0 \quad (48)$$

Además, por tratarse de triedros de igual orientación, el determinante de  $M$  vale  $|M| = 1$ . En virtud de las relaciones (48), de entre las nueve constantes escalares, equivalentes a las tres constantes vectoriales, sólo hay tres independientes.

Los elementos  $\underline{P}$ ,  $\underline{Q}$ ,  $\underline{R}$ ,  $a$  y  $e$  pueden ser sustituidos también por  $\underline{c}$  y  $\underline{e}$  pues, siendo según (13)  $a = \frac{c^2}{\mu (1 - e^2)}$

$$\underline{e} = e \underline{P} \quad \underline{c} = c \underline{R} \quad (49)$$

Conocidos  $\mu$  y  $\underline{r}_0$  y  $\underline{v}_0$  en un cierto instante  $t_0$ , podemos calcular las constantes de integración  $\underline{re}$  y  $\underline{e}$  y la época de paso por el periastro  $T$ . En efecto, según (9):

$$\underline{c} = \underline{r}_0 \wedge \underline{v}_0$$

y  $\underline{e}$  se despeja de (12):

$$\underline{e} = \frac{1}{\mu} \underline{v}_0 \wedge \underline{c} - \frac{\underline{r}_0}{r_0}$$

Suponiendo el movimiento elíptico, de (22) se obtiene:

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r_0} - \frac{v_0^2}{\mu}$$

y de aquí, según (16):

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$$

De la relación (25) podemos deducir  $E_0$ :

$$\cos E_0 = \frac{1}{e} \left( 1 - \frac{r_0}{a} \right)$$

y, llevando el valor de  $e$  y de  $E_0$  a la ecuación de Kepler (32), obtener el valor de  $M_0$  que, con  $n$  y  $t_0$ , nos permite determinar  $T$  a partir de la relación  $M_0 = n (t_0 - T)$  o sea:

$$T = t_0 - \frac{M_0}{n}$$

Si el movimiento es parabólico  $e = 1$  se halla análogamente:  $e = 1$  y la fórmula (13) nos da  $p = 2q$ . De la tercera de (41) obtendremos  $s = \tan \frac{V}{2}$ , valor que llevado a (42) nos permitirá determinar  $T$ .

### 3.9 Cálculo de efemérides

El cálculo de una efemérides consiste en determinar, en función de los elementos de su órbita, la posición de un astro en un cierto instante  $t$ . Hemos visto que el vector de posición del astro puede expresarse, referido a la base  $PQR$ , en la forma  $\underline{r} = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ 0 \end{bmatrix}$ , definida por las fórmulas (23) en el movimiento elíptico, y por las (41) en el parabólico. Referido al sistema fundamental  $XYZ$ , el mismo vector, designado ahora por  $\underline{r}'$ , será:  $\underline{r}' = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ . Aplicando la matriz  $M$  de cambio de base (46) obtendremos:

$$\underline{r}' = M \underline{r}$$

o sea:

$$\underline{r}' = \begin{bmatrix} P_x \xi + Q_x \eta \\ P_y \xi + Q_y \eta \\ P_z \xi + Q_z \eta \end{bmatrix} = \underline{P} \xi + \underline{Q} \eta \quad (50)$$

o también, utilizando las coordenadas reducidas (24):

$$\underline{r}' = a ( \underline{P} X + \underline{Q} Y ) \quad (51)$$

$X$  e  $Y$  se tienen calculadas en las tablas de Innes, de doble entrada, en función de la anomalía excéntrica  $E$  y de la excentricidad  $e$ , o se pueden obtener por los desarrollos en serie (38) y (39).

Otros autores utilizan las constantes vectoriales  $\underline{A}$ ,  $\underline{B}$ ,  $\underline{C}$ :

$$\begin{aligned} \underline{A} &= a \underline{P} \\ \underline{B} &= b \underline{Q} = a \sqrt{1 - e^2} \underline{Q} \\ \underline{C} &= a \underline{R} \end{aligned} \quad (52)$$

con lo cual es, según (51):

$$\underline{r}' = \underline{A} + \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \underline{B} \quad Y$$

y teniendo en cuenta (24):

$$\underline{r}' = \underline{A} (\cos E - e) + \underline{B} \sin E \quad (53)$$

fórmula muy práctica cuando se dispone de máquina de calcular. Entre las dos últimas constantes vectoriales se verifican las relaciones de comprobación:

$$\underline{A} \cdot \underline{A} = a^2 \quad \underline{B} \cdot \underline{B} = a^2 (1 - e^2) \quad \underline{A} \cdot \underline{B} = 0$$

Cuando se trata de calcular una efemérides parabólica suelen introducirse las constantes vectoriales  $\underline{m}$ ,  $\underline{n}$  :

$$\begin{aligned} \underline{m} &= q \underline{P} \\ \underline{n} &= q \underline{Q} \end{aligned} \quad (54)$$

obteniéndose entonces para  $\underline{r}'$ , de acuerdo con las fórmulas (41):

$$\underline{r}' = \underline{m} (1 - e^2) + 2 \underline{n} s \quad (55)$$

Para el cálculo efectivo de una efemérides, refiriéndonos, por ejemplo, al caso del movimiento elíptico, determinaremos primero la anomalía media mediante la fórmula  $M = n (t - T)$ , resolveremos, después, la ecuación de Kepler  $M = E - e \sin E$  en la forma ya explicada y, aplicando una de las expresiones (51) o (53), obtendremos las componentes del radio vector  $\underline{r}'$ .

Si, por ejemplo, se trata de calcular la posición de un satélite artificial, el plano fundamental es el ecuador y las componentes de  $\underline{r}'$  son:

$$\underline{r}' = \begin{bmatrix} r' \cos D \cos A \\ r' \cos D \sin A \\ r' \sin D \end{bmatrix}$$

e identificando con (1) o (53) obtendremos finalmente la ascensión recta y la declinación geocéntricas de dicho satélite en la época considerada.

#### 4. TRASLACION DE LA TIERRA

##### 4.1 Órbita aparente del Sol

El movimiento de traslación de la Tierra alrededor del Sol suele expresarse en función de los elementos de la órbita aparente del Sol con respecto a la Tierra. Según vimos en el capítulo anterior, prescindiendo de la acción gravitatoria de los demás astros, en su movimiento relativo, la Tierra describe una elipse en uno de cuyos focos se encuentra el Sol. Si a partir de un cierto instante trazamos por la Tierra  $T$  vectores  $TS_1, TS_2, TS_3, \dots$  opuestos a los radios vectores  $ST_1, ST_2, ST_3, \dots$  obtenemos como órbita aparente del Sol una elipse simétrica con respecto al punto  $O$ , medio de  $TS$ , de la realmente descrita por la Tierra alrededor del Sol (fig. 1). En el plano de la eclíptica, común a ambas

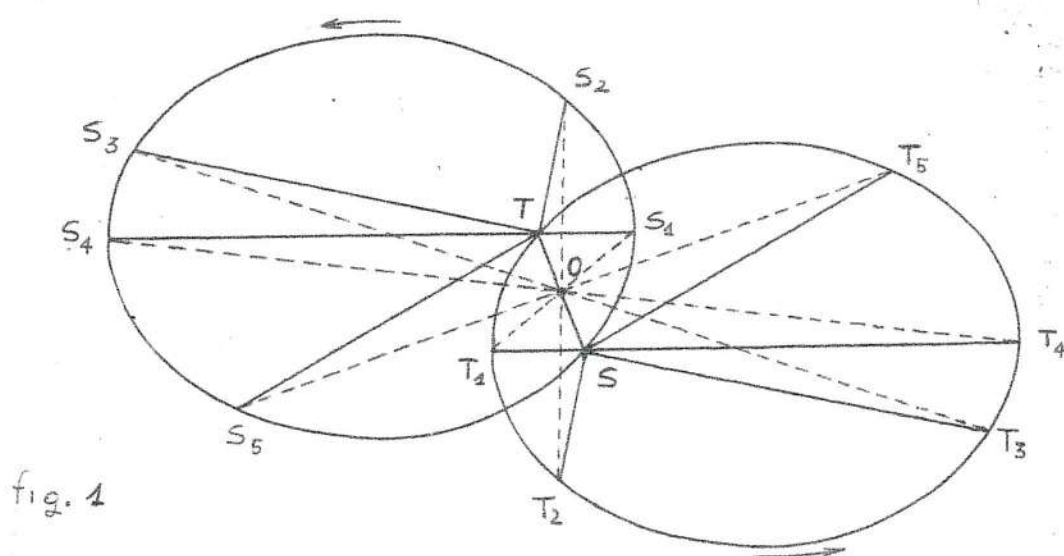


fig. 1

órbitas, cuando la Tierra se encuentra en uno de los extremos de la línea de los ápsides, perihelio  $T_1$  o afelio  $T_4$ , el Sol se proyecta sobre el perigeo  $S_1$  o apogeo  $S_4$  de su órbita aparente, respectivamente. Asimismo, al entrar la Tierra en cada uno de los signos del zódiaco, decimos que el Sol entra en el situado a  $180^\circ$  de cada uno de ellos; p.e. el Sol entra en Aries cuando la Tierra lo hace en Libra, etc. etc.

Como ya indicamos en 1.3, en realidad quien describe una elipse alrededor del Sol no es la Tierra sino, con muchísima aproximación, el centro de gravedad del sistema Tierra-Luna. Si prescindimos del efecto paraláctico, denominado desi-

gualdad mensual, y de las perturbaciones periódicas producidas principalmente por Venus y Júpiter, todos ellos de muy pequeña amplitud y ya mencionados en el citado apartado 1.3, el centro de gravedad del sistema Tierra-Luna, con una masa suma de las de ambos astros, describe alrededor del Sol una elipse, con una aproximación tal que la más importante desviación del movimiento elíptico es un avance del perihelio de  $7''7$  por siglo. En Astronomía, al hablar del movimiento elíptico de la Tierra alrededor del Sol (o del de éste alrededor de la Tierra) se sobreentiende, implícitamente, del centro de gravedad del sistema Tierra-Luna y no de la Tierra simplemente. Así, en una cierta fecha, la eclíptica es el plano de la elipse que en dicha fecha describe alrededor del Sol el centro de gravedad del sistema Tierra-Luna. Las anomalías media o verdadera del Sol, al describir éste su órbita aparente, se refieren al centro de gravedad del sistema Tierra-Luna como foco, etc. etc.

Consideremos los elementos de la órbita aparente del Sol relativos a sus dimensiones, forma y situación. El primero es el semieje mayor  $a$  de dicha órbita, o distancia media de la Tierra al Sol, y su valor actual es  $a = 149,60 \cdot 10^6$  km. No debe confundirse este semieje mayor con la unidad astronómica (u.a.) de distancia, la cual se define como la distancia  $A$  que se deduce de la tercera ley de Kepler (aplicada a un secundario de masa despreciable).

$$n^2 A^3 = K^2 M$$

haciendo en ella  $n = 0,9856$  (movimiento medio diario correspondiente a un período de un año),  $K = 0,01720209895$  (constante de Gauss),  $M = 1$  (masa del Sol). Así se deduce que la distancia media de la Tierra al Sol vale

$$a = 1,000\,000\,03 \text{ u.a.}$$

La excentricidad de la órbita aparente es

$$e = 0,016751 \quad (1900,0)$$

disminuyendo a razón de  $0,000042$  por siglo. Realmente se trata de una variación periódica, con un período de unos 24.000 años.

Por último la situación de la elipse en su plano viene definida por la longitud media del perigeo  $\varpi$  :

$$\varpi = 281^\circ 13' 15''0 \quad (1900,0)$$

aumentando a razón de  $61''89$  por año, y, por consiguiente, dando el perigeo una vuelta en unos 21.000 años. Dicho avance del perigeo solar de  $61''89$  por año, con respecto al equinoccio móvil, es la suma de la precesión en longitud, de  $50''26$  por año, y del avance realmente experimentado por el perigeo, con respecto a un equinoccio fijo, de  $11''63$  por año, producido por las perturbaciones planetarias.

Debido a la acción perturbadora de los planetas, precesión planetaria, el plano de la eclíptica se desplaza, de modo que con respecto a la eclíptica

fija, la longitud del nodo de la móvil crece a razón de 33" por año mientras que el ángulo entre ambas aumenta en 0",47 por año.

En el movimiento elíptico, designando por M y L la anomalía y la longitud medias del Sol, respectivamente, se tiene:

$$L = \bar{\omega} + M \quad (1)$$

Analógamente, designando por V y  $\odot$  la anomalía y la longitud verdaderas del Sol, respectivamente, se tiene:

$$\odot = \bar{\omega} + V \quad (2)$$

Para obtener los argumentos relativos al centro de gravedad del sistema Tierra-Luna con respecto al Sol, basta sumar 180° a cada uno de los anteriores.

Considerando ya el movimiento geocéntrico del Sol, habida cuenta de las desigualdades lunar y planetarias, designando por l y b la longitud y la latitud geocéntricas del Sol, por R su radio vector, y por  $\epsilon$  la oblicuidad de la eclíptica, las coordenadas rectangulares ecuatoriales geocéntricas del Sol serán, evidentemente:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \epsilon & -\sin \epsilon \\ 0 & \sin \epsilon & \cos \epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \cos l \\ R \cos l \\ R \sin l \end{bmatrix}$$

o sea:

$$\begin{aligned} X &= R \cos b \cos l \\ Y &= R (\cos \epsilon \cos b \sin l - \sin \epsilon \sin b) \\ Z &= R (\sin \epsilon \cos b \sin l + \cos \epsilon \sin b) \end{aligned} \quad (3)$$

que por las sustituciones  $\cos b \simeq 1$ ,  $\sin b \simeq b''/206265$  suelen reducirse a:

$$\begin{aligned} X &= R \cos l \\ Y &= R (\cos \epsilon \sin l - 0,0000019 b'') \\ Z &= R (\sin \epsilon \sin l - 0,0000044 b'') \end{aligned} \quad (4)$$

Siendo, por otra parte:

$$\begin{aligned} X &= R \cos D \cos A \\ Y &= R \cos D \sin A \\ Z &= R \sin D \end{aligned} \quad (5)$$

en función de la ascensión recta A y la declinación D geocéntricas del Sol, identificando con (4) y prescindiendo ahora de  $b''$  ( $|b''| < 1,2$ ), finalmente:

$$\left. \begin{aligned} \cos D \cos A &= \cos l \\ \cos D \sin A &= \cos \epsilon \sin l \\ \sin D &= \sin \epsilon \sin l \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

## 4.2 Aberración de la luz

Se entiende por aberración de la luz el fenómeno, debido a la finitud de la velocidad  $\underline{C}$  de propagación de la luz, por el cual los astros no se ven desde la Tierra en la posición que ocupan en el instante de la observación.

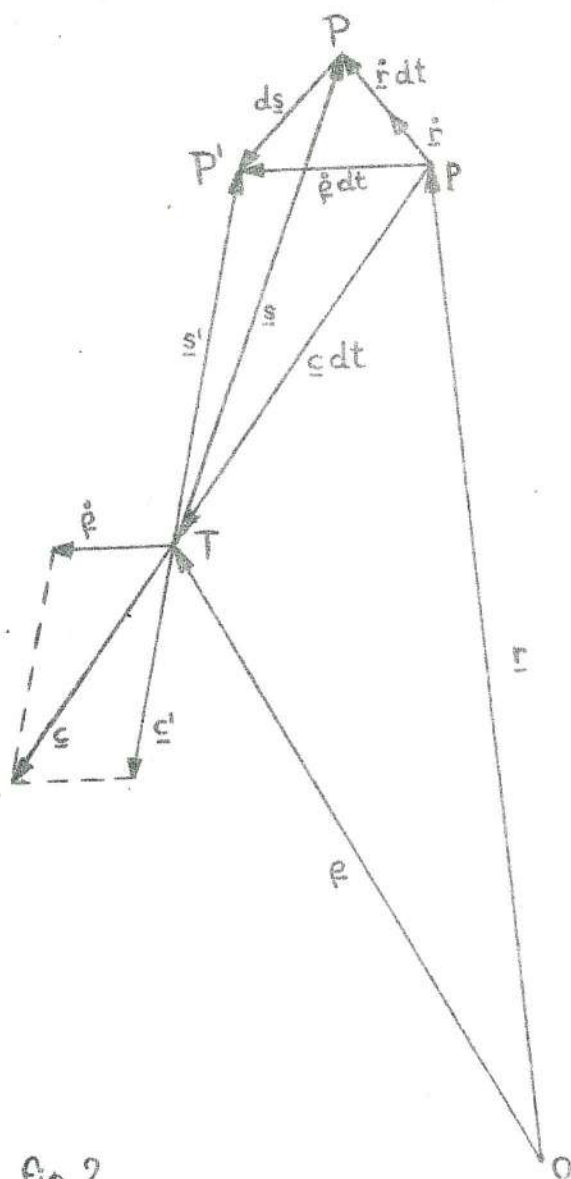


fig. 2

Limitándonos a la interpretación clásica del fenómeno (la relativista introduce una corrección del orden de  $0,001$ , no comprobable experimentalmente), sean (fig. 2) con respecto a un sistema inercial  $O$ :  $p$  la posición de un astro cuando la luz sale de él;  $P$  la posición del mismo cuando dicha luz llega a la Tierra  $T$ ;  $P'$  la posición en la cual se observa el astro en tal instante. Sean, además,  $\underline{r}$  y  $\underline{g}$  los vectores de posición del astro y de la Tierra, y  $\dot{\underline{r}}$  y  $\dot{\underline{g}}$  sus respectivas velocidades, que consideraremos constantes en el tiempo de luz  $dt$  que la luz tarda en pasar de  $p$  a  $T$ . El fenómeno es, ciertamente, el resultado de la superposición de otros dos. Por una parte, mientras que la luz recorre el espacio  $pT$  a una velocidad  $\underline{C}$  y en un tiempo  $dt$ ,  $pT = \underline{C} dt$ , el astro  $p$  ha pasado a ocupar la posición  $P$ ,  $pP = \dot{\underline{r}} dt$ . Por otra parte, la luz incide sobre el observador  $T$  con una velocidad relativa  $\underline{C}' = \underline{C} - \dot{\underline{g}}$ , y éste observa el astro en una posición  $P'$  tal que  $pP' = \dot{\underline{g}} dt$ . Según esto, la corrección  $ds$  que hay que aplicar para pasar de la posición topocéntrica verdadera  $s$  a la aparente  $s'$  vale:

$$s' - s = ds = (\dot{\underline{g}} - \dot{\underline{r}}) dt$$

o, siendo  $pP \ll pT$  y  $dt = \frac{pT}{C} \sim \frac{PT}{C} = \frac{s}{C}$ , también, finalmente:

$$\frac{1}{s} ds = \frac{1}{C} (\dot{\underline{g}} - \dot{\underline{r}}) \quad (7)$$

Apliquemos ahora (7) al estudio de la aberración ánua de las estrellas, debida a la traslación de la Tierra alrededor del Sol (realmente alrededor del centro de gravedad del sistema solar, y así se considera en las "Efemérides Astronómicas" desde 1960). Para la mayoría de las estrellas es desconocido el término  $\dot{r} dt$ , aberración secular, y por ello su efecto se engloba en las posiciones medias de los catálogos. Según esto, expresando el movimiento de la Tierra en función del aparente del Sol alrededor de la Tierra,  $\underline{s} = -\underline{R}$ , la fórmula (7) se reduce a:

$$\frac{1}{s} \underline{ds} = - \frac{1}{c} \dot{\underline{R}} \quad (8)$$

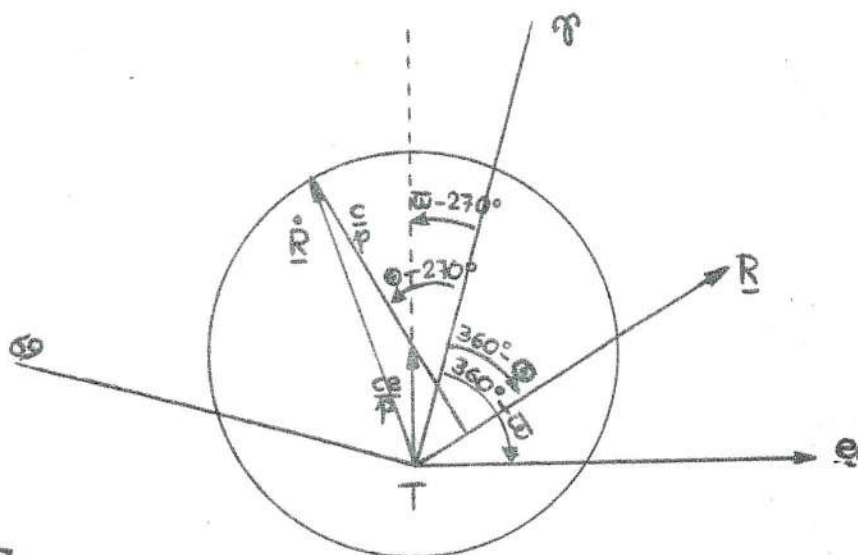


fig.3

En coordenadas rectilíneas eclípticas (Aries, Cáncer, Polo norte eclípticas) las componentes de  $\dot{\underline{R}}$  se obtienen fácilmente recordando 3.3 fórmula(19):

$$\dot{\underline{R}} = \frac{1}{p} c \wedge \frac{\underline{R}}{R} + \frac{1}{p} c \wedge \underline{e} \quad (9)$$

y proyectando sobre los ejes cada una de las componentes de dicha velocidad (fig. 3), en función de las longitudes del Sol y del perigeo,  $\odot$  y  $\bar{\omega}$ , respectivamente:

$$\dot{\underline{R}} = \frac{c}{p} \begin{bmatrix} \cos (\odot - 270^\circ) + e \cos (\bar{\omega} - 270^\circ) \\ \sin (\odot - 270^\circ) + e \sin (\bar{\omega} - 270^\circ) \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{e}{p} \begin{bmatrix} -(\sin \odot + e \sin \bar{\omega}) \\ \cos \odot + e \cos \bar{\omega} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo en (8) se obtiene, pues:

$$\frac{1}{s} \underline{ds} = k \begin{bmatrix} \sin \odot + e \sin \bar{\omega} \\ -(\cos \odot + e \cos \bar{\omega}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

habiendo introducido la constante de aberración:

$$k = \frac{c}{\delta p} = \frac{n a^2 \sqrt{1 - e^2}}{C a (1 - e^2)} = \frac{n a}{C \sqrt{1 - e^2}} = 20''50 \quad (11)$$

(valor internacional, pendiente de rectificación, 20''47).

Si la estrella en cuestión tiene unas coordenadas esféricas eclípticas  $L$ ,  $B$ ,  $s$ , las fórmulas diferenciales de paso de rectilíneas a esféricas, tras las consabidas rotaciones  $R_3 (L)$  y  $R_2 (90^\circ - B)$  (recordar paralaje diurna, p.52, fórmula (9)), son, según (10):

$$\begin{bmatrix} -dB \\ \cos B dL \\ \frac{1}{s} ds \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} \sin B & 0 & -\cos B \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos B & 0 & \sin B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos L & \sin L & 0 \\ -\sin L & \cos L & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \odot + e & \sin \bar{\omega} \\ -(\cos \odot + e & \cos \bar{\omega}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

y operando:

$$\left. \begin{aligned} dB &= -k \sin B [\sin (\odot - L) + e \sin (\bar{\omega} - L)] \\ dL &= -k \sec B [\cos (\odot - L) + e \cos (\bar{\omega} - L)] \\ \frac{1}{s} ds &= k \cos B [\sin (\odot - L) + e \sin (\bar{\omega} - L)] \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Corrientemente, en el cálculo de las posiciones aparentes de las estrellas (y así lo confirmó la U.A.I. en 1938) no se tienen en cuenta los términos en la excentricidad  $e$  de (12), que se engloban en las posiciones medias de los catálogos. Con ello (12) se reduce a:

$$\left. \begin{aligned} dB &= -k \sin B \sin (\odot - L) \\ dL &= -k \sec B \cos (\odot - L) \\ \frac{1}{s} ds &= -k \cos B \sin (\odot - L) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Para interpretar estas ecuaciones consideremos el sistema de ejes cartesianos, con origen en la estrella considerada, de eje  $x$  el máximo de longitud en el sentido de las latitudes decrecientes, eje  $y$  el menor de latitud en el sentido de las longitudes crecientes y eje  $z$  el radio  $s$ . Así se tiene, según (13):

$$\left. \begin{aligned} x &= -s dB = k s \sin B \sin (\odot - L) \\ y &= s \cos B dL = -k s \cos (\odot - L) \\ z &= ds = k s \cos B \sin (\odot - L) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

que son las ecuaciones paramétricas de una circunferencia, intersección de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = k^2 s^2$  con el plano  $x \cos B - z \sin B = 0$ , paralelo a la eclíptica. Debido a la aberración anual, la estrella parece describir pues en un año, alrededor de su posición verdadera y con movimiento uniforme, una circunferencia de radio  $ks$  paralela a la eclíptica. Dicha circunferencia se proyecta sobre el plano  $x$  y tangente a la esfera celeste, según una elipse de semiejes  $ks \sin B$  y  $ks$  llamada elipse de aberración.

Siendo la excentricidad de esta elipse  $e = \cos B$ , se reduce a una circunferencia en el polo de la eclíptica ( $B = 90^\circ$ ) y a un segmento rectilíneo en el plano de la misma ( $B = 0^\circ$ ).

La teoría expuesta sirve también para estudiar la aberración anual del Sol, pues, en efecto, estando este último muy cerca del centro de gravedad del sistema solar, el término  $\dot{r} dt$  es realmente pequeñísimo y despreciable y para él valen las fórmulas (8) a (12) sin más que hacer en estas últimas  $B \approx 0$ ,  $L \approx \odot$ .  
 $s \approx R$ :

$$\left. \begin{aligned} dB &= 0 \\ d\odot &= -k [1 + e \cos (\odot - \bar{\omega})] \\ dR &= -k R e \sin (\odot - \bar{\omega}) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Es decir, debido a la aberración de la luz, vemos al Sol con una longitud unos  $20''50$  menor que la que tiene realmente. Ahora ya no se desprecian los términos en la excentricidad, y tanto el término anual de la longitud como el valor relativo del radio vector  $\frac{1}{R} dR$  oscilan en  $\pm k e = \pm 0,34 = \pm 0,0000017$  alrededor de sus valores verdaderos, en el transcurso de un año.

Consideremos, por último, la aplicación de (7) al estudio de la aberración diurna de las estrellas, debida a la rotación de la Tierra sobre su eje. Excluidas ya las aberraciones secular y anual y pudiendo suponer ahora la Tierra esférica de radio medio  $\rho$ , en coordenadas ecuatoriales se tiene, con notaciones conocidas:

$$\underline{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} \quad \underline{\rho} = \begin{bmatrix} \rho \cos \phi \cos \theta \\ \rho \cos \phi \sin \theta \\ \rho \sin \phi \end{bmatrix} \quad \underline{\dot{\rho}} = \underline{\omega} \wedge \underline{\rho} = \rho \cos \phi \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

y, por tanto, sustituyendo en (7), introduciendo para cada observador su constante de la aberración diurna:

$$k' = \frac{\omega \rho \cos \phi}{c} = 0,32 \cos \phi = 0,021 \cos \phi$$

y aplicando las fórmulas diferenciales de paso de rectilíneas a esféricas:

$$\begin{bmatrix} -dD \\ \cos D dA \\ \frac{1}{s} ds \end{bmatrix} = k' R_2 (90^\circ - D) R_3 (A) \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

y operando, recordando que  $\odot - A = H$ , finalmente:

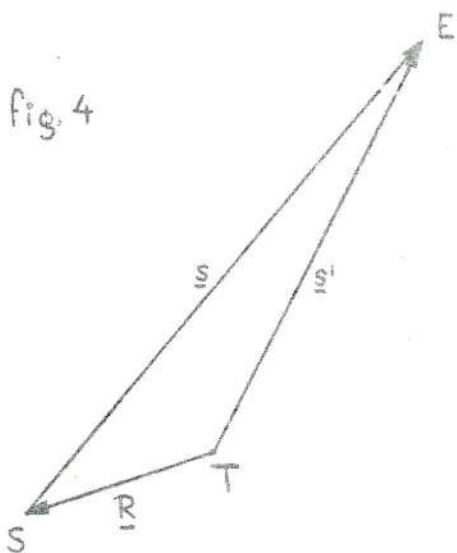
$$\left. \begin{aligned} dD &= k' \sin D \sin H \\ dA &= k' \sec D \cos H \\ \frac{1}{s} ds &= -k' \cos D \sin H \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Dada su pequeñez, la corrección de aberración diurna de una estrella sólo se aplica en observaciones de mucha precisión ( en general en observaciones meridianas), y en tal caso se efectúa simultáneamente con las de refracción y paralaje diurna, para reducir a verdaderas geocéntricas las posiciones aparentes observadas.

#### 4.3 Paralaje ánuo

Debido al movimiento de traslación de la Tierra alrededor del Sol, por un efecto paraláctico, las estrellas próximas parecen oscilar alrededor de sus posiciones medias en el transcurso del año. Este fenómeno, llamado paralaje ánuo de las estrellas, es mucho menos notable que el de la aberración ánuo, pues, dada la distancia a que se encuentran, su semiamplitud no alcanza nunca 1" (frente a los 20,50 de la aberración ánuo).

Si, procediendo como en el apartado anterior, expresamos el movimiento de la Tierra en función del aparente del Sol, en el triángulo STE, Sol-Tierra-Estrella, de la fig. 4, se tiene:



$$\underline{ds} = \underline{s'} - \underline{s} = \underline{R} \quad (17)$$

fórmula que suministra la corrección de paralaje  $\underline{ds}$  a aplicar para pasar de coordenadas heliocéntricas  $\underline{s}$  (verdaderas) a geocéntricas  $\underline{s'}$  (aparentes),

En coordenadas eclípticas se tiene, mediante las fórmulas diferenciales de paso de rectilíneas a esféricas y suponiendo circular la órbita aparente del Sol:

$$\begin{bmatrix} -s dB \\ s \cos B dL \\ ds \end{bmatrix} = R_2 (90^\circ - B) R_3 (L) \begin{bmatrix} R \cos \odot \\ R \sin \odot \\ 0 \end{bmatrix}$$

y operando:

$$\left. \begin{aligned} dB &= -\pi \sin B \cos (\odot - L) \\ dL &= \pi \sec B \sin (\odot - L) \\ \frac{1}{s} ds &= \pi \cos B \cos (\odot - L) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

donde se ha hecho  $\frac{R}{s} = \pi$ , paralaje de la estrella o ángulo bajo el cual se ve desde la misma el radio de la órbita terrestre.

También ahora podemos considerar el sistema de ejes  $x$  y  $z$  que introducimos al interpretar geométricamente la aberración ánuas y escribir, según (18):

$$\left. \begin{aligned} x &= -s dB = R \sin B \cos (\odot - L) \\ y &= s \cos B dL = R \sin (\odot - L) \\ z &= ds = R \cos B \cos (\odot - L) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Luego, como en el apartado anterior, si suponemos  $R$  constante, debido a la paralaje ánuas la estrella parece describir en un año, alrededor de su posición verdadera y con movimiento uniforme, una circunferencia de radio  $R$  paralela a la eclíptica. Dicha circunferencia se proyecta sobre el plano  $x$  y, tangente a la esfera celeste, según una elipse de semiejes  $R \sin B$  y  $R$ , y excentricidad  $\cos B$ , llamada elipse de paralaje. Componiendo la aberración y la paralaje ánuas, dadas por las dos primeras componentes de (14) y (19), se obtiene todavía otra elipse:

$$\begin{aligned} x &= s \sin B \left[ k \sin (\odot - L) + \pi \cos (\odot - L) \right] \\ y &= s \left[ -k \cos (\odot - L) + \pi \sin (\odot - L) \right] \end{aligned}$$

de semiejes  $s \sin B \sqrt{k^2 + \pi^2}$  y  $s \sqrt{k^2 + \pi^2}$ , y excentricidad  $\cos B$ , órbita aparente de la estrella alrededor de su posición verdadera, recorrida en un año por el efecto combinado de la aberración y la paralaje ánuas.

En coordenadas ecuatoriales se tendrá, pasando antes las eclípticas geocéntricas del Sol a ecuatoriales mediante la rotación  $R_1 (-\epsilon)$  y aplicando después las fórmulas diferenciales de paso de rectilíneas a esféricas:

$$\begin{bmatrix} -s dD \\ s \cos D dA \\ ds \end{bmatrix} = R_2 (90^\circ - D) R_3 (A) R_1 (-\epsilon) \begin{bmatrix} R \cos \odot \\ R \sin \odot \\ 0 \end{bmatrix}$$

y operando e introduciendo la paralaje  $\pi$  de la estrella, limitándonos a la consideración de las dos primeras componentes:

$$\begin{aligned} dD &= \pi \left[ (\cos D \sin \epsilon - \sin D \sin A \cos \epsilon) \sin \odot - \sin D \cos A \cos \odot \right] \\ dA &= \pi \sec D \left[ \cos A \cos \epsilon \sin \odot - \sin A \cos \odot \right] \end{aligned} \quad (20)$$

Actualmente, con más precisión, en las "Efemérides Astronómicas" todavía se da otra forma a las ecuaciones (20) expresándolas en función de las coordena-

das rectangulares geocéntricas del Sol  $X, Y, Z$ , calculables mediante (4). La órbita aparente del Sol se supone ahora elíptica y con foco en la Tierra (y no en el centro de gravedad del sistema Tierra Luna), y tomando como unidad la distancia media de la Tierra al Sol la paralaje de la estrella vale, exactamente,  $\pi = \frac{1}{s}$ .

Aplicando las fórmulas de paso se tiene:

$$\begin{bmatrix} -s \, dD \\ s \cos D \, dA \\ ds \end{bmatrix} = R_2 (90^\circ - D) R_3 (A) \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

y operando, haciendo  $\frac{1}{s} = \pi$ , finalmente:

$$\left. \begin{aligned} dD &= \pi (-X \sin D \cos A - Y \sin D \sin A + Z \cos D) \\ dA &= \pi \sec D (-X \sin A + Y \cos A) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

#### 4.4 Posiciones aparentes

A lo largo de los dos apartados anteriores se ha podido ver que se llaman posiciones aparentes de las estrellas a las geocéntricas deducidas de las verdaderas heliocéntricas teniendo en cuenta las correcciones de aberración y de paralaje ánuas. Si se conoce, dichas posiciones deben corregirse todavía de movimiento propio.

Como estudiaremos con más detalle en el capítulo VII, al moverse una estrella con respecto al Sol, la componente perpendicular (al radio vector Sol-Estrella) de su velocidad relativa da lugar, en un año, a un desplazamiento angular heliocéntrico de dicha estrella, movimiento propio de la misma. Unas 300 estrellas presentan movimientos propios comprendidos entre 1" y 5" por año, y unas pocas entre 5" y 10" por año (estrellas "proyectil"); en media, el movimiento propio de las estrellas visibles a simple vista es del orden de 0,1" por año.

Proyectando sobre el paralelo y el meridiano celestes que pasan por la estrella, (fig. 5), en función del ángulo de posición  $\theta$  las componentes del movimiento propio  $\mu$  son, evidentemente:

$$\left. \begin{aligned} \mu_A \cos D &= \mu \sin \theta \\ \mu_D &= \mu \cos \theta \end{aligned} \right\}$$

de donde se deduce el movimiento propio en ascensión recta  $\mu_A$  y el movimiento propio en declinación  $\mu_D$ :

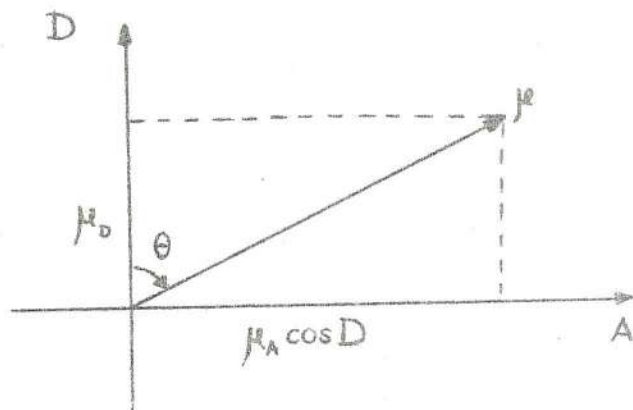


fig. 5

$$\left. \begin{aligned} \mu_A &= \mu \sin \theta \sec D \\ \mu_D &= \mu \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Por lo general, las posiciones de las estrellas se corrigen simultáneamente de precesión y de movimiento propio y, a tal efecto, en los catálogos de posiciones medias figuran sendas columnas en las que se dan, para cada estrella, la variación ánua en ascensión recta y en declinación, suma de los correspondientes precesión ánua y movimiento propio.

En el apartado 2.8 ya indicamos como se reducían las posiciones medias a verdaderas mediante la introducción de los números de Bessel y las constantes estelares. Veamos ahora, análogamente, como se procede para corregir de aberración y paralaje ánuas las coordenadas ecuatoriales de las estrellas.

En cuanto se refiere a la aberración ánua, despreciando los términos en la excentricidad que, como dijimos, se engloban en las posiciones medias de los catálogos, expresando  $\dot{R}$  en coordenadas ecuatoriales mediante la rotación  $R_1(-\epsilon)$  y aplicando las fórmulas diferenciales de paso de rectilíneas a esféricas, según (8) se tiene, evidentemente:

$$\begin{bmatrix} -dD \\ \cos D dA \\ \frac{1}{s} ds \end{bmatrix} = k R_2(90^\circ - D) R_3(A) R_1(-\epsilon) \begin{bmatrix} \sin \odot \\ \cos \odot \end{bmatrix}$$

y operando, considerando sólo las dos primeras componentes:

$$\left. \begin{aligned} dA &= -k \sec D \left[ \cos A \cos \epsilon \odot + \sin A \sin \odot \right] \\ dD &= -k \left[ (\cos D \sin \epsilon - \sin D \sin A \cos \epsilon) \cos \odot + \sin D \cos A \sin \odot \right] \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Introduciendo ahora los números de Bessel y las constantes estelares:

$$\left. \begin{aligned} C &= -k \cos \epsilon \cos \odot & D &= -k \sin \odot \\ c &= \cos A \sec D & d &= \sin A \sec D \\ c' &= \tan \epsilon \cos D - \sin A \sin D & d' &= \cos A \sin D \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

las relaciones (23) pueden ponerse en la forma:

$$\left. \begin{aligned} dA &= C c + D d \\ dD &= C c' + D d' \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Para la corrección de paralaje ánuo, siendo según (4), con mucha aproximación,  $Z = Y \tan \varepsilon$ , las fórmulas (21) suelen escribirse:

$$\left. \begin{aligned} dA &= \pi (c Y - d X) \\ dD &= \pi (c' Y - d' X) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

en función de las constantes estelares (24).

Resumiendo lo visto hasta ahora, recordando las fórmulas (9) del apartado 2.8 y las expresiones de los números de Bessel y de las constantes estelares que en ellas figuran (pág. 89), según (25) y (26), la reducción de posiciones medias a posiciones aparentes se efectuará aplicando a las primeras las correcciones:

$$\left. \begin{aligned} dA &= A a + B b + C c + D d + \pi (c Y - d X) + \tau \mu_A \\ dD &= A a' + B b' + C c' + D d' + \pi (c' Y - d' X) + \tau \mu_D \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

o, también, con notación matricial:

$$\begin{bmatrix} dA \\ dD \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & d \\ c' & d' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C + \pi Y \\ D - \pi X \end{bmatrix} + \tau \begin{bmatrix} \mu_A \\ \mu_D \end{bmatrix} \quad (28)$$

Para el Sol, la posición aparente del mismo, materializada por el Sol aparente, se obtiene aplicando a su posición verdadera la corrección de aberración ánuo. En coordenadas eclípticas ésta viene dada por las fórmulas (15), obteniéndose prácticamente la corrección en longitud (siempre negativa) dividiendo la constante de aberración  $k = 20''.50$  por el radio vector geométrico, no corregido de aberración:

$$d \odot = - k (1 + e \cos V) \simeq - \frac{k}{R} \quad (29)$$

( $p = a (1 - e^2) \simeq 1$  u.a.). De las coordenadas eclípticas aparentes se pasa luego a las ecuatoriales aparentes, referidas al equinoccio verdadero y al ecuador de la fecha, aplicando las fórmulas de paso tomando la oblicuidad de la eclíptica de la fecha. Estas consideraciones deben tenerse muy en cuenta en las páginas que siguen pues, en efecto, como veremos más adelante, el tiempo solar viene definido por el movimiento del Sol aparente.

#### 4.5 Años y estaciones

Se llama año al intervalo de tiempo transcurrido entre dos pasos consecutivos del Sol por un determinado punto de su órbita. Según sea dicho punto el año recibe distintas denominaciones, variando su duración debido al movimiento relativo de tales puntos.

Año sidéreo es el intervalo de tiempo transcurrido entre dos pasos consecutivos del Sol por un punto fijo de la eclíptica, o tiempo necesario para que la longitud media del Sol, referida a un equinoccio fijo, aumente en  $360^\circ$ .

Año trópico es el intervalo de tiempo transcurrido entre dos pasos consecutivos del Sol por el punto Aries medio, o tiempo necesario para que la longitud media del Sol, referida al equinoccio medio, aumente en  $360^\circ$ . Debido al movimiento de precesión de los equinoccios, el equinoccio fijo y, por ello, el año trópico es más corto que el año sidéreo.

Año anomalístico es el intervalo de tiempo transcurrido entre dos pasos consecutivos del Sol por el perigeo, o tiempo necesario para que la longitud media del Sol, referida al perigeo, aumente en  $360^\circ$ . Debido al giro de la línea de los ápsides de la órbita solar, el perigeo avanza  $11,63$  por año respecto a un equinoccio fijo y, por ello, el año anomalístico es más largo que el año sidéreo.

Determinando el número de días medios que separan dos equinoccios muy alejados, Newcomb obtuvo la siguiente duración del año trópico:

$$T = 365,242199 \text{ días medios} \quad (30)$$

La variación secular de la constante de la precesión en ascensión recta, hace que dicha duración, dada para el día 1º de enero de 1900, disminuya a razón de  $0,53$  por siglo.

Según las anteriores consideraciones, las duraciones de los años sidéreo  $S$  y anomalístico  $A$  vendrán dadas por las proporciones:

$T$	$S$	$A$
$360^\circ - 50,26$	$360^\circ$	$360^\circ \div 11,63$

o, sustituyendo el valor (30):

$$S = 365,256360 \text{ días medios} \quad (31)$$

$$A = 365,259641 \text{ días medios} \quad (32)$$

Los años sidéreo y anomalístico aumentan a razón de  $0,01$  y  $0,26$  por siglo, respectivamente.

Como es sabido el año trópico, al regular la sucesión de las estaciones, es la base del actual calendario. Habiendo en 400 años civiles 303 comunes y 97 bisiestos (aquellos cuyas dos últimas cifras dan un número divisible por cuatro, excepto aquellos que terminan en dos ceros y cuyas dos primeras ci-

fras dan un número no divisible por cuatro), nuestro año civil equivale a

$$\frac{303.365 + 97.366}{400} = 365.2425 \text{ días medios} \quad (33)$$

lo cual representa un exceso de unos 0,0003 días medios sobre la duración del año trópico (30). Dado que la reforma del calendario tuvo lugar hace unos 400 años, dentro de unos 3000 años la acumulación de dicho exceso arrojará un desajuste de 1 día.

La reforma a que nos hemos referido se llevó a cabo, como sabemos, sobre el calendario juliano (establecido por Julio César), cuyo año juliano tenía una duración media de

$$\frac{3.365 + 1.366}{4} = 365,25 \text{ días medios}$$

siendo, por tanto, 0,0078 días medios más largo que el año trópico. Su múltiplo, el siglo juliano de 36525 días medios, se utiliza todavía en los cálculos astronómicos.

Para facilitar el cálculo de largos intervalos de tiempo se utiliza también el llamado periodo juliano, (ideado por Julio Scaliger) que empezó el 1º de enero del año 4713 antes de nuestra era y en el cual se vienen contando los días por orden correlativo, comenzando en el uno y siguiendo sin interrupción como los números naturales. De esta manera sabiendo las fechas julianas en que ocurren dos fenómenos cualesquiera, el intervalo entre los mismos se halla con una simple sustracción. Al 1º de enero de 1966 le corresponde el día juliano 2.439.126. El día juliano comienza a las 12<sup>h</sup> del día civil correspondiente.

Así como el año civil, sea común o bisiesto, empieza invariablemente a medianoche en Greenwich (0<sup>h</sup> de T.U.) del 1º de enero, como ya indicamos en el apartado 2.8 (pág. 83), el año astronómico o año ficticio de Bessel comienza cuando es igual a 280º la longitud media del Sol corregida de la aberración de la fecha:

$$L - 20''84 = 280^\circ \quad (34)$$

( $20''84 \approx k(1 + e)$ ). Dicho instante se indica colocando un cero a la derecha del año, separado por una coma; así 1966,0 es el comienzo del año astronómico de 1966. Un año astronómico puede empezar dentro del 31 de diciembre del año civil anterior, el cual, a estos efectos, se considera día cero de enero del año en cuestión. Así, por ejemplo, 1966,0 = 0<sup>d</sup>,799 de enero de 1966. La duración del año astronómico es de un año trópico (30), y así, según el ejemplo considerado, el principio del año astronómico de 1967 tiene lugar el

$$1967,0 = 0^d,799 + 365^d,242 - 365^d = 1^d,041 \text{ de enero de 1967.}$$

Con la notación  $\gamma$  hemos designado, en la reducción de posiciones medias verdaderas (apartado 2.8) y de éstas a aparentes (apartado 4.4), la fracción de año trópico transcurrida desde el principio del año astronómico, para cuyo instante conocemos tales posiciones medias. Estas se han obtenido corrigiendo de precesión en un número entero de años trópicos -reducción al año las posiciones medias de un catálogo de estrellas (éstos suelen confeccionarse para los equinoccios de 1900,0 ó de 1950,0).

Por definición, las estaciones comienzan exactamente en los instantes en los cuales el Sol aparente entra en los signos de Aries, Cáncer, Libra y Capricornio, o, dicho de otro modo, cuando la longitud aparente del Sol vale  $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  o  $270^\circ$ , respectivamente. Tales instantes, debido a la sucesión de los años comunes y bisiestos, pueden tener lugar en dos fechas distintas para cada estación y son, para el hemisferio boreal:

Primavera:	20 ó 21 de marzo
Verano	21 ó 22 de junio
Otoño	22 ó 23 de septiembre
Invierno	21 ó 22 de diciembre

Si despreciamos la influencia de pequeñas variaciones periódicas y seculares (aberración anual, desigualdad mensual, avance perigeo solar, etc.), podemos calcular, hasta la centésima de día, la duración de cada estación limitándonos a la consideración del movimiento elíptico del Sol (fig. 6).

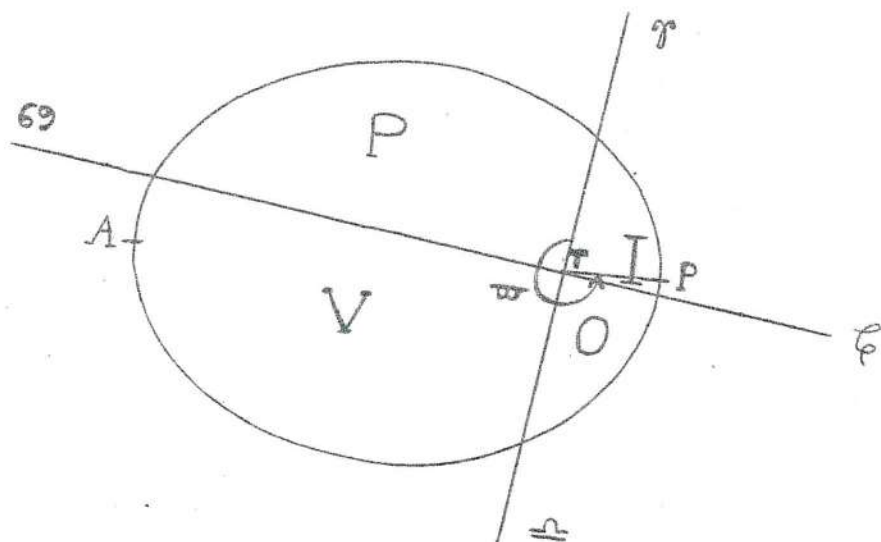


fig. 6

Para ello se determina el área de la elipse correspondiente a los valores de la anomalía verdadera al principio y al final de la estación. Bastará entonces, según la ley de las áreas, dividir el año en partes proporcionales a

las áreas que obtengamos:

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2} \int_{V_1}^{V_1 + \frac{\pi}{2}} r^2 dV = \frac{p^2}{2} \int_{V_1}^{V_1 + \frac{\pi}{2}} \frac{dV}{(1 + e \cos V)^2} = \\
 &= \frac{p^2}{2} \int_{V_1}^{V_1 + \frac{\pi}{2}} (1 - 2e \cos V + 3e^2 \cos^2 V - \dots) dV = \\
 &= \frac{p^2}{2} \left[ V - 2e \sin V + 3e^2 \left( \frac{V}{2} + \frac{\sin 2V}{4} + \dots \right) \right]_{V_1}^{V_1 + \frac{\pi}{2}} = \\
 &= \frac{a^2 (1 - e^2)^2}{2} \left[ \frac{\pi}{2} - 2\sqrt{2e} \cos \left( V_1 + \frac{\pi}{4} \right) + 3e^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\sin 2V_1}{2} \right) - \dots \right]
 \end{aligned}$$

Designando por  $A$  el área de la elipse y por  $D$  la duración de una estación que se inicie con una anomalía verdadera  $V_1$ , tendremos:

$$\begin{aligned}
 A &= \pi a b = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2} \\
 \frac{D}{T} = \frac{S}{A} &= \frac{(1 - e^2)^{3/2}}{2} \left[ \frac{\pi}{2} - 2\sqrt{2e} \cos \left( V_1 + \frac{\pi}{4} \right) + 3e^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\sin 2V_1}{2} \right) + \dots \right]
 \end{aligned}$$

y desarrollando en potencias de  $e$ :

$$D = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{2e}}{\pi} \cos \left( V_1 + \frac{\pi}{4} \right) - \frac{3e^2}{4} \sin 2V_1 + \dots \text{ años trópicos.}$$

Al iniciarse la primavera de 1950,0 la anomalía verdadera era  $V_1 = 77^\circ 55' 10''$ .

Sustituyendo en la fórmula encontrada este ángulo para la primavera, y

$V_1 + 90^\circ$ ,  $V_1 + 180^\circ$ ,  $V_1 + 270^\circ$ , para el verano, otoño e invierno, respectivamente, resultan las siguientes duraciones en días medios:

Primavera:	$91,31 + 1,50 - 0,01 = 92,80$	días medios
Verano:	$91,31 + 2,31 + 0,01 = 93,63$	" "
Otoño:	$91,31 - 1,50 - 0,01 = 89,80$	" "
Invierno:	$91,31 - 2,31 + 0,01 = 89,01$	" "

Dichas duraciones varían lentamente con el transcurso de los años, debido al avance de  $61,89$  por año que experimenta el perigeo solar con respecto al equinoccio móvil (recuérdese 4.1). Y así, siendo en 1950,0  $\bar{\omega} = 282^\circ 4' 50''$ , se deduce fácilmente, p.e., que hace unos 700 años, es decir hacia el año 1250, el

Sol pasaba por el perigeo en el solsticio de invierno y por tanto duraban igual la primavera y el verano, y asimismo el otoño y el invierno.

#### 4.6 Ecuación del centro y reducción al ecuador

Como ya indicamos en el apartado 1.7, al describir el Sol su órbita aparente, de acuerdo con la ley de las áreas, no es uniforme la variación de su longitud. Aunque esta última lo fuese, tampoco lo sería, evidentemente, la variación de su ascensión recta. Para poder utilizar las observaciones del Sol para la medida del tiempo y así llegar a definir el Sol medio, se impone pues estudiar con detalle tales hechos.

Según vimos al principio de este capítulo, al estudiar la órbita aparente del Sol, designando por  $L$  y  $\odot$  sus longitudes media y verdadera baricéntricas (relativas al centro de gravedad del sistema Tierra-Luna), por  $\bar{w}$  la longitud media de su perigeo -todas referidas al equinoccio medio de la fecha- y por  $M$  y  $V$  sus anomalías media y verdadera, se tiene:

$$\left. \begin{aligned} L &= \bar{w} + M \\ \odot &= \bar{w} + V \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Se llama ecuación del centro a la diferencia entre las longitudes verdadera y media del Sol:

$$C = \odot - L = V - M \quad (36)$$

y es, por lo tanto, la corrección que hay que aplicar a la longitud  $L$  de un Sol ficticio para obtener la longitud  $\odot$  del Sol verdadero. Recordando la fórmula (37) del apartado 3.6 (pág. 107), que suministra la anomalía verdadera en función de la media:

$$V = M + 2e \sin M + \frac{5}{4} e^2 \sin 2M + \dots$$

la ecuación del centro puede expresarse, según (35), en función de la longitud media  $L$  del Sol:

$$C = 2e \sin (L - \bar{w}) + \frac{5}{4} e^2 \sin 2(L - \bar{w}) + \dots \quad (37)$$

De las fórmulas del movimiento elíptico se desprende inmediatamente que la ecuación del centro es positiva entre el perigeo y el apogeo en la primera mitad de la elipse y negativa entre el apogeo y el perigeo en la segunda mitad de la misma, anulándose en los extremos de la línea de los

ápsides. Presentará pues un máximo en su primera mitad ( y un mínimo en la segunda) que vamos a calcular a continuación. Siendo según la ley de las áreas:

$$R^2 \dot{V} = n a b = n a^2 \sqrt{1 - e^2}$$

se tendrá, según (36):

$$\dot{C} = \dot{V} - n = n \left( \frac{a^2 \sqrt{1 - e^2}}{R^2} - 1 \right) = 0$$

es decir, en el máximo de la ecuación del centro:

$$R^2 = a^2 \sqrt{1 - e^2} = a b \quad (38)$$

el radio vector es media geométrica entre los semiejes mayor y menor. Comparando (38) con la ecuación polar de la elipse:

$$R = \frac{a (1 - e^2)}{1 + e \cos V}$$

y eliminando R entre ambas, tras sencillas operaciones se obtiene:

$$\cos V = \frac{(1 - e^2)^{3/4} - 1}{e} \quad (39)$$

Análogamente, eliminando R entre (38) y la relación:

$$R = a (1 - e \cos E)$$

fácilmente se tiene:

$$\cos e = \frac{1 - (1 - e^2)^{1/4}}{e} \quad (40)$$

Siendo, según (39) y (40),  $V > \frac{\pi}{2}$  y  $E < \frac{\pi}{2}$ , la ecuación del centro pasa por su máximo en un punto de la órbita comprendido entre los extremos del parámetro y del eje menor. Dicho máximo puede calcularse, conocidas las correspondientes V y E por (39) y (40), buscando M por la ecuación de Kepler y efectuando la diferencia V - M.

Para el Sol,  $e = 0,0168$ , la aplicación de las fórmulas anteriores suministra los valores:  $V = 90^\circ 43' 30''$ ,  $E = 89^\circ 45' 20''$ ,  $M = 88^\circ 47' 35''$ ,  $C = 1^\circ 55' 55''$ .

Se llama reducción al ecuador a la corrección que hay que aplicar a la longitud  $\odot$  del Sol, verdadero para obtener su ascensión recta A:

$$Q = A - \odot \quad (41)$$

Siendo según (6) (poniendo  $\odot$  en lugar de 1):

$$\tan \Lambda = \cos \delta \tan \odot \quad (42)$$

procediendo como en 2.1 (pág. 45) y manteniéndose siempre  $Q$  muy pequeño, se tiene:

$$\tan Q = \tan (\Lambda - \odot) = \frac{\tan \Lambda - \tan \odot}{1 + \tan \Lambda \tan \odot} = - \frac{(1 - \cos \delta) \tan \odot}{1 + \cos \delta \tan^2 \odot} \quad (43)$$

y, operando como allí:

$$Q = - \tan^2 \frac{\delta}{2} \sin 2 \odot + \frac{1}{2} \tan^4 \frac{\delta}{2} \sin 4 \odot - \dots \quad (44)$$

desarrollo en serie que converge rápidamente, (pues  $\tan^2 \delta \approx 0,04$ ).

Según (43) la reducción al ecuador se anula para  $\tan \odot = 0$  y  $\tan \odot = \infty$ , es decir, cuatro veces en el transcurso de un año, para  $\odot = 0^\circ$ ,  $\odot = 90^\circ$ ,  $\odot = 180^\circ$  y  $\odot = 270^\circ$ , lo cual tiene lugar en los equinoccios y en los solsticios. Para encontrar el máximo (y mínimo) de  $Q$ , derivando (43) se tiene:

$$\frac{d(\tan Q)}{d(\tan \odot)} = (1 - \cos \delta) \frac{1 - \cos \delta \tan^2 \odot}{(1 + \cos \delta \tan^2 \odot)^2} = 0$$

y, por tanto,  $Q$  pasa por un máximo para:

$$\tan \odot = \frac{1}{\sqrt{\cos \delta}} \quad (45)$$

Según (43), para dicho máximo es:

$$\tan Q = \frac{1 - \cos \delta}{2 \sqrt{\cos \delta}} \quad (46)$$

Haciendo  $\delta = 23^\circ 27'$  en (45) se obtiene:  $\odot = \pm 46^\circ 14' \pm 180^\circ$ ; y según (46):  $Q = \pm 2^\circ 28'$ .

#### 4.7 Ecuación de tiempo

De las definiciones (36) y (41) de la ecuación del centro y de la reducción al ecuador, sumando ordenadamente se deduce:

$$C + Q = A - L$$

y por tanto:

$$A = L + C + Q \quad (47)$$

Elementalmente, si pudiésemos introducir un Sol medio cuya ascensión recta  $A_m$  fuese igual a la longitud media  $L$  del Sol ficticio ( ambas referidas al equinoccio medio de la fecha):

$$A_m = L \quad (48)$$

sustituyendo en (47) y recordando lo dicho en el apartado 1.7 (pág. 25), el paso del tiempo medio  $H_m$  al verdadero  $H$  ( $\approx H_v$ ) se efectuaría aplicando al primero una ecuación de tiempo:

$$E = H - H_m = A_m - A = - (C + Q) \quad (49)$$

Dicha ecuación de tiempo se calcula a partir de los desarrollos en serie de  $C$  y  $Q$ , (37) y (44), y viene dada día por día en los anuarios astronómicos. Reduciéndonos a la consideración de los primeros términos de  $C$  y  $Q$ , y poniendo en esta última  $\odot \approx L$  para simplificar:

$$E = - 2 e \sin ( L - \bar{W} ) + \tan^2 \frac{e}{2} \sin 2L \quad (50)$$

se obtiene, por composición, la adjunta gráfica de la ecuación de tiempo (fig. 7).

Aproximando hasta el segundo, resumimos en el siguiente cuadro sus ceros y extremos, con indicación de las fechas en que tienen lugar:

febrero	11	$E = - 14^m$	$22^s$	mínimo absoluto
abril	16	$0^m$	$0^s$	
mayo	15	$3^m$	$47^s$	máximo
junio	15	$0^m$	$0^s$	
julio	27	$- 6^m$	$23^s$	mínimo
septiembre	2	$0^m$	$0^s$	
noviembre	4	$16^m$	$24^s$	máximo absoluto
diciembre	25	$0^m$	$0^s$	

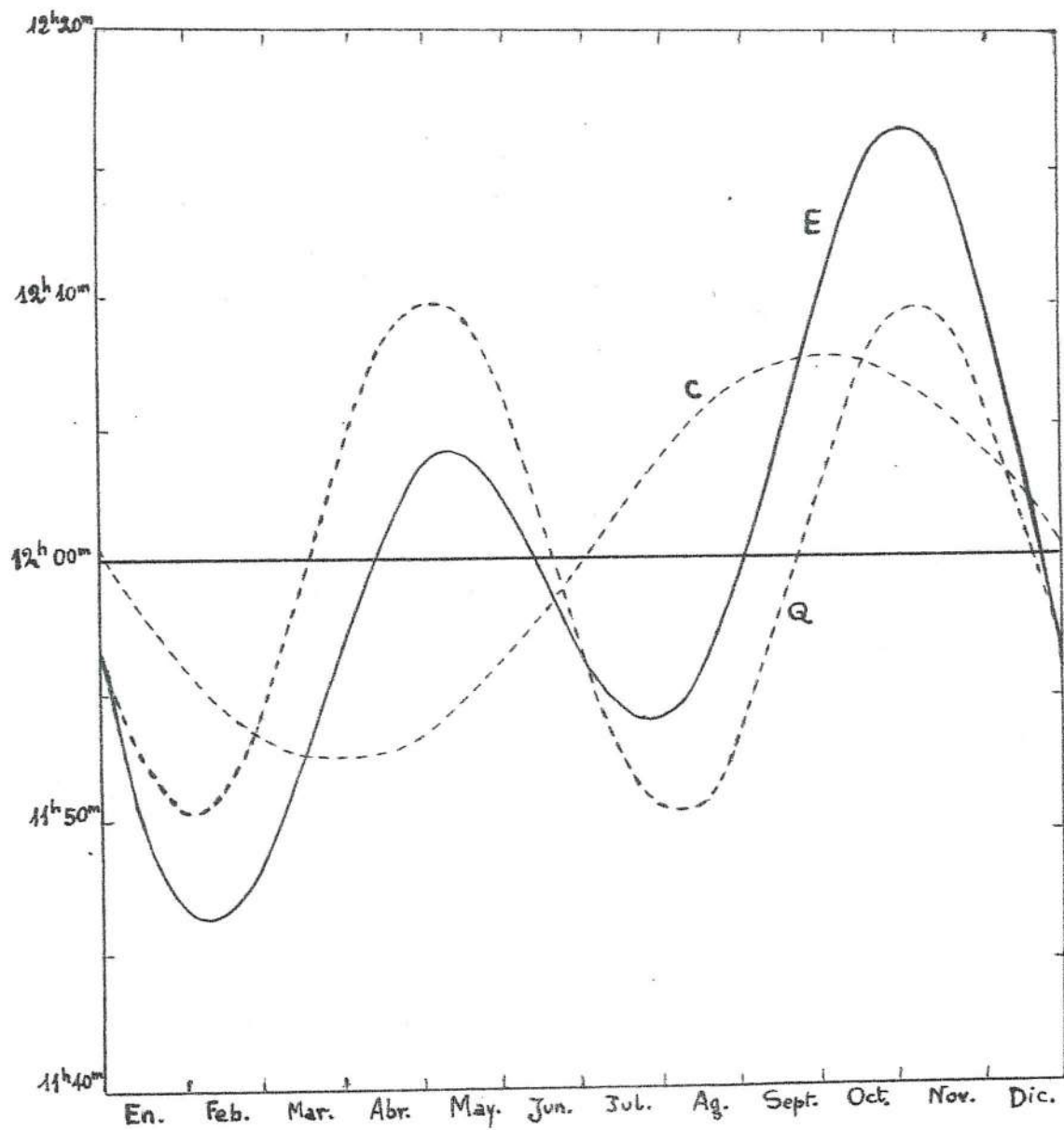


fig. 7

De las relaciones ya conocidas:

$$l^{dv} = l^{ds} + \Delta A$$

$$l^{dm} = l^{ds} + \Delta A_m$$

restando miembro a miembro se obtiene:

$$l^{dv} = l^{dm} + (\Delta A - \Delta A_m)$$

y siendo, según (49):  $\Delta E = \Delta A_m - \Delta A$

se tendrá, finalmente:

$$l^{dv} = l^{dm} - \Delta E$$

es decir: un día verdadero equivale a un día medio menos el cambio diario de la ecuación de tiempo.

Siendo, según (50), en primera aproximación:

$$\Delta E \approx \left[ -2e \cos(L - \bar{\omega}) + 2 \tan^2 \frac{e}{2} \cos 2L \right] \Delta L$$

los ceros, máximos y mínimos de  $\Delta E$  darán las fechas en las cuales son iguales las duraciones de los días verdadero y medio a aquellas en que los días verdaderos son de máxima o mínima duración. Así obtenemos el siguiente cuadro resumen:

febrero	11	$\Delta E =$	$0^s$	
marzo	28		$18^s,4$	máximo
mayo	15		$0^s$	
junio	20		$-13^s,0$	mínimo
julio	27		$0^s$	
septiembre	17		$21^s,4$	máximo absoluto
noviembre	4		$0^s$	
diciembre	23		$-29^s,9$	mínimo absoluto

#### 4.8 Sol medio

Hoy en día, con mayor rigor, se procede como sigue. En primer lugar, como ya dijimos en 4.4, el tiempo solar viene dado por el movimiento geocéntrico del Sol aparente, es decir del Sol que observamos corregido de refracción, paralaje diurna y aberración diurna. Ello significa que la ascensión recta  $A$  que figura en (47) debe corregirse de aberración anual y de las variaciones periódicas que diferencian las longitudes baricéntrica y geocéntrica del Sol. Según la Mecánica Celeste, la longitud media geométrica  $L$  del Sol, referida al equinoccio medio de una cierta fecha viene dada por una relación de la forma:

$$L = L_0 + L_1 t + L_2 t^2 \quad (51)$$

y por tanto, según lo dicho, la ascensión recta geocéntrica del Sol aparente valdrá:

$$A' = L_0 - k + L_1 t + L_2 t^2 + C + Q + \dots \quad (52)$$

siendo  $k = 20^s,50$  la constante de aberración y donde los puntos indican términos periódicos de pequeña amplitud (desigualdad mensual, perturbaciones planetarias, término anual de la aberración, etc.). Por otra parte, el tiempo sidéreo medio es de la forma:

$$\theta_m = \theta_0 + \theta_1 t + \theta_2 t^2 \quad (53)$$

y designando por  $N$  la ecuación de equinoccios, según el apartado 2.8 (pág. 90), el tiempo sidéreo verdadero o aparente valdrá:

$$\theta = \theta_0 + \theta_1 t + \theta_2 t^2 + N \quad (54)$$

Restando ordenadamente (52) y (54) el ángulo horario  $H'$  del Sol aparente, o tiempo solar aparente, será:

$$H' = \theta - A' = (\theta_0 - L_0 + k) + (\theta_1 - L_1) t + (\theta_2 - L_2) t^2 - C - Q + N + \dots \quad (55)$$

y puede descomponerse en la suma:

$$H' = H_m + E \quad (56)$$

del ángulo horario  $H_m$  del Sol medio, o tiempo solar medio:

$$H_m = (\theta_0 - L_0 + k) + (\theta_1 - L_1) t \quad (57)$$

y de la ecuación de tiempo:

$$E = -C - Q + N + \dots + (\theta_2 - L_2) t^2 \quad (58)$$

El Sol medio definido por (57), es pues un Sol ideal que recorre el ecuador, en sentido retrógrado, de modo su ángulo horario crece Uniformemente. Eligiendo convenientemente el origen y la unidad de tiempo, en (53) puede hacerse:

$$\left. \begin{aligned} \theta_0 &= L_0 - k \\ \theta_1 &= L_1 + 1 \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

y (57) tomará la forma:

$$H_m = t \quad (60)$$

es decir, con dicha elección el tiempo  $t$  que figura en las fórmulas anteriores será un tiempo solar medio.

Restando ordenadamente (54) y (57) la ascensión recta  $A_m$  del Sol medio valdrá:

$$A_m = \theta - H_m = L_0 - k + L_1 t + \theta_2 t^2 + N \quad (61)$$

es decir, el Sol medio no recorre el ecuador con movimiento uniforme. Además, prescindiendo de la ecuación de equinoccios  $N$ , y considerando por

tanto dicha ascensión recta referida al equinoccio medio de la fecha, esta última no es igual a la longitud media del Sol corregida de aberración  $L - k$ , pues  $\Theta_2 \neq L_2$ , en contra de lo que, aproximadamente, afirmaba (48). La diferencia, muy pequeña:

$$(A_m - N) - (L - k) = (\Theta_2 - L_2) t^2$$

que figura como término secular en la ecuación de tiempo (58), llegará a ser de unos 2 segundos dentro de mil años.

Definimos en 1.5 (pág. 17) los tiempos sidéreos verdadero y medio y en 1.7 (pág. 23), en forma elemental, los tiempos solares verdadero y medio. Estudiamos también en el mismo apartado (pág. 25) la relación que existe entre un día solar medio y un día sidéreo, encontrando:

$$1^{dm} = 1^{ds} + 3^m 56^s,55 \quad \text{t.s.}$$

o sea:

$$24^{hm} = 24^{hs} + (3^m 56^s,55) \quad \text{t.s.} \quad (62)$$

De aquí:

$$24^{hs} = 24^{hm} - (3^m 56^s,55) \quad \text{t.s.}$$

y el último término de esta equivalencia se reduce a tiempo medio por la proporción que resulta de (62):

$$\frac{24^{hm}}{24^{hs} + 3^m 56^s,55} = \frac{x}{3^m 56^s,55}$$

$$x = 3^m 55^s,90 \quad \text{t.m.}$$

luego:

$$24^{hs} = 24^{hm} - (3^m 55^s,90) \quad \text{t.m.} \quad (63)$$

Estudiemos ahora la conversión de intervalos de tiempo medio en intervalos de tiempo sidéreo y viceversa. Sean  $M$  y  $S$  un intervalo de tiempo expresado en tiempo medio y en tiempo sidéreo, respectivamente. Según las equivalencias que hemos establecido las fórmulas de conversión se deducen inmediatamente de las relaciones:

$$\frac{S}{M} = \frac{24^h + 3^m 56^s,55}{24^h} \quad \text{y} \quad \frac{M}{S} = \frac{24^h - 3^m 55^s,90}{24^h}$$

o sea:

$$S = M \left( 1 + \frac{236,55}{86400} \right) \quad \text{y} \quad M = S \left( 1 - \frac{235,90}{86400} \right)$$

o finalmente:

$$\begin{aligned} S &= M + 0,00274 M \\ M &= S - 0,00273 S \end{aligned} \quad (64)$$

Todos los anuarios astronómicos llevan tablas de conversión de intervalos de tiempo medio en intervalos de tiempo sidéreo y viceversa, que facilitan sumamente los cálculos sin necesidad de recurrir a las fórmulas de equivalencia (64).

Resumiendo: Tiempo sidéreo es el horario del punto Aries medio. En un lugar son pues  $0^h$  de tiempo sidéreo cuando el punto Aries medio pasa por el meridiano superior de dicho lugar.

Tiempo medio es el horario del Sol medio. En un lugar son pues  $0^h$  de tiempo medio cuando el Sol medio pasa por el meridiano superior de dicho lugar.

Tiempo civil (pág. 25) es el horario del Sol medio aumentado en  $12^h$ . En un lugar son pues  $0^h$  de tiempo civil cuando el Sol medio pasa por el meridiano inferior de dicho lugar. Se mide en intervalos de tiempo medio, comenzando el día civil  $12^h$  antes que el día medio.

Estos tiempos son locales, es decir, dependen del meridiano en el cual se encuentra el observador. No ocurre lo mismo con los que vamos a definir a continuación:

Tiempo universal T.U. es el tiempo civil del meridiano de Greenwich (introducido en 1912), y es la base de la división del globo en sus 24 husos horarios.

Tiempo oficial  $t$  es aquel por el cual se rige cada nación (o parte de ella, si es de mucha extensión). Suele diferir un número exacto de horas (o de medias horas) del T.U.

Para pasar del tiempo oficial al tiempo sidéreo, pasaremos primero del tiempo oficial al tiempo civil y, luego, de éste al tiempo sidéreo. Actualmente en España, aun perteneciendo al huso de la Europa Occidental, vamos adelantados una hora con respecto al T.U. Por otra parte, si designamos por  $l$  la longitud del lugar respecto al meridiano de Greenwich (considerada positiva si es W y negativa si es E), la diferencia entre los tiempos civiles del lugar y de Greenwich será igual a  $l$  y, por tanto, tendremos:

$$t_c = t - l - 1^h$$

El paso del tiempo civil al sidéreo puede llevarse a cabo de dos maneras, eligiendo una u otra según nos den el tiempo civil o el tiempo universal ( como ocurre frecuentemente).

Dado el tiempo civil se transformará en intervalo equivalente de tiempo sidéreo  $\Delta \theta$ , y a éste se le sumará el tiempo sidéreo a  $0^h$  en Greenwich  $\theta_0$  y la reducción del tiempo sidéreo en Greenwich al meridiano local,  $r$ :

$$\theta = (\theta_0 + r) + \Delta \theta$$

viniendo dado  $r$ , evidentemente, por la proporción:

$$\frac{24^h}{1} = \frac{3^m 56^s,55}{r}$$

y teniendo el mismo signo que  $l$ , es decir  $\pm$  según  $l$  sea  $\frac{W}{E}$ .

Dado el tiempo universal se transformará en intervalo equivalente de tiempo sidéreo  $\Delta \theta'$ , y a éste se le sumará el tiempo sidéreo a  $0^h$  en Greenwich  $\theta_0$  y se le restará, con su signo, la longitud  $l$ :

$$\theta = \theta_0 - l + \Delta \theta'$$

Los pasos inversos no ofrecen ninguna dificultad.

#### 4.9 Tiempo universal y tiempo de efemérides

Según hemos visto en el apartado anterior, el tiempo solar medio es el ángulo horario del Sol medio, luego, sería un tiempo uniforme si la Tierra girase con velocidad angular constante. Como ya indicamos en el apartado 2.9 no ocurre así y, por tanto, el tiempo solar medio viene afectado por todas las variaciones del movimiento de rotación de la Tierra: es un tiempo terrestre, no uniforme. Evidentemente, lo dicho se aplica también al tiempo universal T.U., tiempo civil en Greenwich.

Para evitar, dentro de lo posible, la falta de uniformidad del tiempo universal, se corrige éste de las variaciones periódicas de la rotación debidas al desplazamiento del polo y a las fluctuaciones estacionales, ambas bastante bien conocidas. Reduciendo el tiempo universal determinado por la observación, T.U.O., al polo medio mediante la corrección de longitud  $\Delta l$  estudiada en 2.5 (pág. 72), se obtiene un tiempo universal más uniforme:

$$T.U.I = T.U.O + \Delta l \quad (65)$$

el cual a su vez se corrige de las variaciones periódicas estacionales  $\Delta s$  (pág. 91) para dar lugar al llamado tiempo universal casi uniforme:

$$T.U. 2. = T.U.1. + \Delta s \quad (66)$$

Como veremos más adelante, es este tiempo universal casi uniforme el que actualmente se emite mediante señales horarias, y es el utilizado para determinaciones de precisión en usos civiles, geodesia y navegación.

Dada la no uniformidad del tiempo universal, si tomamos éste como variable independiente en la fórmula (51) suministrada por la Mecánica Celeste:

$$L = L_0 + L_1 t + L_2 t^2$$

la longitud media del Sol calculada mediante esta fórmula diferirá, cada vez más, de la deducida de las observaciones directas. Desde hace ya bastantes años se sabe que así ocurre, no sólo para el Sol sino también para la Luna y los planetas (precisamente fueron tales diferencias las que hicieron sospechar la no uniformidad de la velocidad de rotación de la Tierra). Ante estos hechos se ha convenido en llamar tiempo de efemérides T.E. al tiempo uniforme de la Mecánica, o tiempo newtoniano, variable independiente en las teorías gravitacionales del Sol, la Luna y los planetas. Más concretamente, tiempo de efemérides es el que figura en la fórmula de Newcomb:

$$L = 279^\circ 41' 27.54 + 129602768.13 t + 1.089 t^2 \quad (67)$$

que suministra la longitud media geométrica del Sol (  $t$  en centurias julianas de 36525 días), de modo que deducida ésta de la observación en una cierta época T.U.2, puede obtenerse el correspondiente T.E. de la relación implícita (67). Así se obtiene la diferencia:

$$\Delta T = T.E. - T.U.2 \quad (68)$$

que permite reducir el tiempo universal a tiempo de efemérides y que figura tabulada en todos los anuarios astronómicos.  $\Delta T$  fué nulo en el año 1903 y actualmente es del orden de  $\pm 36^s$ .

Según (67) fué  $0^h$  T.E. del  $0^d$  de enero de 1900 cuando la longitud media del Sol era exactamente de  $279^\circ 41' 27.54$ ; dicho instante difirió sólo en unos  $4^s$  de la época  $0^h$  T.U. del  $0^d$  de enero de 1900. Tomando como unidad de tiempo de efemérides la duración del año trópico en 1900,0, la relación (67) permite deducir, a través del coeficiente de  $t$ , la duración del día medio de efemérides o, mejor, de su divisor el segundo de efemérides (día = 86.400 segundos), que ha sido adoptado internacionalmente como unidad fundamental de tiempo.

Puesto que la duración del año trópico de 1900,0 (intervalo de tiempo transcurrido para que  $L$  se incremente en  $360^\circ = 1296000''$ ) equivale según (67) a  $\frac{1296000}{129602768,13}$  siglos julianos, el año trópico de 1900,0 valdrá

1296000.36525.86400

segundos = 31556925,975 segundos, de donde la nue-

129602768,13

va definición de segundo: es la fracción  $1/31556925,975$  de la duración del año trópico en 1900,0. Este segundo de efemérides es constante por definición y no experimenta variaciones con la rotación de la Tierra, como ocurría con el segundo de tiempo medio =  $1/86400$  de la duración del día solar medio.

A partir de 1960 los anuarios publican sus efemérides astronómicas más importantes (eclipses, posiciones del Sol, la Luna, los planetas, etc.) con argumento de tiempo de efemérides. Si se desea pasar a tiempo universal basta aplicar (68) con el valor tabulado de  $\Delta T$ .

La introducción del tiempo de efemérides ha llevado consigo la consideración de nuevos conceptos, tales como el Sol medio de efemérides, tiempo sidéreo de efemérides, etc. etc. En particular se ha definido el meridiano de efemérides como la posición que ocuparía el meridiano de Greenwich si la Tierra hubiese girado uniformemente a partir del instante en que coincidieron el tiempo de efemérides y el tiempo universal,  $\Delta T = 0$ . Si recordamos que, según vimos en el apartado anterior, para convertir un intervalo de tiempo medio en intervalo equivalente de tiempo sidéreo hasta multiplicar el primero por el factor 1,00274 (fórmula 64), a partir de dicho instante el meridiano de efemérides habrá girado un ángulo (expresado en tiempo) igual a  $1,00274 T.E.$ , mientras que, por la misma razón, el meridiano de Greenwich sólo habrá girado un ángulo igual a  $1,00274 T.U.2$ ; según (68) ambos meridianos formarán entre sí un ángulo  $1,00274 \Delta T$ , encontrándose el meridiano de efemérides  $1,00274 \Delta T$  al Este del meridiano de Greenwich (las estrellas pasarán por el meridiano de efemérides antes que por el meridiano de Greenwich). El tiempo sidéreo de efemérides  $\theta_E$  es el horario del punto Aries medio con respecto al meridiano de efemérides y, según lo dicho, en función del tiempo sidéreo medio  $\theta$  valdrá:

$$\theta_E = \theta + 1,00274 \Delta T \quad (69)$$

Asimismo, se define la longitud de efemérides  $l_E$  de un lugar referida al meridiano de efemérides; si  $l$  es su longitud geográfica, evidentemente, se tendrá:

$$l_E = l + 1,00274 \Delta T \quad (70)$$

En la práctica el tiempo de efemérides es de difícil determinación, y sólo se conoce con precisión al cabo de unos años de observación de los movimientos del Sol y de la Luna, principalmente. Debido a ello, mientras se llevan a cabo las reducciones, suele sustituirse por el tiempo atómico T.A., tiempo uniforme suministrado por relojes atómicos, ajustados de modo que el

segundo atómico coincida con el segundo de efemérides.

Dicho tiempo atómico facilita también el llamado tiempo universal coordinado T.U.C., tiempo uniforme (función lineal del tiempo atómico) que emiten las señales horarias de modo que su diferencia con el tiempo universal casi uniforme T.U.2 sea siempre inferior a  $0,1^s$ . Debido a la no uniformidad del T.U.2. las señales horarias coordinadas T.U.C. se ajustan cuando es preciso para que se cumpla siempre la condición indicada, procurando el T.U.2. con un error menor que 0,1 segundos.

= = = = =

## 5. LOS PLANETAS

### 5.1 El sistema solar

El sistema solar está constituido por nuestra estrella el Sol, nueve planetas, treinta y un satélites, casi dos millares de asteroides, cometas, meteoritos, polvo meteórico y gas interplanetario.

Los planetas son cuerpos esferoidales y oscuros que reciben y reflejan la luz del Sol, alrededor del cual giran describiendo órbitas elípticas. Se clasifican en terrestres: Mercurio, Venus, La Tierra, Marte y Plutón; y jovianos: Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno. Los primeros, de características parecidas a las de la Tierra, tienen dimensiones, achatamiento y densidad media comparables a los de ésta, estando rodeados de transparentes atmósferas que dejan observar los detalles de sus superficies; sus periodos de rotación son de uno o más días (Tabla I). Los segundos, también llamados gigantes por sus dimensiones, son más achatados y de pequeña densidad media, y presentan atmósferas opacas y de gran espesor comparado con la parte sólida; los periodos de rotación son del orden de medio día, creciendo en cada planeta dicho periodo al desplazarse desde el ecuador hacia los polos (como ocurre en el Sol).

Tabla I

DATOS FISICOS DE LOS PLANETAS

Nombre	Sím-bolo	Radio ecuatorial (en Km.)	Achata-miento	Densi-dad (agua = 1)	Masa (Tierra = 1)	Periodo de rotación	Albedo
Sol	☉	696000	0	1,4	333432	25 <sup>d</sup> -33 <sup>d</sup>	
Mercurio	☿	2500	0	3,8	0,06	59 <sup>d</sup>	0,06
Venus	♀	6200	0	4,9	0,8	30 <sup>d</sup>	0,76
La Tierra	♁	6378	1/297	5,5	1,0	23 <sup>h</sup> 56 <sup>m</sup>	0,39
Marte	♂	3310	1/192	4,0	0,11	24 <sup>h</sup> 37 <sup>m</sup>	0,15
Júpiter	♃	69880	1/15	1,3	318,4	9 <sup>h</sup> 50 <sup>m</sup>	0,51
Saturno	♄	57550	1/10	0,7	95,2	10 <sup>h</sup> 14 <sup>m</sup>	0,50
Urano	♅	25500	1/14	1,3	14,6	10 <sup>h</sup> 40 <sup>m</sup>	0,66
Neptuno	♆	25000	1/45	1,6	17,3	15 <sup>h</sup> 50 <sup>m</sup>	0,62
Plutón	♇	-	-	5,0	0,9	6 <sup>d</sup>	0,16

Los satélites acompañan a los planetas describiendo órbitas elípticas alrededor de éstos. La Tierra tiene uno, La Luna; Marte, dos; Júpiter, doce; Saturno, nueve; Urano, cinco; Neptuno, dos; careciendo de ellos Mercurio, Venus y Plutón (Tabla II). Saturno muestra además, en su plano ecuatorial, tres anillos (A, B y C según nos acercamos al planeta) constituidos por partículas sólidas, destacando la ausencia de tales partículas en la llamada división de Cassini (que separa los anillos A y B).

Tabla II

## SATELITES

Planeta	Satélites	Distancia al planeta en radios del planeta	Periodo de revo- lución sidérea en días, h. y m. de tiempo medio d. h. m.	Excentricidad de la órbita	Inclinación de la órbita del satélite respecto al plano del ecuador del planeta. ° ' "	Diámetro en Km.
La Tierra	La Luna	60,3	27 7 43	0,05	28° 35' 18 19	3476
Marte	Fobos	2,8	0 7 39	0,02	1 8	15
	Deimos	7,0	1 6 18	0,003	1 46	8
Júpiter	V Amaltea	2,5	0 11 57	0,002	27,3	75-150
	I Io	5,9	1 18 28	0,0	1,6	3730
	II Europa	9,4	3 13 14	0,0003	28,1	3150
	III Ganímedes	15,0	7 3 43	0,001	11,0	5150
	IV Calixto	26,4	16 16 32	0,007	15,2	5180
	VI	161	251	0,16		120
	VII	165	260	0,21		50
	X	165	265	0,08	R	20
	XI	315	692	0,21		25
	VIII	330	739	0,41	R	50
	IX	338	758	0,32	R	22
	XII	-	-	-		-
Saturno	Mimas	3,1	0 22 37	0,02	1 31	450
	Encelado	3,9	1 8 53	0,004	1,4	500
	Tetis	4,9	1 21 18	0,0	1 5,6	1100
	Dione	6,3	2 17 41	0,002	0 0	1100
	Rhea	8,8	4 12 25	0,001	20,5	1600
	Titán	20,5	15 22 41	0,03	18,3	4200
	Hiperión	24,8	21 6 38	0,1	1 31	400
	Japeto	59,7	79 7 56	0,03	13 51,8	1300
	Febe	216,8	550 10 35	0,1	(148°)R	300
Urano	Miranda	5,2	1 9 56	-	-	-
	Ariel	7,3	2 12 29	0,007	(0°) R	500
	Umbriel	10,2	4 3 28	0,008	(0°) R	400
	Titania	16,8	8 16 56	0,02	(0°) R	1000
	Oberón	22,4	13 11 7	0,01	(0°) R	900
Neptuno	Tritón	14,2	5 21 3	0,01	(160°)R	4500
	Nereida	217	359 21 10	0,75	-	-

Los asteroides son pequeños planetas telescópicos que describen sus órbitas elípticas principalmente entre las de Marte y Júpiter. Presentan excentricidades e inclinaciones mayores que las de los planetas y los que pasan cerca de la Tierra se utilizan para determinar la paralaje solar.

Los cometas se caracterizan por su cabellera, mostrando también, muchas veces, un núcleo o condensación central y una cola. Esta última se va desarrollando a medida que el cometa se aproxima al Sol por efecto de la presión de la radiación solar. Se clasifican en periódicos y no periódicos, según que la cónica que describen alrededor del Sol sea una elipse o una parábola o hipérbola.

Los meteoritos son piedras celestes que se ponen incandescentes al penetrar en nuestra atmósfera, denominándose bólidos si estallan al caer. Algunos enjambres meteoríticos describen órbitas elípticas alrededor del Sol y si éstas cortan a la de la Tierra, anualmente, al atravesar la atmósfera terrestre, dan lugar al fenómeno conocido vulgarmente con el nombre de lluvia de estrellas fugaces. El punto de la esfera celeste del cual parecen provenir los meteoritos, definido por la dirección de la velocidad relativa geocéntrica de los mismos, es el punto radiante del enjambre.

El polvo meteórico, constituido por partículas pétreas y metálicas, se distribuye concentrándose entorno al plano medio de las órbitas planetarias, es decir en la banda del zodiaco, con densidad decreciente según nos alejamos del Sol. Al difundir la luz solar, puede observarse como luz zodiacal unas horas antes de salir o después de ponerse el Sol. También se manifiesta en una condensación del mismo existente en dirección opuesta a la del Sol, originando la llamada luz antisolar ("gegenschein"). Por último el gas interplanetario es, principalmente, una mezcla de hidrógeno, helio y electrones libres.

## 5.2 Movimiento heliocéntrico

En primera aproximación, cada planeta describe su órbita alrededor del Sol de acuerdo con las leyes del movimiento elíptico estudiadas en 3.5. Tomando la eclíptica como plano fundamental de referencia, con el eje X dirigido hacia el punto Aries (recordar p.111, fig. 8), los elementos que definen la posición de la órbita son ahora la longitud del nodo ascendente  $\Omega$ , la inclinación  $i$  con respecto a la eclíptica y el argumento de latitud del perihelio  $\omega$ ; este último se sustituye a veces por la longitud del perihelio sobre la órbita  $\bar{\omega} = \Omega + \omega$ .

En la Tabla III figuran los elementos eclípticos de los planetas, dándose la longitud media del planeta  $L_0 = \bar{\omega} + M_0$  para la fecha  $t_0 = 1$  de enero de 1957 en lugar de la época de paso por el perihelio  $T$ .

Tabla III

ELEMENTOS ECLIPTICOS DE LOS PLANETAS

Nombre	a	e	$\Omega$			$\bar{\omega}$			$i$			P			$L_0$			$\epsilon$
			g	'	"	g	'	"	g	'	"	a	d	h	g	'	"	
Mercurio	0,39	0,21	47	49	18	76	47	11	7	0	14	88			57	22	35	-
Venus	0,72	0,007	76	17	34	130	57	58	3	23	39	224	17		218	19	3	-
La Tierra	1,00	0,02	-	-	-	102	12	3	-	-	-	1	0	0	99	53	19	23
Marte	1,52	0,09	49	13	33	335	16	3	1	50	51	1	322	0	44	23	7	27
Júpiter	5,20	0,05	100	0	51	13	37	48	1	18	20	11	313	21	168	43	17	12
Saturno	9,54	0,06	113	16	53	92	12	20	2	29	42	29	167	22	243	57	28	3
Urano	19,18	0,05	73	43	51	169	57	44	0	46	23	84	0	0	128	24	17	45
Neptuno	30,06	0,009	131	18	24	44	14	52	1	46	27	164	292	0	210	20	37	59
Plutón	39,52	0,25	109	38	0	223	10	30	17	8	38	247	255	12	137	38	8	-

Una vez obtenidas, a partir de los elementos eclípticos, las constantes vectoriales eclípticas  $\underline{P} \underline{Q} \underline{R}$  o  $\underline{A} \underline{B} \underline{C}$ , las fórmulas (50) o (53) de 3.9 permiten calcular una efemerides eclíptica heliocéntrica del planeta para una época determinada (recordar pp. 115 y 116).

Si, conocida la posición eclíptica heliocéntrica del planeta  $\underline{r}' = M \underline{r}$ , nos interesa su posición ecuatorial heliocéntrica  $\underline{r}''$ , bastaría efectuar, alrededor de línea de los equinoccios y en sentido retrógrado, una rotación de ángulo igual a la oblicuidad de la eclíptica  $\epsilon$ :

$$\underline{r}'' = R_1 (-\epsilon) \underline{r}' = R_1 (-\epsilon) M \underline{r} \quad (1)$$

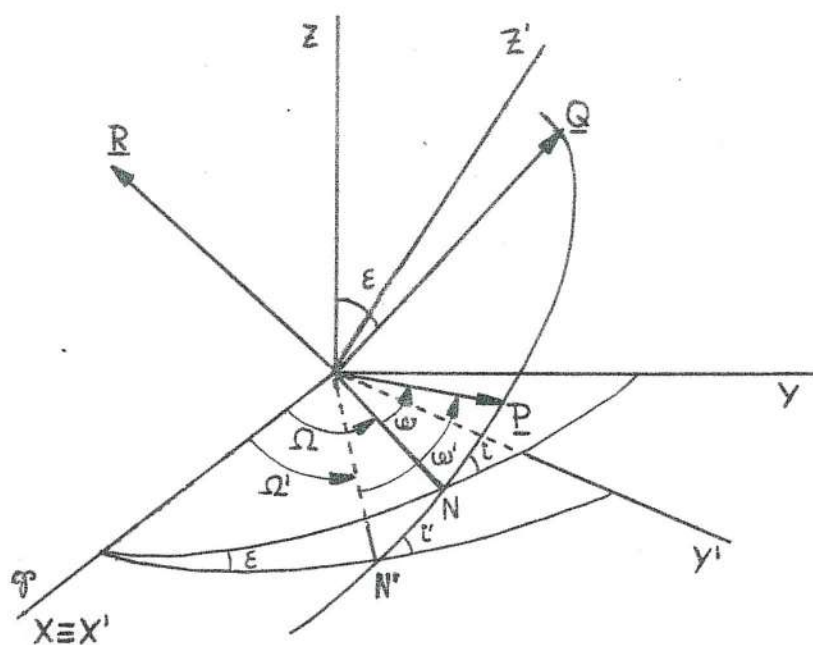


Fig. 1

Actualmente se consideran los elementos ecuatoriales (referencia  $X' Y' Z'$  de la fig. 1), ascensión recta del nodo ascendente  $\Omega'$ , inclínación  $i'$  con respecto al ecuador y argumento de declinación del perihelio  $\omega''$ , y a partir de ellos se obtienen las constantes vectoriales ecuatoriales  $\underline{P}' \underline{Q}' \underline{R}'$  (recordar p. 113 fórm. 47):

$$\begin{aligned} \underline{P}' &= \begin{bmatrix} \cos \Omega' \cos \omega' - \sin \Omega' \cos i' \sin \omega' \\ \sin \Omega' \cos \omega' + \cos \Omega' \cos i' \sin \omega' \\ \sin i' \sin \omega' \end{bmatrix} \\ \underline{Q}' &= \begin{bmatrix} -\cos \Omega' \sin \omega' - \sin \Omega' \cos i' \cos \omega' \\ -\sin \Omega' \sin \omega' + \cos \Omega' \cos i' \cos \omega' \\ \sin i' \cos \omega' \end{bmatrix} \\ \underline{R}' &= \begin{bmatrix} \sin \Omega' \sin i' \\ -\cos \Omega' \sin i' \\ \cos i' \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2)$$

Las componentes de los vectores (2) constituyen ahora los elementos de la matriz de cambio de base:

$$M' = \begin{bmatrix} P_{x'} & Q_{x'} & R_{x'} \\ P_{y'} & Q_{y'} & R_{y'} \\ P_{z'} & Q_{z'} & R_{z'} \end{bmatrix} \quad 3$$

que permiten calcular directamente la posición ecuatorial heliocéntrica:

$$\underline{r''} = M' \underline{r} \quad (4)$$

sin necesidad de conocer la eclíptica heliocéntrica  $\underline{r'}$ . En la práctica el cálculo de una efemérides ecuatorial heliocéntrica se lleva a cabo pues, según (4), mediante una de las fórmulas (recordar las (50) y (53) de 3.9):

$$\underline{r''} = \underline{P'} \bar{\xi} + \underline{Q'} \eta \quad (5)$$

$$\underline{r''} = \underline{A'} (\cos E - e) + \underline{B'} \sin E \quad (6)$$

habiéndose hecho en la segunda  $\underline{A'} = a \underline{P'}$ ,  $\underline{B'} = b \underline{Q'}$ .

Dados los elementos eclípticos  $\mathcal{N}$ ,  $i$ ,  $\omega$  pueden deducirse fácilmente los ecuatoriales  $\mathcal{N'}$ ,  $i'$ ,  $\omega'$  observando que, siendo según (1) y (4):

$$M' = R_1 (-\xi) M$$

se tiene:

$$\left. \begin{aligned} R_{x'} &= R_x \\ R_{y'} &= R_y \cos \xi - R_z \sin \xi \\ R_{z'} &= R_y \sin \xi + R_z \cos \xi \\ P_{z'} &= P_y \sin \xi + P_z \cos \xi \\ Q_{z'} &= Q_y \sin \xi + Q_z \cos \xi \end{aligned} \right\}$$

y por tanto, finalmente:

$$\sin \mathcal{N'} \sin i' = \sin \mathcal{N} \sin i$$

$$\cos \mathcal{N'} \sin i' = \sin i \cos \mathcal{N} \cos \xi + \cos i \sin \xi \quad (7)$$

$$\cos i' = -\cos \mathcal{N} \sin i \sin \xi + \cos i \cos \xi$$

$$\sin i' \sin \omega' = (\sin \mathcal{N} \cos \omega + \cos \mathcal{N} \cos i \sin \omega) \sin \xi + \sin i \sin \omega \cos \xi$$

$$\sin i' \cos \omega' = (-\sin \mathcal{N} \sin \omega + \cos \mathcal{N} \cos i \cos \omega) \sin \xi + \sin i \cos \omega \cos \xi$$



con respecto a la fija E girando alrededor de su nodo ascendente  $\mathcal{N}$  mientras que el punto Aries  $\gamma$  retrograda, Sean:  $\mathcal{N}$  la longitud del nodo ascendente de la eclíptica móvil con respecto a la fija,  $\pi$  la variación ánu a del ángulo de la eclíptica móvil con la fija, y  $p$  la precesión general en longitud por año. Del triángulo esférico  $\mathcal{N} N N_1$  (fig. 3) se deduce fácilmente:

$$\left. \begin{aligned} d\omega &= -\pi \operatorname{cosec} i \operatorname{sen} (\mathcal{N} - \pi) dt \\ d\mathcal{N} - p dt &= -\cos i d\omega = \pi \cot i \operatorname{sen} (\mathcal{N} - \pi) dt \\ di &= -\pi \cos (\mathcal{N} - \pi) dt \end{aligned} \right\}$$

y por tanto:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{N} &= \mathcal{N}_0 + [p + \pi \cot i_0 \operatorname{sen} (\mathcal{N}_0 - \pi)] (t - t_0) \\ i &= i_0 - \pi \cos (\mathcal{N}_0 - \pi) (t - t_0) \\ \omega &= \omega_0 - \pi \operatorname{cosec} i_0 \operatorname{sen} (\mathcal{N}_0 - \pi) (t - t_0) \end{aligned} \right\} (11)$$

fórmulas de cambio de equinoccio que suministran los elementos eclípticos  $\mathcal{N}$ ,  $i$ ,  $\omega$  para un equinoccio  $t$  conocidos  $\mathcal{N}_0$ ,  $i_0$ ,  $\omega_0$  para un equinoccio  $t_0$ . Dado que la precesión lunisolar en oblicuidad es nula, la velocidad angular instantánea del ecuador medio (comparar con la fórmula en  $\omega'$  pág. 78) valdrá:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ p \operatorname{sen} \mathcal{E} \\ -p \cos \mathcal{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ n \\ -m \end{bmatrix}$$

siendo  $m$  la precesión ánu a en ascensión recta y  $n$  la precesión ánu a en declinación; por tanto, es igual a  $90^\circ$  la ascensión recta del nodo ascendente del ecuador móvil con respecto al fijo. Según esto, sustituyendo en (11) los elementos eclípticos por los ecuatoriales,  $\pi$  por  $90^\circ$  y  $p$  y  $\pi$  por  $m$  y  $n$ , respectivamente, se obtienen inmediatamente las fórmulas de cambio de equinoccio de los elementos ecuatoriales:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{N}' &= \mathcal{N}'_0 + (m - n \cot i'_0 \cos \mathcal{N}'_0) (t - t_0) \\ i' &= i'_0 - n \operatorname{sen} \mathcal{N}'_0 (t - t_0) \\ \omega' &= \omega'_0 + n \operatorname{cosec} i'_0 \cos \mathcal{N}'_0 (t - t_0) \end{aligned} \right\} (12)$$

### 5.3 Movimiento geocéntrico

En una base eclíptica heliocéntrica  $X Y Z$  (fig. 4), sean  $\underline{r}_1$  y  $\underline{r}_2$  los vectores de posición de la Tierra  $P_1$  y de un planeta  $P_2$  y  $\underline{v}_1 = \dot{\underline{r}}_1$  y  $\underline{v}_2 = \dot{\underline{r}}_2$  sus respectivas velocidades. La posición y el movimiento geocéntrico de dicho planeta, en una cierta época, vendrán definidos por los vectores:

$$\begin{aligned} \underline{r} &= \underline{r}_2 - \underline{r}_1 \\ \underline{v} &= \underline{v}_2 - \underline{v}_1 \end{aligned} \quad (13)$$

y, dependiendo la velocidad de un planeta sólo de su vector de posición (recordar fórm. 19, pág. 98), tanto  $\underline{r}$  como  $\underline{v}$  son funciones únicamente de  $\underline{r}_1$  y  $\underline{r}_2$ .

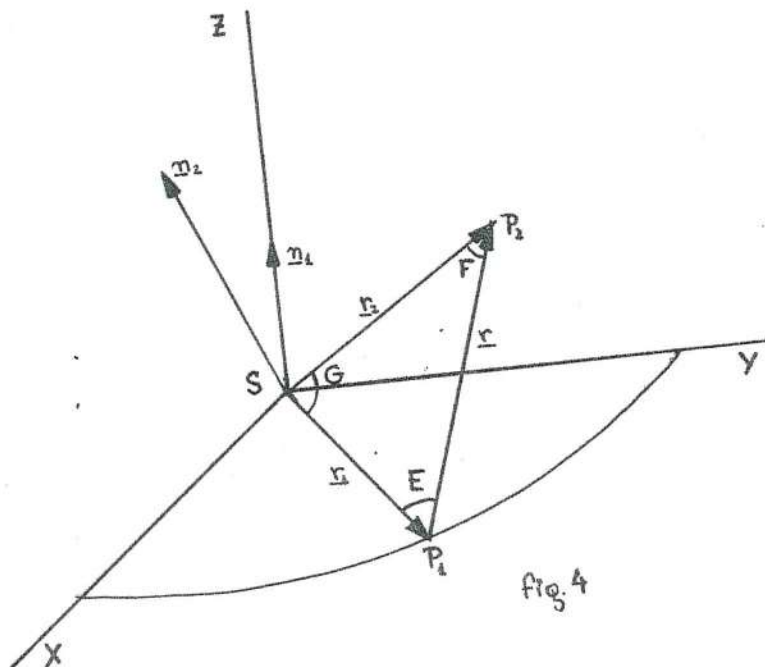


fig. 4

Sean, además,  $\underline{n}_1$  y  $\underline{n}_2$  los vectores movimiento medio de  $P_1$  y  $P_2$  y  $E, F, G$ , los ángulos del triángulo  $P_1 P_2 S$ , denominándose elongación y ángulo de fase a  $E$  y  $F$ , respectivamente. Membraremos aun que un planeta  $P_2$  se llama inferior o superior, con respecto a la Tierra  $P_1$ , según que  $r_2$  sea menor o mayor que  $r_1$ .

Se dice que un planeta inferior está en conjunción inferior o en conjunción superior según que su longitud heliocéntrica sea igual a la de la Tierra o a la de ésta más  $180^\circ$ . Se

dice que un planeta superior

está en oposición o en conjunción según se cumplan las mismas anteriores condiciones. Para todas estas configuraciones se verifica:

$$\underline{n}_1 \cdot (\underline{r}_1 \wedge \underline{r}_2) = 0 \quad (14)$$

En la órbita relativa del planeta,  $r$  será mínimo o máximo, es decir  $P_2$  pasará por el perigeo o apogeo (semidiámetro aparente y paralaje máximos o mínimos), si

$$\underline{r} \cdot \underline{v} = 0 \quad (15)$$

Se dice que un planeta está estacionario cuando su longitud geocéntrica no varía. La proyección sobre la eclíptica de la velocidad areolar relativa es entonces nula y, por tanto:

$$\underline{n}_1 \cdot (\underline{r} \wedge \underline{v}) = 0 \quad (16)$$

(no confundir con la condición de estación absoluta  $\underline{r} \wedge \underline{v} = \underline{0}$ ).

Para un planeta superior la elongación  $E$  puede tomar todos los valores posibles, diciéndose en particular que está en cuadratura cuando  $E = 90^\circ$ ; entonces también vale  $\pm 90^\circ$  la diferencia entre las longitudes geocéntricas del planeta y del Sol. Un planeta inferior, en cambio, presenta una máxima elongación (oriental u occidental) que puede calcularse mediante la condición:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\underline{r}_1}{r_1} \cdot \frac{\underline{r}}{r} \right] = 0 \quad (17)$$

Para un planeta inferior el ángulo de fase  $F$  puede tomar todos los valores posibles, diciéndose en particular que tiene lugar la dicotomía cuando  $F = 90^\circ$ . Un planeta superior, en cambio, presenta un máximo ángulo de fase que puede calcularse mediante la condición:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\underline{r}_2}{r_2} \cdot \frac{\underline{r}}{r} \right] = 0 \quad (18)$$

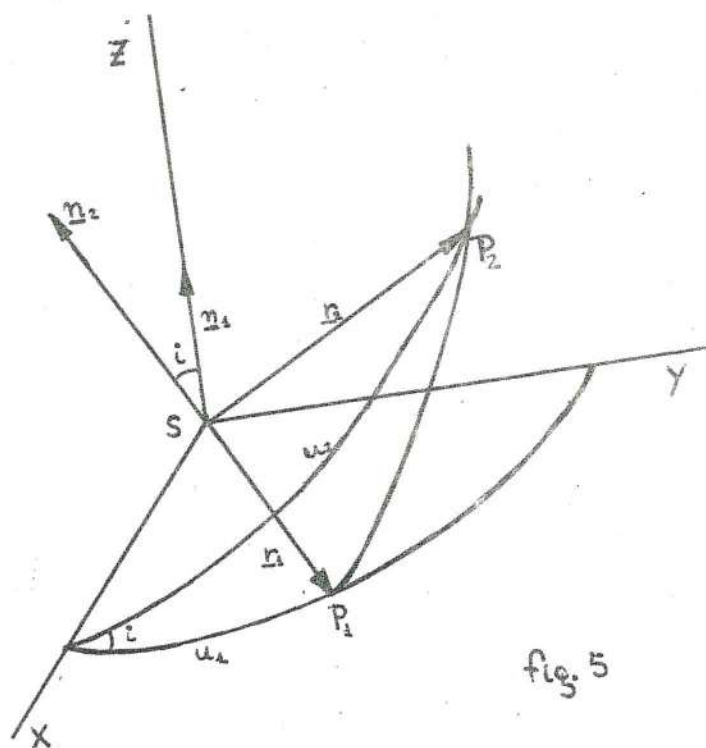
Estudieemos ahora los fenómenos geocéntricos considerados en la hipótesis simplificada de que los planetas describen órbitas circulares (según la Tabla III, si exceptuamos los casos de Mercurio y Plutón, las órbitas planetarias tienen excentricidades de algunas centésimas). En dicha hipótesis, además de (13), se tiene:

$$\left. \begin{aligned} \underline{v}_1 &= \underline{n}_1 \wedge \underline{r}_1 \\ \underline{v}_2 &= \underline{n}_2 \wedge \underline{r}_2 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Designemos por  $\mathcal{N}$ ,  $i$ ,  $\omega$  los elementos eclípticos del planeta  $P_2$ , por  $V_2$  su anomalía verdadera, por  $l_1$  la longitud heliocéntrica de la Tierra  $P_1$  y por  $l_2 = \mathcal{N} + \omega + V_2$  la longitud del planeta  $P_2$  sobre su órbita; los argumentos  $u_1$  y  $u_2$  de  $P_1$  y  $P_2$ , contados a partir del nodo ascendente  $N$  (eje  $X$ ), valdrán  $u_1 = l_1 - \mathcal{N}$   $u_2 = l_2 - \mathcal{N} = \omega + V_2$  (fig. 5).

Según (14) un planeta  $P_2$  estará en conjunción o en oposición si el triángulo  $N P_1 P_2$  es rectángulo en  $P_1$  y, por tanto:

$$\frac{\tan u_1}{\tan u_2} = \cos i \quad (20)$$



(relación también válida aunque las órbitas no sean circulares). En particular, si además de circulares las órbitas son coplanarias  $i = 0$  (según la tabla III, exceptuando los casos de Mercurio y Plutón, las inclinaciones no llegan a  $3^\circ, 5'$  y, según (20):  $u_1 = u_2$  -conjunción inferior o oposición- o bien  $u_1 = u_2 + 180^\circ$  -conjunción superior o simplemente conjunción- (según que el planeta sea inferior o superior). En dicha hipótesis el intervalo de tiempo  $S$  transcurrido entre dos configuraciones sucesivas del mismo nombre, denominado revolución sinódica, vendrá dado por la condición:

$$n_1 S \pm 2\pi = n_2 S$$

e introduciendo el movimiento medio sinódico  $n = \frac{2\pi}{S}$  se tendrá, también:

$$n = \pm (n_2 - n_1) \quad (21)$$

debiéndose tomar el signo más o el signo menos según que el planeta  $P_2$  sea inferior o superior. En la tabla IV figuran las revoluciones sidéreas  $P$ .

Tabla IV

Planetas	$n$	$r_B$	$a$	$S$	$P$
Mercurio	$-\infty$	0,4	0,4	115 <sup>d</sup> ,88	87 <sup>d</sup> ,97
Venus	0	0,7	0,7	583,92	224,70
La Tierra	1	1,0	1,0	-	365,24
Marte	2	1,6	1,5	779,93	686,98
Asteroides	3	2,8	-	-	-
Júpiter	4	5,2	5,2	398,88	4332,59
Saturno	5	10,0	9,6	378,08	10759,24
Urano	6	19,6	19,2	369,66	30688,39
Neptuno	7	38,8	30,1	367,48	60181,11
Plutón	8	77,2	39,5	366,73	90730,57

y sinódicas  $S$  de los planetas, así como las distancias medias  $a$  y los radios  $r_B$  de sus órbitas (supuestas circulares) obtenidos aplicando la ley empírica de Bode:

$$r_B = \frac{3 \cdot 2^n + 4}{10} \text{ u.a.}$$

Dado que las excentricidades y las inclinaciones de las órbitas planetarias son realmente pequeñas, dichas revoluciones sinódicas dan una idea aproximada de la periodicidad con la cual, para cada planeta, se reproducen las distintas configuraciones.

Según (15) un planeta  $P_2$  pasará por el perigeo o apogeo, recordando (13) y (19), si se verifica:

$$(\underline{r}_2 - \underline{r}_1) \cdot (\underline{n}_2 \wedge \underline{r}_2 - \underline{n}_1 \wedge \underline{r}_1) = 0$$

u operando:

$$(\underline{n}_2 - \underline{n}_1) \cdot (\underline{r}_1 \wedge \underline{r}_2) = 0 \quad (22)$$

Es decir, si generalizamos (21) y definimos el vector movimiento medio sinódico:

$$\underline{n} = \underline{n}_2 - \underline{n}_1 \quad (23)$$

en el perigeo o apogeo la Tierra  $P_1$  y el planeta  $P_2$  se encuentran sobre un plano

que pasa por  $\underline{n}$ . Siendo pues rectángulos en  $R$  los triángulos  $N R P_1$  y  $N R P_2$

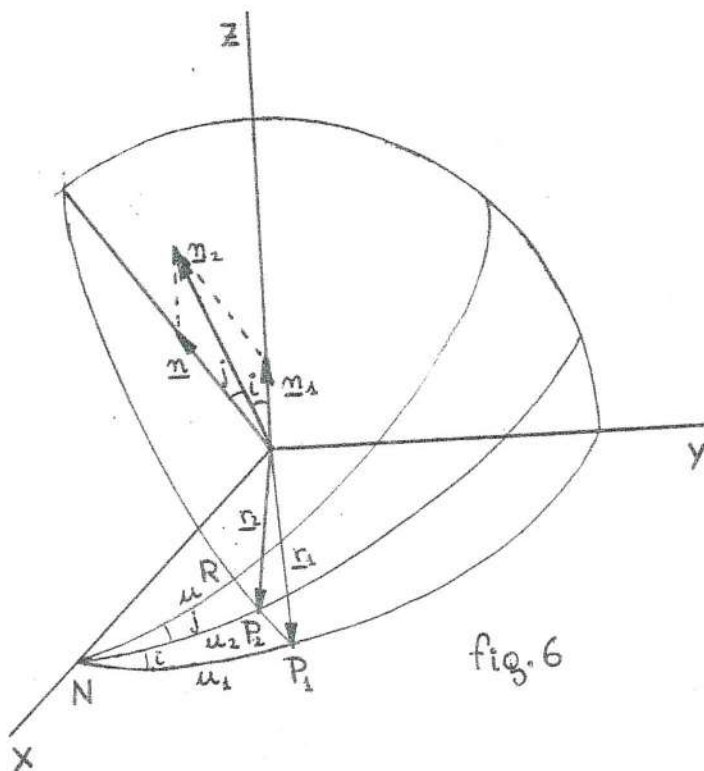
(fig. 6) se tiene:

$$\frac{\tan u}{\tan u_1} = \cos (i + j)$$

$$\frac{\tan u}{\tan u_2} = \cos j$$

y dado que, según se desprende de la figura:

$$\tan j = \frac{n_1 \sin i}{n_2 - n_1 \cos i}$$



también, finalmente:

$$\frac{\tan u_1}{\tan u_2} = \frac{n_2 - n_1 \cos i}{n_2 \cos i - n_1} \quad (24)$$

relación entre los argumentos de  $P_1$  y  $P_2$  en el perigeo o apogeo.

Si las órbitas fuesen además coplanarias  $i = 0$  y (24) se reduce a (20), es decir tales fenómenos tendrían lugar en las conjunciones u oposiciones.

Según (16) un planeta  $P_2$  estará estacionario, recordando (13), si se verifica:

$$\underline{n}_1 \cdot (\underline{r}_1 \wedge \underline{v}_2 + \underline{r}_2 \wedge \underline{v}_1) = \underline{n}_1 \cdot (\underline{r}_1 \wedge \underline{v}_1 + \underline{r}_2 \wedge \underline{v}_2)$$

o también, según (19):

$$n_1^2 \underline{r}_1 \cdot \underline{r}_2 + \underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2 = n_1^2 r_1^2 + r_2^2 \underline{n}_1 \cdot \underline{n}_2 \quad (25)$$

Puesto que, en la hipótesis de órbitas circulares, los argumentos de  $\underline{v}_1$  y  $\underline{v}_2$  valen  $u_1 + 90^\circ$  y  $u_2 + 90^\circ$ , respectivamente, la relación entre los argumentos de  $P_1$  y  $P_2$  será ahora, según (25):

$$\begin{aligned} & n_1 (\cos u_1 \cos u_2 + \sin u_1 \sin u_2 \cos i) + \\ & + n_2 (\sin u_1 \sin u_2 + \cos u_1 \cos u_2 \cos i) = n_1 \frac{r_1}{r_2} + n_2 \frac{r_2}{r_1} \cos i \quad (26) \end{aligned}$$

Si además de circulares las órbitas son coplanarias  $i = 0$  y suponemos, con mucha aproximación, que se verifica exactamente la tercera ley de Kepler:

$$n_1^2 r_1^3 = n_2^2 r_2^3 = \mu$$

de la relación (26) se deduce que hay estación para:

$$\cos(u_2 - u_1) = \frac{r_1 \sqrt{r_2 + r_2} \sqrt{r_1}}{r_1 \sqrt{r_1 + r_2} \sqrt{r_2}} \quad (27)$$

El tiempo que tarda el planeta en recorrer el doble del ángulo  $G = u_2 - u_1$  definido por (27), es decir, el intervalo de tiempo transcurrido entre dos estaciones que comprendan la conjunción inferior o la oposición (según que dicho planeta sea inferior o superior), es la duración de la retrogradación y vale, evidentemente,  $\frac{G}{180^\circ} S$ , siendo  $S$  la revolución sinódica.

Dado que en el triángulo  $S P_1 P_2$  de la figura 4 se verifica:

$$r_2^2 = r_1^2 + r^2 - 2 r_1 r \cos E$$

según (17) un planeta  $P_2$  estará en máxima elongación si:

$$\frac{d}{dt} \cos E = \frac{r^2 - (r_1^2 - r_2^2)}{2 r_1 r^2} \dot{r} = 0$$

o sea, siendo  $\dot{r} \neq 0$ , si:

$$r^2 = r_1^2 - r_2^2 \quad (28)$$

Para que se cumpla la condición (28) el planeta debe ser inferior ( $r_2 < r_1$ ) y, en tal caso, el triángulo  $S P_1 P_2$  es rectángulo en  $P_2$ ,  $F = 90^\circ$ ; la máxima elongación tiene lugar con la dicotomía (supuestas las órbitas circulares). Siendo ahora:

$$\sin E = \frac{r_2}{r_1} \quad (29)$$

y, además,  $G = 90^\circ - E$ , obtenemos la siguiente relación entre los argumentos de  $P_1$  y  $P_2$ :

$$\cos u_1 \cos u_2 + \sin u_1 \sin u_2 \cos i = \frac{r_2}{r_1} \quad (30)$$

Dado que en el triángulo  $S P_1 P_2$  de la figura 4 se verifica:

$$r_1^2 = r_2^2 + r^2 - 2 r_2 r \cos F$$

según (18) un planeta  $P_2$  presentará máximo ángulo de fase si:

$$\frac{d}{dt} \cos F = \frac{r^2 - (r_2^2 - r_1^2)}{2 r_2 r^2} \dot{r} = 0$$

o sea, siendo  $\dot{r} \neq 0$ , si:

$$r^2 = r_2^2 - r_1^2 \quad (31)$$

Para que se cumpla la condición (31) el planeta debe ser superior ( $r_2 > r_1$ ) y, en tal caso, el triángulo  $S P_1 P_2$  es rectángulo en  $P_1$ ,  $E = 90^\circ$ ; el máximo ángulo de fase tiene lugar en la cuadratura (supuestas las órbitas circulares). Siendo ahora:

$$\sin F = \frac{r_1}{r_2} \quad (32)$$

y, además,  $G = 90^\circ - F$ , obtenemos la siguiente relación entre los argumentos de  $P_1$  y  $P_2$ :

$$\cos u_1 \cos u_2 + \sin u_1 \sin u_2 \cos i = \frac{r_1}{r_2} \quad (33)$$

#### 5.4 Efemérides para observaciones físicas.

Si se conocen el eje y el período de rotación de un planeta, para fijar sobre el mismo los detalles de su superficie, se considera un sistema de coordenadas planetográficas análogas a las geográficas de la Tierra: longitud planetográfica  $L$ , contada a partir de un cierto meridiano origen  $O$  en sentido contrario al de la rotación, y latitud planetográfica  $B$ . Asimismo, para calcular las anteriores, se introduce un sistema de coordenadas planetocéntricas ecuatoriales: ascensión recta planetocéntrica  $A$ , contada a partir del punto vernal  $V$  del planeta (nodo ascendente de su órbita con respecto a su ecuador) en el sentido de la rotación, y declinación planetocéntrica  $D$ .

Las coordenadas planetográficas  $L_0$  y  $B_0$  del centro del disco geométrico del

planeta así como el ángulo de posición  $P$  de su polo norte, necesarios para la reducción de las observaciones, se obtienen fácilmente calculando las coordenadas planetocéntricas  $A_E$  y  $D_E$  de la Tierra. Estas últimas y el ángulo de posición  $P$  se deducen resolviendo el triángulo esférico definido por las direcciones del polo norte  $P_Q$  de la Tierra, del polo norte  $P_{Q'}$  del planeta y de la Tierra  $T$  vista desde el planeta (fig. 7), en función de la ascensión recta  $a_0$  y la declinación  $d_0$

geocéntricas del polo norte del planeta y de la ascensión recta planetocéntrica  $\Phi$  del nodo

ascendente  $N$  del ecuador  $Q'$  del planeta sobre el ecuador  $Q$  de la Tierra (que pueden considerarse constantes a lo largo del año), y de la ascensión recta  $a$  y la declinación de geocéntricas del planeta (que figura día a día en los anuarios):

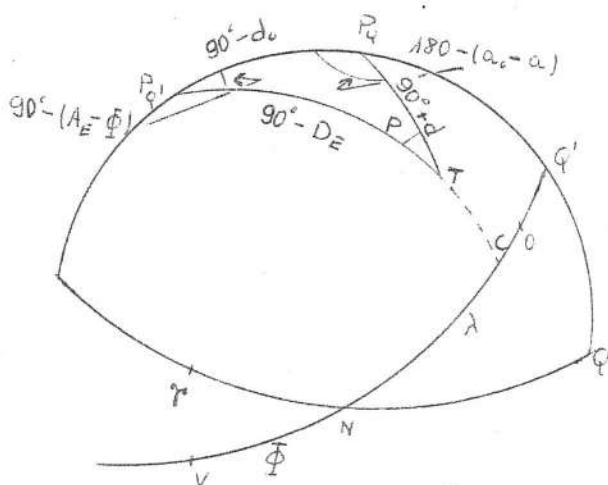


Fig. 7

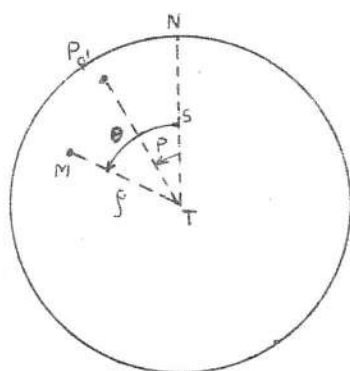
$$\begin{aligned}
 \cos D_E \sin (A_E - \Phi) &= \sin d_0 \cos d \cos (a_0 - a) - \cos d_0 \sin d \\
 \cos D_E \cos (A_E - \Phi) &= \cos d \sin (a_0 - a) \\
 \sin D_E &= -\cos d_0 \cos d \cos (a_0 - a) - \sin d_0 \sin d \\
 \cos D_E \sin P &= \cos d_0 \sin (a_0 - a)
 \end{aligned}
 \quad \left. \begin{array}{l} (34) \\ (35) \end{array} \right\}$$

Si designamos por  $\lambda$  la longitud planetográfica del nodo N en la época  $t$  de la efemérides, dicho argumento viene dado, evidentemente, por una relación de la forma:

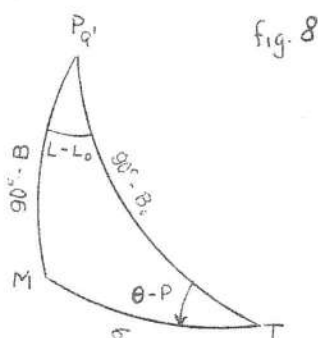
$$\lambda = \lambda_0 + \omega (t - t_0) \quad (36)$$

en la cual se conocen la  $\lambda_0$  correspondiente a una época  $t_0$  y la velocidad angular  $\omega$  de rotación del planeta (x). Luego, si C es la intersección del

meridiano central P Q' T con el ecuador Q' del planeta (fig. 7), siendo  $\widehat{VC} + \widehat{OC} = \widehat{VN} + \widehat{NO}$ , una vez calculados  $A_E - \Phi$  y  $D_E$  mediante (34) y  $\lambda$  mediante (36), obtendremos las coordenadas planetográficas del centro del disco geométrico:



$$\begin{aligned}
 L_0 &= \lambda - (A_E - \Phi) \\
 B_0 &= D_E
 \end{aligned}
 \quad (37)$$



Además (35) suministrará el ángulo de posición P del polo norte, completando con ello el aspecto geocéntrico del disco aparente del planeta.

Conocidas  $L_0$ ,  $B_0$  y P para la época de la observación, es ya inmediata la determinación de las coordenadas planetográficas L y B de un punto M de la superficie en función de su distancia angular  $\rho$  al centro T del disco y de su ángulo de posición

(x) En Júpiter y Saturno el período de rotación disminuye al crecer la latitud planetográfica, considerándose en cada uno de ellos un sistema I, que se mueve con la velocidad media de la parte ecuatorial, y un sistema II, cuya velocidad es la media del resto de la superficie. En dichos planetas se calculan  $\lambda$  y  $\lambda$  para cada sistema.

$\Theta$ , ambos medidos con el micrómetro (fig. 8). Si  $s$  es el semidiámetro aparente del disco, en vista de la pequeñez de  $\rho$  y  $s$ , el ángulo  $\bar{\sigma}$  que en el centro del planeta subtenden los radios de M y T viene dado, con mucha aproximación, por la fórmula:

$$\text{sen } \bar{\sigma} = \frac{\rho}{s} \quad (38)$$

y por tanto, conocidas  $\bar{\sigma}$  y  $\Theta$ , considerando el triángulo esférico M T P<sub>Q</sub>' (fig. 8) se tiene, finalmente:

$$\left. \begin{aligned} \cos B \cos (L - L_0) &= \text{sen } B_0 \text{ sen } \bar{\sigma} \cos (\Theta - P) - \cos B_0 \cos \bar{\sigma} \\ \cos B \text{ sen } (L - L_0) &= \text{sen } \bar{\sigma} \text{ sen } (\Theta - P) \\ \text{sen } B &= \cos B_0 \text{ sen } \bar{\sigma} \cos (\Theta - P) + \text{sen } B_0 \cos \bar{\sigma} \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

En el Sol se conocen también su eje y su periodo de rotación y, análogamente a cuanto hemos hecho más arriba, se considera sobre el mismo un sistema de coordenadas heliográficas: longitud heliográfica  $L$ , contada a partir de un cierto meridiano origen  $O$  en el sentido de la rotación, y latitud heliográfica  $B$ . Las coordenadas heliográficas  $L_0$  y  $B_0$  del centro del disco solar y el ángulo de posición  $P$  de su polo norte se obtienen ahora en función de la longitud geocéntrica  $\odot$  del Sol (que figura día a día en los anuarios) y de la longitud heliográfica  $\lambda$  del nodo ascendente  $N$  del ecuador solar sobre la eclíptica:

$$\lambda = \lambda_0 - \omega (t - t_0) \quad (40)$$

( $\lambda_0 = 0^\circ$  para  $t_0 = 1,5$  enero 1854,  $\omega = 14,9$  184/día). Sean (fig. 9):  $\odot$  la longitud heliocéntrica del nodo ascendente  $N$ ,  $I$  la inclinación del ecuador solar  $Q'$  sobre la eclíptica  $E$ ,  $\epsilon$  la oblicuidad de la eclíptica. En el triángulo rectángulo  $N C T$  se tiene:

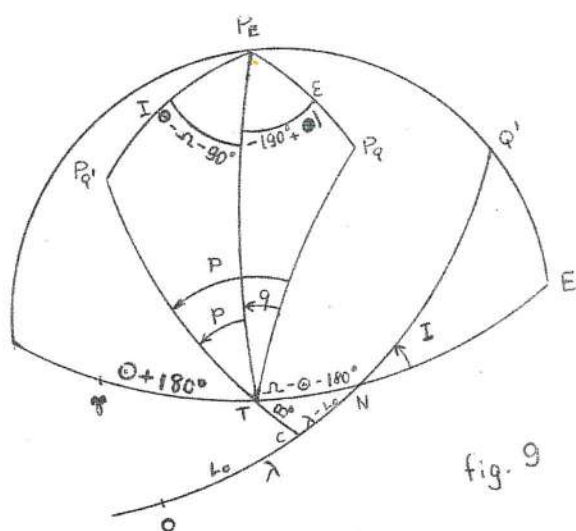


fig. 9

$$\left. \begin{aligned} \tan (L_0 - \lambda) &= \tan (\odot - \lambda) \cos I \\ \text{sen } B_0 &= \text{sen } (\odot - \lambda) \text{ sen } I \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Además, de los triángulos rectiláteros  $P_E P_Q T$  y  $P_E P_Q' T$  se deducen  $p$  y  $q$ , tales que  $p + q = P$ :

$$\left. \begin{aligned} \tan p &= -\cos(\odot - \curvearrowright) \tan I \\ \tan q &= -\cos \odot \tan \delta \end{aligned} \right\} P = p + q \quad (42)$$

Conocidos  $L_0$ ,  $B_0$  y  $P$  para la época de la observación, se procede como en el caso de un planeta para determinar las coordenadas heliográficas  $L$  y  $B$  de una mancha solar  $M$ , de coordenadas polares  $\varphi$ ,  $\theta$  (fig. 8); como antes, se aplican las fórmulas (38) y (39), si bien con signo cambiado la segunda de estas últimas por contarse las longitudes heliográficas en sentido contrario que las planetográficas. En particular, al observar una protuberancia en el borde solar ( $\varphi = s$ ,  $\theta = 90^\circ$ ), con la salvedad indicada (39) se reducen a:

$$\left. \begin{aligned} \tan(L - L_0) &= \operatorname{cosec} B_0 \tan(P - \theta) \\ \sin B &= \cos B_0 \cos(P - \theta) \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Consideremos ahora el aspecto geocéntrico de la iluminación de un planeta por el Sol. La línea de separación entre el limbo brillante y el limbo oscuro, llamada

terminador, se nos presenta como media elipse si despreciamos el achatamiento del planeta (fig. 10). Luego, dado que el ángulo formado por los planos del terminador y del disco geométrico es evidentemente el ángulo de fase  $F$ , si recordamos la afinidad existente entre una elipse y su círculo principal, la relación entre las áreas del limbo brillante y del disco geométrico valdrá:

$$k = \frac{1 + \cos F}{2} = \cos^2 \frac{F}{2} \quad (44)$$

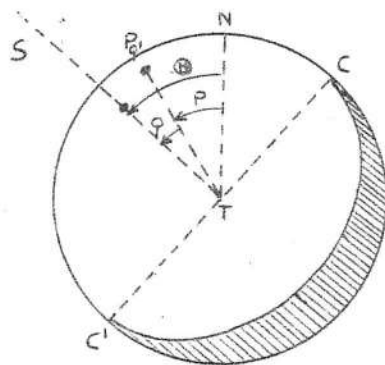
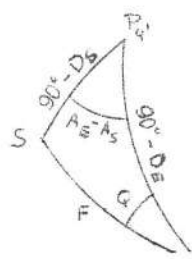


fig. 10



Dicha relación  $k$  es la fase del planeta, y varía entre 1 y 0 mientras que el ángulo de fase lo hace entre  $0^\circ$  y  $180^\circ$ ; para  $1 > k > 1/2$  la parte iluminada tiene forma gibosa y para  $1/2 > k > 0$  forma de lúnula; para  $k = 1/2$  hay dicotomía. Según vimos en el apartado anterior, si el planeta es superior presenta máximo ángulo de fase y, por tanto, mínima fase, según (32) y (44) dada por:

$$k_m = \frac{r_2 + \sqrt{r_2^2 - r_1^2}}{2 r_2} \quad (45)$$

(supuestas las órbitas circulares).

Para completar la definición de limbo brillante, además del ángulo de fase  $F$  debemos calcular también el ángulo de posición  $(H)$  del Sol, que a su vez suministra el ángulo de posición  $(H) \pm 90^\circ$  de la línea de los cuernos  $CC'$  y el ángulo de posición  $(H) + 180^\circ$  del defecto de iluminación. En dicho cálculo distinguiremos dos casos, según se conozcan o no el eje y el periodo de rotación del planeta.

Si se conocen el eje y el periodo de rotación del planeta (p.e. Marte o Júpiter) el ángulo de fase  $F$  y el de posición  $(H)$  se obtienen fácilmente calculando el ángulo de posición  $P$  del polo norte y las coordenadas planetocéntricas  $A_E$  y  $D_E$  de la Tierra y  $A_S$  y  $D_S$  del Sol; pues. en efecto, una vez calculados, en el triángulo esférico  $STP_Q$  (fig. 10) se tiene:

$$\left. \begin{aligned} \text{sen } F \cos Q &= \text{sen } D_E \cos D_S \cos (A_E - A_S) + \cos D_E \text{sen } D_S \\ \text{sen } F \text{sen } Q &= \cos D_S \text{sen } (A_E - A_S) \\ \cos F &= \cos D_E \cos D_S \cos (A_E - A_S) + \text{sen } D_E \text{sen } D_S \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

$$(H) = P + Q \quad (47)$$

Los primeros,  $P$ ,  $A_E$  y  $D_E$ , se han deducido ya anteriormente mediante las fórmulas (34) y (35) y las segundas,  $A_S$  y  $D_S$ , se determinan introduciendo como ángulo auxiliar la longitud planetocéntrica  $L_S$  del Sol, contada a lo largo de la órbita

ta  $E'$  del planeta a partir de su punto vernal  $V$  (fig. 11). Sean:

$\Omega$  e  $i$  la longitud del nodo ascendente  $J$  y la inclinación de la órbita  $E'$  del planeta con respecto a la eclíptica  $E$ ,  $\psi$  la longitud planetocéntrica de dicho nodo,  $l$  y  $l'$  las longitudes heliocéntricas del planeta sobre la eclíptica y sobre la órbita, respectivamente. Se tiene (fig. 11):

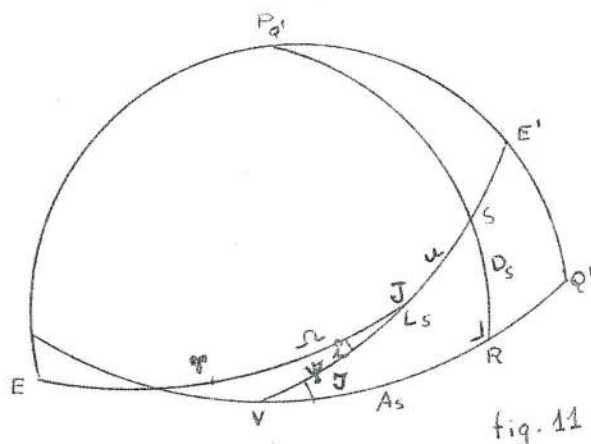


fig. 11

$$\left. \begin{aligned} \Omega + u &= l' + 180^\circ \\ \Psi + u &= L_S \end{aligned} \right\}$$

y, por tanto, eliminando  $u$ :

$$L_S = l' - \Omega + \Psi + 180^\circ \quad (48)$$

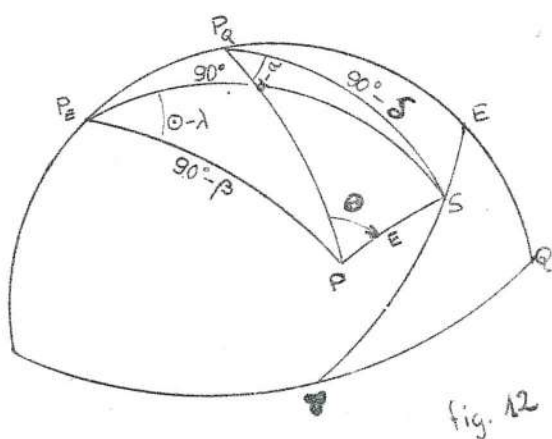
Siendo  $i$  bastante pequeño,  $l'$  suele calcularse en función de  $l$  (que figura en los anuarios) mediante la fórmula:

$$l' = l + \tan^2 \frac{i}{2} \sin 2(l - \Omega) \quad (49)$$

reducción a la órbita análoga a la reducción al ecuador (recordar 4.6). Finalmente, conocido  $L_S$  por (48), si llamamos  $\mathcal{J}$  la oblicuidad de la órbita  $E'$  con respecto al ecuador  $Q'$ , del triángulo rectángulo  $V R S$  se deducen las coordenadas planetocéntricas del Sol:

$$\left. \begin{aligned} \tan A_S &= \tan L_S \cos \mathcal{J} \\ \sin D_S &= \sin L_S \sin \mathcal{J} \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Si no se conocen el eje y el periodo de rotación del planeta (p.e. Mercurio o Venus), el ángulo de fase  $F$  y el de posición  $(H)$  se calculan recurriendo a los siguientes datos que figuran en los anuarios:  $\odot$  longitud geocéntrica del Sol;  $\lambda, \beta$  coordenadas eclípticas geocéntricas del planeta;  $l, b$  coordenadas eclípticas heliocéntricas del planeta;  $\alpha, \delta$  coordenadas ecuatoriales geocéntricas del Sol;  $a$  ascensión recta geocéntrica del planeta. En la esfera geocéntrica de la figura 12, el triángulo rectilátero  $P_E P S$  proporciona la elongación  $E$ :



$$\cos E = \cos \beta \cos (\odot - \lambda) \quad (51)$$

Análogamente, siendo  $\odot + 180^\circ$  la longitud heliocéntrica de la Tierra, en una esfera heliocéntrica se obtendría el ángulo  $G$ , Tierra-Sol-Planeta:

$$\cos G = -\cos b \cos (\odot - l) \quad (52)$$

Conocidos E y G mediante (51) y (52), el ángulo de fase vale:

$$F = 180^\circ - (E + G) \quad (53)$$

Por último, del triángulo  $P_Q P S$  (fig. 12) se deduce el ángulo de posición del Sol:

$$\text{sen } \textcircled{H} = \frac{\cos \delta \text{ sen } (\alpha - a)}{\text{sen } E} \quad (54)$$

### 5.5 Brillos y magnitudes

Como sabemos, los planetas no tienen luz propia y la que nos envían es luz solar reflejada. Cambiando algo las notaciones anteriormente utilizadas

(fig. 13), con el objeto de ajustarlas a las empleadas en los anuarios, veamos algunas definiciones.

Intensidad luminosa I de un planeta P, situado a una distancia  $r$  del Sol S, es la cantidad de luz que por unidad de superficie y de tiempo envía dicho planeta en una dirección, de ángulo de fase  $F$ , y viene dada por la fórmula:

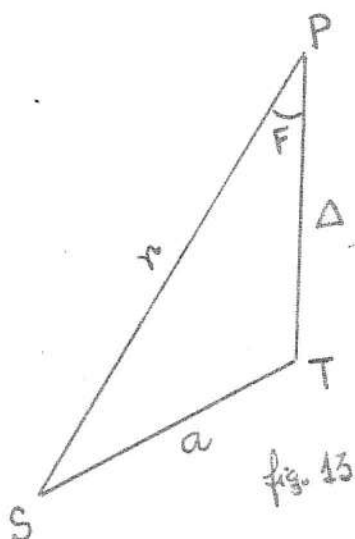
$$I = C \frac{f(F)}{r^2} \quad (55)$$

siendo  $C$  una constante característica del planeta y  $f(F)$  una cierta función de fase, tal que  $f(0) = 1$  y  $f(\pi) = 0$ . Brillo aparente B

de un planeta P, situado a una distancia  $\Delta$  de la Tierra T, es la cantidad de luz que por unidad de superficie y de tiempo recibimos de dicho planeta y viene dado por la fórmula:

$$B = \frac{I}{\Delta^2} = C \frac{f(F)}{r^2 \Delta^2} \quad (56)$$

Este brillo aparente B suele medirse por la sensación que experimenta el ojo, bajo la acción de la excitación lumínica, a través de la denominada magnitud aparente m. Según la ley fisiológica de Weber-Fechner, la variación de la sensación  $m$  es directamente proporcional a la variación relativa de la excitación B:



$$dm = -k \frac{dB}{B} \quad (k > 0)$$

e integrando:

$$m - m_0 = k \ln \frac{B_0}{B} = k' \log \frac{B_0}{B} \quad (k' > 0) \quad (57)$$

(obsérvese que cuanto mayor es el brillo menor es la magnitud). Para acomodar la escala de magnitudes a la utilizada en la antigüedad, se ha convenido en que a una diferencia de magnitudes igual a 5 corresponda una razón entre los brillos igual a 100 y, por tanto, según (57):

$$5 = k' \log 100 = 2 k'$$

Llevando a (57) el valor de  $k'$  se obtiene la fórmula de Pogson:

$$m - m_0 = 2,5 \log \frac{B_0}{B} \quad (58)$$

Si en la anterior fórmula (58) sustituimos  $B$  por su valor (56), englobando los términos constantes, se tiene:

$$m = g + 5 \log (r \Delta) - 2,5 \log f(F) \quad (59)$$

siendo  $g$  la magnitud aparente que tendría el planeta para  $r = \Delta = 1$  y  $F = 0$  ( $f(0) = 1$ ). En el caso de los asteroides, dado que estos se observan siempre en las cercanías de la oposición, suele tomarse  $F = 0$  y, por tanto:

$$m = g + 5 \log (r \Delta) \quad (60)$$

Si el objeto celeste se comporta como un espejo esférico (así ocurre con algunos satélites artificiales), se demuestra que en dicha reflexión especular la intensidad luminosa no depende del ángulo de fase  $y$ , por consiguiente, también puede aplicarse la fórmula (60). Si se trata de un cometa se supone que su intensidad luminosa es inversamente proporcional a una potencia  $2x$  (con  $x > 2$ ) de su distancia  $r$  al Sol, y ahora, según lo visto anteriormente:

$$m = g + 5 (x \log r + \log \Delta) \quad (61)$$

debiendo determinarse  $g$  y  $x$  por la observación.

En primera aproximación, durante mucho tiempo se ha venido tomando como función de fase  $f(F)$  la propia fase  $k$  definida en el apartado anterior:

$$f(F) = \frac{1 + \cos F}{2} = \cos^2 \frac{F}{2} \quad (62)$$

que cumple las condiciones  $f(0) = 1$  y  $f(\pi) = 0$ . Dicha aproximación constituye una interpretación muy elementalizada del fenómeno, pues equivale a suponer que el planeta se comporta como un espejo plano en el cual vamos descubriendo un mayor o menor porcentaje de su superficie. No obstante, en el caso de Venus, tomando circulares las órbitas de la Tierra y del planeta, la hipótesis (62) conduce a unas condiciones de máximo brillo aparente que concuerdan bastante bien con la observación.

En segunda aproximación, suele suponerse que el planeta es esférico y refleja la luz solar por reflexión difusa, en cuyo caso se demuestra que la función de fase vale:

$$f(F) = \frac{1}{\pi} \left[ \sin F + (\pi - F) \cos F \right] \quad (63)$$

y cumple las condiciones  $f(0) = 1$  y  $f(\pi) = 0$ . La constante  $C$  que figura en las fórmulas (55) y (56) es ahora directamente proporcional al cuadrado del radio

del planeta y a su albedo (véase tabla I en la página 146), razón entre la energía luminosa que el planeta difunde en todas direcciones y la que recibe del Sol. Si las órbitas se toman circulares, la hipótesis (63) nos lleva ahora a una ecuación trascendente en  $F$  y  $\tan F$  para obtener el máximo brillo aparente.

Empíricamente, si para cada planeta se representa, en un sistema de coordenadas polares, la función  $f(F)$  tomando  $f$  como radio vector y  $F$  como argumento se obtiene una curva llamada indicatriz de difusión del planeta (fig. 14). Exceptuando la correspondiente a Ve-

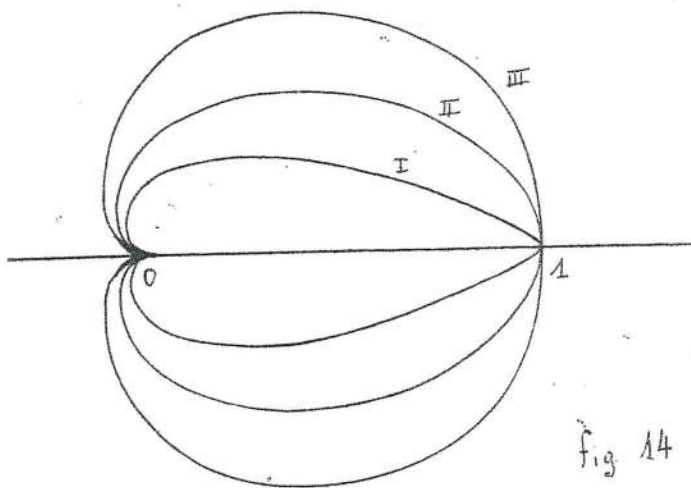


fig 14

nus, las indicatrices I de todos los demás planetas presentan un punto anguloso para  $F = 0$ ; no así la de Venus, comprendida entre las curvas II definida por (63) y III definida por (62); observese que en todas ellas aparece un punto de retroceso para  $F = \pi$ . Llevando a (59) la función  $f(F)$  determinada experimentalmente mediante la indicatriz, desarrollando el logaritmo, se obtienen, para cada planeta, las fórmulas de Müller que figuran en los anuarios:

$$m = g + 5 \log (r \Delta) + a F + b F^2 + c F^3 \quad (64)$$

En el caso de Saturno debe tenerse en cuenta además la influencia que ejercen los anillos sobre su brillo aparente.

---