Notas de Política Monetaria
(Curso de Macroeconomía Avanzada)

Jordi Caballé y Judith Panadés
Unidad de Fundamentos del Análisis Económico
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Universidad Autónoma de Barcelona

Enero de 1998

En estas notas analizaremos el otro gran instrumento de política económica del que dispone el gobierno juntamente con la política fiscal: el control de los activos monetarios. A diferencia de lo que sucede con la política fiscal, el control de la oferta monetaria tiene efectos sobre las variables endógenas de la economía sólo cuando existe una demanda positiva de dinero por parte de los consumidores. Para que exista dinero con valor positivo es necesario introducir supuestos adicionales en dichos modelos. Estos supuestos adicionales consisten básicamente en especificar una función económica para el dinero.

Las tres funciones que tradicionalmente se le han atribuido al dinero son: la de unidad de cuenta, la de depósito de valor y la de medio de pago. Tal como veremos, los efectos de la política monetaria sobre las variables macroeconómicas dependen crucialmente de la función asignada al dinero. Por ejemplo, veremos como el efecto sobre el output de un aumento en la tasa de crecimiento monetario es expansionario cuando el dinero se utiliza como depósito de valor, mientras que es contractivo cuando se utiliza como medio obligatorio de pago para la adquisición de capital productivo.

La función del dinero como unidad de cuenta, a pesar de sus innegables consecuencias contables, no tiene ninguna consecuencia en lo que se refiere a la asignación resultante en un contexto de equilibrio general. Esto sucede porque en los modelos de equilibrio general dinámico las asignaciones vienen determinadas por los precios relativos entre bienes dentro del mismo periodo y entre bienes de distintos periodos. Evidentemente, dichos precios relativos no quedan afectados al cambiar las unidades de cuenta.[1]

La función del dinero como depósito de valor significa que el dinero puede utilizarse como instrumento de ahorro. Sin embargo, esta función, sin ser despreciable, se ve gravemente comprometida por la existencia de otros activos, tales como bonos emitidos por el gobierno o por las empresas, con un innegable rendimiento superior. El primer modelo que consideraremos en las secciones 1 a 4 pone especial énfasis en el papel del dinero como depósito de valor. Realizamos el análisis tanto en la versión del modelo de intercambio puro como en la versión con capital productivo, la cual conlleva muchas más dificultades analíticas. En este contexto, la mera introducción de dinero por parte del gobierno no presupone que dicho dinero tenga valor positivo. Para que ésto suceda es necesario que los individuos decidan ahorrar parte de la renta obtenida en su juventud utilizando dicho dinero como instrumento de ahorro. Por otra parte, la utilización del

[1] Resulta obvio que el valor nominal de los billetes y monedas en circulación ha de ajustarse al nivel de precios para así facilitar el transporte del dinero. Por este motivo, paises que han experimentado alzas de precios muy pronunciadas han acabado cambiando sus unidades de cuenta para evitar la proliferación de billetes y monedas con un poder adquisitivo casi nulo.

dinero como instrumento de ahorro ha de basarse en la confianza en el valor del mismo, es decir, en la creencia de que la generación siguiente aceptará el dinero que la generación actual le traspasará a cambio de bienes. Sin esta creencia, el dinero no tiene ningún valor. Además, aunque la existencia de dinero con valor positivo en el modelo de generaciones solapadas se basa en la confianza en el valor del dinero, esta confianza no es siempre compatible con la existencia de un equilibrio competitivo. Así pues, la existencia de equilibrios monetarios no está garantizada. En este marco veremos como una política monetaria expansiva reduce el rendimiento del dinero y, a partir de la condición de arbitraje que iguala el rendimiento de todos los activos, se produce una expansión en el output bruto de la economía.

En la sección 5 analizaremos un modelo en el que el dinero proporciona servicios como instrumento que facilita las transacciones. Dado que los individuos aprecian los servicios del dinero como medio de intercambio, el dinero siempre tiene valor positivo, al igual que sucede con cualquier otro bien. Así, en este modelo el valor del dinero descansa en propiedades objetivas y no en creencias subjetivas como sucede en el modelo de generaciones solapadas. Veremos que los efectos de la política monetaria sobre el output en este modelo son nulos, es decir, este modelo satisface la propiedad de la *superneutralidad*.

Finalmente, consideraremos en la sección 6 otro modelo que, en cierta manera, supone una versión extrema del anterior. En dicho modelo se supondrá que las adquisiciones de bienes deben realizarse forzosamente utilizando dinero. Es decir, el dinero no sólo facilita las transacciones, sino que es imprescindible para poder realizarlas ya que los individuos han de poseer el valor monetario en dinero equivalente al de las compras que van a efectuar. Cuando estas restricciones de liquidez (también llamadas restricciones de "cash-in-advance") se imponen sobre las adquisiciones de bienes de consumo, los efectos de la política monetaria sobre el output son también nulos.

1. Dinero en el modelo de generaciones solapadas de intercambio puro: los equilibrios autárquico y monetario

Consideremos el modelo de generaciones solapadas de intercambio puro. Supondremos que los individuos de la economía viven solamente dos periodos, que en cada periodo una nueva generación nace y que la tasa neta de crecimiento de la población es constante e igual a $n > -1$. Las generaciones están indexadas por su fecha de nacimiento. El número de jóvenes que nacen en el periodo t es N_t, por lo que $N_{t+1} = (1+n)N_t$. En la economía hay un único bien que es efímero y, por lo tanto, no puede ser almacenado. El vector de dotaciones iniciales es estacionario, es decir, las dotaciones de cada individuo son independientes de la fecha de su nacimiento. Denotaremos por $e^1 > 0$ a la dotación que recibe un individuo en el primer periodo de su vida (juventud) y por $e^2 > 0$ a la dotación que recibe en el segundo periodo de su vida (vejez). Las preferencias se representan mediante una función de utilidad $U(c_t^1, c_{t+1}^2)$ que depende de los consumos en los dos periodos de vida del individuo. El superíndice en los consumos se refiere a la edad de los individuos, mientras que el subíndice se refiere a la fecha en que el consumo tiene lugar. Supondremos que $U(\cdot, \cdot)$ es dos veces continuamente diferenciable, estrictamente creciente en sus dos argumentos, estrictamente cuasicóncava y con las curvas de indiferencia estrictamente acotadas inferiormente por los ejes de coordenadas. Asimismo, supondremos que los consumos de los dos periodos son bienes normales estrictos.

Cuando sólo es posible ahorrar mediante préstamos interpersonales, el único equilibrio de esta economía es la autarquía. En dicho equilibrio autárquico (o walrasiano) cada individuo consume sus dotaciones iniciales en cada periodo de su vida, es decir, $c_t^1 = e^1$ y $c_t^2 = e^2$. Ahora bien, si en esta economía introducimos dinero y éste es aceptado, se pueden generar equilibrios diferentes a la autarquía ya que los individuos pueden ahorrar mediante la acumulación de dinero y transferir riqueza de un periodo a otro.

Supongamos pues que el gobierno introduce en la economía unos papeles, a los que llamaremos dinero, con un valor nominal de $H > 0$ pesetas. El gobierno tiene el monopolio en la creación de dicho dinero. Estos papeles, que no tienen ningún valor intrínseco, se introducen en el periodo 0 y se distribuyen a partes iguales entre los miembros de la generación que es vieja en dicho periodo (generación -1) antes de que dicha generación efectúe su consumo de vejez c_0^2. Así pues, cada miembro de la generación -1 recibe $\frac{H}{N_{-1}}$ unidades monetarias (o pesetas). Los miembros de la generación nacida en el periodo 0 (generación 0) aceptan entregar bienes a los de la generación -1 a cambio de estos papeles sin valor intrínseco, si creen que la generación 1 también les aceptará dichos papeles a cambio de unidades del bien. En este contexto, los individuos jóvenes de todas las generaciones aceptan dinero porque creen que los jóvenes de la generación venidera también lo aceptarán. Así pues, cuando hay confianza en el valor del dinero, los individuos viejos dan dinero a los jóvenes a cambio de bienes, y éstos guardan el dinero para a su vez comprar bienes en el siguiente periodo a la siguiente generación. Es importante remarcar que el dinero fluye de los viejos a los jóvenes y nunca al revés. Dada la estructura demográfica de esta economía, ningún viejo aceptará dinero a cambio de unidades del bien porque, al estar en el último periodo de su vida, no será capaz de compensar en el futuro esta reducción en su consumo presente.

Al tipo de dinero que estamos considerando en esta sección se le denomina *externo* o *fiduciario* porque no es la contrapartida de un depósito de un bien real o de un préstamo, es decir, no es fruto de los contratos *internos* entre los individuos de la economía. De hecho, cuando un individuo acepta dinero de otro individuo, no está estableciendo un contrato con él ya que el dinero se intentará traspasar a otro individuo (que ni siquiera ha nacido) y que no tiene ninguna obligación de entregar unidades del bien a cambio de dinero. La figura 1 representa las transacciones agregadas que tienen lugar entre los individuos jóvenes y los viejos que conviven en un mismo periodo en un equilibrio en el que el dinero es aceptado. El stock total de dinero H es traspasado por los viejos a los jóvenes a cambio del total de bienes no consumidos por los individuos jóvenes.

[Figura 1]

Si p_t es el precio del bien en pesetas en el periodo t, podemos definir el valor del dinero como el número de unidades del bien que se pueden obtener a cambio de una unidad de dinero. Obviamente, el valor del dinero en el periodo t es $\frac{1}{p_t}$. La existencia de dinero con valor positivo depende del estado psicológico de los individuos ya que, si creen que el dinero tiene valor positivo, estarán dispuestos a entregar bienes a cambio de dinero. Si por el contrario, los individuos no creen que el dinero tenga valor, entonces los papeles que el gobierno ha introducido no pueden servir como instrumento para transferir riqueza de un periodo al siguiente. En este último caso el único equilibrio competitivo posible es la autarquía. La creencia de que el dinero no tiene ningún valor siempre es compatible con la existencia de equilibrio ya que la autarquía siempre es el resultado descentralizado de una economía sin dinero. Por lo tanto, la introducción de dinero por parte del gobierno es una condición necesaria para la existencia de dinero con valor positivo, pero en modo alguno es suficiente. Hace falta un estado psicológico que induzca a los individuos a creer en el valor del dinero. Tal como veremos, no siempre la creencia de que el dinero tiene valor positivo es compatible con la existencia de un equilibrio competitivo dinámico con previsión perfecta.

Vamos a establecer las condiciones bajo los cuales existe un equilibrio competitivo en el que el dinero es aceptado y, por lo tanto, tiene valor positivo. En primer lugar, especificaremos la restricción a la que se enfrenta un individuo cuando es joven. Dicha restricción nos dice que el valor en unidades monetarias de su dotación inicial en la juventud ha de ser igual al valor monetario de su consumo más la cantidad de dinero que obtiene a cambio de las unidades del bien vendidas a los individuos viejos. Por lo tanto, la restricción presupuestaria de un individuo en su juventud es

$$p_t e^1 = p_t c_t^1 + M_t, \tag{1.1}$$

donde M_t es la cantidad de dinero nominal per cápita (joven) en el periodo t. Las decisiones de consumo se toman en la juventud a partir de las expectativas en el periodo t del nivel de precios en $t+1$, ${}_tp_{t+1}^e$. Sin embargo, bajo la hipótesis de previsión perfecta podemos sustituir las expectativas de los precios futuros por sus valores realizados (${}_tp^e_{t+1} = p_{t+1}$). La restricción del mismo individuo cuando es viejo nos indica que la cantidad de dinero que guardó al final de su juventud más el valor en pesetas de su dotación en el segundo periodo de su vida ha de ser igual al valor de su consumo en la vejez. La restricción presupuestaria en la vejez es pues

$$M_t + p_{t+1}e^2 = p_{t+1}c^2_{t+1}. \tag{1.2}$$

Despejando M_t en (1.1) y sustituyendo en (1.2) , se obtiene la siguiente restricción presupuestaria a lo largo del ciclo vital del individuo:

$$e^1 + \frac{e^2}{\left(\frac{p_t}{p_{t+1}}\right)} = c^1_t + \frac{c^2_{t+1}}{\left(\frac{p_t}{p_{t+1}}\right)}.$$

Si un individuo ahorra en el periodo t una unidad de bien mediante el uso del dinero, lo primero que ha de hacer es convertir esta unidad de bien en unidades monetarias. Así obtendrá p_t unidades monetarias en t por la venta de una unidad del bien. Cada unidad monetaria permitirá comprar $\frac{1}{p_{t+1}}$ unidades de bien en el periodo $t+1$. Por lo tanto, el rendimiento real del dinero será $\frac{p_t}{p_{t+1}}$ ya que una unidad del bien en t se transforma en $\frac{p_t}{p_{t+1}}$ unidades del bien en $t+1$. Si $\pi_{t+1} = \frac{p_{t+1}-p_t}{p_t}$ es la tasa de inflación, podemos concluir que el rendimiento real del dinero es igual al inverso del factor de inflación ya que $\frac{p_t}{p_{t+1}} = \frac{1}{1+\pi_{t+1}}$. Así, en esta economía el problema que ha de resolver un individuo de la generación t es

$$\max_{c^1_t, c^2_{t+1}} \; U(c^1_t, c^2_{t+1}), \tag{1.3}$$

$$\text{sujeto a} \quad e^1 + \frac{e^2}{\left(\frac{1}{1+\pi_{t+1}}\right)} = c^1_t + \frac{c^2_{t+1}}{\left(\frac{1}{1+\pi_{t+1}}\right)}.$$

Observemos a partir de la restricción presupuestaria del programa (1.3) que el rendimiento real del ahorro efectuado por un individuo mediante dinero es igual a $\frac{1}{1+\pi_{t+1}}$. Definamos $m_t = \frac{M_t}{p_t}$ como los saldos reales de dinero per cápita en el periodo t. Vamos ahora a analizar bajo qué condiciones los saldos reales de dinero son estrictamente positivos en este contexto. Recordemos que el dinero sólo puede ir de las manos de los viejos a la de los jóvenes y que, además, no existe la posibilidad física de dinero negativo. Por lo tanto, se cumple siempre que $M_t \geq 0$. Así pues, exigir que $m_t > 0$ equivale a pedir que los saldos nominales de dinero sean estrictamente positivos ($M_t > 0$) y que el dinero tenga valor positivo en el periodo t $\left(\frac{1}{p_t} > 0\right)$.

Dividiendo por p_t, podemos reescribir (1.1) como

$$m_t = e^1 - c_t^1. \tag{1.4}$$

Vemos que el lado derecho de la anterior expresión no es más que el ahorro real de un individuo joven s_t. Dicho ahorro es función del vector de dotaciones iniciales del bien (e^1, e^2) y del rendimiento del dinero, ya que éste es el activo que se usa para ahorrar. Observemos también que, debido a los supuestos sobre la función de utilidad, el consumo óptimo en cada periodo es siempre estrictamente positivo, lo cual implica que $s_t = e^1 - c_t^1 < e^1$. Por lo tanto, (1.4) puede escribirse como

$$m_t = s\left(e^1, e^2, \frac{1}{1+\pi_{t+1}}\right), \tag{1.5}$$

donde $s\left(\cdot,\cdot,\cdot\right)$ es la función de ahorro de un individuo joven. En consecuencia, si queremos que $m_t > 0$, es necesario que los jóvenes decidan no consumir toda su dotación inicial del bien en el primer periodo de su vida o, dicho en otras palabras, que su ahorro real sea positivo. Podemos ver en la figura 2 cuando el ahorro real será positivo. En dicha figura se han dibujado dos restricciones presupuestarias: una con pendiente menor que la relación marginal de sustitución evaluada en la dotaciones iniciales, $\frac{U_1(e^1,e^2)}{U_2(e^1,e^2)}$, y otra con pendiente mayor que dicha relación marginal de sustitución. Obviamente ambas restricciones pasan por el punto de las dotaciones iniciales (e^1, e^2). Observemos que en el punto A el ahorro es negativo y, por lo tanto, la demanda de saldos reales de dinero sería también negativa. En cambio, en el punto B, el ahorro y los saldos reales de dinero demandados son positivos.

[Figura 2]

En consecuencia, vemos que el ahorro será positivo siempre y cuando la pendiente de la restricción presupuestaria, $\frac{1}{1+\pi_{t+1}}$, sea estrictamente mayor que el factor de interés en el equilibrio autárquico o walrasiano $R^w \equiv \frac{U_1(e^1,e^2)}{U_2(e^1,e^2)}$.

Por otra parte, si exigimos que el mercado de dinero esté en equilibrio, la oferta de dinero ha de ser igual a su demanda. En este contexto los únicos que pueden demandar dinero son los individuos jóvenes y, por lo tanto, la demanda nominal agregada de dinero por parte de la generación nacida en el periodo $t+1$ será igual a $N_{t+1}M_{t+1}$. La oferta de dinero en el periodo $t+1$ es generada por los individuos viejos (nacidos en t), los cuales ofrecen dinero a cambio de bien. La oferta de dinero en el periodo $t+1$ es pues igual a N_tM_t. Teniendo en cuenta que $M_t = p_tm_t$ para todo $t \geq 0$, podemos escribir la ecuación de equilibrio en el mercado de dinero, $N_{t+1}M_{t+1} = N_tM_t$, de la siguiente manera:

$$N_{t+1}p_{t+1}m_{t+1} = N_tp_tm_t, \text{ para } t = 0, 1, 2... \tag{1.6}$$

Recordemos que en el periodo 0 la cantidad ofrecida de dinero por parte de la generación -1 es H. Por lo tanto, en equilibrio se cumple que $N_0 p_0 m_0 = H$ y la ecuación de equilibrio en el mercado monetario (1.6) puede reescribirse como

$$N_t p_t m_t = H, \text{ para } t = 0, 1, 2...$$

Observemos que, si el mercado de dinero está en equilibrio, entonces el mercado de bienes también lo está, ya que (1.1) puede reescribirse, después de multiplicar por N_t, como

$$N_t p_t e^1 = N_t p_t c_t^1 + N_t p_t m_t, \tag{1.7}$$

mientras que la restricción de un individuo viejo (1.2) , evaluada en el periodo t y después de multiplicarla por N_{t-1}, se convierte en

$$N_{t-1} p_{t-1} m_{t-1} + N_{t-1} p_t e^2 = N_{t-1} p_t c_t^2. \tag{1.8}$$

Despejando $p_t m_t$ en (1.7) y $p_{t-1} m_{t-1}$ en (1.8) y luego sustituyendo en la ecuación (1.6), retrasada en un periodo, obtenemos la ecuación

$$N_t e^1 + N_{t-1} e^2 = N_t c_t^1 + N_{t-1} c_t^2, \tag{1.9}$$

que nos dice que el total de bien disponible en el periodo t ha de ser igual a su demanda para el mismo periodo, o lo que es lo mismo, ha de ser igual al consumo total de los jóvenes más el consumo total por parte de los viejos. Dividiendo la ecuación (1.9) por el tamaño de la población joven N_t obtenemos la siguiente condición de equilibrio en el mercado de bienes en términos per cápita joven:

$$e^1 + \frac{e^2}{1+n} = c_t^1 + \frac{c_t^2}{1+n}. \tag{1.10}$$

Además, a partir de (1.6) hallamos que $\frac{p_t}{p_{t+1}} = \frac{N_{t+1} m_{t+1}}{N_t m_t}$, lo que nos permite escribir

$$\frac{1}{1+\pi_{t+1}} = \frac{(1+n) m_{t+1}}{m_t}. \tag{1.11}$$

Sustituyendo la condición de equilibrio monetario (1.11) en (1.5) obtenemos

$$m_t = s\left(e^1, e^2, \frac{(1+n) m_{t+1}}{m_t}\right). \tag{1.12}$$

La ecuación en diferencias de primer orden (1.12) caracteriza la dinámica de equilibrio de los saldos reales de dinero. La solución de esta ecuación en diferencias determina a su vez la evolución de los consumos ya que

$$c_t^1 = e^1 - m_t \qquad \text{y} \qquad c_t^2 = (1+n)e^1 + e^2 - (1+n)c_t^1 = e^2 + (1+n)m_t, \tag{1.13}$$

tal como se deduce de (1.4) y (1.10). Además, una vez conocida la sucesión de saldos reales de dinero, podemos hallar la evolución de los factores de inflación puesto que, tal como indica (1.11),

$$1 + \pi_{t+1} = \frac{m_t}{(1+n)m_{t+1}}. \tag{1.14}$$

Llegados a este punto estamos en condiciones de introducir la siguiente definición de un equilibrio monetario:

Definición 1.1: Un equilibrio monetario es una sucesión de saldos reales de dinero, consumos en la juventud y en la vejez y tasas de inflación $\{m_t, c_t^1, c_t^2, \pi_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ que satisface la ecuación en diferencias (1.12) y las ecuaciones (1.13) y (1.14), tal que $m_t \in (0, e^1)$ para $t = 0, 1, 2....$

Los saldos reales de dinero están acotados superiormente por las dotaciones del primer periodo de vida e^1 ya que, tal como vimos, un ahorro mayor o igual que e^1 conllevaría un consumo no positivo en la juventud. Recordemos por otra parte que, aunque el gobierno haya introducido dinero en la economía, se cumple que $m_t > 0$ si y sólo si el dinero tiene valor positivo $\left(\frac{1}{p_t} > 0\right)$. A continuación definimos un equilibrio no monetario.

Definición 1.2: Un equilibrio no monetario (o autárquico) es una sucesión de saldos reales de dinero, consumos en la juventud y en la vejez y tasas de inflación $\{m_t, c_t^1, c_t^2, \pi_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ que satisface la ecuación en diferencias (1.12) y las ecuaciones (1.13) y (1.14), tal que $m_t = 0$ para $t = 0, 1, 2....$

En un equilibrio autárquico el cociente $\frac{(1+n)m_{t+1}}{m_t}$ que aparece en la ecuación en diferencias (1.12) está aparentemente indeterminado (es del tipo $\frac{0}{0}$). Sin embargo, como se ha de satisfacer que $s\left(e^1, e^2, \frac{(1+n)m_{t+1}}{m_t}\right) = 0$, la anterior indeterminación se desvanece ya que sabemos que $s(e^1, e^2, R) = 0$ si y sólo si $R = R^w$. Por lo tanto, en un equilibrio no monetario podemos decir que las siguientes igualdades se satisfacen

$$m_t = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{(1+n)m_{t+1}}{m_t} = R^w \qquad \text{para } t = 0, 1, ... \tag{1.15}$$

Los equilibrios de esta economía con previsión perfecta sólo pueden ser monetarios o no monetarios. Es decir, si $m_t = 0$ para un determinado periodo t, entonces $m_j = 0$, para todo $j > t$. En efecto, como $\frac{(1+n)m_{t+1}}{m_t} = R^w < \infty$ en los equilibrios no monetarios, si $m_t = 0$, entonces obligatoriamente debe cumplirse que $m_{t+1} = 0$. Por otra parte, si $m_t > 0$ para un determinado periodo t, entonces

$m_j > 0$, para todo $j > t$. Obviamente, suponer que $m_t > 0$ equivale a suponer que $s\left(e^1, e^2, \frac{(1+n)m_{t+1}}{m_t}\right) > 0$, lo cual implica que $\frac{(1+n)m_{t+1}}{m_t} > R^w > 0$ y, por lo tanto, se ha de satisfacer que $m_{t+1} > 0$.

Los equilibrios estacionarios de esta economía son aquellos para los que los consumos tanto de jóvenes como de viejos son constantes, es decir, $c_t^1 = c^1$ y $c_t^2 = c^2$ para todo t. Esto implica que también los saldos reales de dinero y la tasa de inflación son constantes en un equilibrio estacionario (véase (1.4) y (1.14)).

Consideremos primero un equilibrio no monetario. En este equilibrio cada individuo consume sus dotaciones iniciales $c_t^1 = e^1$ y $c_t^2 = e^2$ para todo $t \geq 0$. Dicho equilibrio es obviamente estacionario. En esta situación el rendimiento del ahorro es R^w y, abusando un poco del lenguaje, podemos decir que en el equilibrio no monetario el factor de inflación es $1 + \pi = \frac{1}{R^w}$.[2] Vemos que el equilibrio no monetario siempre existe ya que los individuos siempre pueden creer que el dinero no tiene valor, es decir, pueden creer que $\frac{1}{p_t} = 0$ para todo $t \geq 0$, con lo que la asignación de equilibrio será la autárquica para todas las generaciones.

El segundo equilibrio estacionario posible es monetario. Obviamente, si $m_t = m > 0$ para todo $t \geq 0$, a partir de (1.12) y (1.13), obtenemos las siguientes expresiones de equilibrio:

$$m = s(e^1, e^2, 1+n), \qquad c^1 = e^1 - m \qquad \text{y} \qquad c^2 = e^2 + (1+n)m.$$

A partir de la ecuación (1.14), se deduce que en dicho equilibrio estacionario monetario el factor de inflación será

$$1 + \pi = \frac{1}{1+n}.$$

Sabemos además que $s(e^1, e^2, 1+n) > 0$ si y sólo si

$$1 + n > R^w \equiv \frac{U_1(e^1, e^2)}{U_2(e^1, e^2)}. \tag{1.16}$$

Por lo tanto, la condición necesaria y suficiente para la existencia del equilibrio monetario estacionario es que la tasa de crecimiento de la población sea estrictamente mayor que el tipo de interés en el equilibrio autárquico.

El equilibrio estacionario monetario, si existe, domina claramente desde el punto de vista paretiano al equilibrio autárquico. La relación marginal de sustitución a la que se enfrentan los individuos en el equilibrio monetario estacionario es $(1+n)$. Dado que $(1+n) > R^w$ cuando el equilibrio monetario

[2] En el equilibrio no monetario el valor del dinero es nulo $\left(\frac{1}{p_t} = 0 \text{ para todo } t\right)$ por lo que la cantidad de dinero que se necesitaría entregar a cambio de una unidad del bien sería infinita ($p_t = \infty$ para todo t). Sin embargo en un equilibrio no monetario se cumple que $\frac{p_{t+1}}{p_t} = \frac{1}{R^w}$.

existe, podemos ver en la figura 3 como la asignación A, correspondiente a los consumos asociados al equilibrio monetario, conlleva un mayor nivel de utilidad que la asignación B, correspondiente a la autarquía. Dicha figura aplica para todos los individuos que viven dos periodos y en ella hemos suprimido los subíndices temporales como consecuencia del supuesto de estacionariedad. Para los miembros de la generación -1, que sólo viven un periodo después de la introducción del dinero, el equilibrio monetario estacionario también proporciona un mayor nivel de utilidad que la autarquía ya que su consumo en la vejez se ve incrementado por los bienes que consigue a cambio de su oferta de dinero.

[Figura 3]

Cuando $(1+n) > R^w$ nos encontramos en una economía que pertenece al llamado caso de Samuelson. En dicho caso la autarquía no es un óptimo de Pareto. Por contra, cuando $(1+n) \leq R^w$ nos encontramos en el caso clásico y entonces no existe posibilidad alguna de obtener un equilibrio monetario estacionario, tal como ya hemos discutido. En resumen, podemos reformular la condición necesaria y suficiente para la existencia de un equilibrio monetario estacionario diciendo que la economía posee un equilibrio monetario estacionario (además del equilibrio autárquico) si y sólo si la economía pertenece al caso de Samuelson.

Hemos visto que en el modelo de generaciones solapadas el dinero sirve exclusivamente como depósito de valor y que no siempre tiene valor positivo. Tobin (1980) y McCallum (1983) se han mostrado bastante críticos con este modelo ya que la potencial falta de valor del dinero está motivada por la falta de funciones adicionales a la de depósito de valor. De hecho, es imposible que exista un equilibrio monetario cuando simultáneamente existen otros activos financieros que tienen un interés nominal positivo. Evidentemente, todos los individuos utilizarían estos otros activos para ahorrar en lugar de utilizar el dinero, el cual tiene un interés nominal nulo. Además, argumenta Tobin, la velocidad de circulación del dinero resulta en este modelo implausiblemente baja ya que está vinculada exclusivamente al ciclo vital de los individuos.

Los defensores del modelo de generaciones solapadas con dinero fiduciario (por ejemplo, Cass y Shell (1980)) argumentan que se pueden construir equilibrios monetarios con generaciones viviendo un numero arbitrariamente alto (pero finito) de periodos y que, por lo tanto, la velocidad de circulación del dinero puede aumentarse mediante la subdivisión de los periodos de vida considerados. Por otra parte, Cass y Shell argumentan que el modelo de generaciones solapadas es el único modelo de equilibrio general en el que se introduce el dinero sin apelar a supuestos "ad-hoc", tal como sucede en los modelos que introducen una restricción de liquidez o que introducen el dinero en la función de utilidad sin justificar rigurosamente las razones por las que ésto se hace. Además, el modelo de generaciones solapadas permite arrojar luz a un fenómeno puramente monetario, como es el hecho de que el valor del dinero descanse en la confianza que tengamos en el mismo. Es decir, aceptamos dinero de personas a las que no conocemos cuando hacemos una venta de bienes basándonos exclusivamente en la creencia de que, en la siguiente transacción que efectuemos, un potencial vendedor (al que tampoco conocemos) nos aceptará dicho dinero a cambio de bienes de consumo. De hecho, el propio Tobin reconoce que el dinero es como el teléfono: es útil para un individuo darse de alta en el servicio telefónico en la medida en que los otros individuos también se den de alta.

2. La dinámica local alrededor de los equilibrios autárquico y monetario estacionario

La evolución de los saldos reales monetarios en equilibrio viene determinada por la solución de la ecuación en diferencias de primer orden (1.12). Observemos primero que para todo valor de $m_{t+1} > 0$ existe un valor de $m_t > 0$ que satisface la ecuación (1.12). En efecto, multipliquemos ambos lados de dicha ecuación por $\frac{(1+n)m_{t+1}}{m_t}$ y obtendremos

$$(1+n)m_{t+1} = \frac{(1+n)m_{t+1}}{m_t} s\left(e^1, e^2, \frac{(1+n)m_{t+1}}{m_t}\right). \tag{2.1}$$

Fijemos m_{t+1} a un nivel dado que sea estrictamente positivo y definamos $b \equiv \frac{(1+n)m_{t+1}}{R^w} > 0$. Vemos que

$$\lim_{m_t \to b} \frac{(1+n)m_{t+1}}{m_t} s\left(e^1, e^2, \frac{(1+n)m_{t+1}}{m_t}\right) = 0\ ,$$

ya que $\frac{(1+n)m_{t+1}}{b} = R^w$ y $s\left(e^1, e^2, R^w\right) = 0$. Por otra parte, tenemos que

$$\lim_{m_t \to 0} \frac{(1+n)m_{t+1}}{m_t} s\left(e^1, e^2, \frac{(1+n)m_{t+1}}{m_t}\right) = \infty\ .$$[3]

Así pues, gracias a la continuidad de la función de ahorro respecto al factor de interés y al teorema del valor medio, podemos concluir que para todo $m_{t+1} > 0$

[3] Para ver esto último, observemos que, cuando los dos consumos c_t^1 y c_{t+1}^2 son estrictamente normales, entonces la función de consumo en la vejez satisface $\lim_{R_{t+1} \to \infty} c^2(e^1, e^2, R_{t+1}) = \infty$. Como la restricción presupuestaria en la vejez es $c_{t+1}^2 = R_{t+1}s_t + e^2$, entonces también debe cumplirse que $\lim_{R_{t+1} \to \infty} R_{t+1}s(e^1, e^2, R_{t+1}) = \infty$. Sustituyendo R_{t+1} por $\frac{(1+n)m_{t+1}}{m_t}$, se obtiene el resultado deseado.

existe un valor de $m_t > 0$ que soluciona (2.1) o, equivalentemente, que soluciona (1.12). Además, tal como ya hemos mostrado en la sección anterior, se cumple que $m_t = 0$ en equilibrio si y sólo si $m_{t+1} = 0$. Por contra, no es cierto que para todo $m_t > 0$ exista un valor de $m_{t+1} \geq 0$ que solucione (1.12) ya que el ahorro no puede ser mayor que las dotaciones en la juventud e^1.

Para estudiar la dinámica de los saldos reales de dinero en equilibrio hemos de caracterizar la forma del locus de puntos (m_{t+1}, m_t) que satisface la ecuación (1.12), lo cual nos permitirá obtener un diagrama de fase. Con esta finalidad diferenciemos implícitamente la ecuación (1.12) y obtendremos

$$dm_t = s_R\left(e^1, e^2, \frac{(1+n)m_{t+1}}{m_t}\right)\left[\frac{(1+n)}{m_t}dm_{t+1} - \frac{(1+n)m_{t+1}}{m_t^2}dm_t\right],$$

donde $s_R(\cdot,\cdot,\cdot)$ es la derivada de la función de ahorro respecto al factor de interés. La anterior expresión puede reescribirse como

$$\left[1 + \frac{(1+n)m_{t+1}}{m_t^2}s_R\left(e^1, e^2, \frac{(1+n)m_{t+1}}{m_t}\right)\right]dm_t =$$
$$\frac{(1+n)}{m_t}s_R\left(e^1, e^2, \frac{(1+n)m_{t+1}}{m_t}\right)dm_{t+1}.$$

Por último, reorganizando los términos, obtenemos la siguiente derivada implícita:

$$\frac{dm_{t+1}}{dm_t} = \frac{m_t}{(1+n)s_R\left(e^1, e^2, \frac{(1+n)m_{t+1}}{m_t}\right)} + \frac{m_{t+1}}{m_t}, \tag{2.2}$$

donde el par (m_{t+1}, m_t) en el que se evalúa la derivada satisface (1.12).

A continuación analizaremos la dinámica alrededor de los dos equilibrios estacionarios: el autárquico y el monetario estacionario. Consideremos en primer lugar la dinámica local alrededor del equilibrio autárquico, el cual ya hemos visto que siempre existe. Evaluemos pues la derivada (2.2) en dicho equilibrio autárquico y obtendremos

$$\left.\frac{dm_{t+1}}{dm_t}\right|_{\substack{m_t=0\\m_{t+1}=0}} = \left.\frac{m_{t+1}}{m_t}\right|_{\substack{m_t=0\\m_{t+1}=0}} = \frac{R^w}{1+n}, \tag{2.3}$$

como consecuencia de (1.15).

Supongamos primero que no existe un equilibrio monetario estacionario en esta economía, es decir, nos encontramos en el caso clásico $(R^w \geq 1+n)$. Por lo tanto, a partir de (2.3), se cumple que $\left.\frac{dm_{t+1}}{dm_t}\right|_{\substack{m_t=0\\m_{t+1}=0}} \geq 1$. Además, como para todo $m_{t+1} > 0$ existe un valor de $m_t > 0$ que satisface (1.12), el locus de puntos

(m_{t+1}, m_t) que satisface dicha ecuación cuando $R^w \geq 1 + n$ tiene la forma dada en el panel A de la figura 4. Vemos que el equilibrio autárquico es globalmente inestable ya que dicho locus siempre está por encima de la recta de 45° (excepto en el origen). En efecto, si el locus de puntos (m_{t+1}, m_t) cortara a la recta de 45° en un punto interior del cuadrado delimitado por los ejes de coordenadas y las dotaciones iniciales en la juventud e^1, entonces existiría un equilibrio monetario estacionario, lo cual constituye una contradicción con nuestro supuesto de partida. Además, de acuerdo con el panel A de la figura 4, si $m_0 > 0$ entonces $\lim_{t\to\infty} m_{t+1} > e^1$ y los consumos deberían ser negativos a partir de algún periodo, por lo que la trayectoria de saldos reales monetarios no sería factible. Es decir, si $R^w \geq 1 + n$, entonces el único equilibrio posible es la autarquía ($m_t = 0$ para todo $t \geq 0$).

[Figura 4]

Sin embargo, si $R^w < 1 + n$, entonces vemos a partir de (2.3) que $\left.\frac{dm_{t+1}}{dm_t}\right|_{\substack{m_t=0 \\ m_{t+1}=0}} \in (0, 1)$, por lo que el equilibrio autárquico será localmente estable. Así pues, la existencia de equilibrio monetario estacionario conlleva siempre la estabilidad local del equilibrio autárquico, tal como sucede en los paneles B, C y D de la figura 4. Es decir, existe un número real $\eta > 0$ tal que, para todo $\bar{m}_0 \in (0, \eta)$, la trayectoria de saldos reales $\{m_t\}_{t=0}^{\infty}$ que soluciona la ecuación (1.12) con la condición inicial $m_0 = \bar{m}_0$ converge a la autarquía, es decir, $\lim_{t\to\infty} m_t = 0$.

Pasemos a continuación a estudiar las propiedades del equilibrio monetario estacionario referidas a su estabilidad. Evidentemente, este análisis sólo tiene sentido cuando dicho equilibrio existe, es decir, cuando nos encontramos en una economía de Samuelson $(R^w < 1 + n)$. Vemos también a partir de (1.12) que el equilibrio monetario estacionario vendrá caracterizado por el valor de los saldos reales per cápita $m > 0$ dado por

$$m = s\left(e^1, e^2, 1 + n\right).$$

Evaluando (2.2) cuando $m_t = m$ para todo t, obtenemos

$$\left.\frac{dm_{t+1}}{dm_t}\right|_{\substack{m_t=m \\ m_{t+1}=m}} = \frac{s\left(e^1, e^2, 1 + n\right)}{(1 + n)s_R\left(e^1, e^2, 1 + n\right)} + 1.$$

Definamos ε^* como la elasticidad del ahorro respecto al factor de interés evaluada en el equilibrio monetario estacionario. Por lo tanto,

$$\varepsilon^* = \frac{(1 + n)s_R\left(e^1, e^2, 1 + n\right)}{s\left(e^1, e^2, 1 + n\right)},$$

ya que el factor de interés al que los individuos se enfrentan en el equilibrio monetario estacionario es $1+n$. Así pues, tenemos que

$$\left.\frac{dm_{t+1}}{dm_t}\right|_{\substack{m_t=m\\ m_{t+1}=m}} = \frac{1}{\varepsilon^*} + 1.$$

Vemos claramente que $\left.\frac{dm_{t+1}}{dm_t}\right|_{\substack{m_t=m\\ m_{t+1}=m}} \in (1,\infty)$ si y sólo si $\varepsilon^* \in (0,\infty)$. Esta última condición es equivalente a requerir que el ahorro sea una función creciente respecto al tipo de interés. La situación descrita en el panel B de la figura 4 está asociada a una función de ahorro que es estrictamente creciente respecto al factor de interés R cuando la evaluamos en el punto $R = 1+n$. Vemos en dicho panel que el equilibrio monetario es inestable sin ciclos en su entorno ya que el locus (m_{t+1}, m_t) corta al recta de 45° con una pendiente positiva que es mayor que 1. Teniendo en cuenta que un equilibrio monetario debe cumplir que $m_t < e^1$ para todo $t \geq 0$, es evidente que el equilibrio estacionario $m_t = m$ es admisible. Asimismo, otros equilibrios admisibles son aquellos que satisfacen $\lim_{t\to\infty} m_t = 0$ y $m_t < e^1$ para todo $t \geq 0$.

De acuerdo con la situación descrita en el panel B, si el nivel de precios en el período inicial p_0 es tal que $\frac{H}{p_0 N_0} = m$, entonces la economía estará inicialmente en el equilibrio monetario y permanecerá allí indefinidamente. Sin embargo, si $\frac{H}{p_0 N_0} < m$, entonces existe una sucesión de precios y, por lo tanto, de saldos reales de dinero $\{m_t\}_{t=0}^{\infty}$ y de factores de interés $\left\{\frac{p_t}{p_{t+1}}\right\}_{t=0}^{\infty}$ que son compatibles con un equilibrio monetario y que además satisfacen $\lim_{t\to\infty} m_t = 0$ y $\lim_{t\to\infty}\left(\frac{p_t}{p_{t+1}}\right) = R^w$. Es decir, estos equilibrios convergen a la autarquía. Dado que no existe una condición inicial sobre los saldos reales de dinero m_0, pues éstos son una variable endógena, podemos decir que existe una indeterminación de los equilibrios monetarios. En otras palabras, existe un continuo de saldos reales iniciales de dinero, de rendimientos iniciales del dinero, de tasa iniciales de inflación y de consumos iniciales que son compatibles con un equilibrio competitivo dinámico. Es importante remarcar que esta indeterminación no es sólo nominal sino que es también real. No afecta solamente al nivel de precios de los bienes en un periodo dado sino también a los precios relativos entre dos periodos y a los consumos reales.

Otras dinámicas son posibles alrededor del equilibrio monetario. Así, los siguientes casos genéricos pueden ocurrir:

- $\left.\frac{dm_{t+1}}{dm_t}\right|_{\substack{m_t=m\\ m_{t+1}=m}} < -1$. Este caso sucede cuando $\varepsilon^* \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ y corresponde al panel C de la figura 4. Tal como puede verse, el equilibrio monetario estacionario exhibe trayectorias cíclicas a su alrededor, ya que el locus (m_{t+1}, m_t) corta a la recta de 45° con pendiente negativa. Sin embargo, dichos ciclos no convergen al equilibrio monetario estacionario ya que el locus (m_{t+1}, m_t) corta a la recta de 45° con una pendiente que es mayor que 1 en valor absoluto.

- $\left.\frac{dm_{t+1}}{dm_t}\right|_{\substack{m_t=m\\m_{t+1}=m}} \in (-1,0)$. Dicha situación ocurre cuando $\varepsilon^* \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ y corresponde al panel D de la figura 4. Aquí también obtenemos ciclos locales alrededor del equilibrio monetario estacionario, pero ahora dichos ciclos convergerán hacia dicho equilibrio estacionario ya que el locus (m_{t+1}, m_t) corta a la recta de 45° con una pendiente negativa que es menor que 1 en valor absoluto.

El caso $\left.\frac{dm_{t+1}}{dm_t}\right|_{\substack{m_t=m\\m_{t+1}=m}} = -1$, asociado a $\varepsilon^* = -\frac{1}{2}$, no es genérico (es decir, este caso desaparece ante la más leve modificación de los parámetros que definen la economía) y la caracterización de su dinámica local dependerá en todo caso del comportamiento del locus (m_{t+1}, m_t) alrededor del equilibrio monetario estacionario. Lo mismo sucede con los casos $\left.\frac{dm_{t+1}}{dm_t}\right|_{\substack{m_t=m\\m_{t+1}=m}} = \infty$ y $\left.\frac{dm_{t+1}}{dm_t}\right|_{\substack{m_t=m\\m_{t+1}=m}} = 1$, asociados a $\varepsilon^* = 0$ y a $\varepsilon^* = \infty$, respectivamente.

A partir de los paneles C y D de la figura 4, vemos que cuando el locus (m_{t+1}, m_t) corta a la recta de 45° con pendiente negativa también existe una sucesión de saldos reales de dinero $\{m_t\}_{t=0}^{\infty}$ compatible con un equilibrio monetario que converge a la autarquía, al igual que sucedía en el caso considerado en el panel B.

Bajo nuestros supuestos, el caso $\left.\frac{dm_{t+1}}{dm_t}\right|_{\substack{m_t=m\\m_{t+1}=m}} \in [0,1)$, asociado a $\varepsilon^* \leq -1$, nunca aparecerá. Esto es así porque, si los consumos en los dos periodos son bienes estrictamente normales, entonces se cumple que la elasticidad del ahorro respecto al factor de interés, $\frac{R \cdot s_R\left(e^1, e^2, R\right)}{s(e^1, e^2, R)}$, es siempre estrictamente mayor que -1 para todo $R > R^w$.

En resumen, cuando existe el equilibrio monetario estacionario, el equilibrio autárquico es localmente estable. Por otra parte, la estabilidad local del equilibrio monetario estacionario depende de la elasticidad del ahorro respecto al factor de interés. Sin embargo, lo importante en el presente contexto no es la posible inestabilidad del equilibrio monetario estacionario, sino el hecho de que existen muchos equilibrios monetarios (de hecho, un continuo de ellos). Tal como ya hemos indicado, incluso en el caso de Samuelson $(1 + n > R^w)$ es posible que $m_0 = 0$ en equilibrio, ya que los individuos siempre pueden creer que el dinero no tiene valor ($\frac{1}{p_0} = 0$), por lo que la economía operará siempre en la autarquía. Si, por el contrario, $\frac{1}{p_0} > 0$, entonces un equilibrio monetario (no necesariamente estacionario) prevalecerá. En particular, si el equilibrio monetario estacionario existe y los individuos coordinan sus expectativas de tal manera que

$m_0 = s(e^1, e^2, 1+n)$, $\frac{p_0}{p_1} = 1+n$ y, por lo tanto, $p_0 = \frac{H}{N_0 s(e^1,e^2,1+n)}$, entonces la economía siempre estará en un equilibrio monetario estacionario. La selección de la condición inicial m_0, mediante la selección de un nivel de precios inicial p_0, debe pues determinarse fuera de los límites del presente modelo. Es decir, sería necesario construir una teoría de selección de equilibrios dinámicos y de coordinación de expectativas, lo cual está fuera del alcance de este texto.

3. Política monetaria en el modelo de generaciones solapadas de intercambio puro

Sólo tiene sentido hablar de política monetaria cuando los individuos demandan dinero, es decir, cuando existen equilibrios monetarios. Así pues, nuestro análisis sólo es aplicable a economías que pertenezcan al caso de Samuelson. Además, por razones de tractabilidad, nos limitaremos a estudiar los efectos de la política monetaria sobre asignaciones correspondientes a equilibrios monetarios estacionarios. Consideraremos sólo dos posibles tipos de política monetaria pura: la primera consiste en modificar de forma puntual y permanente el stock nominal de dinero y la segunda consiste en aumentar, también de forma permanente, la tasa de crecimiento del stock de dinero. Finalmente, consideraremos una política económica que mezcla los aspectos fiscales con los monetarios ya que analizaremos la financiación del gasto público mediante la emisión de dinero. Otros tipos de política monetaria se dejan como ejercicios.

3.1. *Modificar el stock nominal agregado de dinero de manera puntual y permanente*

El efecto de esta política monetaria sobre las variables reales (en este caso, los consumos) en un equilibrio monetario es nulo. Cuando los valores de las variables reales no son afectados por cambios permanentes en el stock de dinero diremos que el dinero es *neutral.* La anterior conclusión es fácilmente deducible tomando la ecuación en diferencias (1.12) y observando que su solución $\{m_t\}_{t=0}^{\infty}$ no depende del nivel del stock de dinero H. Si, por ejemplo, doblamos el stock nominal de dinero y los precios también se doblan, no se modificarán los saldos reales de dinero y, en consecuencia, tampoco variarán los consumos de los individuos ni la tasa de inflación (véase (1.13) y (1.14)). De manera más precisa podemos decir que si tenemos una trayectoria de saldos reales de dinero, consumos y tasas de inflación $\{m_t, c_t^1, c_t^2, \pi_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ que constituye un equilibrio competitivo dinámico (ya sea monetario o no) asociado a un nivel del stock de dinero H, entonces la misma trayectoria constituye un equilibrio competitivo dinámico cuando el nivel del stock de dinero en circulación es $\hat{H}$. La única diferencia entre los dos equilibrios consiste en que, si en el primer equilibrio la trayectoria de precios era $\{p_t\}_{t=0}^{\infty}$, en el segundo será $\left\{\left(\frac{\hat{H}}{H}\right)p_t\right\}_{t=0}^{\infty}$. Así pues, esta política monetaria constituye una simple reforma nominal equivalente a un cambio en las unidades de cuenta monetarias.

3.2. *Modificar la tasa de crecimiento del stock nominal de dinero de manera permanente*

Supondremos ahora que el gobierno aumenta el stock de dinero a una tasa constante σ y que las inyecciones de dinero se distribuyen a partes iguales entre los individuos viejos en forma de subvenciones. Por lo tanto, si H_t es el stock nominal de dinero en el periodo t, entonces $H_{t+1} = (1+\sigma)H_t$. Sabemos, por definición, que $H_{t+1} = N_{t+1}p_{t+1}m_{t+1}$ y $H_t = N_t p_t m_t$, con lo que sustituyendo en la anterior expresión obtenemos

$$N_{t+1}p_{t+1}m_{t+1} = (1+\sigma)N_t p_t m_t, \text{ para } t = 0, 1, ..., \tag{3.1}$$

que es la nueva ecuación de equilibrio en el mercado de dinero. Manipulando (3.1) hallamos que el rendimiento real del dinero será en este caso

$$\frac{1}{1+\pi_{t+1}} = \frac{(1+n)m_{t+1}}{(1+\sigma)m_t}. \tag{3.2}$$

Los individuos viejos en el periodo $t+1$ (nacidos en t) reciben la subvención nominal per cápita X_{t+1}. En consecuencia, la restricción presupuestaria de un individuo viejo (1.2) queda modificada por la inclusión de esta subvención, pasando a ser

$$M_t + X_{t+1} + p_{t+1}e^2 = p_{t+1}c_{t+1}^2. \tag{3.3}$$

El valor real de la subvención será $x_{t+1} = \frac{X_{t+1}}{p_{t+1}}$. Lo cual, sustituyendo en (3.3), nos permitirá expresar la restricción presupuestaria de un individuo viejo como

$$M_t + p_{t+1}(e^2 + x_{t+1}) = p_{t+1}c_{t+1}^2.$$

Vemos como ahora las dotaciones en términos reales de un individuo viejo se han incrementado pasando a ser $e^2 + x_{t+1}$. Por lo tanto, la demanda de saldos reales de dinero por parte de un individuo nacido en el periodo t será

$$m_t = s\left(e^1, e^2 + x_{t+1}, \frac{1}{1+\pi_{t+1}}\right). \tag{3.4}$$

Calculemos ahora el valor real de la transferencia del gobierno. La subvención en términos monetarios que recibe un individuo viejo, X_{t+1}, mutiplicada por el número de individuos que componen la generación, ha de ser igual al incremento del stock de dinero,

$$N_t X_{t+1} = H_{t+1} - H_t. \tag{3.5}$$

Por otra parte, tenemos que $H_t = \frac{H_{t+1}}{(1+\sigma)}$ y $X_{t+1} = p_{t+1}x_{t+1}$. Sustituyendo ambas ecuaciones en (3.5), obtenemos

$$N_t p_{t+1} x_{t+1} = \frac{\sigma H_{t+1}}{1+\sigma}.$$

Si multiplicamos ambos lados de la anterior expresión por $(1+n)$, dado que $N_{t+1} = (1+n)N_t$ y $m_{t+1} = \frac{H_{t+1}}{N_{t+1}p_{t+1}}$, podemos despejar x_{t+1} y obtener la siguiente fórmula para el valor real de las subvenciones

$$x_{t+1} = \frac{\sigma(1+n)m_{t+1}}{1+\sigma}. \tag{3.6}$$

Por lo tanto, sustituyendo la restricción presupuestaria del gobierno (3.6) y la condición de equilibrio monetario (3.2) en la ecuación (3.4) , obtenemos la siguiente ecuación en diferencias de primer orden que define un equilibrio dinámico:

$$m_t = s\left(e^1, e^2 + \frac{\sigma(1+n)m_{t+1}}{1+\sigma}, \frac{(1+n)m_{t+1}}{(1+\sigma)m_t}\right), \tag{3.7}$$

El siguiente paso en nuestro análisis consiste en buscar cuales son los equilibrios estacionarios y analizar que repercusión tiene sobre ellos la aplicación de la política monetaria que estamos considerando. Obtendremos dos tipos de equilibrio: el autárquico, donde el valor del dinero es nulo, y el monetario, donde los saldos reales de dinero son positivos. En el equilibrio autárquico se cumple que $m_t = 0$ y $\frac{(1+n)m_{t+1}}{(1+\sigma)m_t} = R^w$ para todo $t \geq 0$, con lo que (3.7) se convierte simplemente en $s\left(e^1, e^2, R^w\right) = 0$. Claramente, los efectos de cambios en la tasa de crecimiento monetario σ son completamente nulos en el equilibrio autárquico ya que, en dicho equilibrio, las subvenciones son también nulas en términos reales (véase (3.6)).

Pasemos a continuación a considerar el equilibrio monetario estacionario, el cual viene definido por la siguiente ecuación:

$$m = s\left(e^1, e^2 + \frac{\sigma(1+n)m}{1+\sigma}, \frac{1+n}{1+\sigma}\right),$$

que se obtiene evaluando (3.7) en $m_{t+1} = m_t = m$. Observamos que en este equilibrio el rendimiento del dinero es $\frac{1}{1+\pi} = \frac{1+n}{1+\sigma}$ y la subvención real estacionaria es $x = \frac{\sigma(1+n)m}{1+\sigma}$. Supongamos que $1+\sigma \in \left(1, \frac{1+n}{R^w}\right)$, lo cual implica que estamos en el caso de Samuelson $(1+n > R^w)$. Bajo este supuesto, nos encontramos en la situación que nos describe la figura 5.

[Figura 5]

La recta con pendiente $1+n$ en dicha figura, no es otra que aquella que nos garantiza el equilibrio en el mercado del bien en un equilibrio estacionario,

$$c^1 + \frac{c^2}{1+n} = e^1 + \frac{e^2}{1+n}. \tag{3.8}$$

Esta condición de equilibrio en el mercado de bienes debe satisfacerse ya que es equivalente a requerir equilibrio en el mercado de dinero. Por lo tanto, los consumos estacionarios de equilibrio deben estar sobre dicha recta.

Observemos que las curvas de indiferencia cortan a la recta (3.8) con una pendiente cada vez menor a medida que nos deslizamos hacia abajo a lo largo de dicha recta. Esto es una consecuencia del supuesto de normalidad de los consumos ya que, tal como se puede ver en la figura 6, si la pendiente de la curva de indiferencia que pasa por el punto B tuviera una pendiente mayor que la que pasa por el punto A, entonces existiría un punto como el C en el que su curva de indiferencia tendría una pendiente igual a la del punto B. La recta tangente que pasa por el punto B corresponde a un valor presente de las dotaciones del individuo mayor que el de la recta paralela tangente que pasa por el punto C. Sin embargo, el consumo c^2 es menor en el punto B que en el punto C y esto es incompatible con el supuesto de normalidad de los dos consumos.

[Figura 6]

A partir de la figura 5 podemos analizar los efectos de la política monetaria propuesta. En un equilibrio competitivo los individuos deben maximizar su utilidad tomando como dadas sus dotaciones iniciales y el rendimiento del dinero. Por lo tanto, los consumos óptimos que elige un individuo han de estar sobre la recta que determina su restricción presupuestaria. Dicha recta presupuestaria en un equilibrio estacionario viene dada por

$$c^1 + \frac{c^2}{\left(\frac{1+n}{1+\sigma}\right)} = e^1 + \frac{e^2 + x}{\left(\frac{1+n}{1+\sigma}\right)}, \tag{3.9}$$

la cual está representada por la recta discontinua. Vemos que la pendiente de la restricción presupuestaria estacionaria de los individuos pasa por el punto $\mathrm{C} = (e^1, e^2 + x)$ y tiene una pendiente igual al rendimiento del dinero $\frac{1+n}{1+\sigma}$. Como los consumos estacionarios de equilibrio han de estar sobre la recta (3.8), hay que encontrar el par de consumos sobre dicha recta tal que la curva de indiferencia que pase por dicho par sea tangente a la restricción presupuestaria de los individuos. Fijémonos por último que la subvención real estacionaria x se determina endógenamente puesto que es el valor que ha de tomar el desplazamiento vertical de las dotaciones de un individuo viejo de manera que los consumos óptimos puedan estar simultáneamente sobre la recta de equilibrio (3.8) y sobre la restricción presupuestaria (3.9). El par de consumos de equilibrio está representado por el punto A.

Claramente, al aumentar la tasa de crecimiento monetario σ, la pendiente de la restricción presupuestaria (3.9) disminuye, por lo que, debido al supuesto de normalidad, el punto que determina los consumos de equilibrio se desliza hacia abajo a lo largo de la recta de equilibrio (3.8). A medida que $1+\sigma$ se aproxima a $\frac{1+n}{R^w}$, el equilibrio monetario estacionario se aproxima al punto B correspondiente al equilibrio autárquico. Así, cuando la tasa de crecimiento monetario σ aumenta, el consumo del segundo periodo disminuye y el del primer periodo aumenta, lo que provoca a su vez una disminución de los saldos reales de dinero. Recordemos que el rendimiento del dinero es igual a $\frac{1+n}{1+\sigma}$, por lo que al aumentar σ disminuye $\frac{1}{1+\pi}$, provocando un incremento de la tasa de inflación π. Por lo tanto, los efectos sobre el equilibrio monetario estacionario de un cambio permanente en la tasa de crecimiento monetario σ se resumen en las siguientes derivadas:

$$\frac{dc^1}{d\sigma} > 0, \; \frac{dc^2}{d\sigma} < 0, \; \frac{dm}{d\sigma} < 0, \text{ y } \frac{d\pi}{d\sigma} > 0.$$

Diremos que el dinero es *superneutral* si los cambios permanentes en la tasa de crecimiento monetario σ no tienen ningún efecto sobre los consumos de equilibrio. Así pues, vemos que en el presente modelo el dinero *no* es superneutral.

Nuestra anterior argumentación también nos indica claramente que para la existencia de saldos monetarios estacionarios positivos $(m > 0)$ es necesario y suficiente que el rendimiento del dinero supere al factor de interés del equilibrio autárquico,

$$\frac{1}{1+\pi} = \frac{1+n}{1+\sigma} > R^w. \tag{3.10}$$

Por lo tanto, si queremos que la política monetaria que estamos considerando sea compatible con la existencia de un equilibrio monetario estacionario, debemos imponer una cota superior en la tasa de crecimiento monetario. Esta cota viene dada por la desigualdad

$$1+\sigma < \frac{1+n}{R^w},$$

la cual se obtiene a partir de (3.10). Es decir, la autoridad monetaria no puede inyectar dinero en la economía a un velocidad excesiva so pena de generar una tasa de inflación para la cual el dinero carezca de valor.

Es importante destacar que, después de un aumento en la tasa σ, todos los individuos están peor. Por una parte, los consumos de los individuos que viven dos periodos después del cambio de política se sitúan sobre una curva de indiferencia inferior (véase la figura 5). Por otra parte, los individuos que ya son viejos en el momento del cambio de política también experimentan una disminución en su consumo que se traduce en una merma de utilidad. Así pues, una conclusión que podemos extraer de nuestro análisis es que el equilibrio monetario estacionario sin crecimiento de la oferta monetaria ($\sigma = 0$) domina paretianamente a todos los equilibrios monetarios estacionarios asociados a una tasa positiva de crecimiento monetario $(\sigma > 0)$. Vemos además que, si la economía siempre está operando en un equilibrio monetario estacionario, la política consistente en mantener los saldos monetarios agregados constantes es la que maximiza la utilidad de los individuos nacidos a partir de la fecha en que se introduce el dinero en la economía. El factor de inflación asociado a dicha política en un equilibrio monetario estacionario es $1 + \pi = \frac{1}{1+n}$, con lo que, si hay crecimiento de la población ($n > 0$), entonces la tasa de inflación de equilibrio será negativa $(\pi < 0)$.

Por último, reseñemos que, independientemente de la política monetaria que fije el gobierno, el factor de interés R_{t+1} al que se enfrentan los individuos es igual a $\frac{1}{1+\pi_{t+1}}$ en todo equilibrio monetario. Por lo tanto, el factor de interés nominal será $R_{t+1} \cdot (1+\pi_{t+1}) = 1$ para todo $t \geq 0$, lo cual implica que el tipo de interés nominal será siempre igual a cero. Veremos en las secciones 5 y 6 que el interés nominal no tiene por que ser cero cuando el dinero tiene funciones adicionales a la de depósito de valor. Sin embargo, en los casos considerados en dichas secciones, la política monetaria óptima será precisamente aquella para la que los tipos nominales de interés sean iguales a cero.

3.3. *Financiación inflacionaria del gasto público*

En el modelo de generaciones solapadas de intercambio puro que estamos considerando, sólo los individuos jóvenes pueden generar una demanda de dinero ya que solamente los jóvenes pueden dar unidades del bien a cambio de dinero. Supondremos ahora que además de vender bienes a los individuos viejos, los jóvenes también pueden venderlos al gobierno. El gobierno utilizará los bienes así obtenidos para satisfacer su demanda de consumo. Esta extracción de recursos del sector privado por parte del gobierno gracias al monopolio que éste tiene en el control de la masa monetaria recibe el nombre de "señoreaje". La estructura del intercambio vendrá ahora representada por la figura 7.

[Figura 7]

El consumo gubernamental puede tener la forma de bienes públicos que proporcionan utilidad a los individuos de la economía, puede ser totalmente inútil o incluso puede provocar desutilidad. En todo caso, supondremos que no hay tasas asociadas al uso de los bienes públicos y que el consumo de bienes públicos entra en la función de utilidad de manera aditiva separable. Por lo tanto, la relación marginal de sustitución entre los consumos de juventud y de vejez no se verá afectada por el consumo de bienes públicos. Supondremos pues que la función de utilidad de los individuos nacidos en el periodo t es

$$U(c_t^1, c_{t+1}^2) + V(G_t, G_{t+1}; t),$$

donde G_t es el gasto público real agregado en el periodo t. La potencial dependencia directa de la función V respecto de la fecha t es debida al hecho de que el gasto público puede tomar la forma de bienes públicos congestionables (tales como educación o carreteras) y, por lo tanto, la utilidad proporcionada dependerá de la población existente. En el caso de bienes públicos puros (no sujetos a congestión) el argumento temporal en la función V puede suprimirse. Obviamente, si el gasto público es completamente inútil, entonces se cumple que $V(G_t, G_{t+1}; t) \equiv 0$.

Como en el apartado anterior, centraremos nuestro análisis en los equilibrios monetarios estacionarios, es decir, aquellos en los que los saldos reales de dinero son constantes. El análisis de la incidencia del gasto público se puede abordar de dos formas diferentes: (i) podemos fijar la tasa de crecimiento monetario σ y luego hallar cual es el gasto público per cápita g que se puede financiar de este modo, o (ii) podemos fijar el nivel de gasto público per cápita g y hallar endógenamente cual es la tasa de crecimiento monetario σ que permite financiar dicho nivel de gasto público.

Supongamos en primer lugar que el gobierno emite dinero a la tasa $\sigma > 0$, con lo que rehaciendo los cálculos efectuados en el anterior apartado obtenemos que el rendimiento real del dinero sigue siendo (3.2). Hay que tener en cuenta que ahora no existe ningún tipo de subvención monetaria del gobierno a los individuos viejos puesto que, en este nuevo marco teórico, el gobierno entrega las nuevas emisiones de dinero a los individuos jóvenes a cambio de bienes. Dichos bienes constituyen el consumo efectuado por el gobierno. Por lo tanto, a partir de (1.5), podemos escribir la siguiente ecuación en diferencias que nos determina la evolución de los saldos reales de dinero en equilibrio:

$$m_t = s\left(e^1, e^2, \frac{(1+n)m_{t+1}}{(1+\sigma)m_t}\right). \tag{3.11}$$

En un equilibrio monetario estacionario (3.11) se convierte en

$$m = s\left(e^1, e^2, \frac{1+n}{1+\sigma}\right). \tag{3.12}$$

Recordemos que el gobierno es en este contexto un agente consumidor, por lo que para obtener la ecuación de equilibrio en el mercado del bien, será necesario sumar el gasto público a los consumos de los individuos e igualar dicha suma al total de bienes disponibles en la economía. Así obtenemos la siguiente ecuación de equilibrio en el mercado del bien en el periodo t:

$$G_t + N_t c_t^1 + N_{t-1} c_t^2 = N_t e^1 + N_{t-1} e^2,$$

la cual en términos per cápita joven se transforma en

$$g_t + c_t^1 + \frac{c_t^2}{1+n} = e^1 + \frac{e^2}{1+n}, \tag{3.13}$$

donde $g_t = \frac{G_t}{Nt}$ es el gasto público per cápita joven. Pasando g_t al lado derecho de (3.13) con signo negativo, vemos como la introducción del gasto público equivale a una reducción en el equilibrio de la dotación del individuo joven, ya que ahora el gobierno absorbe parte de los recursos privados de la economía. En un equilibrio estacionario la ecuación (3.13), se transforma en

$$c^1 + \frac{c^2}{1+n} = \left(e^1 - g\right) + \frac{e^2}{1+n}, \tag{3.14}$$

donde g es el gasto público per cápita joven estacionario ($g_t = g$, para todo $t \geq 0$).

Dado que hemos fijado la tasa de crecimiento monetario σ, el problema que se nos plantea es saber el valor asociado de g. Sabemos que el gobierno gasta en términos nominales $p_t G_t$ unidades monetarias. Dicho gasto es financiado a través de la emisión de nuevo dinero, por lo que se cumple la siguiente restricción presupuestaria del gobierno:

$$p_t G_t = H_t - H_{t-1}.$$

Dividiendo por $N_t p_t$ la anterior restricción presupuestaria, y teniendo en cuenta que $H_{t-1} = \frac{H_t}{1+\sigma}$, obtenemos la siguiente restricción gubernamental en términos reales:

$$g_t = \frac{\sigma m_t}{1+\sigma}.$$

En un equilibrio monetario estacionario dicha restricción presupuestaria es

$$g = \frac{\sigma m}{1+\sigma}. \tag{3.15}$$

Por lo tanto, para cada valor dado de la tasa σ, la ecuación (3.12) nos permite calcular los saldos reales estacionarios m y, sustituyendo en (3.15), obtenemos el valor estacionario del gasto público g.

La figura 8 nos permite analizar gráficamente la determinación del gasto público para una tasa dada de crecimiento monetario. Recordemos que la pendiente de la restricción presupuestaria a la que se enfrentan los individuos es $\frac{1}{1+\pi_{t+1}} = \frac{(1+n)m_{t+1}}{(1+\sigma)m_t}$, la cual evaluada en el estado estacionario pasa a ser $\frac{1+n}{1+\sigma}$. Dado que $\sigma > 0$, dicha pendiente en un equilibrio monetario estacionario es menor que $1+n$. La curva de transacciones es una curva formada por los pares de consumos $\left(c_t^1, c_{t+1}^2\right)$ que solucionan el problema de selección de consumo de un individuo nacido en la fecha t para algún factor de interés $R_{t+1} > 0$. También vimos que, dado un factor de interés R_{t+1}, el par de consumos óptimos elegidos por un individuo de la generación t debe encontrarse en el punto en el que la restricción presupuestaria del individuo intersecta a la curva de transacciones.

[Figura 8]

Tal como se observa en la Figura 8, si el rendimiento del dinero es $\frac{1+n}{1+\sigma}$, entonces los individuos eligirán el vector de consumos dado por el punto C, ya que éste es el punto donde la curva de transacciones intersecta con la restricción presupuestaria del individuo. Dicha restricción presupuestaria viene dada por la recta con pendiente $\frac{1+n}{1+\sigma}$ que pasa por el vector de dotaciones iniciales (e^1, e^2). Para que el punto C corresponda a un equilibrio estacionario de esta economía tiene que satisfacer la ecuación de equilibrio en el mercado del bien (3.14). Dicha ecuación viene dada por una recta con pendiente $1+n$ que pasa por el punto $(e^1 - g, e^2)$. Por lo tanto se trata de ver que cantidad debemos sustraer de la dotación de la juventud para lograr que el punto C se sitúe sobre dicha recta. El desplazamiento horizontal de la recta con pendiente $1+n$ desde la posición inicial sin gasto público nos determina el valor estacionario de equilibrio del gasto público g.

Fijemos ahora un nivel de gasto público per cápita g y tratemos de hallar la tasa de crecimiento del stock nominal de dinero que permite al gobierno financiarlo. El gobierno financia este nivel de gasto público a través de la nueva emisión de dinero, por lo que $N_{t+1}p_{t+1}g = H_{t+1} - H_t$. Substituyendo H_{t+1} y H_t por sus respectivas expresiones en términos de los saldos reales de dinero obtenemos

$$N_{t+1}p_{t+1}g = N_{t+1}p_{t+1}m_{t+1} - N_t p_t m_t.$$

Dividiendo por N_t y reorganizando la anterior ecuación, obtenemos que el rendimiento del dinero en equilibrio es

$$\frac{1}{1+\pi_{t+1}} = \frac{(1+n)(m_{t+1} - g)}{m_t}.$$

La condición de equilibrio en el mercado de dinero definida anteriormente por (1.5), se transforma ahora en

$$m_t = s\left(e^1, e^2, \frac{(1+n)(m_{t+1} - g)}{m_t}\right).$$

Observemos que si $g = 0$ recuperaríamos la condición (1.12). Así pues, los saldos reales de dinero correspondientes a un equilibrio monetario estacionario vienen dados por el valor de m que soluciona la siguiente ecuación:

$$m = s\left(e^1, e^2, \frac{(1+n)(m-g)}{m}\right). \tag{3.16}$$

Por otra parte, podemos despejar σ en (3.15) y obtenemos que

$$\sigma = \frac{g}{m-g}. \tag{3.17}$$

Por lo tanto, dado un nivel de gasto público per cápita g, podemos hallar m a partir de la ecuación (3.16). A continuación, sustituyendo estos valores de g y m en la ecuación (3.17), podremos calcular el valor de la tasa de crecimiento monetario σ que permite financiar dicho nivel de gasto público.

Sin embargo, no todo es tan sencillo como parece, puesto que para algunos valores de g la ecuación (3.16) puede tener más de una solución, mientras que para otros valores de g no existe ningún valor de m que solucione dicha ecuación. La figura 9 nos ayuda a resolver gráficamente nuestro problema.

[Figura 9]

Si fijamos el valor del gasto público per cápita al nivel g, estamos determinando cual va a ser el desplazamiento horizontal de la recta con pendiente $1+n$ que originariamente pasaba por el punto de las dotaciones iniciales, tal y como se desprende de la ecuación de equilibrio en el mercado de bienes (3.14). En la figura 9 se aprecia claramente que, dado un valor del gasto público g, existen dos vectores de consumos que están simultáneamente sobre la curva de transacciones y sobre la recta con pendiente $1+n$ que pasa por el punto $(e^1 - g, e^2)$. Estos dos vectores de consumo están representados por los puntos A y B. En consecuencia, tendremos dos posibles valores de la tasa de crecimiento monetario, σ_A y σ_B, que permiten financiar el mismo nivel de gasto público. Observemos también que $\sigma_A > \sigma_B$. Las tasas de inflación asociadas a los puntos A y B son $1+\pi_A = \frac{1+\sigma_A}{1+n}$ y $1+\pi_B = \frac{1+\sigma_B}{1+n}$, respectivamente. Por lo tanto, el vector de consumos de equilibrio A lleva asociado un nivel de inflación más alto que el vector B. Asimismo, el valor de los saldos reales monetarios en el equilibrio con alta inflación es menor que en el equilibrio con baja inflación ($m_A < m_B$). También puede verse fácilmente a partir del supuesto de normalidad que el nivel de utilidad asociado al equilibrio con baja inflación es mayor que en el equilibrio con alta inflación.[4]

[4] Observemos que la diferencia de utilidad entre los puntos A y B sólo se debe a distintas asignaciones del vector de consumos (c^1, c^2) puesto que el nivel de gasto público per cápita en los dos puntos es el mismo.

Por otra parte, vemos que existe un nivel de gasto público estacionario máximo, $g_{\max}$, que puede ser financiado mediante la emisión de dinero. Este nivel máximo de g puede hallarse desplazando la recta con pendiente $1+n$ hasta que llegue a ser tangente a la curva de transacciones. Observemos que en el equilibrio asociado al punto de tangencia C sólo existe una tasa de crecimiento monetario que permite financiar el nivel de gasto público $g_{\max}$. Los valores del gasto público superiores a $g_{\max}$ no pueden financiarse mediante la emisión de dinero ya que la curva de transacciones y la recta que determina el equilibrio en el mercado de bienes no tendrían ningún punto en común.

En resumen, si $g \in [0, g_{\max})$ entonces existen dos valores no negativos de los saldos monetarios de dinero que solucionan la ecuación (3.16). Estos dos valores de m llevan asociados dos tasas de crecimiento monetario que permiten financiar dicho nivel de gasto público, así como dos tasas de inflación y dos vectores de consumos consistentes con un equilibrio monetario estacionario. Si $g = g_{\max}$ entonces la solución a la ecuación (3.16) es única y, por lo tanto, sólo existe un equilibrio monetario estacionario. Si $g > g_{\max}$, entonces la ecuación (3.16) no tiene solución y, por consiguiente, no existe ningún equilibrio monetario estacionario asociado a dicho nivel de gasto público. La figura 10 nos representa distintas curvas de Laffer, relacionando el nivel de gasto público per cápita con la tasa de crecimiento del dinero (panel A), con los saldos reales de dinero per cápita (panel B) y con la tasa de inflación (panel C).

Señalemos por último que la anterior cota superior en el nivel de gasto público no existe si el gobierno utilizase impuestos a tanto alzado en lugar de la emisión de dinero. Con impuestos a tanto alzado el gobierno podría absorber la totalidad de recursos de la economía y, evidentemente, la financiación del gasto público mediante dichos impuestos es superior en términos de bienestar ya que no genera inflación.

[Figura 10]

4. Dinero y producción en el modelo de generaciones solapadas.

En esta sección vamos a analizar el modelo de Diamond (1965) de generaciones solapadas con capital productivo y con dinero, desarrollado por Tirole (1985). En primer lugar, nos centraremos en desarrollar el modelo propuesto, analizando las condiciones que permiten obtener los equilibrios monetarios de esta economía, y seguidamente trataremos de estudiar cual es el efecto que se deriva de la política monetaria realizada por el gobierno.

4.1. Modelo de Diamond con dinero

El gobierno emite un stock de dinero H_t que supondremos constante ($H_t = H, \ \forall t$). En esta economía existen dos posibles maneras de ahorrar por parte de los individuos jóvenes: acumular riqueza en forma de capital (prestando output a las empresas), o bien acumular su riqueza en forma de dinero.

La demanda de dinero en términos nominales viene dada por $m_t p_t N_t$, mientras que la oferta agregada nominal es igual al stock de dinero emitido por el gobierno. La condición de equilibrio para el mercado de dinero no es otra que la que se obtiene igualando la demanda a la oferta

$$m_t p_t N_t = H.$$

Que H sea constante implica que $H = m_{t+1} p_{t+1} N_{t+1}$, por tanto sustituyendo esta expresión en la anterior obtenemos que la condición de equilibrio en el mercado de dinero es

$$\frac{m_{t+1}}{m_t} = \frac{1}{(1+n)(1+\pi_{t+1})}, \tag{4.1}$$

la misma que ya obteniamos en (1.11).

La función de producción es la estándar en el modelo de Diamond, donde los individuos jóvenes trabajan y reciben un salario positivo, que no es otro su productividad marginal neta y los individuos viejos no trabajan y por tanto no reciben ningun tipo de dotación. Definiremos por tanto $y = f(k)$ como el producto bruto, donde $F(.)$ es la función de producción bruta que satisface las condiciones de Inada. Al igualar el precio de los factores de producción a su productividad neta se obtienen las características expresiones para w_t y r_t,

$$\begin{aligned} w_t &= f(k_t) - k_t f'(k_t), \\ r_t &= f'(k_t) - \delta. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Por otro lado, si m_t y k_t son estrictamente positivos, debemos imponer una condición de arbitraje que nos garantice el mismo rendimiento real para los dos activos existentes, dinero y capital. Por tanto se debe cumplir que

$$1 + r_{t+1} = R_{t+1} = \frac{1}{1+\pi_{t+1}}. \tag{4.3}$$

La condición de equilibrio en el mercado de capitales la obtendremos igualando el ahorro a la demanda de capital. La oferta nominal agregada de ahorro vendrá dado por $s_t p_t N_t$, mientras que la demanda será $H + p_t N_{t+1} k_{t+1}$, donde $p_t N_{t+1} k_{t+1}$ es el valor nominal del capital que se instalará en el periodo $t+1$ pero que es comprado en el periodo t. Igualando la primera expresión a la segunda y teniendo en cuenta que $H = m_t p_t N_t$, obtenemos que la condición de equilibrio en el mercado de capitales es

$$s_t = m_t + (1+n)k_{t+1}. \tag{4.4}$$

Recordemos que $s_t = s(w_t, 0, R_{t+1})$ es el ahorro real per cápita, por lo que (4.4) se transforma en

$$s(w_t, 0, R_{t+1}) = m_t + (1+n)k_{t+1}.$$

Sustituyendo w_t, R_{t+1}, por sus expresiones de equilibrio explicitadas en (4.2), obtenemos que finalmente la condición de equilibrio en el mercado de capitales es

$$s(f(k_t) - k_t f'(k_t), 0, 1 + f'(k_{t+1}) - \delta) = m_t + (1+n)k_{t+1}. \tag{4.5}$$

Por otra parte combinando las ecuaciones (4.1) y (4.3) obtenemos la siguiente expresión:

$$m_{t+1} = \left(\frac{1 + f'(k_{t+1}) - \delta}{(1+n)} \right) m_t. \tag{4.6}$$

El equilibrio de esta economía viene caracterizado por el sistema de dos ecuaciones en diferencias ((4.5) *y* (4.6)), y dos incógnitas: k_t y m_t. Observemos que solo existe condición inicial para k_t ($k_0 = \overline{k}_0$), pero no para m_t. En este contexto lo único que esta dado es H y N_0 pero para obtener una condición inicial para m_t necesitariamos saber cuales son los precios iniciales, lo cual no es posible dado que los precios en este modelo se determinan de forma endógena ($m_0 = \frac{H}{p_0 N_0}$). Notemos que este problema no es exclusivo de este contexto, sino que en el modelo de intercambio puro ya aparecía.

4.2. Política Monetaria en el Modelo de Diamond con dinero.

Supondremos, tal y como ya lo hicimos en el modelo de intercambio puro, que el gobierno emite dinero a una tasa constante σ, tal que $H_{t+1} = (1+\sigma)H_t$. Siguiendo los pasos ralizados en el modelo de intercambio puro, llegamos a la expresión (3.2), que nos garantiza el equilibrio en el mercado de dinero y que puede ser reescrita como

$$m_{t+1} = \left(\frac{1+\sigma}{(1+n)(1+\pi_{t+1})} \right) m_t.$$

Por otra parte se ha de seguir manteniendo la condición de arbitraje (4.3) impuesta en el apartado anterior, que nos garantizaba el mismo rendimiento real para los dos activos existentes en esta economía: dinero y capital, siempre y cuando m_t y k_t sean estrictamente positivos. Como en el caso del modelo de intercambio puro, cuando analizábamos los efectos de la política monetaria, en este nuevo contexto los individuos viejos también reciben transferencias de dinero por parte del gobierno. Definimos X_t como la transferencia nominal agregada, la cual debe ser igual a la nueva cantidad de dinero creada, $X_t = \sigma H_t$. Adicionalmete definimos $x_t^j = \frac{X_t}{p_t N_t}$como la transferencia real per cápita a un individuo joven. Combinando las dos expresiones anteriores ontenemos

$$x_t^j = \frac{\sigma H_t}{p_t N_t} = \sigma m_t. \tag{4.7}$$

Pero recordemos que la transferencia de dinero la reciben los individuos viejos, por lo que veamos cuanto vale $x_t^v = \frac{X_t}{p_t N_{t-1}}$. Escribiendo x_t^v,en función de x_t^j, y utilizando (4.7), obtenemos que la transferencia real per cápita de los individuos viejos es:

$$x_t^v = \sigma m_t(1+n). \tag{4.8}$$

Para hallar la condición de equibrio en el mercado de capital, como siempre, debemos igualar la demanda nominal de capital, generada por los dos activos de esta economía, a la oferta nominal del mismo, que viene dada por el ahorro de los individuos jóvenes. Recordemos que en la subsección anterior el ahorro real per cápita era $s_t = s(w_t, 0, R_{t+1})$, donde no existía dotación en el segundo periodo de vida de los individuos, pero ahora el gobierno realiza transferencias de dinero a los individuos viejos, con lo que el ahorro real per cápita pasa a ser $s_t = s(w_t, x_t^v, R_{t+1})$. Sustituyendo (4.8), en la función de ahorro anterior obtenemos que la oferta nominal total de capital es

$$s(w_t, \sigma m_t(1+n), R_{t+1})p_t N_t. \tag{4.9}$$

La demanda nominal de capital se deriva de la suma del valor del stock nominal de dinero en el siguiente periodo, más el valor del capital que se instalará en el periodo $t+1$ pero que ha sido comprado hoy, por tanto viene definida por

$$H_{t+1} + p_t N_{t+1} k_{t+1}.$$

Reproduciendo los pasos dados en la anterior subsección, al hallar la condición de equilibrio del mercado de capital, y teniendo en cuenta que $H_{t+1} = (1+\sigma)H_t$, obtenemos que la demanda nominal total de capital en esta economía viene definida por la siguiente expresión:

$$p_t N_{t+1} k_{t+1} + (1+\sigma) m_t p_t N_t. \tag{4.10}$$

Igualando(4.10) a (4.9) obtenemos la condición que nos define el equilibrio en el mercado de capitales,

$$s(w_t, \sigma m_t(1+n), R_{t+1}) = (1+n)k_{t+1} + (1+\sigma)m_t.$$

Sustituyendo en la anterior expresión w_t y R_{t+1},por sus valores de equilibrio expresados en (4.2), se obtiene la expresión que caracteriza el equilibrio en el mercado de capitales

$$s(f(k_t) - k_t f'(k_t), \sigma m_t(1+n), 1 + f'(k_{t+1}) - \delta) = (1+n)k_{t+1} + (1+\sigma)m_t. \quad (4.11)$$

Por otro lado, la combinación de la condición de equilibrio en el mercado de dinero y de la condición de arbitraje, definida en (4.3) nos permite obtener la siguiente expresión:

$$m_{t+1} = \left(\frac{(1+\sigma)\,(1 + f'(k_{t+1}) - \delta)}{1+n} \right) m_t. \quad (4.12)$$

El equilibrio de esta economía vendrá definido por las ecuaciones (4.11) y (4.12). Centrémonos en el análisis del equilibrio estacionario monetario ($m > 0$), donde como ya sabemos $k_t = k_{t+1} = k^*$, $m_t = m_{t+1} = m^*$, $\forall t$. La ecuaciones (4.11) y (4.12), se transforman en

$$s(f(k^*) - k^* f'(k^*), \sigma m^*(1+n), 1 + f'(k^*) - \delta) = (1+n)k^* + (1+\sigma)m^* \quad (4.13)$$

$$\frac{1+n}{1+\sigma} = (1 + f'(k^*) - \delta). \quad (4.14)$$

Notemos que de (4.14) se deduce que al aumentar σ hace falta que k^* disminuya, para que se siga manteniendo el equilibrio en el mercado de dinero, este efecto expansivo provocado por un aumento monetario recibe el nombre del *efecto Mundell-Tobin*. La idea que subyace detrás no es otra que la de ver que un aumento de σ provoca un incremento de la inflación, lo que induce a una caída del rendimiento del dinero, y por tanto vía la ecuación de arbitraje, se debe producir una reducción del rendimiento de k, $f'(k)$, lo cual se logra elevando el nivel de k. El dinero en este contexto no es superneutral, ya que variaciones de σ generan efectos sobre variables reales. El siguiente paso es ver cuando existirá equilibrio monetario estacionario. Para que éste exista la ecuación (4.13) debe cumplirse. Por tanto vamos a analizar cuales son las condiciones que nos garantizan la existencia de equilibrio monetario estacionario. Que se cumpla la ecuación (4.13) significa que la expresión $s(f(k^*) - k^* f'(k^*), \sigma m(1+n), 1 + f'(k^*) - \delta)$, ha de ser igual a la expresión $(1+n)k^* + (1+\sigma)m$. Tomemos las dos expresiones por separado y veamos que forma tienen en el plano $(f(m), m)$. Como se puede presuponer existirá equilibrio monetario estacionario siempre y cuando exista un punto de corte de estas dos expresiones en el plano considerado. Así pues por un lado observamos que $(1+n)k^* + (1+\sigma)m$, no es más que una recta con pendiente $(1+\sigma)$, y que corta el eje de ordenadas en el punto $(1+n)k^*$ (como k^* es positivo el punto de corte estará por encima del origen de coordenadas). Por otro lado, la expresión $s(f(k^*) - k^* f'(k^*), \sigma m(1+n), 1 + f'(k^*) - \delta)$,corta el eje de ordenadas en el punto $s(f(k^*) - k^* f'(k^*), 0, 1 + f'(k^*) - \delta)$, que es positivo, y su pendiente con respecto a m es igual a

$$\frac{d}{dm}\left(s(f(k^*) - k^* f'(k^*), \sigma m(1+n), 1 + f'(k^*) - \delta)\right) = s_2(1+n)\sigma. \tag{4.15}$$

Recordemos adicionalmente que $1 - s_1 + s_2 R = 0$, con lo que (4.15), pasa a ser igual a $\frac{-(1-s_1)}{R}(1+n)\sigma$. Sabemos que $R(k^*) = \frac{1+n}{1+\sigma}$, por tanto sustituyendolo en la anterior expresión obtenemos que

$$\frac{d}{dm}\left(s(f(k^*) - k^* f'(k^*), \sigma m(1+n), 1 + f'(k^*) - \delta)\right) = (1 - s_1)(1+\sigma)(-\sigma)$$

dado que $\sigma > -1$, $(-\sigma < 1)$, podemos asegurar que $(1 - s_1)(1+\sigma)(-\sigma) < (1-s_1)(1+\sigma)$, y como $s_1 < 1$, podemos concluir que $(1-s_1)(1+\sigma)(-\sigma) < (1+\sigma)$. Observemos que todo este proceso, nos permite comprobar que la pendiente respecto a m de la expresión $s(f(k^*) - k^* f'(k^*), \sigma m(1+n), 1 + f'(k^*) - \delta)$, es menor que la de la expresión $(1+n)k^* + (1+\sigma)m$, con lo que garantizamos que siempre y cuando el punto de corte con el eje de ordenadas del primer término sea mayor que el del segundo, o sea cuando

$$s(f(k^*) - k^* f'(k^*), 0, 1 + f'(k^*) - \delta) > (1+n)k^*, \tag{4.16}$$

existirá un equilibrio monetario, es decir, un equilibrio con $m^* > 0$. Llegados a este punto, nuestro objetivo se reduce a analizar bajo que condiciones se cumple (4.16). Para ello recuperemos el modelo de Diamond sin dinero, donde sabemos que el equilibrio estacionario viene definido por

$$s(f(k^D) - k^D f'(k^D), 0, 1 + f'(k^D) - \delta) = (1+n)k^D. \tag{4.17}$$

Fijemos una $k^* < k^D$. Si evaluamos (4.17) en k^*, la igualdad no se va a seguir manteniendo. La pregunta que seguidamente surge, es cual de las dos expresiones va a ser mayor. Para dar respuesta a esta cuestión observemos que al valor k^* en el período t le corresponde una $k^{**} > k^*$en el periodo $t+1$, para que la condición (4.17) siga cumpliéndose. Por lo tanto, evaluando(4.17) en el punto (k^*, k^{**}) obtenemos que

$$s(f(k^*) - k^* f'(k^*), 0, 1 + f'(k^{**}) - \delta) = (1+n)k^{**}.$$

Si queremos que $k^{**} = k^*$, hace falta que k^{**} disminuya, y si esto pasa se desencadenan dos efectos: por una parte desciende el término $(1+n)k^{**}$, y por otra el ahorro puede sufrir un incremento en el caso de que $s_r > 0$, o bien un decremento en el caso de que $s_r < 0$. En cualquier caso la condición (??), nos permite obtener la siguiente desigualdad, cuando evaluamos (4.17), en k^*:

$$s(f(k^*) - k^* f'(k^*), 0, 1 + f'(k^*) - \delta) > (1+n)k^*.$$

Observemos que esta última expresión, es precisamente la condición (4.16), que queríamos que se cumpliera. Por otra parte si $k^* < k^D$, implica que $1+f'(k^*)-\delta > 1 + f'(k^D) - \delta$. Utilizando (4.14), obtenemos que

$$\frac{1+n}{1+\sigma} > 1 + f'(k^D) - \delta,$$

expresión que podemos reescribir como

$$1 + \sigma < \frac{1+n}{R(k^D)}. \tag{4.18}$$

Así pues, hemos hallado una cota superior para $(1+\sigma)$ que nos garantiza la existencia del equilibrio monetario estacionario, donde $m^* > 0$.

Pasemos, a continuación, a realizar un breve análisis de la eficiencia de los equilibrios estacionarios que se pueden dar en este contexto, sean o no monetarios. Consideraremos dos supuestos de partida diferentes y veremos que ocurre con la eficiencia de los equilibrios existentes.

1. *El Equilibrio de Diamond es eficiente*.

En este caso se cumple que $R(k^D) \geq (1+n)$, o lo que lo mismo $\frac{(1+n)}{R(k^D)} \leq 1$. Para los valores de $(1+\sigma)$ pertenecientes al intervalo $\left[0, \frac{(1+n)}{R(k^D)}\right)$ existe equibrio monetario asociado a cada uno de estos posibles valores, ya que cumplen (4.18). Recordemos que para que exista equilibrio monetario la k^* asociada al mismo, debía ser menor que la k^D, lo que implica que $R(k^*) > R(k^D)$. Estamos suponiendo eficiencia del equibrio de Diamond lo que conlleva que $R(k^D) \geq (1+n)$, y consecuentemente $R(k^*) > (1+n)$ es cierto. Ello nos permite afirmar que cualquier equilibrio asociado a un valor de $(1+\sigma)$ perteneciente al intervalo considerado, es eficiente. Para los valores de $(1+\sigma)$ que estan dentro del intervalo $\left[\frac{(1+n)}{R(k^D)}, \infty\right)$, el único equilibrio posible es el de Diamond (no existe equilibrio monetario), y este será eficiente, por el supuesto de partida. En conclusión, nos hallamos en una situación donde para todo valor de $\sigma > -1$, tenemos equilibrios estacionarios eficientes.

2. *El Equilibrio de Diamond no es eficiente*

En este caso se cumple que $R(k^D) < (1+n)$, o lo que lo mismo $\frac{(1+n)}{R(k^D)} > 1$. Para los valores de $(1+\sigma)$ mayores o iguales a $\frac{(1+n)}{R(k^D)}$, no existe equilibrio monetario, con lo que el único equilibrio posible es el de Diamond y este, bajo el supuesto de partida, sabemos que no es eficiente. Consideremos ahora, los valores de $(1+\sigma)$ pertenecientes al intervalo $\left(1, \frac{(1+n)}{R(k^D)}\right)$. Al cumplirse (4.18), sabemos que existe equilibrio monetario. Rescatando la ecuación (4.14), obtenemos que $R(k^*) = \frac{1+n}{1+\sigma}$, y como $(1+\sigma) > 1$, obtenemos que $R(k^*) < (1+n)$, lo que significa que en este caso tampoco los equilibrios estacionarios de este intervalo son eficientes. Estudiemos por último que ocurre cuando $(1+\sigma)$ toma un valor en el intervalo $[0,1]$. En este caso, también existe equilibrio monetario, dado que se cumple (4.18), pero fijemonos que si bien es cierto que $R(k^*) = \frac{1+n}{1+\sigma}$, por otro lado ahora $(1+\sigma) \leq 1$, con lo que obtenemos que $R(k^*) \geq (1+n)$, lo que nos asegura la eficiencia del equilibrio monetario estacionario. Notemos que $(1+\sigma) \leq 1$, significa en primer lugar que el gobierno debe reducir el stock nominal de dinero, y en segundo lugar que la tasa de inflación debe ser igual a la tasa de crecimiento de la población.

5. Dinero en la función de utilidad

En el modelo de generaciones solapadas el dinero era un activo que permitía a los individuos realizar transferencias intertemporales de riqueza. En dicho modelo, si hubiera otro activo que permitiera materializar el ahorro, tal como los préstamos a las empresas en forma de obligaciones, éste debería tener el mismo rendimiento real que el dinero. Esto es así porque la condición de arbitraje entre los distintos activos usados como instrumentos de ahorro obliga a igualar sus rendimientos reales. No obstante, vemos como en el mundo real el dinero es usado al mismo tiempo que existen otros activos que tienen un rendimiento real claramente mayor que el del dinero.

Tal como ya hemos apuntado, el modelo de generaciones solapadas enfatiza en demasía la función del dinero como depósito de valor. Sin embargo, el dinero también tiene una importante función como medio de pago puesto que facilita enormemente las transacciones cotidianas entre los individuos. La cantidad de dinero de la que disponen los individuos en el momento de efectuar sus compras afecta su nivel de utilidad al reducir los costes asociados a las transacciones corrientes. Estos servicios adicionales del dinero no son proporcionados por los otros activos ya que, por ejemplo, sería ciertamente costoso en términos de negociación intentar comprar bienes de consumo a cambio de acciones o bonos. Así pues, el hecho de que el dinero proporcione directamente utilidad permite que el rendimiento real de los otros activos sea mayor que el del dinero. Tanto el dinero como los otros activos financieros sufren la depreciación causada por la inflación y, por lo tanto, la diferencia entre los tipos de interés reales se debe únicamente a la diferencia entre los tipos de interés nominales. El interés nominal es nulo en el caso del dinero, mientras que suele ser positivo para los otros activos. El tipo de interés nominal de los otros activos es pues el coste de oportunidad asociado a mantener dinero. Dicho coste debe igualarse en equilibrio a los beneficios asociados a su función como medio de pago.

5.1. *El problema de los consumidores*

Siguiendo la aportación original de Sidrauski (1967) supondremos que los saldos reales de dinero entran en la función de utilidad de los individuos. Evidentemente, lo importante para un individuo es el poder adquisitivo del dinero de que dispone y no los saldos nominales. Los servicios prestados por los saldos nominales dependerán en última instancia del nivel de precios.

Efectuaremos nuestro análisis en el marco del modelo dinástico de acumulación de capital en tiempo continuo. El análisis del modelo en tiempo discreto es idéntico y se deja como ejercicio. Supondremos que cada dinastía maximiza la integral de la utilidad descontada de un miembro representativo de dicha dinastía. Por lo tanto, el objetivo del consejo familiar, para todo periodo inicial s, consiste en resolver el siguiente programa:

$$\max \int_s^\infty e^{-\rho(t-s)} u(c(t), m(t))\, dt, \tag{5.1}$$

donde $c(t)$ es el consumo per cápita y $m(t)$ son los saldos reales de dinero per cápita en el instante t. La función de utilidad $u(\cdot, \cdot)$ es dos veces continuamente diferenciable, estrictamente creciente respecto al consumo, estrictamente cóncava, y, por último, satisface $\lim_{c\to 0} u_c(c, m) = \infty$ y $\lim_{c\to\infty} u_c(c, m) = 0$ para todo $m > 0$; y $\lim_{m\to 0} u_m(c, m) = \infty$ y $\lim_{m\to\infty} u_m(c, m) \leq 0$ para todo $c > 0$. Así pues, permitimos la posibilidad de que $u_m(c, m) = 0$ para algún valor finito de los saldos reales m, lo cual indicaría que, dado un nivel de consumo, existe un punto de saciación respecto al dinero en la función de utilidad. Por último, supondremos que tanto el bien de consumo como los saldos reales de dinero se comportan como bienes normales.

Supondremos que el gobierno emite continuamente dinero y lo introduce en la economía mediante transferencias. El valor nominal de estas transferencias per cápita en el instante t es $X(t)$. Cuando $X(t) = 0$ obtenemos como caso particular el comportamiento de la economía cuando la masa monetaria es constante. Cada miembro de la dinastía posee una unidad de trabajo en cada periodo, la cual es ofrecida inelásticamente a las empresas de esta economía. Así, la restricción presupuestaria en términos nominales a la que se enfrenta una familia en el instante t es

$$p(t)N(t)w(t) + p(t)r(t)A(t) + N(t)X(t) = p(t)N(t)c(t) + p(t)\dot{A}(t) + \dot{H}(t), \tag{5.2}$$

donde $w(t)$ es el salario real per cápita, $r(t)$ es el interés real neto de los préstamos realizados a las empresas, $p(t)$ es el precio del bien de consumo expresado en unidades monetarias, $A(t)$ es el valor real acumulado de los préstamos efectuados a las empresas hasta el instante t y $H(t)$ es el stock nominal de dinero que posee la dinastía. Por lo tanto, la anterior restricción presupuestaria nos indica que el valor nominal de los ingresos de una familia en el instante t (generados por las rentas del trabajo, las rentas de capital y las transferencias del gobierno) debe distribuirse entre consumo y ahorro. Dicho ahorro puede materializarse mediante nuevos préstamos, cuyo valor nominal será $p(t)\dot{A}(t)$, o acumulando más dinero por la cuantía nominal agregada $\dot{H}(t)$. Dividiendo (5.2) por $p(t)N(t)$, y después de agrupar términos, obtenemos

$$w(t)+r(t)a(t)+x(t)=c(t)+\dot{a}(t)+\dot{m}(t)+na(t)+\dot{m}(t)+(n+\pi(t))m(t), \quad (5.3)$$

donde $a(t)=\frac{A(t)}{N(t)}$ es el valor real de los préstamos acumulados per cápita, $x(t)=\frac{X(t)}{p(t)}$ es el valor real per cápita de las transferencias de dinero, $\pi(t)=\frac{\dot{p}(t)}{p(t)}$ es la tasa de inflación y, tal como ya hemos dicho, $m(t)=\frac{H(t)}{p(t)N(t)}$ son los saldos reales de dinero per cápita. Para obtener (5.3) debemos utilizar el hecho de que $\frac{\dot{A}(t)}{N(t)}=\dot{a}(t)+na(t)$. Asimismo, también requerimos la utilización de la siguiente igualdad:

$$\frac{\dot{H}(t)}{p(t)N(t)}=\dot{m}(t)+(\pi(t)+n)m(t), \quad (5.4)$$

la cual se obtiene calculando $\dot{m}(t)$,

$$\dot{m}(t)=\frac{\dot{H}(t)\left[p(t)N(t)\right]-H(t)\left[\dot{p}(t)N(t)+p(t)\dot{N}(t)\right]}{\left[p(t)N(t)\right]^2}=$$

$$=\frac{\dot{H}(t)}{p(t)N(t)}+\left[\frac{\dot{p}(t)}{p(t)}+\frac{\dot{N}(t)}{N(t)}\right]\frac{H(t)}{p(t)N(t)}=\frac{\dot{H}(t)}{p(t)N(t)}-(\pi(t)+n)m(t),$$

y despejando $\frac{\dot{H}(t)}{p(t)N(t)}$ obtenemos la expresión (5.4).

La dinastía toma como dadas las trayectorias de los tipos de interés $r(t)$, de los salarios $w(t)$, de las transferencias gubernamentales $x(t)$, de los precios $p(t)$ y, por lo tanto, de las tasas de inflación $\pi(t)$, teniendo previsión perfecta sobre la evolución futura de dichas trayectorias. Imponemos la condición de no-negatividad en los préstamos acumulados a largo plazo $\left(\lim_{t\to\infty} a(t)\geq 0\right)$ como consecuencia del hecho de que suponemos que las familias deben cancelar sus deudas a largo plazo.[5] Por último, dada la imposibilidad física de que exista dinero negativo, impondremos que $m(t) \geq 0$.

Podemos formular el problema de la dinastía en el instante s, diciendo que el objetivo de la misma es encontrar unas trayectorias de consumos $c(t)$, de préstamos acumulados $a(t)$ y de saldos reales de dinero $m(t)$, tales que solucionen el programa (5.1) sujeto a (5.3), a las condiciones iniciales, $a(s) = a_s$ y $m(s) = m_s$, y a las anteriores condiciones de no-negatividad.

Despejando $c(t)$ en la restricción (5.3) y sustituyendo en la función objetivo (5.1) , obtenemos

$$\max \int_s^\infty e^{-\rho(t-s)} u(w(t)+(r(t)-n)a(t)+x(t)-\dot{a}(t)-(n+\pi(t))m(t)-\dot{m}(t), m(t))\, dt \tag{5.5}$$

Definamos la función dentro de la integral como

$$h(a(t), m(t), \dot{a}(t), \dot{m}(t), t) \equiv$$
$$e^{-\rho(t-s)} u(w(t) + (r(t) - n)a(t) + x(t) - \dot{a}(t) - (n + \pi(t))m(t) - \dot{m}(t), m(t)).$$

Dado que la función de utilidad u es estrictamente cóncava y el consumo es lineal en $a(t), m(t), \dot{a}(t)$ y $\dot{m}(t)$, la función h es cóncava respecto a los mismos argumentos. Las condiciones de Euler para una solución interior del problema (5.5) son

$$h_a(a(t), m(t), \dot{a}(t), \dot{m}(t), t) = \frac{dh_{\dot{a}}(a(t), m(t), \dot{a}(t), \dot{m}(t), t)}{dt} \tag{5.6}$$

y

$$h_m(a(t), m(t), \dot{a}(t), \dot{m}(t), t) = \frac{dh_{\dot{m}}(a(t), m(t), \dot{a}(t), \dot{m}(t), t)}{dt}. \tag{5.7}$$

A continuación podemos calcular las siguientes derivadas que aparecen en dichas condiciones de Euler:

$$h_a(a(t), m(t), \dot{a}(t), \dot{m}(t), t) = e^{-\rho(t-s)} u_c(c(t), m(t))(r(t) - n), \tag{5.8}$$

$$h_{\dot{a}}(a(t), m(t), \dot{a}(t), \dot{m}(t), t) = -e^{-\rho(t-s)} u_c(c(t), m(t)), \tag{5.9}$$

$$\frac{dh_{\dot{a}}(a(t), m(t), \dot{a}(t), \dot{m}(t), t)}{dt} =$$

[5] Todos los resultados de esta sección pueden replicarse imponiendo, en lugar de la condición de nonegatividad a largo plazo de $a(t)$, la condición que evite un juego de Ponzi, tal como ya discutimos en la sección 2.5.

$$e^{-\rho(t-s)}\left[\rho u_c(c(t),m(t)) - u_{cc}(c(t),m(t))\dot{c}(t) - u_{cm}(c(t),m(t))\dot{m}(t)\right], \qquad (5.10)$$

$$h_m(a(t),m(t),\dot{a}(t),\dot{m}(t),t) =$$

$$-e^{-\rho(t-s)}\left[u_c(c(t),m(t))(n+\pi(t)) - u_m(c(t),m(t))\right], \qquad (5.11)$$

$$h_{\dot{m}}(a(t),m(t),\dot{a}(t),\dot{m}(t),t) = -e^{-\rho(t-s)}u_c(c(t),m(t)). \qquad (5.12)$$

Por lo tanto, utilizando (5.8) y (5.10) y dividiendo por $e^{-\rho(t-s)}u_c(c(t),m(t))$, la condición de Euler (5.6) se convierte en

$$\frac{u_{cc}(c(t),m(t))}{u_c(c(t),m(t))}\dot{c}(t) + \frac{u_{cm}(c(t),m(t))}{u_c(c(t),m(t))}\dot{m}(t) = \rho + n - r(t). \qquad (5.13)$$

Por otra parte, a partir de (5.9) y (5.12) , vemos que

$$h_{\dot{m}}(a(t),m(t),\dot{a}(t),\dot{m}(t),t) = h_{\dot{a}}(a(t),m(t),\dot{a}(t),\dot{m}(t),t),$$

por lo que se cumple que

$$\frac{dh_{\dot{m}}(a(t),m(t),\dot{a}(t),\dot{m}(t),t)}{dt} = \frac{dh_{\dot{a}}(a(t),m(t),\dot{a}(t),\dot{m}(t),t)}{dt}. \qquad (5.14)$$

Utilizando (5.14) y (5.6) , la condición de Euler (5.7) puede escribirse como

$$h_m(a(t),m(t),\dot{a}(t),\dot{m}(t),t) = h_a(a(t),m(t),\dot{a}(t),\dot{m}(t),t).$$

Podemos evaluar la anterior expresión utilizando (5.8) y (5.11) y, después de dividir por $e^{-\rho(t-s)}u_c(c(t),m(t))$, obtenemos:

$$\frac{u_m(c(t),m(t))}{u_c(c(t),m(t))} = r(t) + \pi(t). \qquad (5.15)$$

La ecuación (5.15) nos dice que la relación marginal de sustitución entre consumo y saldos reales de dinero ha de ser igual al tipo de interés nominal $r(t)+\pi(t)$. Si un individuo modifica su cartera reduciendo su inversión en capital físico en un unidad marginal y aumenta sus tenencias de saldos reales en una unidad marginal pierde instantáneamente $r(t) + \pi(t)$ unidades de consumo, lo que induce una perdida de utilidad igual a $(r(t) + \pi(t))\, u_c(c(t),m(t))$. Un agente optimizador igualará esta pérdida de utilidad con el aumento de utilidad $u_m(c(t),m(t))$ derivado de mantener una unidad marginal adicional de saldos reales. Por lo tanto, dado un nivel de consumo $c(t)$ y un tipo de interés nominal $r(t) + \pi(t)$, la demanda de saldos reales de dinero queda determinada por la ecuación (5.15).

Dado un tipo de interés nominal, la demanda de saldos reales de dinero es creciente respecto al consumo ya que, debido al supuesto de normalidad, las curvas de Engel de la función de utilidad $u(c(t), m(t))$ son crecientes. Por lo tanto, si el consumo aumenta y la relación marginal de sustitución permanece constante, la demanda de saldos reales debe aumentar.

Asimismo, dado un nivel de consumo, la demanda de saldos reales de dinero es decreciente respecto al tipo de interés nominal. A partir de (5.15) vemos que, si el consumo es constante, al aumentar el tipo de interés nominal debe aumentar la pendiente de las curvas de indiferencia. Otra vez el supuesto de normalidad implica que la demanda de saldos reales de dinero disminuye, tal como puede apreciarse en la figura 11.

[Figura 11]

Por último, debido a las restricciones de no-negatividad $\lim_{t\to\infty} a(t) \geq 0$ y $\lim_{t\to\infty} m(t) \geq 0$, [6] los dos conjuntos de condiciones de transversalidad en el infinito son

$$\lim_{t\to\infty} h_{\dot{a}}(a(t), m(t), \dot{a}(t), \dot{m}(t), t) \leq 0, \tag{5.16}$$

$$\lim_{t\to\infty} a(t) \geq 0 \tag{5.17}$$

$$\lim_{t\to\infty} a(t) h_{\dot{a}}(a(t), m(t), \dot{a}(t), \dot{m}(t), t) = 0. \tag{5.18}$$

y

$$\lim_{t\to\infty} h_{\dot{m}}(a(t), m(t), \dot{a}(t), \dot{m}(t), t) \leq 0, \tag{5.19}$$

$$\lim_{t\to\infty} m(t) \geq 0 \tag{5.20}$$

$$\lim_{t\to\infty} m(t) h_{\dot{m}}(a(t), m(t), \dot{a}(t), \dot{m}(t), t) = 0. \tag{5.21}$$

A partir de (5.9) y (5.12) y del hecho de que la función de utilidad es creciente respecto al consumo, vemos que las condiciones (5.16) y (5.19) se satisfacen automáticamente. Por otra parte, utilizando también (5.9) y (5.12), las condiciones (5.18) y (5.21) se convierten en

$$\lim_{t\to\infty} a(t) e^{-\rho(t-s)} u_c(c(t), m(t)) = 0 \tag{5.22}$$

[6] Obviamente, la condición de nonegatividad $m(t) \geq 0$ implica que $\lim_{t\to\infty} m(t) \geq 0$. De hecho, la condición que hemos impuesto sobre la utilidad marginal de los saldos reales del dinero cuando m tiende a cero obliga a las familias a elegir una trayectoria estrictamente positiva de dichos saldos. Por lo tanto, la desigualdad en el límite $\lim_{t\to\infty} m(t) \geq 0$ determina cual es la condición de transversalidad asociada a los saldos reales monetarios para el problema de optimización dinástica.

y

$$\lim_{t\to\infty} m(t)e^{-\rho(t-s)}u_c(c(t),m(t)) = 0. \tag{5.23}$$

Dadas unas trayectorias de subvenciones reales $x(t)$, de tipos de interés reales $r(t)$, de salarios reales $w(t)$, de precios $p(t)$ y, por consiguiente, de tasas de inflación $\pi(t)$, una solución del problema de consumo y acumulación de una dinastía vendrá dada por las trayectorias de préstamos acumulados per cápita $a(t)$, saldos reales de dinero $m(t)$ y consumo $c(t)$ que satisfagan las ecuaciones (5.13) y (5.15) , la restricción presupuestaria (5.3) , las condiciones de transversalidad y las condiciones iniciales $a(s) = a_s$ y $m(s) = m_s$. Para resolver el sistema dinámico formado por las ecuaciones (5.13) , (5.15) y (5.3) , necesitamos sólo dos condiciones adicionales ya que la ecuación (5.15) es simplemente una ecuación ordinaria no diferencial. Sin embargo, tenemos más condiciones adicionales de las requeridas puesto que a las condiciones iniciales $a(s) = a_s$ y $m(s) = m_s$ hemos de añadir las condiciones de transversalidad. Tal como veremos, esta sobredeterminación se soluciona mediante las condiciones de equilibrio ya que, desde el punto de vista del equilibrio general, los precios (y en consecuencia los saldos reales de dinero) se determinan endógenamente.

5.2. *Empresas, gobierno y equilibrio*

A continuación describiremos el sector productivo de esta economía. Supondremos que las empresas operan bajo una tecnología que se representa mediante la función de producción bruta neoclásica $F(K(t), L(t))$. Por lo tanto, el output bruto por trabajador viene determinado por la función de producción intensiva $f(k(t))$, donde $k(t) = \frac{K(t)}{L(t)}$ es el stock de capital por trabajador. Supondremos que la tasa de depreciación del capital físico es igual a la constante $\delta \geq 0$. Las empresas son competitivas y maximizan beneficios. Consecuentemente, los inputs productivos son retribuidos de acuerdo con sus productividades marginales netas, es decir,

$$w(t) = f(k(t)) - k(t)f'(k(t)) \tag{5.24}$$

$$r(t) = f'(k(t)) - \delta. \tag{5.25}$$

Dado que bajo rendimientos constantes a escala las empresas obtienen beneficios nulos, normalizamos el número de empresas de manera que haya una empresa por cada dinastía y, por lo tanto, en equilibrio se cumplirá que $L(t) = N(t)$.

El último ingrediente de este modelo es el gobierno. El gobierno financia las subvenciones nominales a las familias mediante la emisión de dinero, por lo que debe satisfacer la siguiente restricción presupuestaria:

$$N(t)X(t) = \dot{H}(t). \tag{5.26}$$

Dividiendo la anterior expresión por $p(t)N(t)$ y utilizando (5.4) , obtenemos la restricción presupuestaria del gobierno en términos reales per cápita,

$$x(t) = \dot{m}(t) + [n + \pi(t)]\, m(t). \tag{5.27}$$

Supondremos que el gobierno aumenta la oferta monetaria en cada instante del tiempo a la tasa constante $\sigma > 0$, es decir, $\sigma = \frac{\dot{H}(t)}{H(t)}$. Así, la restricción del gobierno (5.26) se convierte en

$$N(t)X(t) = \sigma H(t),$$

la cual, dividiéndola por $p(t)N(t)$, se transforma a su vez en

$$x(t) = \sigma m(t). \tag{5.28}$$

Combinando (5.27) y (5.28) , obtenemos

$$\dot{m}(t) + [n + \pi(t)]\, m(t) = \sigma m(t),$$

por lo que, despejando $\pi(t)$, podemos hallar la tasa de inflación en función de los saldos reales de dinero,

$$\pi(t) = \sigma - n - \frac{\dot{m}(t)}{m(t)}. \tag{5.29}$$

Por último, si el mercado de capital y de trabajo está en equilibrio, debe cumplirse que

$$a(t) = k(t). \tag{5.30}$$

Así pues, utilizando (5.24) , (5.25) , (5.27) y (5.30), la restricción presupuestaria de la familia (5.3) se convierte en

$$\dot{k}(t) = f(k(t)) - (\delta + n)k(t) - c(t). \tag{5.31}$$

Vemos que (5.31) es simplemente una condición de equilibrio en el mercado de bienes.

Utilizando (5.25) , la condición de Euler (5.13) pasa a ser

$$\frac{u_{cc}(c(t), m(t))}{u_c(c(t), m(t))}\dot{c}(t) + \frac{u_{cm}(c(t), m(t))}{u_c(c(t), m(t))}\dot{m}(t) = \rho + n - f'(k(t)) + \delta. \tag{5.32}$$

Asimismo, utilizando (5.25) y (5.29) , la ecuación de demanda de dinero (5.15) se convierte en

$$\frac{u_m(c(t), m(t))}{u_c(c(t), m(t))} = f'(k(t)) - \delta + \sigma - n - \frac{\dot{m}(t)}{m(t)}. \tag{5.33}$$

Por último, sustituyendo la condición de equilibrio (5.30), en la condición de transversalidad (5.22) obtenemos

$$\lim_{t\to\infty} k(t)e^{-\rho(t-s)}u_c(c(t), m(t)) = 0 \tag{5.34}$$

Ahora estamos en condiciones de definir el equilibrio competitivo de esta economía de la siguiente manera:

Definición 5.1: Un equilibrio competitivo asociado a una tasa de crecimiento monetario σ es un vector de trayectorias no-negativas $\{c(t), k(t), m(t)\}$, $t \in [0, \infty)$, que solucionan el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden formado por las ecuaciones (5.31), (5.32) y (5.33) junto con las condiciones de transversalidad (5.23), (5.34) y la condición inicial $k(s) = k_s$.

Dado que las trayectorias de equilibrio de $k(t)$ y $m(t)$ son no-negativas y $a(t) = k(t)$, las condiciones (5.17) y (5.20) se satisfacerán automáticamente en equilibrio y, por esta razón, las omitimos en la anterior definición. Vemos que el sistema dinámico formado por las ecuaciones diferenciales de primer orden (5.31), (5.32) y (5.33) requiere solamente tres condiciones adicionales y estas son precisamente (5.23), (5.34) y la condición inicial $k(s) = k_s$. Además, a diferencia de que lo que sucede en el problema de optimización dinámica de las dinastías, los saldos reales de dinero iniciales $m(s)$ se determinan endógenamente en equilibrio mediante un salto inicial del nivel de precios $p(s)$ ya que los saldos nominales per cápita $\frac{H(s)}{N(s)}$ están predeterminados en el instante s.

Obviamente, en este modelo el dinero es *neutral,* tanto en el estado estacionario como fuera de él, puesto que las anteriores ecuaciones que definen un equilibrio dinámico, evaluadas para $\sigma = 0$, no dependen del stock de dinero H. Por lo tanto, cambios permanentes y puntuales en el stock de dinero no afectarán las trayectorias de equilibrio de $c(t)$, $k(t)$ y $m(t)$, sino que sólo afectarán al nivel de precios.

Una vez hemos obtenido el vector de las trayectorias de equilibrio $\{c(t), k(t), m(t)\}$, $t \in [0, \infty)$, las trayectorias asociadas de las subvenciones $x(t)$ y de las tasas de inflación $\pi(t)$ en equilibrio se obtienen mediante las ecuaciones (5.28) y (5.29), respectivamente.[7]

[7] Ya hemos visto que el nivel inicial de precios $p(s)$ se determina endógenamente y, por lo tanto, toda la trayectoria de precios de equilibrio se puede obtener a partir de la trayectoria de tasas de inflación $\pi(t)$ mediante la ecuación

$$p(t) = p(s)e^{\int_s^t \pi(m)dm}.$$

5.3. *Política monetaria*

A continuación analizaremos cuales son los efectos de la política monetaria llevada a cabo por el gobierno sobre el equilibrio estacionario de esta economía. En dicho equilibrio, el consumo, el capital per cápita y los saldos reales de dinero son constantes y estrictamente positivos. Por consiguiente, el equilibrio estacionario se obtiene imponiendo $\dot{k}(t) = \dot{c}(t) = \frac{\dot{m}(t)}{m(t)} = 0$ en las ecuaciones diferenciales $(5.31), (5.32)$ y (5.33), las cuales se convierten respectivamente en las siguientes ecuaciones ordinarias:

$$c = f(k) - (n+\delta)k, \tag{5.35}$$

$$f'(k) = \rho + n + \delta, \tag{5.36}$$

$$\frac{u_m(c,m)}{u_c(c,m)} = f'(k) - \delta + \sigma - n, \tag{5.37}$$

El vector estrictamente positivo (k, c, m) que resuelve el anterior sistema define el equilibrio estacionario interior de la economía. Obviamente, dicho equilibrio estacionario satisface las condiciones de transversalidad evaluadas en equilibrio (5.23) y (5.34). Además, se puede demostrar que un equilibrio dinámico converge al equilibrio estacionario interior bajo ciertas condiciones, cuyo análisis es omitido debido a su complejidad.[8]

A partir de la ecuación (5.36) vemos que el nivel del capital per cápita coincide con el de la regla de oro modificada, k^{rom}. Dicho nivel es independiente de la tasa de crecimiento monetario σ y, consecuentemente, el output bruto per cápita de esta economía $(y = f(k))$, los salarios $(w = f(k) - kf'(k))$, y los tipos de interés $(r = f'(k) - \delta = \rho + n)$ también son invariantes respecto a la tasa σ. Utilizando (5.35) vemos que el nivel de consumo de los individuos en un equilibrio estacionario es también independiente de la tasa σ. Por lo tanto, el dinero es *superneutral* en el estado estacionario interior de esta economía. Sin embargo, hemos de advertir que, fuera del estado estacionario, las trayectorias de equilibrio del consumo $c(t)$ y capital per cápita $k(t)$ si que dependen de la tasa de crecimiento monetario σ (véase al respecto el trabajo de Fischer (1979)). Por otra parte, veremos que los cambios en la tasa de crecimiento monetario σ afectan al nivel estacionario de utilidad de los individuos.[9]

[8] En particular, la condición $\lim\limits_{m \to 0} \frac{mU_m(c,m)}{U_c(c,m)} > 0$, para todo $c > 0$, permite eliminar la posibilidad de que el equilibrio dinámico satisfaga $m_t \to 0$ y $\pi_t \to \infty$, es decir, evita que la economía converja a un equilibrio hiperinflacionario. Observemos que la anterior condición es más fuerte que $\lim\limits_{m \to 0} \frac{U_m(c,m)}{U_c(c,m)} = \infty$.

[9] Es por esta razón que algunos autores rehusan afirmar que el dinero es *superneutral* en este contexto.

Combinando (5.36) y (5.37) obtenemos la siguiente ecuación:

$$\frac{u_m(c,m)}{u_c(c,m)} = \rho + \sigma. \tag{5.38}$$

Observemos como un aumento de la tasa de crecimiento monetario provoca un aumento de la relación marginal de sustitución entre consumo y saldos monetarios reales. Teniendo en cuenta que el consumo no depende de la tasa σ, la única manera de aumentar dicha relación marginal de sustitución es mediante una disminución de los saldos reales de dinero estacionarios, tal como puede verse en la figura 11.

Para obtener la tasa de inflación en un equilibrio estacionario podemos evaluar (5.29) cuando $\frac{\dot{m}(t)}{m(t)} = 0$, obteniendo

$$\pi = \sigma - n. \tag{5.39}$$

Claramente la tasa de inflación estacionaria es creciente respecto a la tasa de crecimiento monetario σ. Esto explica la reducción en los saldos reales monetarios de equilibrio ya que, cuando el gobierno aumenta la tasa de crecimiento monetario, la inflación también aumenta y esto provoca un aumento en los tipos de interés nominales estacionarios $r + \pi$, lo cual significa un aumento en el coste de oportunidad asociado a mantener dinero. Finalmente, la ecuación (5.28) evaluada en el equilibrio estacionario nos determina el valor real estacionario de las transferencias,

$$x = \sigma m. \tag{5.40}$$

En resumen, la estática comparativa de cambios marginales en la tasa de crecimiento monetario σ sobre el capital, consumo y saldos reales monetarios per cápita, así como sobre la tasa de inflación, se resume en las siguientes derivadas:

$$\frac{dk}{d\sigma} = 0, \quad \frac{dc}{d\sigma} = 0, \quad \frac{dm}{d\sigma} < 0 \text{ y } \frac{d\pi}{d\sigma} = 1.$$

La figura 11 también ilustra los efectos de la política monetaria sobre el bienestar de los individuos en un equilibrio estacionario que satisface $\frac{u_m(c,m)}{u_c(c,m)} > 0$. En efecto, vemos que el aumento de σ se traduce en una disminución en el nivel de utilidad de los individuos ya que los saldos reales de dinero son decrecientes respecto a la inflación, mientras que el consumo permanece invariante. En este contexto cabe preguntarse sobre cual es la política monetaria óptima. Dado que la política monetaria considerada no afecta al consumo, la utilidad del individuo representativo en un equilibrio estacionario se maximiza cuando $\frac{u_m(c,m)}{u_c(c,m)} = 0$. A partir de (5.38) vemos que esto se conseguiría eligiendo una política monetaria tal que $\sigma = -\rho$. Si la función de utilidad tuviera un punto de saciación m^* respecto a los saldos reales, de manera que $signo\{u_m(c,m)\} = signo\{m^* - m\}$, entonces el valor de los saldos reales de equilibrio bajo dicha política óptima sería precisamente m^*. Si, por contra $\lim_{m\to\infty} u_m(c,m) = 0$, entonces los saldos reales asociados a dicha política no estarían acotados ($m = \infty$). En todo caso, la política monetaria óptima consiste en saciar la demanda de saldos reales de los individuos. La tasa de inflación óptima sería $\pi = -\rho - n$, tal como se desprende de (5.39). Es decir, si la tasa de crecimiento de la población fuera positiva, el gobierno debería inducir una deflación.

Por último, podemos calcular el tipo de interés nominal óptimo $r+\pi$. Teniendo en cuenta que $r = \rho + n$ y $\pi = -\rho - n$, vemos que el interés nominal asociado a la anterior política óptima es cero. Dicha política monetaria fue propuesta originariamente por Friedman (1969). La optimalidad de la regla de Friedman constituye uno de los resultados mas robustos de la teoría monetaria ya que, tal como veremos en la sección 6, sobrevive a distintas modelizaciones de la función económica del dinero. Por otra parte, vimos en la sección 3 que la condición de que el tipo de interés nominal sea cero está indisolublemente asociada a la existencia de equilibrio en el modelo de generaciones solapadas, sea cual sea la política monetaria seguida por el gobierno en ese contexto.

5.4. *Financiación inflacionaria del gasto público*

Dado que, al introducir el dinero en la función de utilidad de los individuos, se genera una demanda positiva de dinero, el gobierno puede financiar el gasto público mediante la emisión de activos monetarios. En otras palabras, el señoreaje por parte del gobierno es posible. Al igual que en el apartado 5.3.3 podemos suponer que el gasto público se destina a la provisión de bienes públicos. Por lo tanto, el gasto público agregado $G(t)$ puede aparecer en la función objetivo de las dinastías de manera aditiva separable, con lo cual el objetivo de una dinastía puede ser ahora

$$\max \int_s^\infty e^{-\rho(t-s)} \{u(c(t), m(t)) + v(G(t);t)\} \, dt.$$

Vemos que con esta especificación de las preferencias, el nivel de gasto público no afecta a las utilidades marginales del consumo y del dinero. Supondremos también que no existen tasas asociadas al uso de dichos bienes públicos. Sin embargo, la restricción presupuestaria de las familias si que se verá afectada por la presencia de dicho gasto público ya que ahora el gobierno absorberá los bienes que obtiene a cambio de la emisión de dinero y no los devolverá al sector privado mediante transferencias. Así pues, la restricción presupuestaria de una familia en el instante

t será

$$w(t) + r(t)a(t) = c(t) + \dot{a}(t) + na(t) + \dot{m}(t) + (n + \pi(t))m(t), \tag{5.41}$$

la cual se obtiene al suprimir las transferencias reales $x(t)$ de la restricción presupuestaria (5.3). Por lo tanto, la solución del problema de consumo y ahorro de una dinastía vendrá dado por las mismas ecuaciones que en el caso anterior sin gasto público, pero sustituyendo la ecuación (5.3) por la (5.41).

Supongamos que el gobierno fija a un nivel constante g el gasto público per cápita, es decir $\frac{G(t)}{N(t)} = g$. Entonces, dado que el gobierno utiliza la emisión de dinero para financiar el gasto público en lugar de financiar transferencias a tanto alzado, la restricción presupuestaria del gobierno (5.27) debe transformarse en

$$g = \dot{m}(t) + (n + \pi(t))m(t). \tag{5.42}$$

Despejando la tasa de inflación $\pi(t)$ en la anterior expresión, obtenemos

$$\pi(t) = \frac{g}{m(t)} - n - \frac{\dot{m}(t)}{m(t)}. \tag{5.43}$$

Sustituyendo (5.42), (5.24), (5.25), y (5.30) en la restricción presupuestaria (5.41), obtenemos la siguiente condición de equilibrio en el mercado de bienes:

$$\dot{k}(t) = f(k(t)) - (\delta + n)\, k(t) - c(t) - g. \tag{5.44}$$

Asimismo, sustituyendo (5.25) y (5.43) en la ecuación de demanda de dinero (5.15), obtenemos

$$\frac{u_m(c(t), m(t))}{u_c(c(t), m(t))} = f'(k(t)) - \delta + \frac{g}{m(t)} - n - \frac{\dot{m}(t)}{m(t)}. \tag{5.45}$$

Podemos definir a continuación un equilibrio competitivo en este nuevo contexto.

Definición 5.2: Un equilibrio competitivo asociado a un nivel de gasto público per cápita g, es un vector de trayectorias no-negativas $\{c(t), k(t), m(t)\}$, $t \in [0, \infty)$, que solucionan el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden formado por las ecuaciones (5.44), (5.32) y (5.45), junto con las condiciones de transversalidad (5.23), (5.34) y la condición inicial $k(s) = k_s$.

El equilibrio estacionario interior de esta economía se obtiene evaluando las ecuaciones (5.44), (5.32) y (5.45) en $\dot{k}(t) = \dot{c}(t) = \frac{\dot{m}(t)}{m(t)} = 0$. Así, dichas ecuaciones diferenciales se convierten respectivamente en las ecuaciones ordinarias

$$c = f(k) - (\delta + n)\, k - g, \tag{5.46}$$

$$f'(k) = \rho + n + \delta, \tag{5.47}$$

$$\frac{u_m(c,m)}{u_c(c,m)} = \rho + \frac{g}{m}. \tag{5.48}$$

Esta última ecuación se obtiene al combinar la ecuación (5.36) con la (5.45) evaluada cuando $\frac{\dot{m}(t)}{m(t)} = 0$. El equilibrio estacionario interior vendrá dado por el vector (k, c, m) estrictamente positivo que soluciona el sistema (5.46), (5.36) y (5.48). Dicho equilibrio satisface claramente las condiciones de transversalidad (5.23) y (5.34).

A partir de (5.47), vemos que el nivel de gasto público per cápita g no afecta el nivel del capital per cápita estacionario k, el cual se corresponde con el de la regla de oro modificada, k^{rom}. Por lo tanto, g tampoco afectará ni al output bruto, ni a los salarios, ni tampoco a los tipos de interés reales. La ecuación (5.46) nos revela claramente que el gasto público desplaza al consumo privado. En efecto, puesto que el capital per cápita estacionario k no se ve afectado por cambios en g, los aumentos en el gasto público per cápita se traducen en una idéntica reducción del consumo privado estacionario. Por lo tanto, obtenemos el mismo efecto "expulsión" o "crowding-out" que obtendríamos al analizar los efectos de los cambios en los impuestos a tanto alzado.

Una vez hemos obtenido el consumo per cápita estacionario, la ecuación (5.48) determina el valor estacionario de los saldos monetarios m. Hemos de señalar que la relación entre saldos reales de dinero y el gasto público es en general ambigua y depende de la elasticidad de la función de demanda de dinero respecto al consumo y al tipo de interés nominal. Dicha función de demanda de dinero está implícitamente definida por la ecuación (5.15).

Asimismo, podemos preguntarnos cuál es la tasa de crecimiento monetario σ que permite financiar el nivel de gasto público per cápita g. En el presente caso, la restricción gubernamental estacionaria (5.40) se transforma en

$$g = \sigma m,$$

por lo que, una vez hemos hallado el valor estacionario de m, podemos obtener $\sigma = \frac{g}{m}$. Por último, la tasa de inflación estacionaria se obtiene evaluando (5.43) en un equilibrio estacionario. Así, obtenemos

$$\pi = \frac{g}{m} - n = \sigma - n.$$

Hemos de resaltar que el signo de la relación entre el gasto público per cápita g y la tasa de crecimiento monetario σ es también en general ambigua. Obviamente, esta ambigüedad también se traslada a la relación entre g y la tasa de inflación π. Más concretamente, y a diferencia de lo que sucede en el modelo de generaciones solapadas, es posible que la variable g sea una función monotónicamente creciente de σ (véase el ejercicio 15). Sin embargo, esto no quiere decir que el gobierno pueda financiar cualquier nivel factible de gasto público mediante la fijación de la tasa de crecimiento monetario. De la ecuación (5.46) se desprende que, dado que el consumo es siempre positivo, el gasto público per cápita estacionario está acotado superiormente por la cantidad $f(k^{rom}) - (\delta + n)\, k^{rom}$. De hecho, el supremo del conjunto de volúmenes de gasto público financiables mediante la emisión de dinero puede ser sustancialmente menor que dicha cota superior, tal como se desprende también del ejercicio 15.

6. Modelos con restricciones de liquidez ("Cash-in-Advance")

Estos modelos introducen en el programa de maximización del individuo una restricción adicional, que nos dice que una parte del consumo debe ser realizado con dinero. En análisis más complejos también de incluyen restricciones de "cash-in-advence" sobre el capital. En esta sección intentaremos ver que efectos tiene la cosideración de una restricción de este tipo sobre el consumo, en un contexto de horizonte infito, con un individio representativo.

El problema al que se enfronta un individuo representativo es:

$$Max \quad \int_0^\infty e^{-\rho t} u(c(t))\, dt \qquad s.a.$$

$$\begin{aligned} \omega(t) - m(t)\pi(t) + r(t)k(t) + x(t) = c(t) + \dot{k}(t) + nk(t) + \xi + m(t)n, \\ c(t) \leq m(t), \\ \dot{m}(t) = \xi(t). \end{aligned} \tag{6.1}$$

donde la primera expresión es la restricción presupostaria habitual, que ya aparecía en el modelo de la anterior sección, y la segunda expresión es la explicitación de la restricción "cash-in-advance", que se debe satisfacer en cada momento del tiempo (ya que determina el conjunto factible de la variable de control $c(t)$) y que nos dice que una parte positiva del consumo debe ser efectuado en términos de dinero. La última restricción es sólo un cambio de variable para ayudarnos a dar una solución sencilla en términos matemáticos. Cada una de las tres restricciones contempladas en (6.1), lleva asociado un multiplicador que notaremos respectivamente como $\widehat{\theta}$, $\widehat{\lambda}$, $\widehat{\mu}$. El hamiltoniano correspondiente al problema caracterizado por (6.1), es el siguiente:

$$H(c(t), m(t), k(t), \xi(t)) =$$

$$e^{-\rho t}[u(c(t)) + \theta(\omega(t) - m(t)\pi(t) + r(t)k(t) + x(t) - c(t) - nk(t) + \xi(t) - m(t)n) +$$
$$+\lambda(m(t) - c(t)) + \mu\xi(t)] \tag{6.2}$$

donde las variables estado son $k(t)$, y $m(t)$, y las variables de control son $c(t)$, $\xi(t)$. Así mismo se ha realizado el siguiente cambio de variable para facilitar el tratamiento algebraico de la anterior expresión:

$$\widehat{\theta} = e^{-\rho t}\theta \geq 0,$$

$$\widehat{\lambda} = e^{-\rho t}\lambda \geq 0,$$

$$\widehat{\mu} = e^{-\rho t}\mu \geq 0.$$

Las condiciones de primer orden que solucionan (6.2), son:

$$H_c = 0, \text{ lo que implica que } u'(c(t)) = \theta + \lambda, \tag{6.3}$$

$$H_\xi = 0, \text{ lo que implica que } \theta = \mu, \text{ y por tanto } \widehat{\theta} = \widehat{\mu}, \tag{6.4}$$

$$H_k = -\dot{\widehat{\theta}}, \text{ lo que implica que } r(t) - n - \rho = -\frac{\dot{\theta}}{\theta}, \tag{6.5}$$

$$H_m = -\dot{\widehat{\mu}}, \text{ lo que implica que } -n - \pi(t) - \rho + \lambda = -\frac{\dot{\theta}}{\theta}, \tag{6.6}$$

$$H_\theta = \dot{k}, \text{ lo que es equivalente a la restricción presupostaria de } (6.1), \tag{6.7}$$

$$H_\mu = \dot{m}, \text{ lo que implica que } \dot{m}(t) = \xi(t), \tag{6.8}$$

$$H_\lambda = 0, \text{ lo que es equivalente a } m(t) = c(t). \tag{6.9}$$

Observemos que si combinamos (6.5) y (6.6), obtenemos que el tipo de interés nominal es igual al multiplicador de la restricción de "cash-in-advance",

$$r(t) + \pi(t) = \lambda \geq 0. \tag{6.10}$$

Pasemos a analizar el equilibrio estacionario de esta economía, donde $k(t)$, $c(t)$ y $m(t)$ son constantes. Recordemos que $r(t) = f'(k(t)) - \delta$, si lo evaluamos en el estado estacionario ($\dot{k}\ (t) = 0$), obtenemos $r^* = f'(k^*) - \delta$, y por tanto comprobamos que el tipo de interés real neto es constante. Por otra parte si $\dot{m}\ (t) = 0$, implica que $\pi^* = \sigma - n$, dado que $\frac{\dot{m}}{m} = \sigma - \pi(t) - n$. Si tanto el tipo de interés real neto, como la tasa de inflación son constantes, vía (6.10), podemos decir que el tipo de interés nominal y en consecuencia λ, también serán constantes. El hecho de que $c(t)$ sea constante implica que θ, también lo es (por (6.3)). Notemos que de la condición (6.5), lo único que se podía deducir era que en un equilibrio estacionario $\frac{\dot{\theta}}{\theta}$ era constante, ahora podemos decir algo más respecto a este cociente, y es que en un equilibrio estacionario $\frac{\dot{\theta}}{\theta} = 0$, lo que nos dice vía la condición (6.5), que $r^* = n + \delta$, de cuya expresión se deduce que k^* es independiente de σ. La restricción presupostaria del problema (6.1), nos permite hallar cual es el valor del consumo en el equilibrio estacionario, obteniendo

$$c^* = f(k^*) - nk^*.$$

Esta expresión nos dice que el consumo en el estado estacionario también es independiente de la tasa de crecimiento del dinero. Así pues, vemos que variaciones en σ sólo afectan a π^*. Dado que $\pi^* = \sigma - n$, es immediato ver que $\frac{d\pi}{d\sigma} = 1$. Por otra parte, como $\lambda = r^* + \pi^*$, si $\sigma +\ \rho > 0$ entonces $\lambda = \sigma + \rho$, lo cual es estrictamente positivo, implicando que $c^* = m^*$[10]. Por tanto si el consumo no depende de σ, los saldos reales de dinero tampoco ($\frac{dm^*}{d\sigma} = 0$). En este caso si es posible determinar el efecto de una variación de σ sobre las transferencias reales per capita que reciben los individuos, dado que $x^* = \sigma m^*$, un aumento de la tasa de crecimiento del dinero provocará un aumento de x^* ($\frac{dx^*}{d\sigma} > 0$), ya que el fecto de σ sobre m^* es nulo. Notemos los resultados obtenidos son casi los mismos que ya veíamos en el modelo de Sidrausky. En los dos casos el dinero es superneutral, ya que variaciones de σ no afectan a ninguna variable real del modelo, pero en cambio difieren en lo relativo a los efectos provocados sobre las variables nominales. Mientras que en el modelo de Sidrausky, variaciones de σ implican un descenso de los saldos reales de dinero, en un contexto con restricciones de "cash-in-advance", se obtiene que el efecto sobre m^* es nulo. En cosecuencia el impacto de σ sobre la transferencia real per cápita, x^*, es ambiguo en el primer caso, mientras que el segundo se obtiene un efecto positivo.

Mencionemos finalmente que , si la restricción de liquidez operara sobre las adquisiciones de capital productivo, una política monetaria expansiva tendría efectos contractivos sobre el output bruto ya que el rendimiento del dinero se reduce y, por lo tanto, el crecimiento monetario actúa como un impuesto sobre la inversión.

[10] Recordemos que λ es el multiplicador asociado a la restricción de "cash-in-advance" la cual se puede cumplir con desigualdad. Ello implica que se deba cumplir $\lambda(m(t) - c(t)) = 0$. Si en el equilibrio estacionario λ es estrictamente positivo, entonces $m^* = c^*$.

Ejercicios

1. Calcular los saldos reales de dinero per cápita en el equilibrio monetario estacionario de una economía de generaciones solapadas en la que todos los individuos son idénticos y las preferencias vienen representadas por la función de utilidad

$$U(c_t^1, c_{t+1}^2) = \log c_t^1 + \gamma \log c_{t+1}^2, \qquad \gamma > 0$$

   Podemos suponer que la tasa de crecimiento de la población es n y que las dotaciones iniciales estacionarias vienen dadas por el vector (e^1, e^2).

2. Calcular los saldos reales de dinero per cápita en el equilibrio monetario estacionario bajo los mismos supuestos del ejercico anterior pero con la siguiente función de utilidad.

$$U(c_t^1, c_{t+1}^2) = \frac{1}{\varepsilon}\left(c_t^1\right)^{\varepsilon} + \alpha\frac{1}{\varepsilon}\left(c_{t+1}^2\right)^{\varepsilon}, \qquad \varepsilon < 1, \quad \alpha > 0.$$

3. Demostrar que en un modelo de generaciones solapadas en la que es posible almacenar el bien, no existe un equilibrio monetario estacionario si y sólo si $\frac{1+n}{1+\theta} \leq 1+\sigma$, donde σ es la tasa de crecimiento del stock agregado de dinero nominal y θ es la tasa de apreciación. Las emisiones de dinero se introducen en la economía mediante subvenciones a los individuos viejos.

4. Considerar el modelo de generaciones solapadas de intercambio puro. Las preferencias vienen dadas por la siguiente función de utilidad lineal:

$$U(c_t^1, c_{t+1}^2) = c_t^1 + \rho c_{t+1}^2,$$

   donde $c_t^1 \geq 0, c_{t+1}^2 \geq 0$, $\rho > 0$. Las dotaciones iniciales son $(e^1, e^2) = (1, 1)$ para todos los individuos. La tasa de crecimiento de la población es igual a n.
   Se pide:
   (a) Calcular el tipo de interés del equilibrio competitivo autárquico (o walrasiano).
   (b) ¿Para que valores del parámetro ρ el equilibrio walrasiano es ineficiente (caso de Samuelson)?
   (c) Supongamos que la condición del apartado anterior se satisface. Calcular el tipo de interés, los consumos de los individuos jóvenes y de los individuos

viejos, y los saldos reales de dinero en el equilibrio monetario estacionario sin crecimiento de la oferta monetaria.
(d) ¿Cuál es la tasa máxima de crecimiento de la oferta monetaria que es consistente con la existencia de un equilibrio monetario estacionario?

5. Considerar una economía de generaciones solapadas con una tasa de crecimiento de la población n. Las dotaciones iniciales estacionarias son (e^1, e^2). Las preferencias vienen representadas por la siguiente función de utilidad:
$$U(c_t^1, c_{t+1}^2) = c_t^1 . c_{t+1}^2.$$
(a) ¿Para qué valores del vector de dotaciones iniciales (e^1, e^2), existirá un equilibrio monetario estacionario?
Supongamos a partir de ahora que $e^1 = e^2 = 1$.
(b) El gobierno aumenta el stock de dinero a la tasa σ para así financiar subvenciones a tanto alzado para los individuos viejos. Hallar los valores en el equilibrio estacionario de los saldos reales de dinero per cápita, la tasa de inflación, el valor real de las subvenciones, los consumos de los individuos en sus dos periodos de vida y el valor máximo de σ compatible con un equilibrio monetario estacionario.
(c) ¿Cuál sería el flujo constante de gasto público per cápita, g, que se podría financiar mediante un aumento del stock de dinero a la tasa σ ?
(d) Dibujar las curvas de Laffer que relacionen g con la tasa de crecimiento del stock de dinero, la tasa de inflación y los saldos reales de dinero per cápita.
(e) ¿Cuál es el valor máximo de g que se puede financiar mediante la emisión de dinero?

6. Supongamos que en el modelo de generaciones solapadas el gobierno aumenta la oferta monetaria de la siguiente manera: los agentes reciben unos intereses nominales sobre los saldos nominales de dinero que poseen al final del primer periodo de su vida. Este interés nominal es μ.
Se pide:
(a) ¿Cuál es la tasa de inflación asociada al equilibrio monetario estacionario?
(b) ¿Cuál es el rendimiento del dinero asociado al equilibrio monetario estacionario?
(c) ¿Cuáles son los efectos reales de cambios en μ?

7. Consideremos el modelo de generaciones solapadas de intercambio puro sin crecimiento de la población ($n = 0$). Los agentes viven dos periodos y

maximizan la siguiente función de utilidad:

$$U(c_t^1, c_{t+1}^2) = \ln c_t^1 + \rho \ln c_{t+1}^2,$$

donde $\rho > 0$ para todo t. Las dotaciones iniciales son $(e^1, e^2) = (2, 1)$ para todos los individuos. Supongamos que el gobierno aumenta la oferta monetaria nominal agregada a la tasa $\sigma > 0$ en forma de subvenciones a tanto alzado para los jóvenes.

Se pide:

(a) ¿Qué restricción deben satisfacer los parámetros ρ y σ para asegurar la existencia de un equilibrio monetario estacionario?

(b) Hallar el nivel de inflación asociado al equilibrio monetario estacionario en función de σ.

(c) Hallar el consumo de los individuos jóvenes y el de los individuos viejos como funciones de los parámetros ρ y σ en el equilibrio monetario estacionario.

(d) Hallar los saldos reales de dinero per cápita como función de ρ y σ en el equilibrio monetario estacionario.

(e) Hallar el valor real de la subvención per cápita de los jóvenes como función de ρ y σ en el equilibrio monetario estacionario. ¿Podemos afirmar que un mismo valor real de la subvención puede ser financiado mediante dos tasas diferentes de crecimiento de la oferta monetaria?

Supongamos ahora que el gobierno destina la emisión de dinero a financiar el gasto público.

(f) Hallar el consumo de los individuos jóvenes y los individuos viejos como funciones de ρ y σ en el equilibrio monetario estacionario.

(g) Hallar los saldos reales de dinero per cápita como función de ρ y σ en el equilibrio monetario estacionario.

(h) ¿Cuál sería el flujo constante de gasto público per cápita joven, g, que se podría financiar mediante un aumento del stock de dinero a la tasa σ?

(i) ¿Cuál es el valor máximo de g ($g_{\max}$) que se puede financiar mediante la emisión de dinero? Nota: $g_{\max}$ ha de ser función exclusivamente de ρ.

(j) ¿Podemos afirmar que un mismo flujo de gasto público per cápita joven, $g \in [0, g_{\max})$, puede ser financiado mediante dos tasas diferentes de crecimiento de la oferta monetaria?

8. Consideremos una economía de generaciones solapadas con una población constante ($n = 0$). Las dotaciones estacionarias de los individuos son $(e^1, e^2) = (1, 1)$. Las preferencias vienen representadas por la siguiente función de utilidad:

$$U(c_t^1, c_{t+1}^2) = \ln c_t^1 + 2 \ln c_{t+1}^2.$$

Se pide:
(a) ¿Cuál es el nivel máximo de la tasa de crecimiento del stock de dinero σ compatible con la existencia de un equilibrio monetario estacionario?
(b) ¿Cuál es el valor máximo del gasto público real per cápita joven, $g_{\max}$, que puede ser financiado mediante la emisión de dinero?. ¿Cuál es la tasa de inflación asociada al nivel de gasto público $g_{\max}$?
Supongamos a partir de ahora que el gasto del gobierno per cápita joven es $g \in [0, g_{\max})$ y se financia mediante la emisión de dinero.
(c) Hallar los dos saldos reales de dinero estacionarios de equilibrio que están asociados al gasto público g.
(d) Hallar las dos tasas de crecimiento del stock de dinero que permiten financiar el gasto público g. Hallar las dos tasas de inflación asociadas a los dos equilibrios estacionarios.

9. Consideremos el modelo de generaciones solapadas de intercambio puro sin crecimiento de la población ($n = 0$). Los agentes viven dos periodos y maximizan la siguiente función de utilidad:

$$U(c_t^1, c_{t+1}^2) = \ln c_t^1 + \rho \ln c_{t+1}^2, \ \rho > 0,$$

para todo t. Las dotaciones iniciales son (e^1, e^2), siendo $e^1 > 0$ y $e^2 = 0$ para todos los individuos.
Se pide:
(a) En esta economía siempre existe un equilibrio monetario para cualquier tasa de crecimiento de la oferta monetaria. ¿Por qué?
Supongamos que el gobierno aumenta la oferta monetaria nominal agregada para así financiar subvenciones a tanto alzado para los individuos viejos por un importe real per cápita (vieja) igual a $x > 0$ para todo t.
(b) Suponiendo que esta financiación inflacionaria de las subvenciones es factible, hallar los dos saldos reales de dinero per cápita joven estacionarios asociados a la subvención x. Nota: la respuesta se debe dar exclusivamente en función de x, ρ y e^1.
Supongamos a partir de ahora que $\rho = 1$ y $e^1 = 1$.
(c) ¿Cuál es el valor máximo estacionario de la subvención real per cápita (vieja), $x_{\max}$, que se puede financiar con la emisión de dinero?
(d) ¿Cuál es la tasa de inflación estacionaria asociada al nivel de subvención real $x_{\max}$? ¿Cuál es el saldo real estacionario de dinero per cápita (joven) asociado al nivel de subvención $x_{\max}$?

10. Consideremos una economía de generaciones solapadas de intercambio puro en la que la tasa de crecimiento de la población es n. Las preferencias de

un individuo nacido en el periodo t vienen representadas por la siguiente función de utilidad de tipo "Leontieff":

$$U(c_t^1, c_{t+1}^2) = min\left\{ac_t^1, bc_{t+1}^2\right\}, \ a > 0, b > 0.$$

para todo t. El vector de dotaciones iniciales de todos los individuos es $(e_t^1, e_{t+1}^2) = (2, 1)$ para todo t.
(a) ¿Para que valores de los parámetros a, b y n existirá un equilibrio monetario estacionario?
Supongamos que la condición del apartado (a) se satisface y que el gobierno aumenta la oferta monetaria para así financiar un gasto público real per cápita (joven) constante e igual a g.
(b) Caracterizar exactamente la curva de Laffer, es decir, hallar la relación exacta entre g y σ, siendo σ la tasa de crecimiento estacionaria de la oferta monetaria nominal agregada. ¿Cuál es la cota superior de g?
(c) Hallar la tasa de inflación y los saldos reales de dinero per cápita (joven) estacionarios asociados al nivel de gasto público factible g.

11. Solucionar el modelo de dinero en la función de utilidad sin gasto público (modelo de Sidrauski) utilizando el principio del máximo. Tomar $q \equiv a + m$ (la riqueza real per cápita) como la variable de estado, y c (el consumo per cápita) y m (los saldos reales de dinero per cápita) como las variables de control.

12. (a) Reformular y solucionar en tiempo discreto el modelo de Sidrauski sin gasto público.
(b) Reformular y solucionar en tiempo discreto el modelo con una restricción de liquidez para la adquisición de bienes de consumo en el que no hay gasto público.

13. Consideremos el modelo de Sidrauski en el que los saldos reales de dinero, $m(t)$, entran en la función de utilidad de los agentes junto con el consumo $c(t)$. La función de utilidad instantánea es

$$U(c(t), m(t)) = \ln c(t) + \beta \ln m(t),$$

donde $\beta > 0$. La función de producción intensiva (per cápita) es:

$$f(k(t)) = A\left[k(t)\right]^{\alpha},$$

donde $k(t)$ es el capital per cápita , $A > 0$ y $0 < \alpha < 1$. Supondremos que el capital no se deprecia. El tiempo es continuo y el horizonte infinito. La tasa

de descuento intertemporal es $\rho > 0$ y la tasa de crecimiento de la población $N(t)$ es $n > 0$. El gobierno emite dinero a la tasa constante $\sigma > 0$.
Se pide:
(a) Hallar el tipo de interés, el salario, la producción per cápita y la tasa de inflación en el equilibrio monetario estacionario.
(b) Consideremos dos casos: 1) el gobierno destina íntegramente los ingresos procedentes de la emisión de dinero a dar subvenciones a tanto alzado a los consumidores; 2) el gobierno destina íntegramente los ingresos procedentes de la emisión de dinero a un gasto público que es absolutamente inútil (o que entra en la función de utilidad de los consumidores de forma aditiva). Hallar el consumo per cápita y los saldos reales de dinero per cápita en el equilibrio estacionario en ambos casos. ¿En qué caso los saldos reales de dinero per cápita serán mayores?

14. Consideremos el modelo de Sidrauski de dinero en la función de utilidad. La función de utilidad considerada es:

$$U(c(t), m(t)) = \ln c(t) + \left(\beta m(t) - [m(t)]^2\right),$$

donde $\beta > 0$, el horizonte es infinito, el tiempo es continuo, la tasa de descuento intertemporal es $\rho > 0$, la tasa de crecimiento de la población es n y la función de producción es Cobb-Douglas,

$$F(K(t), N(t)) = AK(t)^{\alpha} L(t)^{1-\alpha},$$

donde $A > 0$ y $0 < \alpha < 1$. Supondremos que el capital no se deprecia. El gobierno emite dinero a la tasa σ. El dinero se introduce en forma de subvenciones a tanto alzado. La tasa de crecimiento del dinero, σ, puede ser positiva o negativa.
Se pide:
(a) Hallar el capital per cápita, el output per cápita , el consumo per cápita en el equilibrio estacionario.
(b) Hallar el nivel de inflación en el equilibrio estacionario.
(c) Hallar los saldos reales de dinero per cápita en el equilibrio estacionario.
(d) Hallar el valor real de las subvenciones per cápita en el equilibrio estacionario.
(e) ¿Cuál sería la tasa de crecimiento del dinero σ que maximiza la utilidad de los agentes? ¿Cuáles serían los saldos reales de dinero per cápita asociados a este nivel óptimo de σ? ¿Cuál sería el tipo de interés nominal asociado a este nivel óptimo de σ?

15. Consideremos el modelo de Sidrauski de dinero en la función de utilidad. El horizonte es infinito, el tiempo es continuo, la tasa de descuento intertemporal es $\rho > 0$ y la de crecimiento de la población es $n > 0$. El gobierno aumenta la masa monetaria nominal agregada a la tasa $\sigma > 0$. La emisión de dinero se destina a un gasto público improductivo que no entra como argumento en la función de utilidad de los individuos. La función de utilidad instantánea es:

$$U(c(t), m(t)) = \ln c(t) + \beta \ln m(t).$$

La función de producción intensiva es $f(k(t))$ y supondremos que no hay depreciación del capital.
(a) Hallar la relación que implícitamente define el capital per cápita en un equilibrio estacionario k^*.
(b) Hallar el gasto público per cápita estacionario en función exclusivamente de β, ρ, σ, n y k^*.
(c) ¿Cuál es la relación existente entre σ y g? ¿Obtenemos la típica curva de Laffer? En caso de no ser así, puede el gobierno aumentar el gasto público per cápita sin límite mediante el control de la tasa de crecimiento monetario σ?

16. Consideremos el modelo de dinero con una restricción de liquidez para la adquisición de bienes de consumo. El horizonte es infinito y el tiempo continuo. Supongamos que la función de producción neta en cada momento es

$$F(K(t), L(t)) = AL(t) \log \left(1 + \frac{K(t)}{L(t)}\right) - \delta K(t),$$

donde $A > 0$ y $\delta > 0$. La población crece a la tasa $n > 0$ y la tasa de descuento intertemporal es $\rho > 0$. Supondremos que $0 < n + \rho + \delta < A$. El gobierno realiza un gasto público per cápita constante $g > 0$ que es compatible con un consumo privado positivo. Este gasto público es improductivo y no entra en la función de utilidad de los individuos.
Se pide:
(a) Hallar el capital per cápita, la renta neta per cápita y el salario en el equilibrio estacionario.
(b) Hallar el consumo per cápita estacionario como función de n, ρ, δ, A y g.
(c) Hallar la tasa de crecimiento de la oferta monetaria estacionaria que permite financiar el gasto público per cápita g como función de n, ρ, δ, A y g.
(d) Hallar la tasa de inflación estacionaria. ¿Cuál es el signo de la relación entre la tasa de inflación y el gasto público per cápita?

Referencias

El papel del dinero en la implementación de equilibrios distintos al autárquico en el modelo de generaciones solapadas fue considerado originalmente por Samuelson (1958). El análisis de la dinámica del modelo de generaciones solapadas, tanto en el caso clásico como en el de Samuelson, se debe a Gale (1973). A principios de la década de los 80 una serie de autores (Balasko y Shell (1981), Cass, Okuno y Zilcha (1979) y Wallace (1980), entre otros) reivindicaron la idoneidad del modelo de generaciones solapadas para justificar la existencia de dinero con valor positivo. La utilización de dicho modelo con la finalidad de construir una teoría monetaria ha sido motivo de una encendida polémica entre sus defensores (Cass y Shell (1980)) y detractores (Tobin (1980) y McCallum (1983)). Tirole (1985) fue el primero en compatibilizar la existencia de dinero con el capital productivo en el marco del modelo de Diamond (1965). Bose y Ray (1993) realizan un análisis exhaustivo de la optimalidad y la dinámica de los distintos tipos de equilibrio en el marco propuesto por Tirole. Las implicaciones de la existencia de dinero sobre la tasa de crecimiento económico son analizadas por Grossman y Yanagawa (1993). Una primera referencia rigurosa al efecto Mundell-Tobin puede encontrarse en Tobin (1965).

En el artículo de Sidrauski (1967) se sitúa la génesis de los modelos formales que introducen el dinero en la función de utilidad. Fischer (1979) estudia la dinámica transicional de dicho modelo. Turnovsky y Brock (1980) realizan un análisis extremadamente riguroso del modelo cuando el gobierno financia el gasto público mediante la emisión de dinero. Roubini y Sala-i-Martín (1992) utilizan el modelo de Sidrauski como punto de partida para analizar como el desarrollo financiero afecta a la demanda de dinero, al crecimiento económico y a las posibilidades de señoreaje por parte del gobierno. Feenstra (1986) considera explícitamente el papel del dinero como ahorrador de costes de transacción en un modelo en el que se introduce el ocio en la función de utilidad. Evidentemente, en dicho modelo la oferta de trabajo es endógena. Por último, Abel (1987) introduce el dinero en la función de utilidad en el contexto de un modelo de generaciones solapadas.

La restricción de liquidez (o de"cash-in-advance") fue originalmente sugerida por Clower (1967). Stockman (1981) introduce la restricción de liquidez en las adquisiciones de capital productivo, obteniendo así la estática comparativa opuesta a la descrita por el efecto Mundell-Tobin. Abel (1985) realiza el análisis de la dinámica transicional tanto cuando la restricción de liquidez aplica sobre la compra de bienes de consumo como cuando lo hace también sobre las compras de capital. Modelos con una restricción de liquidez en los que hay incertidumbre y, por lo tanto, dependiendo del estado de la naturaleza, dicha restricción puede ser operativa o no, han sido considerados por Lucas (1980) y Svensson (1985). Lucas (1980) considera shocks idiosincráticos en las preferencias de los individuos, con lo que el modelo acaba generando una distribución endógena de los saldos reales de dinero entre los individuos de la economía. Por su parte, Svensson (1985) considera sólo shocks macroeconómicos que afectan a todos los individuos por igual. Este contexto estocástico permite a Svensson analizar la correlación entre el output y la velocidad de circulación del dinero. Lucas y Stockey (1987) presentan un sofisticado modelo dinámico en el que se distingue entre bienes que deben comprarse utilizando dinero y bienes que pueden comprarse mediante crédito. Estos últimos son aquellos que tienen naturaleza duradera y que, por lo tanto, pueden confiscarse en caso de impago de la deuda contraída en el momento de su adquisición. Blackburn y Hung (1991a y 1991b) analizan los efectos de la política monetaria sobre el crecimiento económico en modelos con restricciones de liquidez, tanto cuando el gobierno sólo modifica la tasa de crecimiento monetario como cuando extrae recursos del sector privado para convertirlo en capital público productivo. Por último, Palivos y Yip (1995) comparan la financiación inflacionaria del gasto público con la financiación mediante impuestos proporcionales para una economía que exhibe crecimiento endógeno y restricciones de liquidez.

La omnipresente regla óptima de política monetaria de Friedman puede encontrarse formulada en Friedman (1969). Finalmente, Wang y Yip (1992) realizan un estudio comparado de los distintos modelos monetarios con acumulación de capital productivo y ocio en la función de utilidad.

Abel, A. (1985). "Dynamic Behavior of Capital Accumulation in a Cash-in-Advance Model." *Journal of Monetary Economics* 16: 55-71.

Abel, A. (1987). "Optimal Monetary Growth." *Journal of Monetary Economics* 19: 437-450.

Balasko, Y. y K. Shell (1981). "The Overlapping-Generations Model II: The Case of Pure Exchange with Money. *Journal of Economic Theory* 24: 112-142.

Blackburn, K. y V. Hung (1991a). "Money and Growth." *Working paper, University of Southampton.*

Blackburn, K. y V. Hung (1991b). "Economic Growth in a Monetary Economy." *Working paper, University of Southampton.*

Bose, A. y D. Ray (1993). "Monetary Equilibrium in an Overlapping Generations Model with Productive Capital." *Economic Theory* 3: 697-716.

Cass, D., M. Okuno y I. Zilcha (1979). "The Role of Money in Supporting the Pareto Optimality of Competitive Equilibrium in Consumption-Loans Nodels. *Journal of Economic Theory* 20: 41-80.

Cass, D. y K. Shell (1980). "In Defense of a Basic Approach." En Kareken, J. y N. Wallace (eds.), *Models of Monetary Economies.* Federal Reserve Bank of Minneapolis: 251-260.

Clower, R. (1967). "A Reconsideration of the Microeconomic Foundations of Monetary Theory." *Western Economic Journal* 6: 1-8.

Diamond, P. (1965). "National Debt in a Neo-Classical Growth Model." *American Economic Review* 55: 1126-1150.

Feenstra, R. (1986). "Functional Equivalence between Liquidity Costs and the Utility of Money." *Journal of Monetary Economics* 17: 271-291.

Fischer, S. (1979). "Capital Accumulation on the Transition Path in a Monetary Optimizing Model." *Econometrica* 47: 1433-1439.

Friedman, M. (1969). *The Optimum Quantity of Money and Other Essays.* Aldine. Chicago.

Gale, D. (1973). "Pure Exchange Equilibrium of Dynamic Economic Models." *Journal of Economic Theory* 6: 12-36.

Grossman, G. y N. Yanagawa (1993). "Asset Bubbles and Endogenous Growth." *Journal of Monetary Economics* 31: 3-19.

Lucas, R. (1980). "Equilibrium in a Pure Currency Economy." *Economic Inquiry* 18: 203-220.

Lucas, R y N. Stokey (1987). "Money and Interest in a Cash-in-advance Economy." *Econometrica* 55: 491-514.

McCallum, B. (1983). "The Role of Overlapping Generations Models in Monetary Economics." *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy* 18: 9-44.

Palivos, T. y C.K. Yip (1995). "Government Expenditure Financing in an Endogenous Growth Model: A Comparison." *Journal of Money, Credit, and Banking* 27: 1559-1178.

Roubini, N. y X. Sala-i-Martin (1992). "Financial Repression and Economic Growth." *Journal of Development Economics* 39: 5-30.

Samuelson, P.A. (1958). "An Exact Consumption Loan Model of Interest with or without the Social Contrivance of Money." *Journal of Political Economy* 66: 467-482.

Sidrauski, M. (1967). "Rational Choice and Patterns of Growth in a Monetary Economy." *American Economic Review* 57: 534-544.

Stockman, A. (1981). "Anticipated Inflation and the Capital Stock in a Cash-in-Advance Economy." *Journal of Monetary Economics* 8: 387-393.

Svensson, L. (1985). "Money and Asset Prices in a Cash-in-Advance Economy." *Journal of Political Economy* 93: 919-944.

Tirole, J. (1985). "Asset Bubbles and Overlapping Generations." *Econometrica* 53: 1499-1528.

Tobin, J. (1965). "Money and Economic Growth." *Econometrica* 32: 671-684.

Tobin, J. (1980). "Discussion." En Kareken, J. y N. Wallace (eds.), *Models of Monetary Economies*. Federal Reserve Bank of Minneapolis: 83-90.

Turnovsky, S. J. y W.A. Brock (1980). "Time Consistency and Optimal Government Policies in Perfect Foresight Equilibrium." *Journal of Public Economics* 13: 183-212.

Wallace, N. (1980) "The Overlapping-Generations Model of Fiat Money." En Kareken, J. y N. Wallace (eds.), *Models of Monetary Economies*. Federal Reserve Bank of Minneapolis: 49-82.

Wang, P. y C.K. Yip (1992), "Alternative Approaches to Money and Growth." *Journal of Money, Credit, and Banking* 24: 553-562.

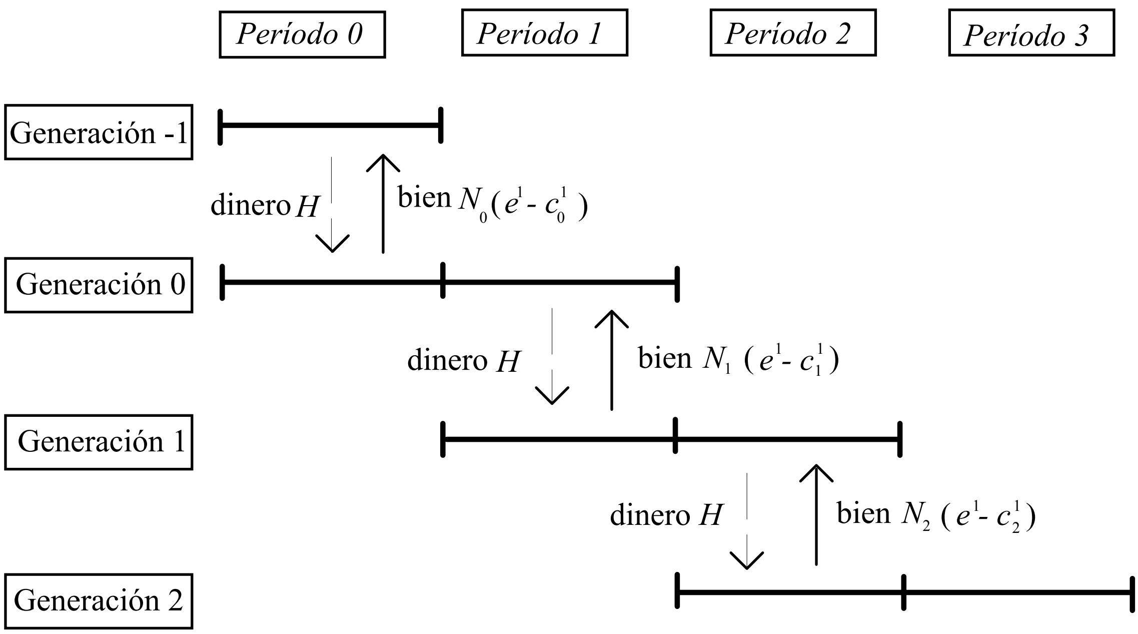


Figura 1: Intercambio de bienes y dinero.

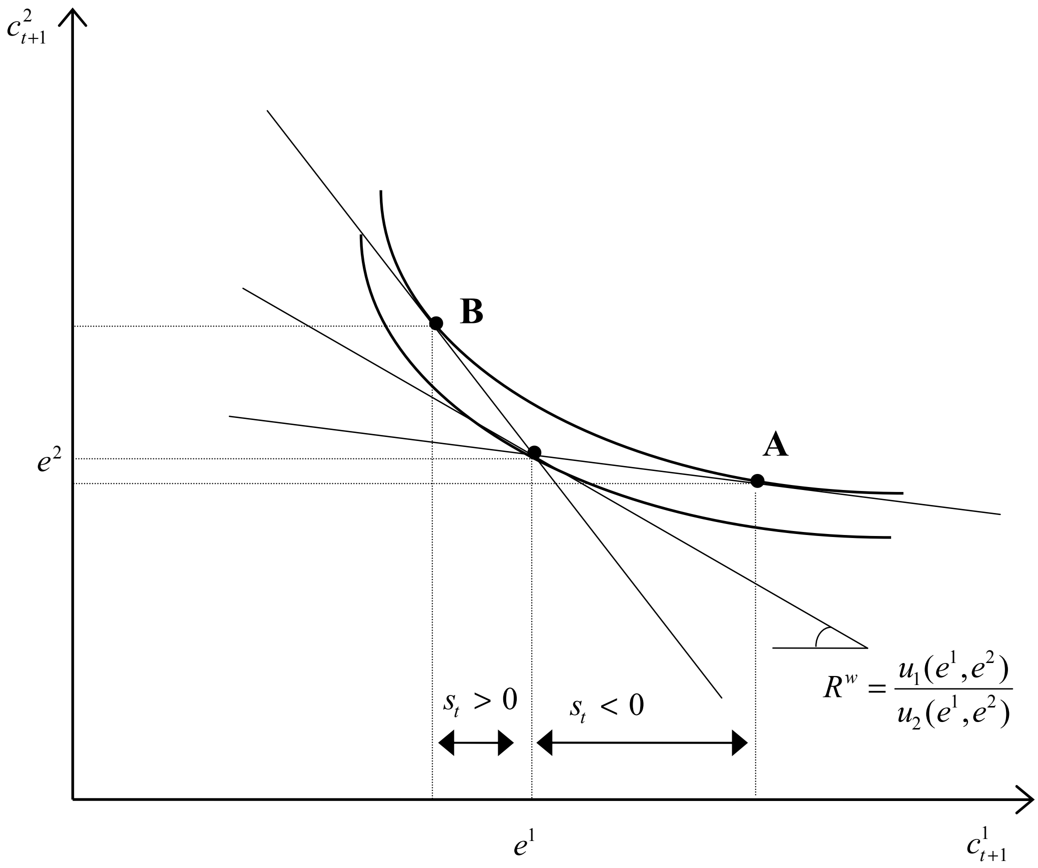


Figura 2: Ahorro positivo y ahorro negativo.

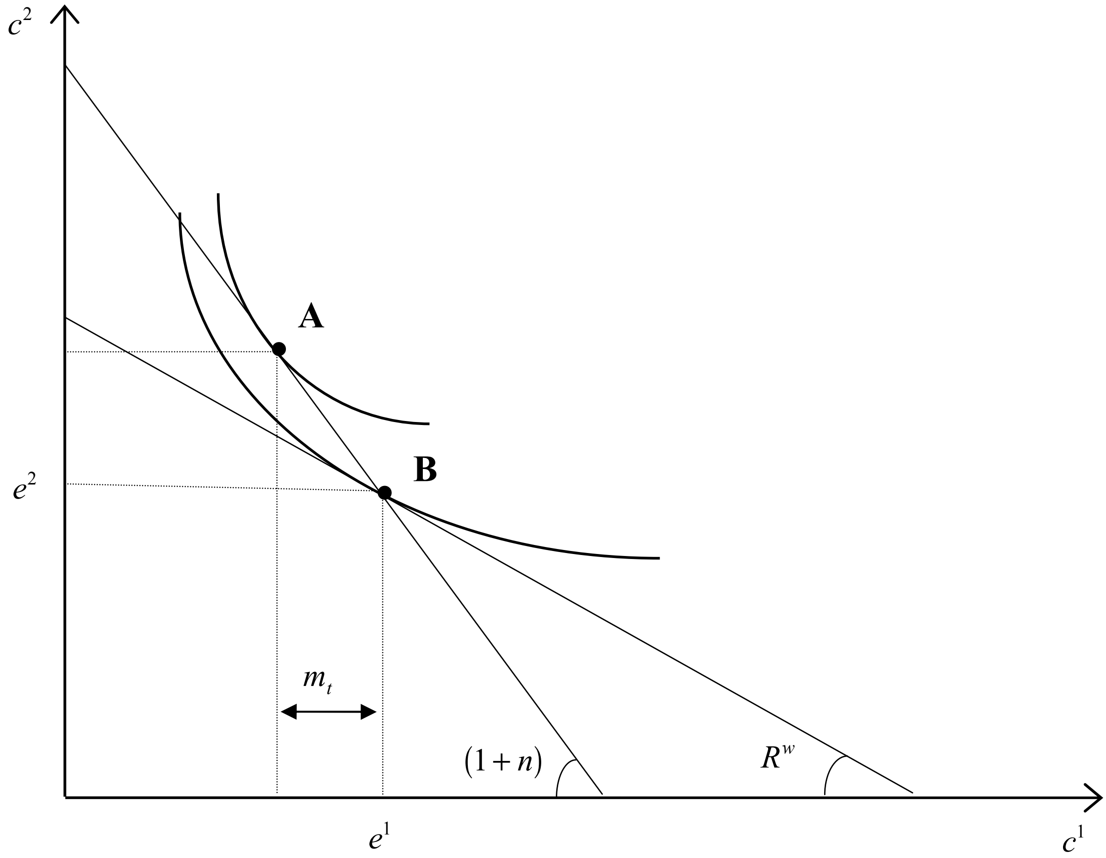


Figura 3: Equilibrios monetario (A) y no monetario (B) estacionarios.

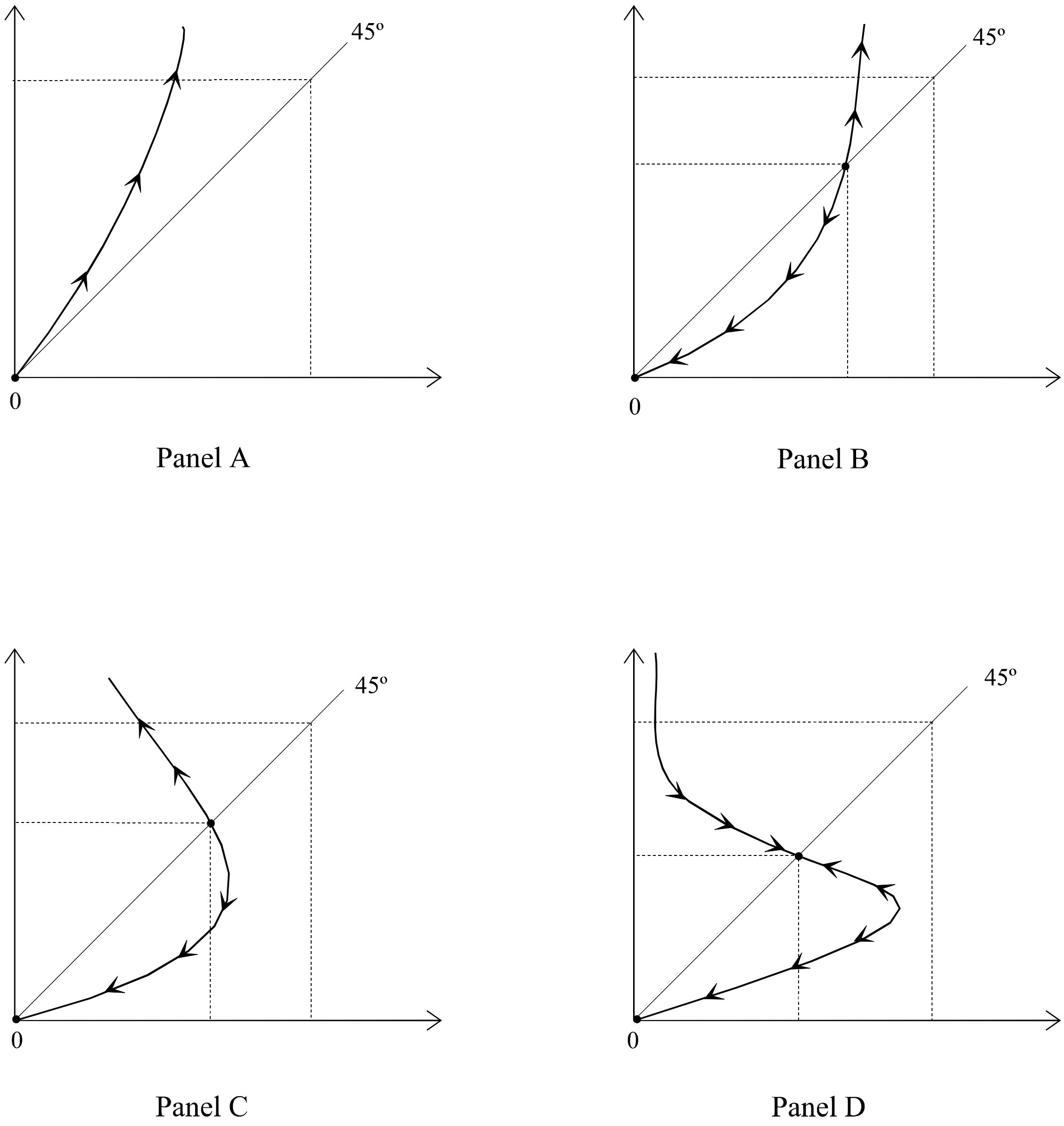


Figura 4: La dinámica de los equilibrios monetarios y autárquico.

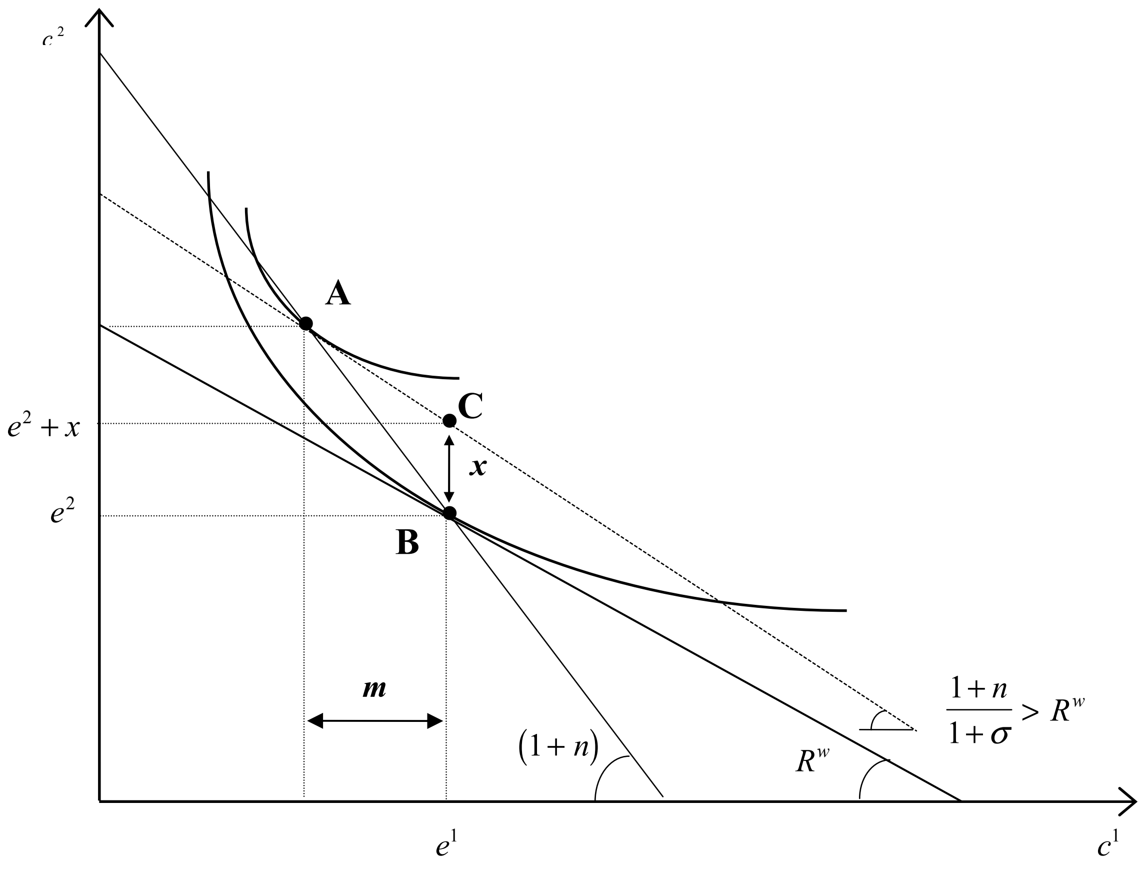


Figura 5: Política monetaria en el modelo de generaciones solapadas.

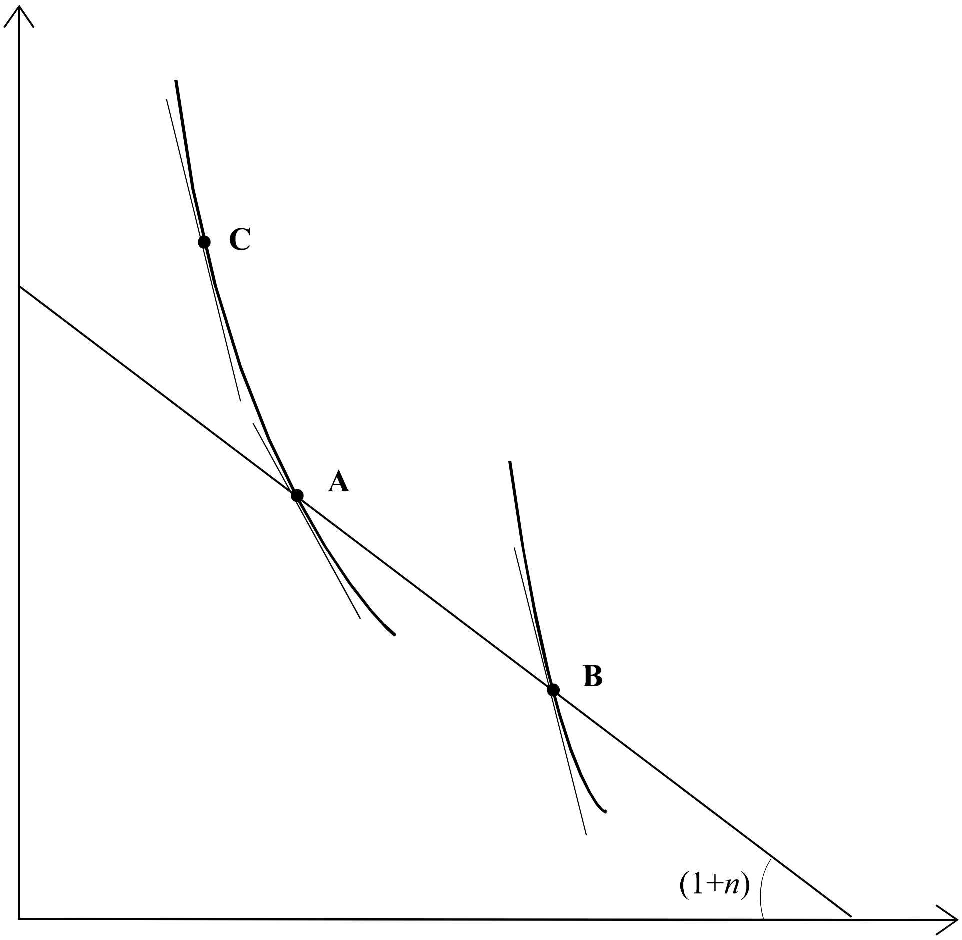


Figura 6: Normalidad de los consumos.

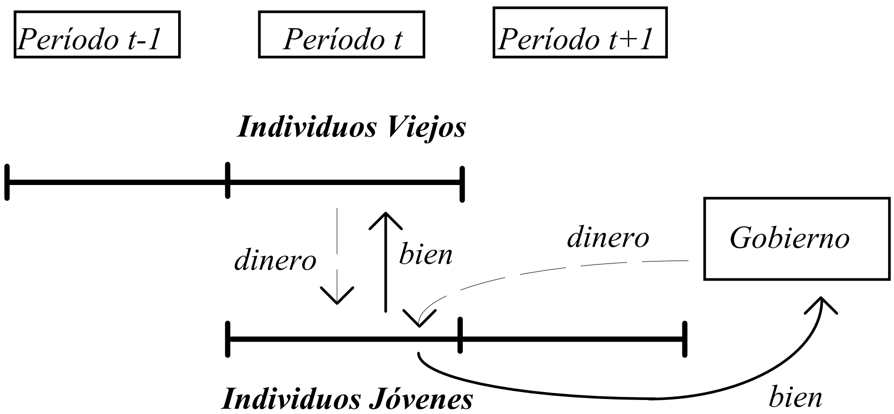


Figura 7: La estructura de intercambio bien - dinero en un contexto con gasto público.

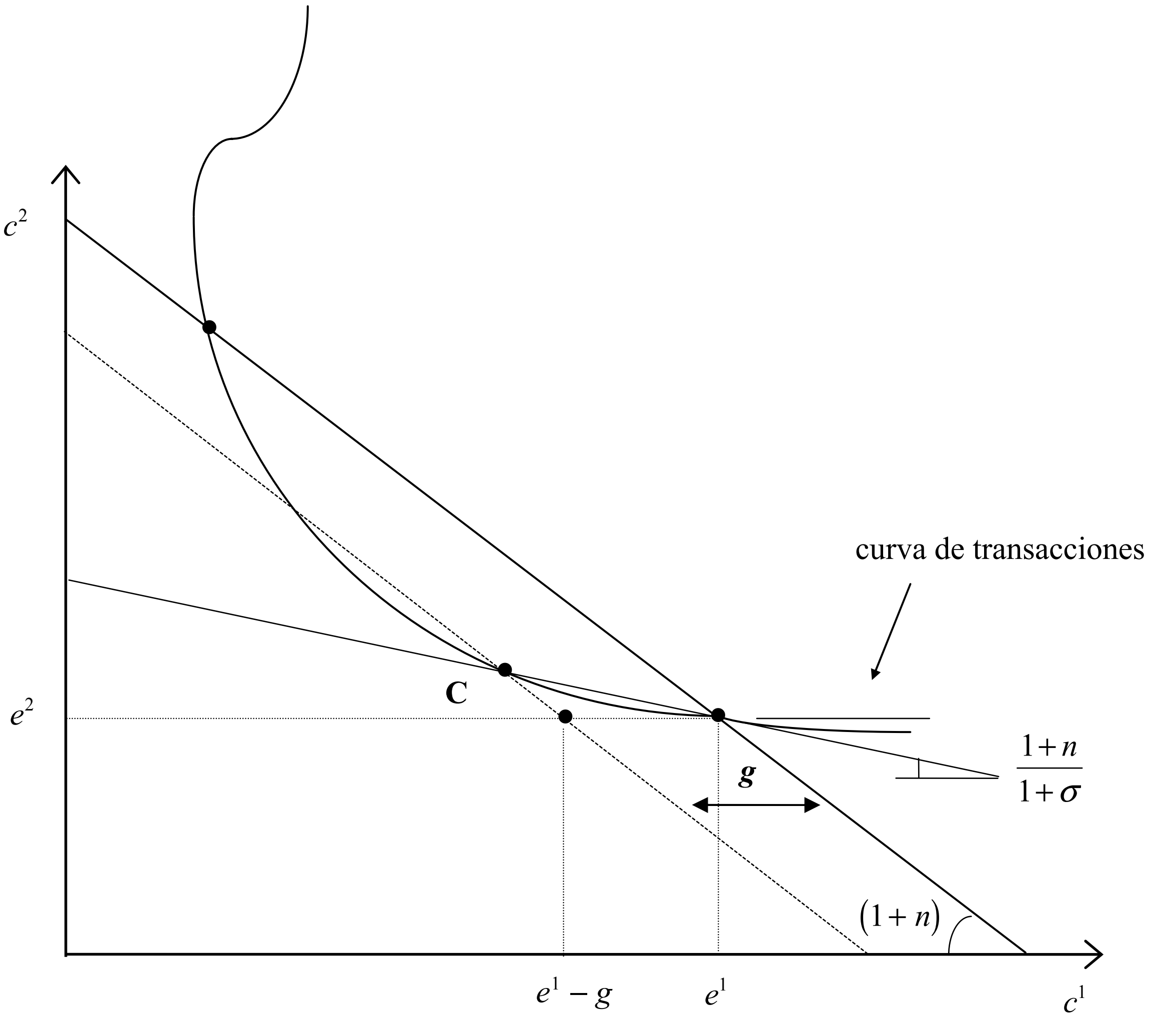


Figura 8: Equilibrio monetario, fijando σ y determinando endógenamente *g*.

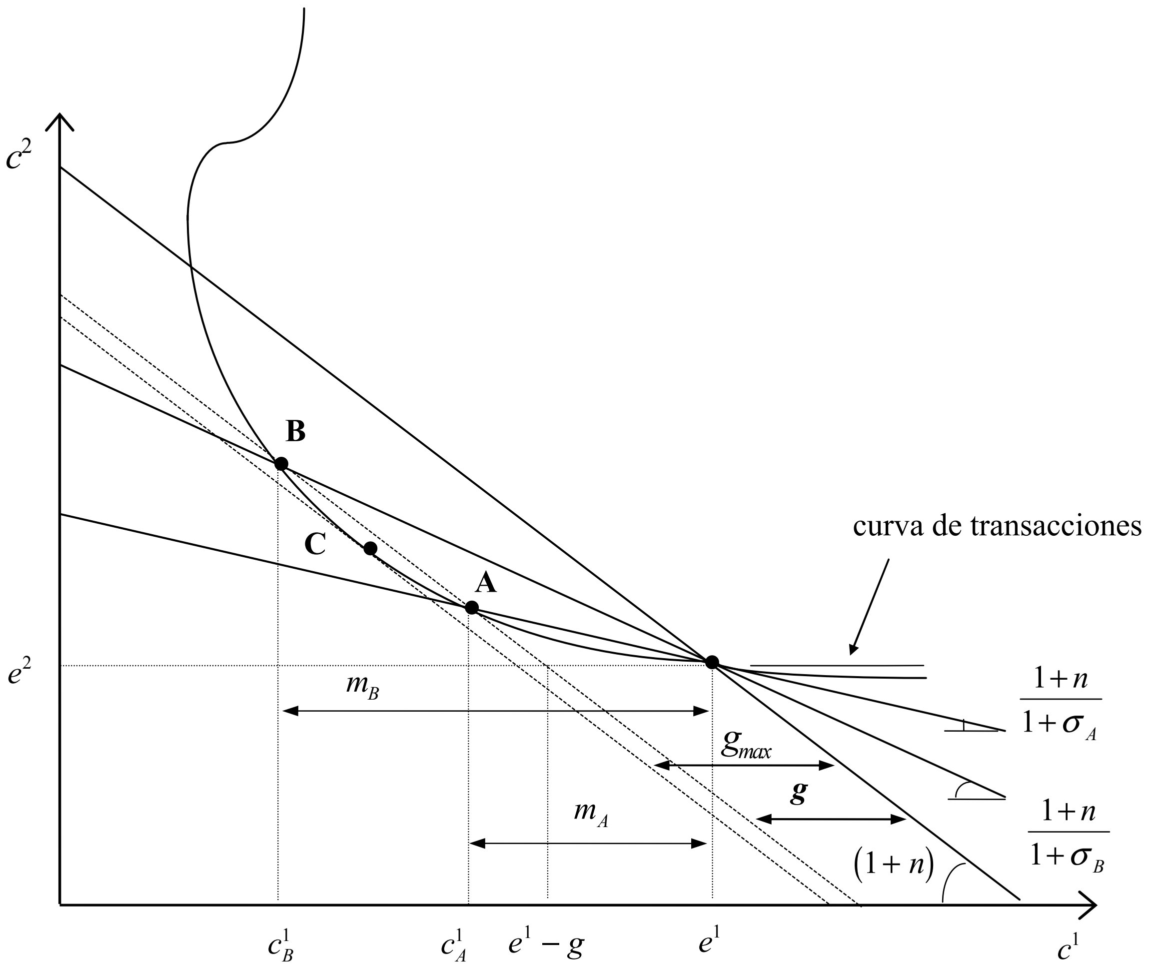
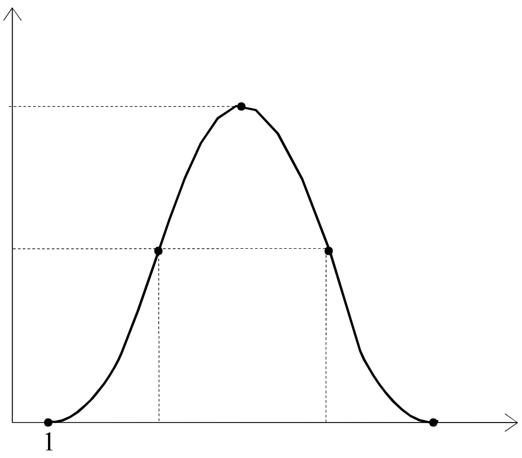
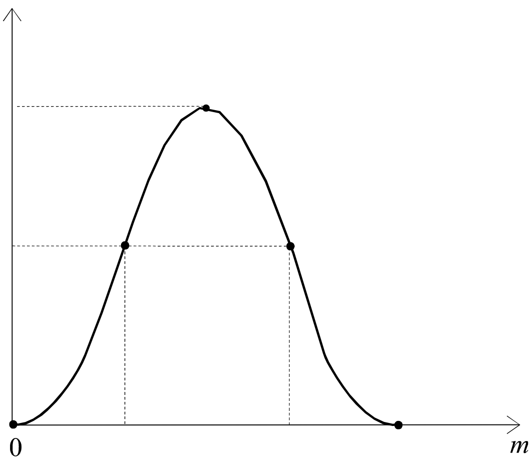


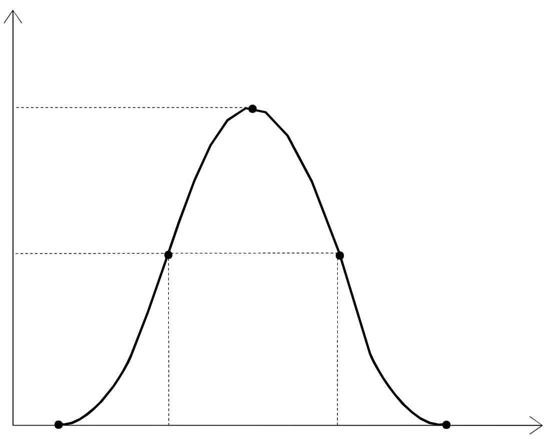
Figura 9: Equilibrio monetario, fijando g y determinando endógenamente σ.



Panel A: gasto público y tasa de crecimiento del dinero.



Panel B: gasto público y saldos reales de dinero.



Panel C: gasto público y tasa de inflación.

Figura 10: Curvas de Laffer (gasto público financiado mediante la emisión de dinero)

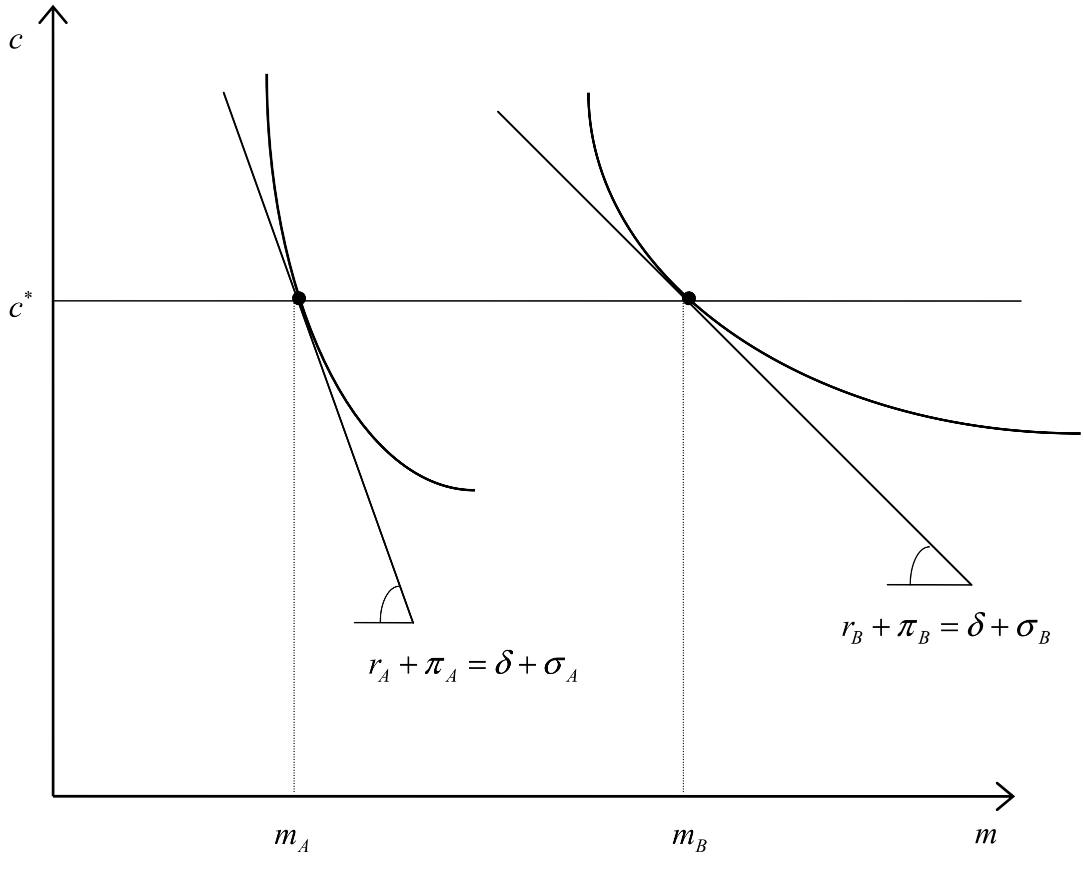


Figura 11: Consumo y saldos reales monetarios óptimos ($r_A + \pi_A > r_B + \pi_B$ o $\sigma_A > \sigma_B$).