



3.6 Àlgebra

Selecció de problemes preparada per Rosa Camps i Camprubí, professora d'Àlgebra del Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona. tel.: 93 581 29 41, e-mail: rcamps@mat.uab.es.



- 3.6.1.** Amb quants zeros acaba el producte $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 100$?
- 3.6.2.** Usant cinc números x_1, x_2, x_3, x_4 i x_5 i agafant-los per parells podem fer deu sumes a_1, a_2, \dots, a_{10} . Demuestra que si coneixem els resultats a_1, a_2, \dots, a_{10} podem saber els números inicials x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 .
- 3.6.3.** Troba deu números naturals consecutius que no siguin primers.
- 3.6.4.** Busca el nombre natural positiu més petit que compleix les condicions següents:
- si el dividim per 2, dóna resta 1;
 - si el dividim per 3, dóna resta 2;
 - si el dividim per 4, dóna resta 3;
 - si el dividim per 5, dóna resta 4;
 - i si el dividim per 6, dóna resta 5.
- 3.6.5.** Agafa un nombre qualsevol de tres xifres i permuta-les cíclicament de les dues maneres possibles (és a dir, considera els números xyz, yzx i zxy). Demuestra que la suma dels tres nombres és sempre divisible per 37.
- Què passa si en comptes de realitzar dues permutacions cícliques en fas dues de qualsevol? Demuestra que si sumes el número de 3 xifres amb els cinc números obtinguts aplicant al número totes les permutacions possibles obtens un nombre divisible per 37.
- 3.6.6.** “Tenia n anys l’any n^2 ”, va dir en Pere Casabona l’any 1971. Quan va néixer?
- 3.6.7.** Dos amics es troben després de molt de temps i un li pregunta a l’altre,
- Quants fills tens i quina edat tenen?
 - Tinc tres filles, el producte de les seves edats és 36 i la suma és el número d’aquesta casa– li contesta l’altre.
 - Em falta una dada – diu el primer.
 - Ah! bé –contesta– la gran toca el piano.
- Quines són les edats de les filles?
- 3.6.8.** (*) Demuestra que la suma dels quadrats de dos enters senars no és el quadrat de cap enter.

- 3.6.9.** (*) Demana a una persona que multipliqui el dia del mes que va néixer per 12, el nombre del mes per 31 i que us doni el resultat de sumar aquestes dues quantitats. Endeвина-li la data exacta del seu naixement.

Sabries donar un mètode per a endevinar també l'any de naixement amb una sola dada?

- 3.6.10.** (*) Donada una matriu A de mida 2×2 no invertible, demostra que hi ha infinites matrius X que compleixen $AXA = A$. I si la matriu és invertible?
- 3.6.11.** (**) Sabent que els últims tres dígit a la representació decimal de 7^{400} són 0, 0, 1, troba els últims tres dígit de la representació decimal de 7^{9999} .
- 3.6.12.** (**) Considera una paraula P de n lletres. Tria una permutació f de les n posicions. Ara aplica la permutació f a la paraula P . A la paraula resultant torna a aplicar-hi la mateixa permutació f i així successivament fins a aplicar en total $n!$ cops la permutació f . Demostra que la paraula resultant és la paraula P .
- 3.6.13.** (**) Si tenim la successió de matrius

$$\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 \\ 12 & 13 & 14 \end{pmatrix}, \dots$$

troba la fórmula de la suma dels elements de la diagonal principal de la matriu n -èsima en funció de n .

- 3.6.14.** (*) Els vèrtexs d'un polígon regular de 37 costats es numeren de l'1 a l'11. Qualsevol línia de simetria del polígon divideix els nombres que no estan en la línia de simetria en dos subconjunts.

Diem que una numeració dels vèrtexs és "bona" respecte una línia de simetria si cada un dels nombres d'un dels dos subgrups és més gran que el seu simètric.

Hi ha alguna manera de numerar els vèrtexs que sigui "bona" respecte a qualsevol línia de simetria?