

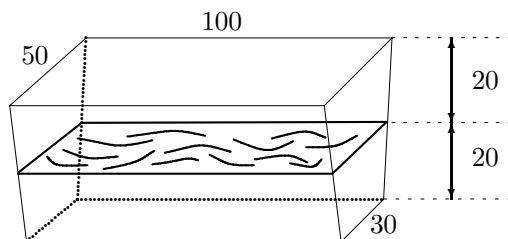


## 3.7 Modelització matemàtica

Selecció de problemes preparada per Àngel Calsina i Ballesta, professor de Matemàtica Aplicada del Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona i del Departament d'Informàtica i Matemàtica Aplicada de la Universitat de Girona. tel.: 93 581 29 06 i 972 41 89 42, e-mail: [calsina@mat.uab.es](mailto:calsina@mat.uab.es), i [acalsina@ima.udg.es](mailto:acalsina@ima.udg.es).



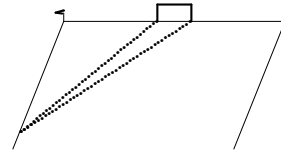
- 3.7.1.** En un cultiu cel·lular, el nombre de divisions per unitat de temps és proporcional al nombre de cèl·lules presents. Un cultiu que conté inicialment 10 000 individus per ml dobra la seva població en sis hores. Quantes cèl·lules hi haurà al cap de dos dies?
- 3.7.2.** Un model de dinàmica de poblacions estableix que la densitat de població d'una espècie d'insectes l'any  $n + 1$  depèn de la densitat de població l'any anterior en la forma  $p_{n+1} = r(1 - p_n)p_n$ , on  $r$  és un coeficient positiu i menor que 4. Per a diferents valors del paràmetre  $r$  i mitjançant experimentació numèrica, detecteu comportaments de la successió de densitats any rere any de tendència a l'extinció, de tendència a un equilibri de la població i de comportament asimptòticament periòdic.
- 3.7.3.** (\*) El pes aproximat de l'atmosfera terrestre és de  $5 \cdot 10^{18}$  kilos. Podríeu arribar a aquest resultat calculant mentalment?
- 3.7.4.** S'ha observat que la densitat de població d'una espècie de peixos en un riu de 200 km de longitud decreix al llarg del seu curs de manera lineal des dels 150 individus per km prop del naixement fins a només 10 peixos per km prop de la desembocadura. Calculeu quina és la població total de peixos d'aquesta espècie en el riu.
- 3.7.5.** En una reacció química del tipus  $A + B \rightarrow C$  (una molècula de  $A$  i una de  $B$  es combinen per a formar-ne una de  $C$ ), es disposa inicialment de  $a$  mols de les substàncies  $A$  i  $B$ , mentre que  $C$  és absent. El temps que tarden a formar-se  $c$  mols de  $C$  està donat per  $t = \frac{1}{k} \int_0^c \frac{dx}{(a-x)^2}$ , on  $k$  s'anomena la constant de la reacció. Calculeu quant de temps és necessari per a la formació de  $a/2$  mols de  $C$  i quant tardaria la reacció a acabar-se.
- 3.7.6.** (\*) Un dipòsit conté inicialment 50 kg de sal dissolts en 1 000 l d'aigua. Entra al dipòsit un cabal d'aigua pura de 2 l per min i en surt un cabal igual de dissolució. Calculeu la concentració de la dissolució passades dues hores.
- 3.7.7.** (\*) Els extrems d'un abeurador horitzontal d'un metre de llarg i 40 cm d'alçada són trapezis isòsceles la base inferior dels quals mesura 30 cm i la superior 50. En un instant determinat observem que el nivell de l'aigua és de 20 cm i està pujant a raó d'un cm per minut. Quant tardarà l'abeurador a ser ple si sabem que el cabal d'entrada és constant?



- 3.7.8.** (\*) El consum de combustible d'un cotxe per unitat de temps és, essencialment, la suma de dos termes, un d'independent de la velocitat i que correspon al manteniment del motor en marxa, i un altre que és proporcional a la potència que el motor entrega i que es dedica (en un trajecte pla) bàsicament a vèncer el fregament amb l'aire. La força de fregament amb l'aire és aproximadament proporcional al quadrat de la velocitat. Això fa que el consum per unitat de temps depengui de la velocitat en la forma  $g(v) = a + bv^3$ . Per què?

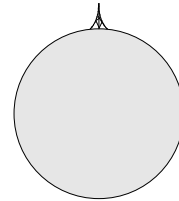
Quina és la velocitat més econòmica d'un vehicle amb motor diesel que gasta 4 litres per hora al ralenti i 6 litres per hora circulant a 100 km/h? Quin és el consum òptim?

- 3.7.9.** Un extrem corre per la banda en un camp de futbol que fa 50 metres d'ample i té unes porteries de 7 metres d'ample. Veu el porter avançat i decideix xutar a porta. A quina distància del banderí de córner ha de fer-ho per a tenir l'angle més gran possible?



- 3.7.10.** (\*\*) Se sap que una corda de 18 m té una característica d'allargament tal que la tensió en kp és funció de l'allargament en metres en la forma  $T(x) = 100x + 10x/(6 - x)$  per a un allargament menor que 5.8 metres i que es trenca quan s'arriba a aquest. Calculeu el pes màxim d'una persona que vulgui fer "ponting" amb aquesta corda. (Adaptat del llibre *Càlcul Infinitesimal*, de C. Perelló, Biblioteca Universitària 21, Enciclopèdia Catalana, 1994.)

- 3.7.11.** (\*\*) Es vol construir (l'any 2664) una torre de comunicacions de 20 km d'altura amb una massa de 10 tones per metre lineal al pol nord d'un asteroide esfèric de 100 km de radi on la gravetat a la superfície és la cinquantesena part de la terrestre. Quin serà el pes total d'aquesta torre? Quant pesaria si fos infinitament alta? Serien iguals els resultats si la construïssin a l'equador de l'asteroide? Faltaria en aquest cas alguna dada?



- 3.7.12.** (\*\*) Un dipòsit amb forma de con invertit de radi  $R$  i altura  $H$  conté aigua fins a un nivell  $h$ . Calculeu el màxim valor de  $h$  que garanteixi que s'hi pot introduir una bola més densa que l'aigua sense que se'n vessi gens.

