

Applet 4.2. Crecimiento exponencial discreto con estocasticidad demográfica

Introducción

Consideremos el siguiente modelo de crecimiento exponencial continuo

$$\frac{dN}{dt} = (b - d) \cdot N$$

Donde b es la tasa instantánea de natalidad, d la tasa instantánea de mortalidad, N el tamaño de la población y dN/dt la variación del tamaño de la población con el tiempo.

En una población real los nacimientos no ocurren de forma continua en el tiempo. En realidad, durante un cierto tiempo no hay ni nacimientos ni muertes. Luego, en un instante determinado, ocurre un nacimiento o una muerte, con lo que la población aumentará o disminuirá en una unidad. Luego seguirá un cierto tiempo sin cambios, hasta el siguiente acontecimiento demográfico, y así sucesivamente. Las probabilidades de que ocurran nacimientos y muertes están relacionadas con los valores de los parámetros b y d . Concretamente:

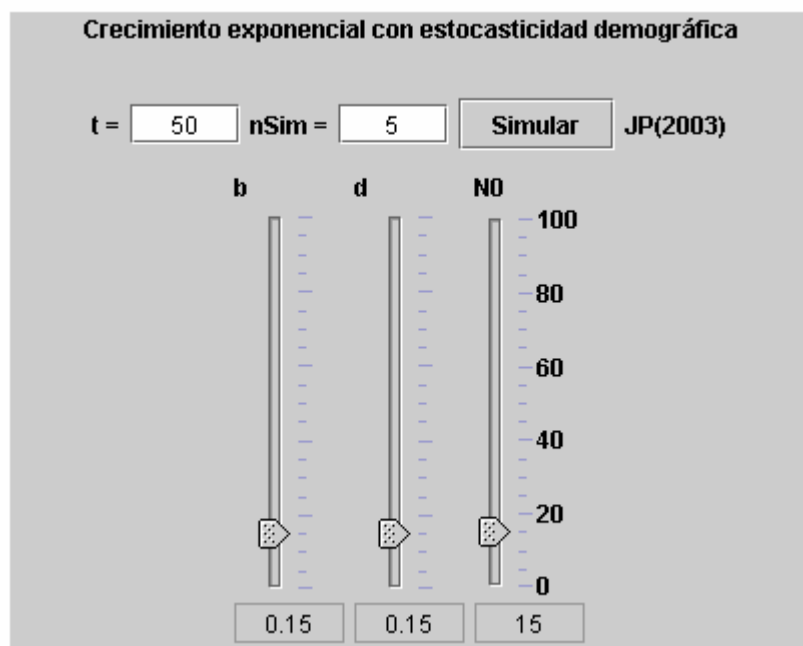
$$P(\text{nacimiento}) = \frac{b}{b+d}$$
$$P(\text{muerte}) = \frac{d}{b+d}$$

Obsérvese que la suma de las dos probabilidades es la unidad. Obsérvese también que el comportamiento del modelo depende de los valores absolutos de b y de d , y no sólo de la diferencia $r = b - d$, como ocurría en el modelo exponencial determinista.

En este modelo si $b > d$ la probabilidad de que se produzca un nacimiento será mayor que la que se produzca una defunción, con lo que la población tenderá a aumentar de tamaño. No obstante, por azar, pueden darse una serie de muertes consecutivas que vayan en contra de esta tendencia. Si el tamaño de la población es pequeño la probabilidad de que se extinga la población no es despreciable.

Applet

Si el *applet* se ha cargado correctamente se obtendrá una imagen como la siguiente:



Funcionamiento del *applet*

1. Entrar el tiempo total de la simulación, t (entre 0 y 100). Aquí no es necesario entrar dt , ya que los momentos en que se producen nacimientos o muertes se deciden aleatoriamente a partir de las tasas de natalidad y de mortalidad.
2. Entrar el número de simulaciones simultáneas que se desean realizar (1-5).
3. Entrar los valores de los parámetros b y d y el tamaño inicial de la población (N_0) con los *sliders*.

4. Pulsar el botón “Simular”. Si alguno de los datos entrados es incorrecto, la correspondiente caja de texto se coloreará de rojo y el programa se detendrá. Si los datos son correctos las cajas de texto se colorearán de verde y se abrirá una nueva ventana con la representación de N_t respecto de t . Cada una de las simulaciones se indica en distinto color. También se proporciona para cada simulación el valor numérico del tamaño N de la población al final del periodo. En la parte inferior del gráfico se muestran los valores de los parámetros.
5. Para evitar ejecuciones muy largas, especialmente en ordenadores de poca potencia, se limita el tiempo de simulación cuando el tamaño de la población es muy elevado. Cuando esto ocurre la gráfica correspondiente no llega al tiempo de simulación solicitado. Esto no tiene ninguna importancia práctica, puesto que la estocasticidad demográfica únicamente es importante en poblaciones de pequeño tamaño.

En la siguiente figura se muestra un ejemplo de resultado de una simulación con $b = 0,17 \text{ año}^{-1}$, $d = 0,14 \text{ año}^{-1}$ y $N_0 = 10$ individuos. En este ejemplo la población número 2 (azul oscuro) se ha extinguido, a pesar de que, siendo $(b - d) > 0$, la población debería haber aumentado de tamaño. También se muestra, en color negro el modelo exponencial determinista.

