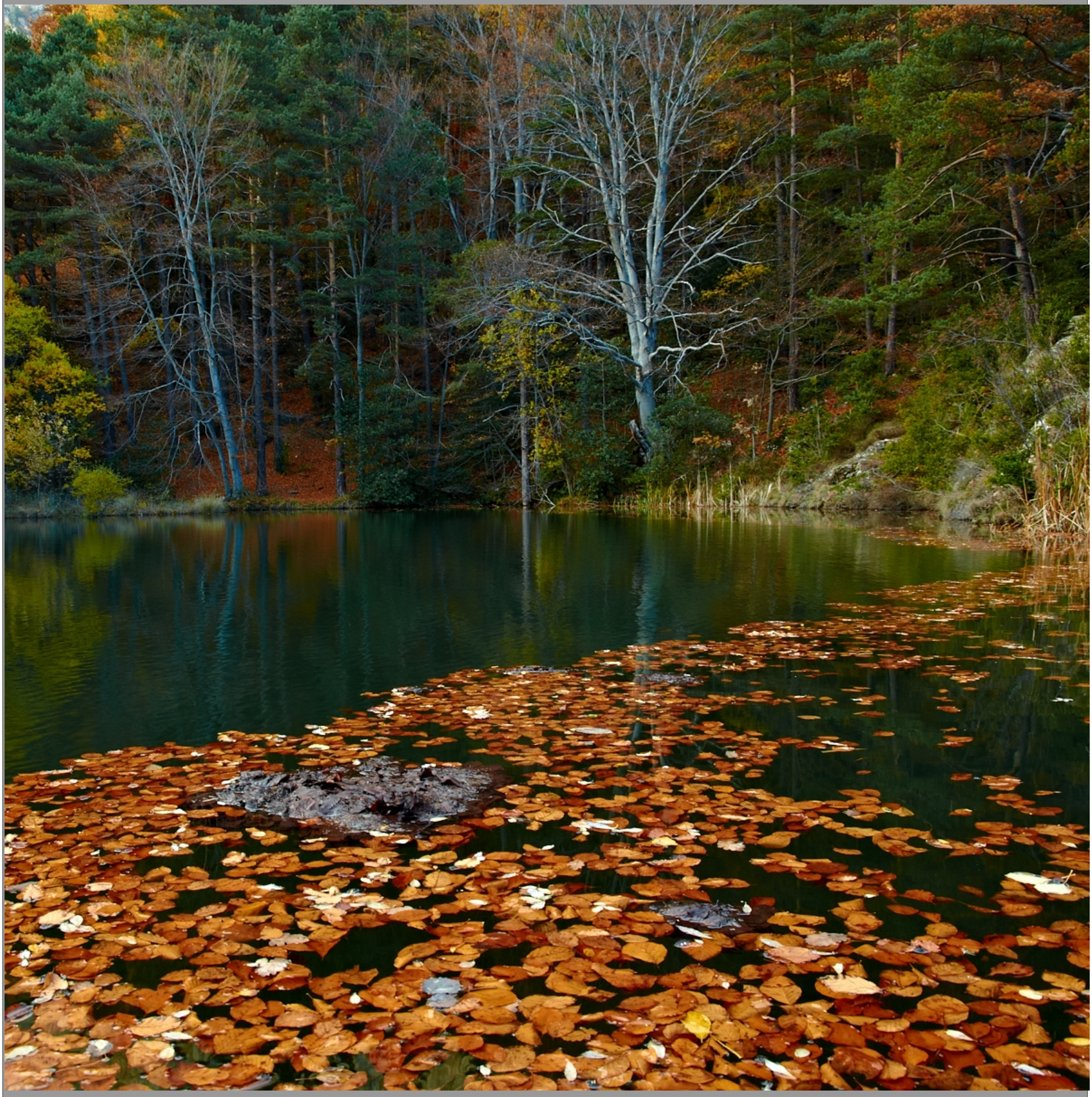
APUNTS D'UN CURS DE TOPOLOGIA ELEMENTAL



JAUME AGUADÉ

Apunts d'un curs de topologia elemental

Jaume Aguadé

Jaume.Aguade@uab.cat

ISBN-10: 84-697-0541-5
ISBN-13: 978-84-697-0541-4

L'autor d'aquesta obra és Jaume Aguadé Bover
Jaume.Aguade@uab.cat

Versió 1.1
5 de juny de 2015. Dia de Sant Bonifaci.

Aquesta obra es pot descarregar aquí:
http://mat.uab.cat/~aguade/teaching.html

Índex

Proemi

Escriure uns apunts com aquests és com escriure un poema. Per escriure un poema cal que descartem tots els milers de paraules d'una llengua, llevat d'unes quantes i, aleshores, cal que disposem aquestes poques paraules escollides en un ordre adient, apropiat per aconseguir uns determinats objectius d'emoció o coneixement. Escriure uns apunts de topologia no és gaire diferent d'això. Cal renunciar a tots els innumerables coneixements que podríem trobar, per exemple, a la Wikipedia, conservar-ne uns quants i —igual que en el cas del poema— disposar-los en un ordre que generi en el lector enteniment i potser, fins i tot, emoció intel·lectual.

Qualsevol persona que tingui accés als recursos d'Internet té al seu abast, automàticament, la pràctica totalitat del corpus de coneixement que hi ha a la topologia elemental —i a la topologia menys elemental. De fet, tenim accés a *massa* coneixement que, a banda de ser inextricable, no està disposat de manera *lineal* o *seqüencial*, que és l'única manera en què podem assimilar-lo. Ensenyar és, entre altres moltes coses, *linealitzar* el coneixement —i trencar la il·limitada cadena d'hyperlinks que tenim al nostre abast.

Mentre he escrit aquests apunts, he tingut molt en compte això que acabo de dir i —segons crec— he sabut resistir la temptació de l'enciclopedisme i del "generalisme" que, si en un tractat de topologia poden ser poc apropiats, en els apunts d'un curs serien un disbarat.

He explicat el contingut d'aquests apunts en un curs semestral a la UAB, durant tres anys consecutius. He utilitzat materials de cursos anteriors —principalment exercicis— i he rebut l'ajuda d'alguns companys del Departament de Matemàtiques, com Natàlia Castellana, Albert Ruiz, Joan Porti i Carmen Safont. Publico aquests apunts amb una llicència Creative Commons, amb el desig que tothom els pugui utilitzar lliurement. Aquesta és la versió 1.1. Agrairé que em comuniqueu els errors que aneu trobant.

Capítol 1

Introducció i prerequisits

1.1 La topologia

La topologia estudia el concepte d'espai. Per tant, l'hem de pensar com una branca de la geometria. Mentre que, per exemple, la geometria elemental es basa en l'axiomatització del concepte de línia recta, la topologia vol axiomatitzar conceptes com els de *connexió*, *continuïtat* o *límit*. La importància d'aquests conceptes fa que la topologia ocupi un lloc central en l'edifici de la matemàtica i que la seva influència arribi pràcticament a la totalitat d'aquest edifici.

Quan estudiem la recta real $\mathbb{R}$ o, amb més generalitat, els espais euclidians $\mathbb{R}^n$, ens veiem obligats a pensar els seus punts com si formessin un "continu". Considerem, per exemple, els punts de la recta de coordenada positiva $\mathbb{R}^+$ i considerem també l'origen de coordenades 0. Aquest punt 0 està fora de $\mathbb{R}^+$, però no podem considerar que sigui del tot aliè a $\mathbb{R}^+$. Hi està, d'alguna manera, "adherit". Si volem donar un sentit precís a això, podríem dir que $\mathbb{R}^+$ conté punts a distància de 0 tan petita com es vulgui però, de fet, és més que això. Seguint aquesta línia de raonament, ens trobarem amb els conceptes de subconjunts oberts i tancats, entorns, punts d'acumulació, continuïtat, compacitat, connexió... Són conceptes que l'alumne ja coneix i que ens descriuen la topologia ordinària de l'espai euclidià. L'alumne també haurà vist que aquests conceptes es deriven de l'existència d'una funció de distància amb unes propietats senzilles.

Tenim, doncs, que l'alumne que comença aquest curs ja coneix una bona quantitat de topologia. Coneix, ni que sigui de manera elemental, la topologia ordinària de $\mathbb{R}^n$ i potser també coneix la topologia dels espais mètrics en general, pel que fa referència als conceptes de continuïtat, compacitat o connexió. Però la topologia que estudiarem aquest curs és una generalització de la topologia dels espais mètrics a un àmbit molt més general —més general i, per això mateix, més flexible.

Dit això, l'alumne pot preguntar-se per la justificació de la necessitat de tornar a estudiar el que ja sap des d'aquest punt de vista més general. Aquesta necessitat quedarà clara al llarg del curs[1] però és difícil justificar-la abans d'iniciar l'estudi de la disciplina. El que sí que és relativament senzill de fer és observar un experiment que ens hauria de convèncer de l'excessiva rigidesa del concepte de distància en què es basa la topologia dels espais mètrics. L'experiment és aquest: agafeu un full de paper i rebregueu-lo (sense estripar-lo) tant com us vingui de gust. Penseu ara que, mentre que la topologia intrínseca del full de paper no ha canviat gens ni mica, la funció distància entre els seus punts s'ha modificat d'una manera monstruosa i indescriptible. Basar l'axiomatització de la topologia en un concepte com la distància que s'altera tant amb la més mínima transformació contínua no sembla (no és) una bona idea.

Entendrem que l'estudi de la topologia d'un espai és l'estudi d'aquelles propietats de l'espai que no canvien si transformem l'espai de manera *bicontínua* —és a dir, si fem una transformació contínua invertible i amb inversa també contínua. En un llenguatge informal, tothom ha sentit dir que *un topòleg és aquella persona que no distingeix entre un dònut i una tassa* (vegeu la figura 1.1). Aquesta facècia fa referència al fet que, efectivament, si imaginem el dònut fet a partir d'una substància indefinidament mal·leable, podem transformar-lo de manera contínua (sense trencar-lo) en un objecte en forma de tassa. Cal dir que tot això és molt poc acurat (ja en parlarem més endavant) però no deixa de tenir un cert fons de raó.

La topologia va néixer com una manera senzilla i sòlida de donar resposta a la petició de Riemann que l'any 1867 demanava una bona fonamentació del concepte d'espai. Al llarg del segle XX va desenvolupar-se extraordinàriament i es va diversificar en diverses branques. Es parla, per exemple, de *topologia geomètrica* o de *topologia algebraica*. Aquesta branca —la topologia algebraica— va anar prenent, al llarg de tot el segle passat, una dimensió extraordinària. En un moment donat, Dieudonné va arribar a dir que la topologia algebraica era "la reina de les matemàtiques del segle XX". D'una manera molt general, podríem dir que la topologia algebraica consisteix en l'estudi de les propietats topològiques dels es-

[1] Si més no, així ho espero i ho desitjo.

Figura 1.1: “Doughnut Mug” (xkcd.com, Creative Commons License).

pais mitjançant mètodes algebraics. És a dir, en la topologia algebraica l’àlgebra —rígida, discreta— ens dóna informació sobre la topologia —mal·leable, contínua.

En aquest curs elemental de topologia introduirem l’axiomàtica dels *espais topològics* i les *aplicacions contínues* entre ells. Parlarem de subespais i producte d’espais, de compacitat i de connexió, de superfícies i dels conceptes anàlegs en dimensió arbitrària. Estudiarem objectes relativament sorprenents —la topologia p-àdica, la topologia de Zariski, el conjunt de Cantor o la corba de Peano— i també estudiarem objectes geomètrics clàssics, com l’esfera, el tor, la banda de Moebius o l’espai projectiu —en dimensió arbitrària. Parlarem del quocient d’un espai per l’acció d’un grup i dels axiomes de separació —com el de Hausdorff. Acabarem el curs amb el bonic teorema de classificació de les superfícies compactes.

Aquests apunts són uns apunts. No són un llibre. A cada tema ens concentrarem en allò que és estrictament fonamental i en allò que realment farem a classe. Evitarem l’excessiva verbositat i deixarem per a les notes a peu de pàgina els comentaris, aclariments o complements que no siguin imprescindibles. Com que es tracta d’uns apunts, s’entén que els hem de complementar amb el treball a l’aula.

En aquests apunts, només es donen demostracions per als teoremes més difícils. Al llarg del text, hi una quantitat immensa d’afirmacions que no es demostren. S’espera (i es recomana) que l’estudiant demostri per ell mateix cadascuna d'aquestes afirmacions. A més d'això, cada capítol s'acaba amb una llista d'exercicis sobre els temes que s'han tractat en el capítol.

1.2 Una mica de teoria de conjunts

En aquesta secció farem un repàs de la teoria de conjunts, tal com la necessitarem en el nostre curs de topologia.[2] Ho farem d'una manera relativament superficial, ràpida, informal i esquemàtica perquè l'estudiant que vulgui aprofundir en la teoria de conjunts ja trobarà altres textos més adients.

Els axiomes

La teoria de conjunts es presenta com una fonamentació de la matemàtica[3] en la qual hi ha uns objectes anomenats conjunts entre els que hi pot haver una relació designada pel símbol $\in$. Intuïtivament, es tracta de pensar els objectes de les matemàtiques com a col·leccions d'altres objectes, de manera que la relació $A \in B$ s'interpreta intuïtivament com que A és un element[4] de la col·lecció (del conjunt) B. Aquesta relació de pertenència ens permet definir la igualtat entre conjunts: Si A i B són conjunts, aleshores $A = B$ significa que $X \in A$ és equivalent a $X \in B$. Si $X \in A$ implica $X \in B$, direm que A és un subconjunt de B i utilitzarem la notació $A \subset B$.[5]

El pas següent és donar una sèrie d'axiomes que ens diran com podem construir conjunts. Com que per començar necessitem alguna cosa, el primer axioma ens diu que existeix algun conjunt. Un cop sabem que hi ha algun conjunt, el mètode principal per construir conjunts, que utilitzarem constantment, el dóna l'anomenat axioma de comprensió: Si A és

[2] Recordem que aquesta topologia que estudiarem es coneix com a "topologia general" i també com a "topologia conjuntista".

[3] No tota la matemàtica actual es fonamenta en la teoria de conjunts que repassem aquí.

[4] Cal fer atenció a la diferència entre "conjunt" i "element". Per exemple, la frase "X és un conjunt" té sentit, però la frase "X és un element" no en té. La paraula "element" només es pot utilitzar en una frase del tipus "A és un element de B". Quan escrivim $A \in B$, això vol dir que A és un conjunt, B és un conjunt i A és un element de B.

[5] Hi ha textos que, per denotar que A és un subconjunt de B, utilitzen el símbol $A \subseteq B$. En aquests apunts no ho farem així. Per exemple, escriurem $A \subset A$ i, si volem indicar que A és un subconjunt propi de B, escriurem $A \subsetneq B$. Però mai no utilitzarem el símbol $\subseteq$.

un conjunt i P és una propietat,[6] aleshores existeix un conjunt que té per elements exactament els elements de A que compleixen la propietat P. La notació que utilitzarem per denotar aquest nou conjunt és aquesta:

$$\{x \in A \;:\; x \text{ compleix } P\}.$$

Amb aquests dos axiomes ja en tenim prou per demostrar que existeix un únic conjunt que no té cap element. L'anomenem *el conjunt buit* i el designem per $\varnothing$.

Hi ha tres axiomes més que ens permeten construir nous conjunts a partir d'uns altres conjunts donats. En primer lloc, si A i B són conjunts, existeix un conjunt els elements del qual són exactament A i B. Aquest conjunt es denota

$$\{A, B\}.$$

En segon lloc, si A és un conjunt, tots els subconjunts de A també formen un conjunt, que es designa 2^A o també $\mathcal{P}(A)$. Finalment, el tercer axioma que ens permet construir nous conjunts és l'axioma que afirma l'existència d'unions arbitràries. Diu així: Si A és un conjunt, existeix un conjunt els elements del qual són els x tals que $x \in X$ per algun $X \in A$. Això ens diu que la unió de dos conjunts $X \cup Y$ és un conjunt, però va molt més enllà perquè ens diu que podem considerar la unió de qualsevol conjunt de conjunts.

Amb aquests axiomes ja podem definir els nombres naturals $\mathbb{N}$ i començar a fer matemàtiques. Com que, en teoria de conjunts, tot han de ser conjunts, cada nombre natural ha de ser un conjunt. Definim $0 := \varnothing$, $1 := \{0\}$, $2 := 1 \cup \{1\}$, etc. Com que "etcètera" no forma part de la teoria de conjunts, caldrà un axioma específic que garanteixi que $\mathbb{N}$ és un conjunt.[7]

Per acabar amb el que es coneix com l'axiomàtica de Zermelo-Fraenkel de la teoria de conjunts, ens falten tres axiomes. El primer és el que es coneix com l'axioma del reemplaçament que no discutirem aquí perquè és força tècnic i no l'utilitzarem en aquest curs.[8] En segon és el famós axioma de l'elecció que sortirà més endavant. El tercer és l'axioma de regularitat.

[6] Què és una "propietat"? Per poder contestar aquesta pregunta, hauríem de parlar de teoria de conjunts des d'un punt de vista molt més formal del que fem en aquestes notes.

[7] Aquest axioma diu així: Existeix un conjunt $\mathbb{N}$ que té aquestes tres propietats: 1) $\varnothing \in \mathbb{N}$; 2) Si $x \in \mathbb{N}$, aleshores $x \cup \{x\} \in \mathbb{N}$; 3) Si $\varnothing \neq x \in \mathbb{N}$, existeix $y \in \mathbb{N}$ tal que $x = y \cup \{y\}$. Es pot demostrar —utilitzant l'axioma de regularitat que veurem més endavant— que aquest conjunt és únic.

[8] Per evitar cap misteri innecessari, diguem què diu aquest axioma, que tampoc no és tan difícil. Imaginem que tenim una propietat P "de dues variables", és a dir, una

Aquest axioma afirma que si A és un conjunt no buit, existeix un $x \in A$ tal que $x \cap A = \varnothing$. Per entendre la importància d'aquest axioma, pensem que implica que $x \in x$ és sempre fals o, més en general, implica que no hi ha cap cadena infinita de conjunts[9]

$$x_0 \ni x_1 \ni x_2 \ni x_3 \ni \cdots$$

També implica que si $A \in B$, aleshores $B \notin A$.

Productes, aplicacions, unions i interseccions

Si A i B són conjunts, el producte $A \times B$ serà el conjunt format per les parelles ordenades (a, b) amb $a \in A$ i $b \in B$. Hem de definir què és una parella ordenada (que ha de ser un conjunt) i hem de demostrar que formen un conjunt. En una parella ordenada, la propietat que volem garantir és que $(a, b) = (a', b')$ si i només si $a = a'$ i $b = b'$. Una manera d'aconseguir això és definir $(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$.

En el context de la teoria de conjunts, si volem definir el que és una aplicació entre dos conjunts $f : A \to B$ ho farem a través de la gràfica de f. Direm que una aplicació és un subconjunt $f \subset A \times B$ que té la propietat que per tot $a \in A$ existeix un únic $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$.[10] En aquest cas, escriurem $b = f(a)$ i direm que b és la imatge de a per f. Si sobreentenem f, també escriurem $a \mapsto b$.[11] Observem que, si A i B són conjunts, totes les aplicacions $f : A \to B$ formen un conjunt que s'acostuma a designar B^A, però nosaltres designarem $\mathcal{F}(A, B)$. Una propietat essencial de les

propietat tal que, donats dos conjunts x, y, $P(x, y)$ pot ser certa o falsa. Suposem que aquesta propietat P compleix que per cada x hi ha un únic y tal que $P(x, y)$ és cert. Aleshores, si A és un conjunt, l'axioma afirma que $\{y \ : \ x \in A \text{ i } P(x, y)\}$ és un conjunt. És com una mena de "teorema de la funció implícita". Comparem-lo amb l'axioma de comprensió. Aquest axioma ens diu que si repassem un per un els elements d'un conjunt A i ens quedem amb els $x \in A$ que compleixen una certa propietat $P(x)$, tindrem un conjunt. L'axioma de reemplaçament, de manera similar, ens diu que si repassem un per un els elements d'un conjunt A i, per cada $x \in A$ ens quedem amb l'únic y que compleix una certa propietat $P(x, y)$, tindrem també un conjunt.

[9] Què volen dir aquests punts suspensius? Si ho volem dir ben dit, podem dir que no hi ha cap aplicació $\mathbb{N} \to X$ tal que $f(n+1) \in f(n)$ per tot n.

[10] Aquesta definició té un problema: Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ són les aplicacions donades per $f(x) = x^2$ i $g(y) = y^2$, aleshores $f = g$, mentre que ens agradaria considerar f i g com aplicacions diferents perquè tenen conjunts d'arribada diferents. La solució consisteix en definir una aplicació com una terna $F = (A, B, R)$ on $R \subset A \times B$ compleix la propietat que hem indicat.

[11] Cal observar que els símbols $\to$ i $\mapsto$ indiquen coses molt diferents. A més, el fet que $\to$ indiqui una aplicació fa que no puguem utilitzar aquest símbol per a cap altra cosa.

aplicacions és que, en determinats casos, es poden composar. D'altra banda, per a qualsevol conjunt A podem considerar l'anomenada aplicació identitat $I : A \to A$ que ve donada per $I(a) = a$. No insistirem més en això perquè ja deu ser ben conegut.

Pel que fa a la unió de conjunts, ja hem vist que hi ha un axioma específic que ens assegura que podem considerar la unió de qualsevol família de conjunts

$$\bigcup_{X \in A} X.$$

Això té sentit encara que A sigui el conjunt buit i en aquest cas, evidentment, la unió és també el conjunt buit.

La intersecció d'una família no buida de conjunts no necessita cap axioma específic. El conjunt

$$\bigcap_{X \in A} X$$

està ben definit sempre que $A \neq \varnothing$.

Ens interessa també poder parlar del producte d'una família arbitrària de conjunts. Suposem que A és un conjunt i volem definir el producte de tots els elements de A:

$$\prod_{X \in A} X.$$

La manera de fer-ho és pensar que un element del producte és una funció f que assigna a cada element $X \in A$ un element $x \in X$. És a dir:

$$\prod_{X \in A} X := \left\{ f \in \mathcal{F}\left(A, \bigcup_{X \in A} X\right) \ : \ f(X) \in X \text{ per tot } X \in A \right\}.$$

En particular, si $A = \varnothing$, tenim que $\prod_{X \in A} X$ és un conjunt amb un únic element. També és clar que si algun dels factors d'un producte de conjunts és el conjunt buit, el producte és buit. L'axioma de l'elecció postula que el recíproc també és cert: Si tots els $X \in A$ són diferents del buit, aleshores $\prod_{X \in A} X \neq \varnothing$. Aquest axioma és equivalent a l'axioma que diu que tot conjunt admet una bona ordenació i l'alumne ja deu haver vist les importants conseqüències que això té.

Al llarg del curs utilitzarem una construcció conjuntista interessant que s'anomena la **unió disjunta**. Imaginem, per exemple, que S és la circumferència unitat. Si volem considerar dues circumferències, no podem prendre $S \cup S$ perquè, evidentment, $S \cup S = S$. La unió disjunta de dos conjunts serà com la unió ordinària, però després de considerar que els elements del primer conjunt són diferents dels del segon, encara que no ho siguin. Dit més ben dit, la unió disjunta de A i B serà un conjunt $A' \cup B'$ on A' està en bijecció amb A i B' està en bijecció amb B. Si volem una definició formal, podem prendre aquesta:

$$A \sqcup B := (A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\}).$$ [12]

Imatges i antiimatges

Sigui $f : A \to B$ una aplicació i suposem que $f(a) = b$. Direm que b és la imatge de a i que a és una antiimatge de b. Si tot element de B té com a mínim una antiimatge, direm que f és una aplicació exhaustiva. Si cada element de B té com a màxim una antiimatge, direm que f és una aplicació injectiva. De vegades, utilitzarem la notació $A \twoheadrightarrow B$ per indicar que f és una aplicació exhaustiva (o una "projecció") i la notació $f : A \rightarrowtail B$ per indicar que f és una aplicació injectiva (o una "injecció").[13] Si f és a la vegada injectiva i exhaustiva, diem que és bijectiva (o que és una "bijecció"). En aquest cas, cada element de B té una única antiimatge i podem definir una aplicació $g : B \to A$ que és inversa de f, en el sentit que, per tot $a \in A$ es compleix que $g(f(a)) = a$ i per tot $b \in B$ es compleix que $f(g(b)) = b$. La notació tradicional per aquesta aplicació inversa —que és única— és f^{-1}. Cal insistir que aquesta aplicació inversa només existeix si f és bijectiva.

Si $f : A \to B$ és una aplicació i $b \in B$, podem considerar el conjunt de totes les antiimatges de b. És un subconjunt de A, que pot ser buit. Malauradament, la notació que utilitza tothom per indicar aquest conjunt indueix a confusió:

$$f^{-1}(b) := \{a \in A \ : \ f(a) = b\}.$$

Observem, doncs, que $f^{-1}(b)$ està sempre definit, encara que f no sigui bijectiva, i és un subconjunt de A, que pot ser el conjunt buit.

[12] És interessant observar que ni el producte cartesià ni la unió disjunta compleixen la propietat associativa. En canvi, a la pràctica ordinària de les matemàtiques, fem com si aquestes operacions (i moltes altres operacions similars, com el producte tensorial) fossin associatives. Això és fer trampa i, encara que sigui una trampa relativament inòqua, hi ha moments en que cal treballar en un context més rigorós. Si esteu interessats en aquest tema, podeu buscar informació sobre "categories monoïdals".

[13] En llenguatge col·loquial, les aplicacions injectives es diu que són "mono" i les exhaustives es diu que són "epi".

Una aplicació $f : A \to B$ dóna lloc a dues aplicacions

$$f_* : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$$
$$f^* : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$$

Aquestes dues aplicacions es defineixen així:

$$f_*(X) := \{b \in B \ : \ \text{existeix } a \in X \text{ tal que } f(a) = b\ \}$$
$$f^*(Y) := \{a \in A \ : \ f(a) \in Y\}$$

Malauradament, per augmentar la confusió en les notacions, aquestes aplicacions que hem designat provisionalment per f_* i f^*, es designen a la pràctica f i f^{-1}, respectivament. L'estudiant ha d'aprendre a no confondre's amb aquestes notacions tan poc afortunades.

Al llarg d'aquest curs de topologia, utilitzarem sovint aquestes propietats de les aplicacions f_* i f^*:

- $f(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$.
- $f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$ i la igualtat es compleix si f és injectiva.
- $f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.
- $f^{-1}(\bigcap_{i\in I} B_i) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.
- $f^{-1}(B - Y) = A - f^{-1}(Y)$.
- $X \subset f^{-1}(f(X))$ i la igualtat es compleix si f és injectiva.
- $f(f^{-1}(Y)) \subset Y$ i la igualtat es compleix si f és exhaustiva.

Observem que, en certa manera, f^{-1} té millors propietats que f.

Finit, infinit, numerable

Recordem que cada nombre natural es defineix com un cert conjunt. Un conjunt A es diu que és finit si existeix un nombre natural n i una bijecció $f : n \to A$. Una definició equivalent és que A és finit si no hi ha cap subconjunt $B \subsetneq A$ que es pugui posar en bijecció amb A. Els conjunts que no són finits s'anomenen infinits. Per exemple, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$ són conjunts infinits.

Entre els conjunts infinits, també n'hi ha de més grans que altres. La teoria de cardinals i ordinals és molt interessant, però pràcticament no la utilitzarem en aquest curs i per tant no cal dir-ne res en aquests apunts. El que sí que cal és conèixer la diferència entre conjunts numerables i conjunts no numerables. Un conjunt numerable és aquell que es pot posar en correspondència bijectiva amb el conjunt $\mathbb{N}$. Per exemple, el propi $\mathbb{N}$.

Si A i B són conjunts numerables, també $A \times B$ ho és. En efecte, si tenim $A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ i $B = \{b_0, b_1, b_2, \ldots\}$, podem numerar $A \times B$ així:

$$A \times B = \{(a_0, b_0), (a_0, b_1), (a_1, b_0), (a_0, b_2), (a_1, b_1), (a_2, b_0), \ldots\}.$$

D'altra banda, també és fàcil veure que un subconjunt d'un conjunt numerable o bé és finit o bé és numerable. Això ens permet concloure que, per exemple, $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$ són conjunts numerables. També és relativament fàcil veure que una unió finita o numerable de conjunts numerables és numerable.[14] En canvi, $\mathbb{R}$ no és numerable i la demostració és senzilla i bonica. Si $\mathbb{R}$ fos numerable, també ho seria l'interval $[0, 1)$. Suposem que $[0, 1) = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ i escrivim cadascun d'aquests nombres reals en forma decimal:

$$\begin{aligned}
a_0 &= 0.a_{01}a_{02}a_{03}a_{04}a_{05}\ldots \\
a_1 &= 0.a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}\ldots \\
a_2 &= 0.a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}a_{25}\ldots \\
a_3 &= 0.a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}a_{35}\ldots \\
&\ldots
\end{aligned}$$

Considerem ara el nombre real $b = 0.b_1b_2b_3b_4\ldots \in [0, 1)$ definit així:

$$b_i := \begin{cases} 0, & a_{i-1,i} \neq 0 \\ 2, & a_{i-1,i} = 0 \end{cases}$$

És evident que b no pot ser a la llista anterior.

El quocient

Potser l'eina més poderosa de les matemàtiques és la que ens permet considerar com a iguals coses que no ho són. Se'n diu el *pas al quocient*. Recordem com funciona. La relació d'igualtat compleix tres propietats

[14] En el cas numerable, cal l'axioma de l'elecció.

fonamentals: (1) $x = x$ per tot x; (2) Si $x = y$, aleshores també $y = x$; (3) Si $x = y$ i $y = z$, aleshores també $x = z$. Aquestes tres propietats no són exclusives de la igualtat: Una relació[15] $x \sim y$ que les compleixi es diu que és una *relació d'equivalència*.

Suposem, doncs, que tenim una relació d'equivalència $\sim$ en un conjunt X. Un subconjunt $A \subset X$ direm que és una *classe d'equivalència* si existeix $x \in X$ tal que

$$A = [x] := \{y \in X \ : \ y \sim x\}.$$

Direm que x és un representant de la classe A. Les classes d'equivalència compleixen aquestes propietats:

1. $[x] = [y]$ si i només si $x \sim y$.
2. La unió de totes les classes d'equivalència és igual a X.
3. Dues classes d'equivalència diferents són disjuntes.

Es defineix el conjunt quocient $X/\!\sim$ com el conjunt de totes les classes d'equivalència. Tenim una aplicació exhaustiva $X \twoheadrightarrow X/\!\sim$ donada per $x \mapsto [x]$. La primera de les propietats anteriors ens diu que, efectivament, en el pas de X a $X/\!\sim$ hem convertit la relació d'equivalència $\sim$ a X en la igualtat al conjunt quocient $X/\!\sim$.

Podem fer quocient per una relació que no sigui d'equivalència? Evidentment que sí. Suposem que en un conjunt X tenim una relació $\backsim$ que potser no és d'equivalència. Podem fer quocient $X/\!\backsim$ simplement considerant la relació d'equivalència més petita[16] que contingui $\backsim$ i fent quocient per aquesta relació d'equivalència. La importància d'això s'entendrà millor al llarg del curs.

Sovint, hem de definir una aplicació $f : X/\!\sim \ \to Y$ i ho fem definint primer f *sobre un representant* i comprovant després que *està ben definida* o *no depèn del representant*. La justificació d'això rau en aquest teorema bàsic:

[15]El concepte de "relació" té una formulació senzilla al si de la teoria de conjunts. Una relació en un conjunt X és un subconjunt $R \subset X \times X$. Aleshores, diem que x està relacionat amb y si $(x, y) \in R$.

[16]Recordem que una relació és un subconjunt de $X \times X$. Com que la relació $X \times X$ és una relació d'equivalència i com que la intersecció de relacions d'equivalència és d'equivalència, si R és una relació, podem considerar la intersecció de totes les relacions d'equivalència que continguin R. Aquesta és la relació d'equivalència més petita que conté R.

Teorema 1.1. *Sigui $\pi : X \to X/\!\sim$ l'aplicació de pas al quocient. Si $g : X \to Y$ és una aplicació, la condició necessària i suficient perquè existeixi $f : X/\!\sim \to Y$ tal que $g = f\pi$ és que per tot $x, y \in X$ tals que $x \sim y$ es compleixi $g(x) = g(y)$. Aquesta f és única. Direm que "g factoritza per $X/\!\sim$".*

1.3 La topologia dels espais mètrics

A $\mathbb{R}^n$, els conceptes de funció contínua, subconjunts oberts i tancats, punts interiors, punts adherents, etc. es defineixen utilitzant la distància euclidiana ordinària. Si $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, x_n)$ són punts de $\mathbb{R}^n$, la distància entre x i y és

$$d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Per cada $x \in \mathbb{R}^n$ i cada $\epsilon > 0$ es defineix la bola de centre x i radi ϵ com

$$B(x, \epsilon) := \{ y \in \mathbb{R}^n \ : \ d(x, y) < \epsilon \}.$$

Més en general, en lloc de $\mathbb{R}^n$ poden considerar un conjunt arbitrari X sobre el que tinguem una certa *funció distància* $d : X \times X \to \mathbb{R}$ que compleixi aquestes quatre[17] propietats:

1. $d(x, y) = 0$ si i només si $x = y$.
2. Per tot $x, y, z \in X$ es compleix $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$.
3. Per tot $x, y \in X$ es compleix $d(x, y) \geq 0$.
4. Per tot $x, y \in X$ es compleix $d(x, y) = d(y, x)$.

Direm que X és un *espai mètric*.[18] Per exemple:

1. $\mathbb{R}^n$ amb la distància euclidiana ordinària.

[17] De fet, la propietat 3 és conseqüència de les altres i no caldria que figurés a la llista.

[18] Per dir-ho ben dit, hauríem de dir que un espai mètric és una parella (X, d) on X és un conjunt i d és una funció distància a X. Però, seguint una tradició general de les matemàtiques, sempre que no hi hagi perill de confusió ometrem d i direm que X és un espai mètric.

2. $\mathbb{R}^n$ amb la distància $d(x,y) = \sum_1^n |x_i - y_i|$.
3. $\mathbb{R}^n$ amb la distància $d(x,y) = \text{màx}\,|x_i - y_i|$.
4. Qualsevol conjunt X amb la *distància discreta*

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

5. $\mathbb{Z}$ amb la *distància 2-àdica*

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 2^{-v_2(x-y)}, & x \neq y \end{cases}$$

   on $v_2(x) = n$ si $x = 2^n x'$ amb x' senar. Canviant 2 per un primer qualsevol p, tindrem la distància p-àdica a $\mathbb{Z}$.

En un espai mètric X, un subconjunt A es diu que és *obert* si compleix aquesta propietat

- Per tot $x \in A$ existeix un nombre real $\epsilon > 0$ tal que $B(x,\epsilon) \subset A$.

I un subconjunt T es diu que és *tancat* si $X - T$ és obert.[19] És senzill demostrar que els subconjunts oberts compleixen aquestes tres propietats bàsiques:

(a) $\varnothing$ i X són oberts.

(b) La unió de qualsevol família de subconjunts oberts és un obert.

(c) La intersecció de qualsevol família *finita* de subconjunts oberts és un obert.

En canvi, és fàcil trobar exemples d'una intersecció d'infinits oberts que no és obert. Per exemple, a $\mathbb{R}^n$, la intersecció de les boles obertes $B(0,1/n)$, $n = 1,2,3,\dots$ és $\{0\}$, que no és un subconjunt obert.

Podem ara definir el concepte central de la topologia que és el de *funció contínua*. Suposem que $f : X \to Y$ és una aplicació entre dos espais mètrics. Direm que f és *contínua* si compleix aquesta propietat:

[19] La paraula *tancat* és poc afortunada, des d'un punt de vista didàctic, perquè pot induir a pensar que *obert* i *tancat* són antònims, és a dir, que *tancat* és el contrari d'*obert*. Això és absolutament fals i l'estudiant ha de fer un esforç deliberat per no caure mai en aquest error terrible. En un espai mètric hi pot haver (a) conjunts que siguin oberts i no siguin tancats; (b) conjunts que siguin tancats i no siguin oberts; (c) conjunts que siguin oberts i també siguin tancats; (d) conjunts que no siguin ni oberts ni tancats.

- Per tot $x \in X$ i per tot nombre real $\epsilon > 0$, existeix un nombre real $\delta > 0$ tal que per tot $x' \in X$ tal que $d(x, x') < \delta$ es compleix que $d(f(x), f(x')) < \epsilon$.

Sembla un embarbussament, més que no pas la definició d'un dels conceptes més importants de les matemàtiques! Això ens hauria de fer reflexionar que el concepte de continuïtat hauria de tenir una definició molt més senzilla, molt més conceptual. Aquesta reflexió és la que porta a la definició axiomàtica de la topologia, com l'estudiarem en aquest curs. La idea que ens diu que això és possible es troba continguda en aquest teorema fonamental:

Teorema 1.2. *Sigui $f : X \to Y$ una aplicació entre espais mètrics. Aquestes dues condicions són equivalents:*

(a) f és contínua.

(b) Si U és un obert de Y, aleshores $f^{-1}(U)$ és un obert de X.

Demostració. Suposem que f és contínua i sigui U un obert de Y. Volem demostrar que $f^{-1}(U)$ és un obert de X. Per fer-ho, sigui $x \in f^{-1}(U)$, és a dir, $y := f(x) \in U$. Com que U és obert, hi haurà una bola tal que $B(y, \epsilon) \subset U$. Si apliquem ara la definició-embarbussament de la continuïtat de f, tindrem que existeix un $\delta > 0$ tal que si $d(x, x') < \delta$ aleshores $d(f(x), f(x')) < \epsilon$. Això ens diu que $B(x, \delta) \subset f^{-1}(U)$ i hem demostrat que $f^{-1}(U)$ és obert.

Suposem ara que f compleix la propietat de (b) i volem demostrar que f compleix la definició-embarbussament de continuïtat. Per fer-ho, sigui $x \in X$ i sigui $\epsilon > 0$. Cal trobar un $\delta > 0$ apropiat. Ho fem així. Considerem $y := f(x)$ i considerem la bola $B(y, \epsilon)$, que és un obert de Y. Per tant, $f^{-1}(B(y, \epsilon))$ serà un obert de X, per la propietat (b). Com que $x \in f^{-1}(B(y, \epsilon))$, existirà una bola tal que $B(x, \delta) \subset f^{-1}(B(y, \epsilon))$. És a dir, si $d(x, x') < \delta$, aleshores $d(f(x), f(x')) < \epsilon$. □

Aquest teorema té una importància conceptual immensa. Ens diu que la funció distància no és important: el que realment és important és saber quins són els conjunts oberts. Això suggereix una axiomatització més general de la topologia en la qual ens oblidem de la distància i **ho basem tot en el concepte primari de subconjunt obert**. És precisament el que farem en aquest curs, a partir del capítol següent.

1.4 Exercicis addicionals

1.1 Quines de les proposicions següents són la negació de "la solució és 2 o 3": (a) Ni 2 ni 3 no són la solució; (b) La solució no és 2 o no és 3; (c) La solució no és 2 i no és 3.

1.2 Escriviu la negació de les proposicions següents:

1. Dues rectes diferents d'un pla sempre es tallen en un únic punt.

2. Hi ha un polinomi a coeficients enters que no té arrels reals o, si en té, són totes positives.

3. A tots els municipis hi ha alguna dona tots els fills de la qual no han tingut ni el xarampió ni la rubèola.

4. Per tot nombre real a existeix un nombre real x tal que per tot nombre real y es compleix que $y > x$ implica $1 < y - a$.

5. Si $\sqrt{2}$ és racional, jo sóc Juli Cèsar.

6. Si $\sqrt{2}$ és irracional, jo sóc Juli César.

7. L'alarma sonarà si s'obre la porta i el botó d'anul·lació no es prem, o si hi ha moviment i no succeeix que el botó d'anul·lació es prem o l'alarma no està activada.

1.3 Demostreu si les proposicions (1), (2), (4), (5), (6) de l'exercici anterior són certes o falses.

1.4 Comproveu si aquests raonaments són lògicament correctes:

1. Perquè jo dugui el paraigües és necessari que plogui. Quan plou, mai no duc sandàlies. Avui duc sandàlies. Per tant, no està plovent i en conseqüència no duc el paraigües.

2. Si baixen els tipus d'interès, la borsa pujarà. Si els tipus d'interès no baixen, aleshores la construcció i el consum privat baixaran. Ara, el consum privat no està baixant. Per tant, és cert que la construcció no està baixant o el consum privat no està baixant. És a dir, és fals que la construcció i el consum privat estiguin baixant. Això vol dir que els tipus d'interès estan baixant i en conseqüència la borsa pujarà.

1.5 Enuncieu el recíproc, el contrari i el contrarrecíproc del teorema de Pitàgores. Quins d'aquests teoremes són certs a la geometria ordinària?

1.6 Considereu aquestes dues proposicions: (A) 3 és parell; (B) El polinomi $x^2 + x + 1$ no té cap arrel real. Considereu les proposicions: A implica B; A implica (no B); (no A) implica B; (no A) implica (no B). Quines d'aquestes quatre proposicions són certes i quines són falses. Demostreu-ho.

1.7 Hi ha un teorema que diu que "tota successió acotada de nombres reals té una parcial convergent". Definiu "successió" i "parcial".

1.8 Demostreu que $A \times B$ és un conjunt i que les parelles ordenades compleixen que $(a, b) = (a', b')$ si i només si $a = a'$ i $b = b'$.

1.9 Demostreu que si haguéssim definit $(a, b) := \{a, \{a, b\}\}$ també es compliria la propietat que $(a, b) = (a', b')$ si i només si $a = a'$ i $b = b'$.

1.10 Demostreu que $\mathcal{F}(A, B)$ és un conjunt.

1.11 Demostreu que si $A = \varnothing$, aleshores $\bigcap_{X \in A} X$ no és un conjunt.

1.12 Si X és un conjunt qualsevol, demostreu que no hi ha cap aplicació bijectiva entre X i $\mathcal{P}(X)$.

1.13 Siguin A, B, C conjunts tals que $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$. Demostreu que algun dels conjunts A, B, C és buit.

1.14 Demostreu que el conjunt dels nombres naturals és únic.

1.15 A partir de l'axioma de regularitat, demostreu que $x \in x$ és fals per tot x i demostreu que si $x \in y$, aleshores $y \notin x$.

1.16 Demostreu que qualsevol subconjunt d'un conjunt numerable és finit o numerable. Sigui $A \subset \mathbb{R}$ que no sigui ni finit ni numerable. Busqueu informació sobre si aquesta proposició és certa o falsa: "Existeix una aplicació bijectiva $A \to \mathbb{R}$".

1.17 Sigui A un conjunt i R una relació A. Definiu amb exactitud la relació d'equivalència més petita que conté R i demostreu que existeix i és única.

1.18 Formuleu matemàticament l'afirmació *"tota aplicació exhaustiva és un quocient"* i demostreu-la.

1.19 Demostreu les propietats de f i f^{-1} que apareixen a la pàgina 9 i vegeu que, en general, les inclusions no es poden substituir per igualtats.

1.20 Demostreu el teorema 1.1.

1.21 A la definició de funció distància que hem donat al text, demostreu que la condició (3) es pot demostrar a partir de les condicions (1), (2) i (4).

1.22 Demostreu que els cinc exemples d'espai mètric que apareixen al text són efectivament espais mètrics.

1.23 Demostreu que si eliminem l'arrel quadrada de la definició de distància euclidiana, la funció que obtenim no és una funció distància.

1.24 Doneu exemples de subconjunts de $\mathbb{R}$ que siguin oberts no tancats, tancats no oberts, oberts i tancats, ni oberts ni tancats. Feu el mateix amb $\mathbb{Z}$ amb la mètrica donada per la distància 2-àdica.

1.25 Un subconjunt A de $\mathbb{R}$ es diu que és *connex* si per qualsevol parella de conjunts oberts $B, C \subset \mathbb{R}$ tals que $A \subset B \cup C$ es compleix que $A \cap B$ o $A \cap C$ és el conjunt buit o $A \cap B \cap C$ no és el conjunt buit. Decidiu si $\varnothing$, $\mathbb{Q}$ són connexos.

1.26 Si X és un espai mètric, $A \subset X$ i $x \in X$, definim

$$d(x, A) = \text{ínf}\{d(x, y) : y \in A\}.$$

Demostreu que A és tancat si i només si $d(x, A) > 0$ per tot $x \notin A$.

Capítol 2

L'axiomàtica d'espai topològic

En aquest capítol introduirem de manera axiomàtica el concepte d'**espai topològic** com una generalització —i també una simplificació— del concepte d'espai mètric. La idea consisteix en basar-ho tot en el concepte de subconjunt **obert** i exigir com a axiomes que els subconjunts oberts compleixin les tres propietats bàsiques dels oberts d'un espai mètric que hem vist al capítol anterior.

2.1 Els tres axiomes de la topologia

Una **topologia** en un conjunt X és una família $\mathcal{T}$ de subconjunts[1] de X que compleix aquestes tres propietats:[2]

- $\varnothing, X \in \mathcal{T}$.
- La intersecció de qualsevol família finita d'elements de $\mathcal{T}$ és un element de $\mathcal{T}$.[3]
- La unió de qualsevol família d'elements de $\mathcal{T}$ és un element de $\mathcal{T}$.

---

[1] Observem que estem dient que $\mathcal{T} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$.

[2] Per ajudar-nos a recordar aquesta definició podem utilitzar aquesta petita estratègia. Pensem en la família infinita d'intervals $(-1/n, 1/n)$ per tot $n > 0$. La seva *unió* és $(-1, 1)$, que és obert. La seva *intersecció* és $\{0\}$, que no és obert. La condició d'obert es conserva per unions infinites, però no per interseccions infinites.

[3] És clar que n'hi ha prou amb exigir que la intersecció de *dos* elements de $\mathcal{T}$ sigui un element de $\mathcal{T}$.

Els elements del conjunt X els anomenarem **punts**. Els elements del conjunt $\mathcal{T}$ els anomenarem subconjunts **oberts** de X. Un **espai topològic** és un conjunt X amb una topologia $\mathcal{T}$ sobre X.[4] Sobre un mateix conjunt X hi pot haver, en general, moltes topologies diferents. Sovint, en lloc d'espai topològic direm simplement **espai**.

Exemples

- El conjunt buit i el conjunt amb un únic punt $X = \{*\}$ admeten una única topologia.
- Si X és un espai mètric, els subconjunts oberts de X, en el sentit del capítol anterior, compleixen les tres propietats d'una topologia i, per tant, podem mirar-nos X com un espai topològic, de manera natural. Direm que aquesta és la topologia induïda per la mètrica de X. En el cas particular de $\mathbb{R}^n$ amb la distància euclidiana, la topologia que obtenim direm que és la topologia *ordinària* de $\mathbb{R}^n$.
- Sobre qualsevol conjunt X podem considerar la topologia $\mathcal{T} = \{\varnothing, X\}$ que és, clarament, la topologia que té el mínim d'oberts. En direm la topologia *grollera* i direm que X és un *espai groller*.
- En l'extrem oposat, sobre qualsevol conjunt X podem considerar la topologia $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ en la qual *tots* els subconjunt de X són oberts. Se'n diu la topologia *discreta* i és clarament la que té el màxim possible d'oberts. Si X té la topologia discreta, direm que X és un *espai discret*. Aquest exemple és un cas particular de topologia induïda per una distància. En efecte, si sobre X considerem la funció distància
$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$
la topologia que obtenim és precisament la topologia discreta.
- Sigui X un conjunt i diguem que $A \subset X$ és obert si i només si $A = \varnothing$ o $X - A$ és finit. És fàcil veure que obtenim una topologia sobre X. Se'n diu la topologia *cofinita*.
- Sobre $X = \mathbb{R}$ considerem la topologia en què els oberts són $\varnothing, X$ i els intervals $(-\infty, x)$ per qualsevol $x \in \mathbb{R}$. Obtenim una topologia sobre $\mathbb{R}$ que és clarament diferent de la topologia ordinària.

[4] Com és habitual a matemàtiques, parlarem de "l'espai topològic X", però realment hauríem de dir "l'espai topològic $(X, \mathcal{T})$".

Tot espai mètric ens el podem mirar, doncs, com un espai topològic, oblidant-nos de la distància i de les boles i considerant només els subconjunts oberts. Cal tenir present, però, que dos espais mètrics *diferents* poden donar lloc al *mateix* espai topològic. És a dir, suposem que X és un conjunt i que d i d' són dues funcions distància sobre X. Tenim dos espais mètrics X_d i $X_{d'}$ que, si $d \neq d'$, són diferents. Ara bé, si X_d i $X_{d'}$ *tenen els mateixos oberts*, aleshores X_d i $X_{d'}$, com a espais topològics, són iguals. Posem dos exemples:

(a) Un exemple trivial. $X = \{a, b\}$ un conjunt amb dos punts i $d(a, b) = 1$, $d'(a, b) = 2$. Són distàncies diferents però en els dos casos s'obté un espai discret de dos punts.

(b) Un exemple menys trivial. Prenem a $\mathbb{R}^n$ la distància euclidiana ordinària d i la distància $d'(x, y) = \sum |x_i - y_i|$. Es pot demostrar (exercici) que $A \subset \mathbb{R}^n$ és obert per la distància d si i només si és obert per la distància d'. És a dir, les dues distàncies donen la mateixa topologia.

El concepte d'espai topològic és clarament més general que el d'espai mètric. Per exemple, tot espai mètric compleix l'anomenada *propietat de Hausdorff*:

Propietat de Hausdorff. Donats dos punts $x \neq y$, existeixen oberts disjunts U, V tals que $x \in U$, $y \in V$.

En canvi, hi ha espais topològics en els quals aquesta propietat no es compleix. Per exemple, un espai X amb més d'un punt que tingui la topologia grollera no complirà la propietat de Hausdorff. Un espai infinit amb la topologia cofinita tampoc no complirà la propietat de Hausdorff. L'espai $\mathbb{R}$ amb la topologia que hem definit en l'últim exemple de la pàgina 20 tampoc no compleix la propietat de Hausdorff.

Una topologia sobre X és un cert subconjunt de $\mathcal{P}(X)$. Per tant, les possibles topologies sobre X estan ordenades per inclusió. La més petita —la que té menys oberts— és la topologia grollera; la més gran —la que té més oberts— és la topologia discreta. Totes les altres topologies es situen entremig. Si $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$, és a dir si tots els oberts de la topologia $\mathcal{T}$ són també oberts de la topologia $\mathcal{T}'$, direm que $\mathcal{T}'$ és *més fina* que $\mathcal{T}$.

2.2 Tancats

Si X és un espai topològic, podem parlar de subconjunts **tancats**. La definició és aquesta: $T \subset X$ diem que és tancat si i només si $X - T$ és obert.

Exemples

- A la topologia grollera només hi ha dos tancats: $\varnothing$ i X.
- A la topologia discreta tots els subconjunts són tancats.
- A la topologia cofinita els tancats són els subconjunts finits.
- A la topologia sobre $\mathbb{R}$ que té per oberts $\varnothing$, $\mathbb{R}$ i els intervals $(-\infty, x)$ per qualsevol $x \in \mathbb{R}$, els tancats són $\varnothing$, $\mathbb{R}$ i els intervals $[x, \infty)$ per qualsevol $x \in \mathbb{R}$.

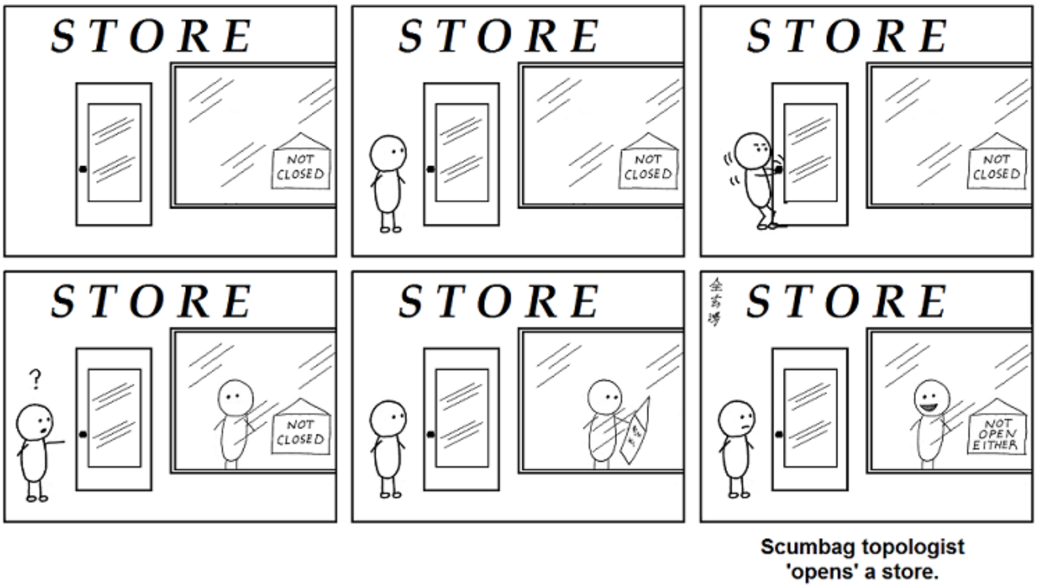


Figura 2.1: abstrusegoose.com (Creative Commons License).

Igual que ja vam insistir en el cas dels espais mètrics, cal tornar a posar èmfasi en que "tancat" no és pas la negació de "obert" (vegeu la figura 2.1). Si X és un espai topològic i $A \subset X$, hi ha quatre possibilitats:

1. A és obert i no és tancat.
2. A és tancat i no és obert.
3. A és tancat i és obert.
4. A no és tancat i no és obert.

És fàcil veure que en un espai mètric un punt sempre és un subespai tancat. En canvi, un punt d'un espai topològic pot ser que no sigui tancat. Per exemple, a la topologia grollera els únics tancats són $\varnothing$ i X.

Les propietats dels conjunts oberts ens donen, per pas al complementari, tres propietats fonamentals dels conjunts tancats. En un espai topològic X es compleix:

- $\varnothing, X$ són tancats.
- La unió de qualsevol família finita de tancats és un tancat.
- La intersecció de qualsevol família de tancats és un tancat.

De fet, si coneixem els tancats d'un espai també coneixem els oberts, i viceversa. El concepte d'espai topològic el podríem haver definit utilitzant els tancats. És a dir, hauríem pogut dir que un espai topològic és un conjunt X amb una família de subconjunts $\mathcal{V}$ anomenats tancats que compleix les tres propietats dels tancats que acabem d'enunciar.

2.3 Bases d'una topologia

Per dotar X d'estructura d'espai topològic ens cal dir qui són tots els seus oberts. Això pot ser pesat de fer i té sentit trobar una manera de determinar una topologia donant només uns determinats *oberts bàsics*.

Definició 2.1. *Si X és un espai topològic i $\mathcal{B}$ és una família d'oberts, direm que $\mathcal{B}$ és una* ***base de la topologia*** *si per tot obert A de X i tot punt $x \in A$ existeix un obert $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset A$.*

Per exemple, en un espai mètric X, la família de les boles

$$\mathcal{B} = \{B(x, \epsilon) \ : \ x \in X, \ \epsilon > 0\}$$

forma una base de la topologia. Una topologia pot tenir moltes bases diferents.

Podem descriure una topologia a X donant no tots els oberts sinó només una base? La proposició següent ens diu com ho hem de fer.

Proposició 2.2. *Sigui X un conjunt i sigui $\mathcal{B}$ una família de subconjunts de X. Suposem que $\mathcal{B}$ compleix aquestes dues propietats:*

(a) La unió de tots els conjunts de $\mathcal{B}$ és X.

(b) Per tot $U, V \in \mathcal{B}$ i tot $x \in U \cap V$, existeix $W \in \mathcal{B}$ tal que $x \in W \subset U \cap V$.

Aleshores, existeix una única topologia $\mathcal{T}$ a X que compleix

1. *$\mathcal{B}$ és una base de la topologia $\mathcal{T}$.*

2. *$\mathcal{T}$ és la topologia menys fina que conté $\mathcal{B}$.*

Demostració. Comencem definint quins són els oberts de la topologia $\mathcal{T}$. Seran les unions d'elements de $\mathcal{B}$. En particular, els elements de $\mathcal{B}$ són oberts i els anomenarem *oberts bàsics*. Amb aquesta definició, és clar que $\varnothing$ i X són oberts i que la unió d'oberts és obert. Per veure que $\mathcal{T}$ és una topologia cal comprovar que la intersecció de dos oberts és un obert.

Observem primer que la intersecció de dos oberts bàsics és un obert. Siguin $U, V \in \mathcal{B}$ oberts bàsics. Per cada $x \in U \cap V$ existeix un obert bàsic $W_x \subset U \cap V$ tal que $x \in W_x$, per la hipòtesi (b). Això ens diu que podem expressar

$$U \cap V = \bigcup_{x \in U \cap V} W_x$$

i, per tant, $U \cap V$ és un obert. Demostrem ara que la intersecció de dos oberts és un obert. Siguin $A = \bigcup U_i$ i $B = \bigcup V_j$ dos oberts expressats com unió d'oberts bàsics. Tenim

$$A \cap B = \bigcup_{i,j} (U_i \cap V_j)$$

que és també un obert perquè ja hem vist que la intersecció de dos oberts bàsics és un obert i que la unió d'oberts és un obert.

Per acabar la demostració ens cal veure que $\mathcal{B}$ és una base d'aquesta topologia, que $\mathcal{T}$ es la topologia menys fina que conté $\mathcal{B}$ i que $\mathcal{T}$ és l'única topologia que compleix aquestes dues propietats. Les tres coses són senzilles de demostrar i les deixem com a exercici. $\square$

Aquesta proposició és força útil a la pràctica perquè, com hem dit, de vegades ens permet donar una topologia sense haver de donar tots els oberts sinó només una base d'oberts.

Exemple

Considerem el conjunt $\mathbb{R}$ i la família de subconjunts

$$\mathcal{B} := \{[a, b) \ : \ a < b, \ a, b \in \mathbb{R}\}.$$

És clar que aquesta família compleix les condicions (a) i (b) de la proposició 2.2 i, per tant, ens defineix una topologia a $\mathbb{R}$ de la qual $\mathcal{B}$ és base. Aquesta topologia es coneix com la *topologia del límit inferior*. Estudiem-la. D'entrada, observem

$$[t, \infty) = \bigcup_{n>0} [t, t+n)$$
$$(-\infty, t) = \bigcup_{n>0} [t-n, t)$$

la qual cosa ens diu que $[t, \infty)$ i $(-\infty, t)$ són oberts. D'altra banda,

$$\mathbb{R} - [a, b) = (-\infty, a) \cup [b, \infty)$$

i, per tant, $[a, b)$ és tancat. És a dir, els intervals $[a, b)$ són oberts i tancats. Però aquesta topologia *no* és la topologia discreta perquè, per exemple, l'interval $[1, 2]$ no és obert. Demostrem-ho. Si $[1, 2]$ fos obert, per la pròpia definició de base d'una topologia, existiria un obert bàsic $[a, b)$ tal que $2 \in [a, b) \subset [1, 2]$ que no és possible. D'altra banda,

$$(1, 2) = \bigcup_{n>0} \left[1 + \frac{1}{n}, 2\right)$$

i $(1, 2)$ és obert. Aleshores,

$$\mathbb{R} - [1, 2] = (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$$

és obert i $[1, 2]$ és tancat.

Resumim en una taula el que hem descobert:

	$(1,2)$	$[1,2)$	$(1,2]$	$[1,2]$
obert	Sí	Sí	No	No
tancat	No	Sí	No	Sí

2.4 Entorns, interior, adherència

Els conceptes d'entorn, interior i adherència ja els coneixem en el cas dels espais mètrics. Com que es poden definir sense necessitat de la distància, només amb el concepte d'obert, també podem introduir-los en espais topològics generals. Suposem que X és un espai topològic.

Definició 2.3. *1. A és un entorn de $x \in X$ si existeix un obert U tal que $x \in U \subset A$.*

2. x és un punt interior de A si A és un entorn de x.

3. L'interior de A és el conjunt de tots els seus punts interiors. Escriurem $\mathrm{Int}(A)$.

L'interior d'un conjunt compleix aquestes propietats elementals:

1. $\mathrm{Int}(A)$ és obert.

   En efecte, per cada $x \in \mathrm{Int}(A)$ existeix un obert U_x tal que $x \in U_x \subset A$. Aleshores, és fàcil veure que cada $U_x \subset \mathrm{Int}(A)$ i, per tant,

   $$\mathrm{Int}(A) = \bigcup_{x \in \mathrm{Int}(A)} U_x$$

   és obert perquè és una unió d'oberts.

2. $\mathrm{Int}(A)$ és la unió de tots els oberts continguts a A.

   Per l'apartat anterior, $\mathrm{Int}(A)$ és un obert, per tant, la unió de tots els oberts continguts a A conté $\mathrm{Int}(A)$. Cal veure la inclusió contrària. Sigui $B \subset A$, B obert. És clar que els punts de B són punts interiors de A. Per tant, $B \subset \mathrm{Int}(A)$.

3. $\mathrm{Int}(A)$ és l'obert més gran contingut a A, és a dir, si $B \subset A$ és obert, aleshores $B \subset \mathrm{Int}(A)$.

   Això és clar pel punt anterior.

4. A és obert si i només si $A = \mathrm{Int}(A)$.

   Això es dedueix dels punts anteriors.

Passant al complementari, tenim conceptes paral·lels que fan referència a tancats:

Definició 2.4. *1. x és un punt adherent a A si tot entorn de x talla A.*

2. L'adherència (o clausura) de A és el conjunt de tots els punts adherents a A. Escriurem $\mathrm{Cl}(A)$.[5]

L'adherència d'un conjunt compleix aquestes propietats elementals:

1. $\mathrm{Cl}(A)$ és tancat.
2. $\mathrm{Cl}(A)$ és la intersecció de tots els tancats que contenen A.
3. $\mathrm{Cl}(A)$ és el tancat més petit que conté A, és a dir, si $A \subset T$ i T és tancat, aleshores $\mathrm{Cl}(A) \subset T$.
4. A és tancat si i només si $A = \mathrm{Cl}(A)$.

Això es pot demostrar directament (recomanable com a pràctica) o es pot deduir de les propietats de l'interior utilitzant aquest resultat:

Proposició 2.5. $\mathrm{Cl}(A) = X - \mathrm{Int}(X - A)$.

Dues definicions més:

Definició 2.6. *$A \subset X$ és dens si* $\mathrm{Cl}(A) = X$.

Definició 2.7. *La frontera d'un conjunt $A \subset X$ es defineix com*

$$\partial A := \mathrm{Cl}(A) \cap \mathrm{Cl}(X - A).$$

Acabem amb alguns exemples:

Exemples

1. A la topologia discreta tots els conjunts són oberts. Per tant, també tots els conjunts són tancats i per tot A tenim $A = \mathrm{Cl}(A) = \mathrm{Int}(A)$.
2. A la topologia grollera només hi ha dos oberts i només hi ha dos tancats: $\varnothing$ i X. Per tant, Si $A \neq \varnothing, X$, aleshores $Cl(A) = X$ i $\mathrm{Int}(A) = \varnothing$.
3. Considerem la topologia del límit inferior sobre $\mathbb{R}$ que hem estudiat a l'exemple de la pàgina 25. És fàcil veure que

[5] És freqüent designar l'adherència de A amb la notació $\overline{A}$. També és freqüent (però no tant) designar l'interior de A com $\mathring{A}$.

	$(1,2)$	$[1,2)$	$(1,2]$	$[1,2]$
Int	$(1,2)$	$[1,2)$	$(1,2)$	$[1,2)$
Cl	$[1,2)$	$[1,2)$	$[1,2]$	$[1,2]$

2.5 Exercicis addicionals

2.1 Un espai topològic es diu que és metritzable si la seva topologia prové d'una estructura d'espai mètric. Demostreu que els espais topològics metritzables compleixen la propietat de Hausdorff de la pagina 21. Demostreu que si un espai groller té més d'un punt, no és metritzable. Doneu exemples de topologies no metritzables sobre $\mathbb{R}$.

2.2 Sigui $X = \{a, b, c, d\}$. Quins dels següents subconjunts de $\mathcal{P}(X)$ defineixen una topologia i quins no.

1. $\varnothing$, X,$\{a\}$,$\{b\}$,$\{a, c\}$, $\{a, b, c\}$, $\{a, b\}$.
2. $\varnothing$,X,$\{a\}$,$\{b\}$, $\{b, d\}$.
3. $\varnothing$, X,$\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$.

2.3 Determineu el nombre de topologies diferents que es poden donar en un conjunt de tres elements.

2.4 Sigui $X = \mathbb{R}$ i $\mathcal{T} = \{A \subseteq \mathbb{R} | A = \varnothing \text{ o } A \text{ és infinit}\}$. Defineix $\mathcal{T}$ una topologia a $\mathbb{R}$?

2.5 Considerem la classe $\mathcal{T} = \{\mathbb{R}^2, \varnothing\} \cup \{G_k;\ k \in \mathbb{R}\}$ de subconjunts del pla $\mathbb{R}^2$, on

$$G_k = \{(x, y) \mid x > y + k\}$$

Demostreu que $\mathcal{T}$ és una topologia a $\mathbb{R}^2$. És $\mathcal{T}$ una topologia a $\mathbb{R}^2$ si substituïm "$k \in \mathbb{R}$" per "$k \in \mathbb{Z}$"? I si substituïm "$k \in \mathbb{R}$" per "$k \in \mathbb{Q}$"?

2.6 Comproveu que la topologia cofinita en un conjunt és una topologia. Sigui X un conjunt. Comproveu que la família $\mathcal{T}$ defineix una topologia:

$$\mathcal{T} = \{\varnothing\} \cup \{A \subset X : X - A \text{ és numerable o finit}\}$$

2.7 Sigui $(X, \mathcal{T})$ un espai topològic. Considereu $Y = X \sqcup \{a\}$ i definiu

$$\mathcal{T}' = \{\varnothing\} \cup \{U \sqcup \{a\} : U \in \mathcal{T}\}.$$

Comproveu que $(Y, \mathcal{T}')$ és un espai topològic. Més en general, trobeu una topologia adient a la unió disjunta de dos espais topològics $X \sqcup Y$.

2.8 Demostreu que la topologia del límit inferior de l'exemple de la pàgina 25 és més fina que la topologia ordinària.

2.9 Siguin A i B subconjunts d'un espai topològic X. Demostreu que:

1. $\mathrm{Int}(\mathrm{Int}(A)) = \mathrm{Int}(A)$, $\mathrm{Int}(A \cap B) = \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B)$, $\mathrm{Int}(A \cup B) \supset \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B)$.
2. $\mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}(A)) = \mathrm{Cl}(A)$, $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$, $\mathrm{Cl}(A \cap B) \subset \mathrm{Cl}(A) \cap \mathrm{Cl}(B)$.
3. $\mathrm{Int}(B - A) = \mathrm{Int}(B) - \mathrm{Cl}(A)$, $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$, $\partial(\partial(\partial A)) = \partial(\partial A) \subset \partial A$.

i comproveu que aquests són els millors resultats possibles.

2.10 Sigui A un subconjunt d'un espai topològic X.

1. Tenen A i $\mathrm{Cl}(A)$ els mateixos interiors?
2. Tenen A i $\mathrm{Int}(A)$ les mateixes adherències?
3. (Problema de Kuratowski) Proveu:

$$\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(A)))) = \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(A))$$
$$\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A)))) = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A))$$

4. Quants conjunts diferents es poden obtenir a partir d'un conjunt A prenent adherències i interiors? (és a dir, $\mathrm{Cl}(A)$, $\mathrm{Int}(\mathrm{Int}(A))$, $\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(A))$, ...)

2.11 Sigui $\mathcal{T}$ la col·lecció de subconjunts de $\mathbb{R}$ formada per $\varnothing$, $\mathbb{R}$ i tots els intervals $(-\infty, x)$, $x \in \mathbb{R}$. Demostreu que $\mathcal{T}$ és una topologia. En aquesta topologia, determineu l'interior de $[0, 1]$, l'adherència de $(0, 1)$ i la frontera de $[0, 1)$. Demostreu que $\mathbb{Z}$ és dens a $\mathbb{R}$.

2.12 Sigui E un subconjunt dens d'un espai topològic X. Demostreu que per a tot obert U de X es compleix que $U \subset \mathrm{Cl}(U \cap E)$.

2.13 Sigui X un espai topològic. Demostreu que $U \subset X$ és obert si i només si per tot $A \subset X$ es compleix que $\mathrm{Cl}(U \cap \mathrm{Cl}(A)) = \mathrm{Cl}(U \cap A)$.

2.14 Sigui X un espai topològic amb una base numerable. Demostreu que aleshores existeix un subconjunt C de X que és dens i numerable. Utilitzeu la topologia del límit inferior de la pàgina 25 per demostrar que el recíproc no és cert.

Capítol 3

Aplicacions contínues

La topologia, essencialment, és l'estudi de la continuïtat i en aquest capítol definirem el concepte d'aplicació contínua entre espais. Per fer-ho, ens basarem en la caracterització de la continuïtat en espais mètrics a través d'oberts (teorema 1.2): Vàrem veure que, en els espais mètrics, les aplicacions contínues són aquelles per a les quals l'antiimatge de qualsevol obert del conjunt d'arribada és un obert del conjunt d'origen. En un espai topològic general, aquesta serà la **definició** d'aplicació contínua.

3.1 Aplicacions obertes, tancades i contínues

Suposem que $f : X \to Y$ és una aplicació entre dos espais topològics. En funció de com es comporti f respecte dels oberts o dels tancats de X i de Y, donarem a f diversos qualificatius.

Definició 3.1. *(a) Direm que f és **oberta** si per tot obert A de X es compleix que $f(A)$ és un obert de Y.*

*(b) Direm que f és **tancada** si per tot tancat A de X es compleix que $f(A)$ és un tancat de Y.*

*(c) Direm que f és **contínua** si per tot obert B de Y es compleix que $f^{-1}(B)$ és un obert de X.*

Aparentment, faltaria una definició (d) corresponent a les aplicacions tals que, per tot tancat B de Y es compleix que $f^{-1}(B)$ és un tancat de X, però les propietats de f^{-1} ens diuen que aquesta condició és equivalent a la propietat (c) anterior.

Exemples i propietats elementals

1. Si X i Y són espais mètrics, el teorema 1.2 ens diu que el concepte de funció contínua que hem introduït aquí és el mateix que ja coneixíem.[1]
2. Si X és un espai discret, tota $f : X \to Y$ és contínua.
3. Si Y és un espai groller, tota $f : X \to Y$ és contínua.
4. L'aplicació identitat $I : X \to X$ és contínua, oberta i tancada.
5. Qualsevol aplicació constant $f : X \to Y$ és contínua.
6. La composició d'aplicacions obertes (tancades, contínues) és també oberta (tancada, contínua).

Cal tenir present que les tres propietats que hem definit —oberta, tancada, contínua— són *independents*, en el sentit que hi ha exemples de funcions que compleixen algunes d'aquestes tres propietats i no compleixen la resta. Com que, donades tres propietats, hi ha vuit possibles situacions, donarem vuit exemples (que l'estudiant haurà de comprovar, com a exercici).

Exemples

(000) La funció $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donada per

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

no és ni oberta ni tancada ni contínua.

(001) Sigui X un conjunt que tingui més d'un punt. Designem per X_d l'espai X amb la topologia discreta i X_g l'espai X amb la topologia grollera. La identitat $I : X_d \to X_g$ no és ni oberta ni tancada, però és contínua.

[1] Això vol dir, en particular, que quan treballem amb espais topològics que provinguin d'espais mètrics, podem aplicar els coneixements sobre continuïtat en espais mètrics que ja teníem prèviament a aquest curs de topologia. Posem un exemple: Ja sabem que la funció $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donada per $f(x) = 3x^3 + 2x - 1$ és contínua, no cal tornar-ho a demostrar.

(010) La funció $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donada per

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

no és ni oberta ni contínua, però és tancada.

(011) La funció $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donada per $f(x) = x^2$ és tancada i contínua, però no és oberta.

(100) Considerem la inclusió $i : (0,1)_g \to \mathbb{R}$ on $(0,1)_g$ indica l'interval obert $(0,1) \subset \mathbb{R}$ amb la topologia grollera. i és oberta, però no és ni tancada ni contínua.

(101) Considerem la funció $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donada per $f(x,y) = x$. f és oberta i contínua, però no és tancada.

(110) Si X té més d'un punt, la identitat $I : X_g \to X_d$ és oberta i tancada, però no és contínua.

(111) Per tot espai X, la identitat $I : X \to X$ és oberta, tancada i contínua.

Esperem que aquests exemples serveixin per retenir a la memòria que, igual com passa amb els subconjunts, aplicació oberta no és la negació d'aplicació tancada.

3.2 Homeomorfismes

Molt sovint, una teoria matemàtica que estudia uns determinats objectes té un concepte de transformació entre aquests objectes i un concepte d'equivalència o isomorfisme.[2] Per exemple, en l'estudi dels espais vectorials, les transformacions són les aplicacions lineals i els isomorfismes són les aplicacions lineals invertibles. En l'estudi dels grups, les transformacions són els homomorfismes de grup i els isomorfismes són els homomorfismes de grup invertibles. En l'estudi dels espais topològics, les transformacions són les aplicacions contínues i els isomorfismes són els que s'anomenen **homeomorfismes**.

Definició 3.2. *Una aplicació $f : X \to Y$ entre espais topològics diem que és un* ***homeomorfisme*** *si compleix aquestes tres propietats:*

[2] Aquesta idea es formalitza a la "teoria de categories".

1. f és contínua.

2. f és bijectiva.

3. $f^{-1}: Y \to X$ és contínua.

La condició (3) es pot substituir per

(3') f és oberta.[3]

Si existeix un homeomorfisme $f : X \to Y$ direm que els espais X i Y són homeomorfs i escriurem $X \cong Y$. En aquest cas, és clar que qualsevol propietat topològica que puguem afirmar de X també serà automàticament vàlida a Y. Els dos espais X i Y seran, essencialment, el mateix espai.[4]

Donem ara una sèrie d'exemples d'homeomorfismes entre espais topològics, és a dir, de parelles d'espais aparentment diferents però que, des del punt de vista de la topologia són, de fet, el mateix espai.

Exemples

- Dos intervals oberts de $\mathbb{R}$ són homeomorfs: $(a, b) \cong (a', b')$. Per veure-ho, n'hi ha prou amb considerar l'aplicació afí $f : (a, b) \to (a', b')$ tal que $f(a) = a'$ i $f(b) = b'$.
- Un interval obert de $\mathbb{R}$ és homeomorf a $\mathbb{R}$: $(a, b) \cong \mathbb{R}$. Segons l'exemple anterior, n'hi ha prou amb trobar un homeomorfisme entre $\mathbb{R}$ i un interval obert concret, per exemple l'interval $(-1, 1)$. Aquestes dues funcions ens el donen:

$$\begin{array}{ll} f : \mathbb{R} \to (-1, 1), & f^{-1} : (-1, 1) \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \dfrac{t}{1 + |t|} & r \mapsto \dfrac{r}{1 - |r|} \end{array}$$

[3]En l'exemple dels espais vectorials, no exigíem res a f^{-1} perquè si f és lineal i bijectiva es pot demostrar fàcilment que f^{-1} també és lineal. El mateix passa amb grups. Aquest fet emmascara l'autèntic concepte d'isomorfisme que és aquest: f és un isomorfisme si és admissible (en cada cas, això tindrà un cert significat concret), bijectiva i f^{-1} també és admissible. En el cas dels espais topològics, una aplicació pot ser contínua i bijectiva sense que la seva inversa sigui contínua (vegeu l'exemple (001) anterior). Per tant, en la definició d'homeomorfisme cal exigir la condició (3).

[4]Ara ja podem donar un sentit matemàtic concret a l'afirmació que *un topòleg és aquella persona que no distingeix entre un dònut i una tassa*. Vol dir que un dònut i una tassa que, com a subconjunts de $\mathbb{R}^3$ són espais topològics, són homeomorfs.

- De manera similar demostraríem que per tot $a, b \in \mathbb{R}$ tenim homeomorfismes
$$(-\infty, a) \cong \mathbb{R} \cong (b, \infty).$$
- L'esfera menys un punt és homeomorfa a l'espai euclidià:
$$S^n - \{*\} \cong \mathbb{R}^n$$
Recordem que l'esfera és el subconjunt de l'espai euclidià format pels punts que estan a distància 1 de l'origen de coordenades:
$$S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ ||x|| = 1\}.$$
En primer lloc, observem que si a i b són dos punts de l'esfera, hi ha un homeomorfisme de l'esfera en ella mateixa que transforma a en b. Per exemple, una simple rotació de l'esfera. Per tant, $S^n - \{a\} \cong S^n - \{b\}$ i l'espai "l'esfera menys un punt" està ben definit perquè no depèn de quin punt hem escollit. Sigui $N = (0, \ldots, 0, 1)$ el pol nord de l'esfera. Demostrarem que $S^n - \{N\} \cong \mathbb{R}^n$ i, per fer-ho, utilitzarem la construcció geomètrica que es coneix com a *projecció estereogràfica* (figura 3.1). Imaginem $\mathbb{R}^n$ com el pla equatorial de S^n. Donat un punt $p \neq N$ de l'esfera, unim p amb N per una recta i considerem el punt q en que aquesta recta talla el pla equatorial. La projecció estereogràfica és l'aplicació $p \mapsto q$ i dóna un homeomorfisme $S^n - \{N\} \cong \mathbb{R}^n$. Per tal de comprovar-ho, utilitzem una mica de geometria analítica elemental per escriure les aplicacions f i f^{-1} i veure que són contínues:
$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \frac{1}{1-z}\,(x, y) \\ f^{-1}(a, b) &= \frac{1}{1+a^2+b^2}\,(2a, 2b, a^2+b^2-1) \end{aligned}$$
- Com demostraríem que una tassa i un dònut són homeomorfs? Igual que a l'exemple anterior, hauríem de donar funcions contínues de la tassa al dònut i del dònut a la tassa que siguin inverses una de l'altra. Això és complicat, però no impossible. De fet, no ens resulta gens difícil imaginar una pel·lícula feta amb imatges generades per ordinador en què una tassa es deforma contínuament fins convertir-se en un dònut. En aquest cas, l'ordinador fa aquesta transformació com a composició d'un gran nombre d'homeomorfismes. A la pràctica, en casos com aquest, admetrem que dos espais són homeomorfs sense necessitat d'haver de mostrar un homeomorfisme explícit.

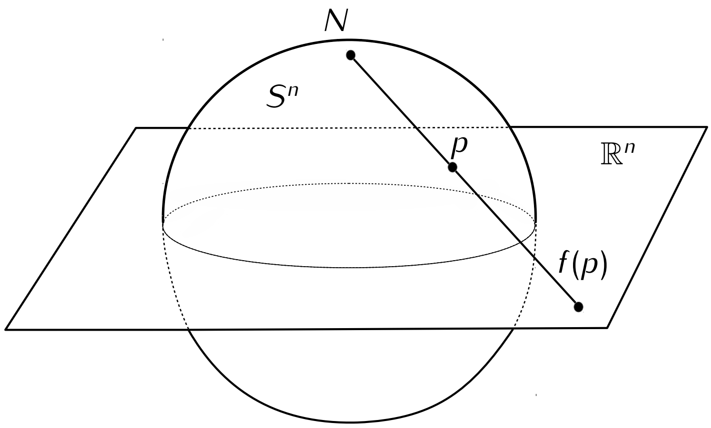


Figura 3.1: Projecció estereogràfica de $S^n - \{N\}$ a $\mathbb{R}^n$.

Quan es tracta de demostrar que una certa aplicació entre espais topològics és un homeomorfisme, sovint la part més difícil de la demostració és comprovar que l'aplicació inversa és contínua. Hi ha un teorema que ens pot ajudar en aquesta situació perquè afirma que, sota certes hipòtesis, una aplicació contínua i bijectiva és automàticament un homeomorfisme:

Teorema 3.3. *Siguin $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$ aplicacions contínues. Suposem que es compleixen aquestes condicions:*

1. *f és exhaustiva i g és bijectiva.*
2. *Z compleix la propietat de Hausdorff.*
3. *X és homeomorf a un subespai tancat de $[0, 1]^n$ per algun $n > 0$.*

Aleshores, g és un homeomorfisme.

La demostració d'aquest resultat és força senzilla, però l'hem de deixar per més endavant (vegeu el teorema 8.4).

3.3 Exercicis addicionals

3.1 Decidiu quins d'aquests subconjunts de $\mathbb{R}^2$ (amb la topologia ordinària) són oberts, quins són tancats, quins són oberts i tancats i quins no són ni oberts ni tancats:

(i)	$\{(x, y) \mid \, |x + y| < 1\}$.	(iv)	$\{(x, y) \mid \, x = y, \, x \neq 0\}$.
(ii)	$\{(x, y) \mid \, |x + y| \leq 1\}$.	(v)	$\{(x, y) \mid \, x^4 + y^4 < 1\}$.
(iii)	$\{(x, y) \mid \, xy \geq 0\}$.	(vi)	$\{(x, y) \mid \, |x| > 1\} \cup \{(x, y) \mid \, y = 0\}$.

3.2 Siguin $(X, \mathcal{T}_1)$ i $(X, \mathcal{T}_2)$ dues topologies sobre un mateix conjunt X. Proveu que l'aplicació identitat $I : (X, \mathcal{T}_2) \to (X, \mathcal{T}_1)$ és contínua si i només si $\mathcal{T}_2$ és més fina que $\mathcal{T}_1$. Si $\mathcal{T}_2$ és estrictament més fina que $\mathcal{T}_1$ proveu que aleshores l'aplicació identitat és una bijecció contínua però no un homeomorfisme.

3.3 Sigui $f : X \to Y$ una aplicació entre espais topològics. Proveu que són equivalents:

1. f és contínua;
2. $f^{-1}(\mathrm{Int}(B)) \subset \mathrm{Int}((f^{-1}(B)))$ per tot $B \subset Y$;
3. $f(\mathrm{Cl}(A)) \subset \mathrm{Cl}(f(A))$ per tot $A \subset X$.

3.4 Sigui $f : X \to Y$ una aplicació contínua i $A \subset X$ un subconjunt dens. Si $f|_A$ és constant i $Y = \mathbb{R}$ aleshores f és també constant. Trobeu un contraexemple si Y no és la recta real. Doneu una condició necessària i suficient sobre Y per tal que l'enunciat anterior sigui cert.

3.5 Sigui $f : X \to Y$ una aplicació entre dos espais topològics i sigui $\mathcal{U}$ una base de la topologia de Y. Suposem que $f^{-1}(U)$ és obert de X per tot obert bàsic $U \in \mathcal{U}$. Demostreu que f és contínua.

3.6 Sigui $f : X \to Y$ una aplicació entre dos espais topològics i sigui $\mathcal{U}$ una base de la topologia de X. Suposem que $f(U)$ és obert de Y per tot obert bàsic $U \in \mathcal{U}$. Demostreu que f és oberta.

3.7 Considereu una aplicació $f : X \to Y$ entre dos espais topològics X i Y. Demostreu que f és oberta si i només si per tot $A \subset X$ es compleix que $f(\mathrm{Int}(A)) \subset \mathrm{Int}(f(A))$.

3.8 Considerem el conjunt $X = \mathbb{R} \cup \{*\}$. Posem una topologia a X de la següent manera. Anomenem tancats de X aquests subconjunts: $\varnothing$ i X; els conjunts $T \cup \{*\}$ on T és un tancat de $\mathbb{R}$; els conjunts $T \subset \mathbb{R}$ que són tancats i acotats. Demostreu que hem definit una topologia a X. Demostreu que X és homeomorf a la circumferència S^1.

3.9 A la pàgina 34 hem donat exemples per a totes les combinacions possibles d'aplicacions que siguin obertes/no obertes, tancades/no tancades, contínues/no contínues. Suposeu que afegim la condició que les aplicacions han de ser bijectives. Quines combinacions són possibles en aquest cas?

3.10 Sigui $X = \mathbb{R}$ amb la *topologia del complement numerable*, és a dir, els oberts de X són els subconjunts $A \subset X$ tals que $X - A$ és X, finit o numerable.

1. Els punts de X són oberts? Són tancats?
2. Considereu $\mathbb{Q} \subset X$. És $\mathbb{Q}$ obert? És $\mathbb{Q}$ tancat?
3. Calculeu l'interior i l'adherència de $\mathbb{Q}$.
4. Sigui $f : X \to X$ l'aplicació $f(x) = x^2$. És contínua? És tancada? És oberta?

5. Sigui $g : X \to X$ l'aplicació

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

   És contínua? És tancada? És oberta?

6. Sigui $\mathcal{B}$ la família dels $A \subset X$ tal que $X - A$ és numerable. Demostreu que $\mathcal{B}$ és una base de la topologia de X.

7. Sigui $\mathcal{B}'$ la família dels $A \subset X$ tal que $X - A$ és finit. Demostreu que $\mathcal{B}'$ no és una base de la topologia de X.

Capítol 4

Subespais

Si X és un espai topològic i $A \subset X$ és un subconjunt de X, aquest subconjunt A adquireix immediatament una topologia "natural".[1] En aquest capítol definirem aquesta topologia induïda sobre un subconjunt, estudiarem les seves propietats i treballarem diversos exemples.

4.1 La topologia de subespai

Sigui X un espai topològic i sigui $A \subset X$ un subconjunt de X.

Definició 4.1. *Direm que $U \subset A$ és un obert de A si existeix un obert W (de X) tal que $U = A \cap W$.*

Amb aquesta definició, els oberts de A formen una topologia sobre A. Direm que aquesta topologia sobre A és la **topologia induïda** per la inclusió $A \subset X$ i direm que A és un **subespai** de X.[2]

Algunes propietats senzilles de la topologia induïda són aquestes:

1. $T \subset A$ és un tancat de A si i només si existeix un tancat K de X tal que $T = A \cap K$.

[1] Observem que, en contrast amb això, un subconjunt arbitrari d'un espai vectorial no és automàticament un espai vectorial i un subconjunt arbitrari d'un grup no és automàticament un grup.

[2] Quan tinguem la situació $A \subset X$ i parlem d'un obert caldrà que quedi clar si estem parlant d'un obert de A o estem parlant d'un obert de X. Són coses diferents.

2. Si A és obert, aleshores $U \subset A$ és obert a A si i només si és obert a X.

3. Si A és tancat, aleshores $T \subset A$ és tancat a A si i només si és tancat a X.

4. L'aplicació d'inclusió $i : A \hookrightarrow X$ és contínua.

5. La topologia induïda sobre A és la menys fina que fa que la inclusió $i : A \hookrightarrow X$ sigui contínua.

6. Si $f : X \to Y$ és una aplicació contínua, aleshores la restricció a A d'aquesta aplicació, $f|_A : A \to X$, també és contínua.

7. Si X és un espai mètric amb una distància d i $A \subset X$, la restricció de d a A fa que A també sigui un espai mètric. Tenim, per tant, dues topologies sobre A. D'una banda, la topologia donada per la distància d. De l'altra, la topologia induïda per la topologia de X. Aquestes dues topologies coincideixen.

8. La mateixa idea de la topologia induïda es pot generalitzar a la situació següent. Sigui X un espai topològic, A un conjunt i $f : A \to X$ una aplicació. Aleshores, podem definir una topologia sobre A que tingui per oberts els conjunts $f^{-1}(U)$ per a cada obert U de X. Si f és una inclusió, recuperem la definició de la topologia induïda.

4.2 Alguns subespais de $\mathbb{R}^n$

Com que tot subconjunt d'un espai topològic és automàticament un espai topològic, l'espai euclidià $\mathbb{R}^n$ ens proporciona una quantitat il·limitada d'exemples d'espais topològics.

- Considerem $A = [0, 1) \subset \mathbb{R}$ amb la topologia ordinària a $\mathbb{R}$ i la topologia induïda a A. Veiem, per exemple, que $[0, 1/2)$ és un obert de A i $[1/2, 1)$ és un tancat de A.

- Considerem $A = (0, 1) \cup (3, 4) \subset \mathbb{R}$. En aquest exemple, tenim que $(0, 1)$ és un obert de A i és també un tancat de A.

- Considerem $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$. És senzill adonar-se que la topologia induïda sobre $\mathbb{Z}$ és la topologia discreta: tots els subconjunts de $\mathbb{Z}$ són oberts i tancats a $\mathbb{Z}$.

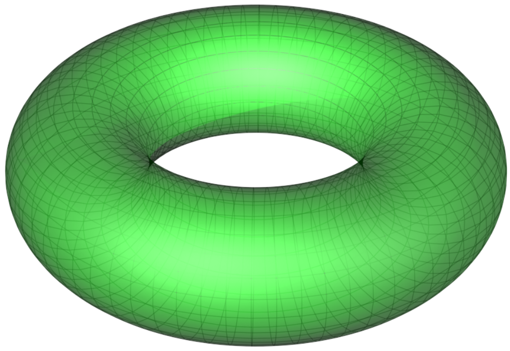


Figura 4.1: Un Tor de revolució a $\mathbb{R}^3$. (Imatge de DemonDeLuxe, Wikimedia Commons.)

- Sigui $A = \{1/n : n = 1, 2, 3, \ldots\} \subset \mathbb{R}$. A té la topologia discreta i és homeomorf a $\mathbb{Z}$.

- Sigui $A = \{0\} \cup \{1/n \ : \ n = 1, 2, 3, \ldots\} \subset \mathbb{R}$. A no té la topologia discreta perquè $\{0\}$ no és obert a A. Tot subconjunt de A que no contingui el zero és obert. Un subconjunt de A que contingui el zero és obert si i només si el seu complement és finit.

- Ja coneixem l'esfera
$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ ||x|| = 1\}.$$
És un tancat de $\mathbb{R}^{n+1}$ i ho podem veure amb aquest argument senzill (i molt útil). Considerem l'aplicació $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ donada per $f(x) = ||x||$, que és una aplicació contínua. Veiem que $\{1\} \subset \mathbb{R}$ és un tancat i que $S^n = f^{-1}(1)$. Per tant, S^n és un tancat.

- El **tor** (figura 4.1) és la superfície de revolució generada a $\mathbb{R}^3$ per una circumferència que gira al voltant d'un eix que està en el seu mateix pla i no la talla. Amb aquesta definició i una mica de geometria analítica, no és difícil donar una descripció en coordenades del tor. Per fer-ho, considerem la circumferència $(x-2)^2+z^2 = 1$ al pla $\langle x, z\rangle$ i fem-la girar al voltant de l'eix z. Obtenim
$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 = 1\}.$$
Un argument com el de l'esfera ens diu que T és un tancat de $\mathbb{R}^3$.

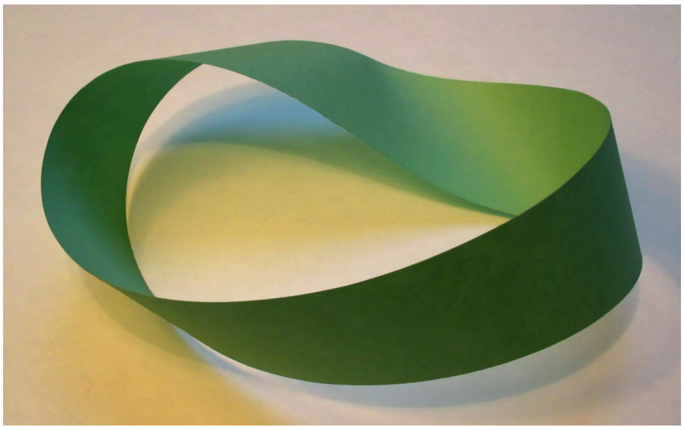


Figura 4.2: Una banda de Moebius. (Imatge de David Benbennick, Wikimedia Commons.)

- La **banda de Moebius** (figura 4.2) es pot pensar com l'objecte de $\mathbb{R}^3$ generat per un segment que gira 360 graus al voltant d'un eix i, al mateix temps, gira 180 graus sobre ell mateix.[3] Amb aquesta descripció és senzill escriure equacions paramètriques per als punts de la banda de Moebius:

$$\begin{aligned} x(u,v) &= \left(1 + v\cos\frac{u}{2}\right)\cos u \\ y(u,v) &= \left(1 + v\cos\frac{u}{2}\right)\sin u \\ z(u,v) &= v\sin\frac{u}{2} \end{aligned}$$

[3] Tots hem construït alguna vegada un model físic de la banda de Moebius agafant un rectangle de paper més llarg que ample (quant més llarg?) i enganxant els dos extrems curts després de donar-los un gir de 180 graus. Aquest model físic és homeomorf al model analític que donem aquí. De tota manera, és interessant observar que el model físic fet amb un paper no és pas isomètric a la superfície parametritzada M que definim. Per veure-ho, cal saber una mica de geometria diferencial de superfícies i adonar-se que la superfície M té curvatura de Gauss diferent de zero —no és *desenvolupable*— mentre que la superfície que fem amb paper sí que té curvatura zero a tots els seus punts. Ara bé, fer una construcció amb un full de paper no és una demostració matemàtica i aquest raonament que acabem de fer ens planteja aquest problema: Existeix una banda de Moebius a $\mathbb{R}^3$ que sigui una superfície diferenciable amb curvatura nul·la? La resposta és sí però, curiosament, aquest problema no va ser reconegut i atacat fins molts anys després que Moebius inventés la seva banda. L'estudiant interessat en el tema —un tema que té moltes ramificacions, principalment a la matemàtica aplicada a la ciència de materials— pot consultar l'article de divulgació *The Dark Side of the Moebius Strip*, de Gideon E. Schwarz a *Amer. Math. Monthly* 97, No. 10 (1990), p. 890–897.

Aleshores, podem definir la banda de Moebius com

$$M := F([0, 2\pi] \times [-1/2, 1/2])$$

on F és la funció contínua $(u, v) \mapsto (x, y, z)$. Per veure que M és un tancat de $\mathbb{R}^3$ necessitaríem saber que F és tancada. Més endavant (capítol 8) aprendrem un mètode molt útil per demostrar aquest tipus de coses. De moment, ho deixem en suspens.

De vegades s'utilitza també la banda de Moebius *sense vora* M' que és $F([0, 2\pi] \times (-1/2, 1/2))$. Observem que M i M' difereixen en una circumferència.

4.3 El conjunt de Cantor

El conjunt de Cantor és un subconjunt de la recta $\mathbb{R}$ que té un interès especial i tot estudiant de topologia ha de conèixer. En aquesta secció donarem la seva definició i veurem algunes de les seves propietats. Hi ha una manera molt senzilla de definir aquest conjunt:

Definició 4.2. *El conjunt de Cantor C és el subespai de $[0, 1]$ format per tots els nombres reals que es poden escriure en base 3 sense utilitzar la xifra 1.*

En aquesta definició hem de tenir en compte que admetem infinites xifres 2 seguides. Per exemple, $1/3$ pertany al conjunt de Cantor perquè, encara que, en base 3, $1/3$ s'escriu 0.1, també es pot escriure $0.022222\cdots$.

Si intentem fer-nos una idea de C, observarem que l'interval $(1/3, 2/3)$ no conté cap punt de C perquè tots els punts d'aquest interval s'escriuen $0.1\cdots$. Si ara ens fixem en l'interval $[0, 1/3]$, veurem també que el terç central d'aquest interval, que és l'interval $(1/9, 2/9)$, tampoc no té cap punt de C. Successivament, si dividim en tres parts iguals cada interval que vagi apareixent, l'interval central no té cap punt de C. Això ens suggereix una definició inductiva del conjunt C que podem fer d'aquesta manera:

1. Posem $I_0 = [0, 1]$, $X_1 = (1/3, 2/3)$ i $I_1 = I_0 - X_1$.
2. Definim inductivament

$$X_{n+1} = X_n \cup \left[\bigcup_{k=0}^{3^n-1} \left(\frac{1+3k}{3^{n+1}}, \frac{2+3k}{3^{n+1}} \right) \right], \quad n > 1$$

i $I_{n+1} = I_0 - X_{n+1}$.

3. Definim $C = \bigcap_{n\geq 0} I_n$.

Enunciem ara algunes propietats d'aquest espai topològic C:

1. $C \neq \varnothing$. En particular, $1 \in C$.
2. C és un tancat de $\mathbb{R}$ perquè cada I_n en la definició inductiva és un tancat i C és la intersecció dels I_n.
3. C no conté cap interval perquè a tot interval sempre podem trobar algun nombre que no es pot escriure sense la xifra 1.
4. $\mathrm{Int}(C) = \varnothing$ perquè si $x \in C$ fos un punt interior, hi hauria d'haver un interval $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset C$.
5. C no té la topologia discreta. Per veure-ho n'hi ha prou amb adonar-se que els punts de C no són oberts de C. Si $x \in C$ fos obert a C, això voldria dir que existeix $\epsilon > 0$ tal que $(x - \epsilon, x + \epsilon) \cap C = \{x\}$. Però això és impossible, perquè tot interval té infinits nombres reals que es poden escriure sense la xifra 1.
6. C no és numerable. Podem utilitzar exactament la mateixa demostració que vam utilitzar per veure que $\mathbb{R}$ no és numerable (pàgina 10).

Tornarem a parlar d'aquest espai més endavant.

4.4 Continuïtat de funcions definides a trossos

Acabarem aquest capítol amb un teorema que és força útil. Suposem que tenim una aplicació $f : X \to Y$ entre espais topològics que volem saber si és contínua o no ho és. Suposem que $X = A \cup B$ i que sabem que f és contínua quan la restringim a A i que també ho és quan la restringim a B. Podem afirmar que f és contínua? En general, no, de cap manera, (doneu un contraexemple) però sí que ho podem afirmar en alguns casos importants.

Teorema 4.3. *Siguin $X = A \cup B$ i Y espais topològics i sigui $f : X \to Y$ una aplicació. Suposem que $f|_A$ i $f|_B$ són contínues. Aleshores:*

(a) Si A i B són oberts, f és contínua.

(b) Si A i B són tancats, f és contínua.

Demostració. Demostrarem només l'afirmació (a) perquè l'altra es demostra igual. Sigui $U \subset Y$ un obert. Cal demostrar que $f^{-1}(U)$ és un obert. Observem això:

$$\begin{aligned} f^{-1}(U) &= \big(f^{-1}(U) \cap A\big) \cup \big(f^{-1}(U) \cap B\big) \\ &= f|_A^{-1}(U) \cup f|_B^{-1}(U) \end{aligned}$$

Com que $f|_A$ és contínua, tenim que $f|_A^{-1}(U)$ és un obert de A. Però A és obert a X i, per tant, $f|_A^{-1}(U)$ és un obert de X. Pel mateix motiu, $f|_B^{-1}(U)$ és un obert de X i deduïm que $f^{-1}(U)$ és un obert de X. □

4.5 Exercicis addicionals

4.1 Sigui $\mathcal{A}$ un recobriment de X, és a dir, $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i\in I}$ amb $A_i \subset X$ tal que $X = \bigcup_{i\in I} A_i$. Demostreu que en cadascun dels casos següents una aplicació $f : X \to Y$ és contínua si i només si ho és restringida a cada $A_i \in \mathcal{A}$:

1. $\mathcal{A}$ és un recobriment per oberts (i.e. els A_i són oberts).
2. $\mathcal{A}$ és un recobriment finit per tancats (i.e. els A_i són tancats i I és finit).
3. $\mathcal{A}$ és un recobriment per tancats localment finit (tot punt de X té un entorn que talla un nombre finit de A_i).

4.2 Considerem $\mathbb{R}$ amb la topologia ordinària i $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ amb la topologia de subespai. (a) Descriviu quins són exactament els oberts de $\mathbb{Z}$ amb aquesta topologia. (b) Doneu condicions necessàries i suficients per tal que una aplicació $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ sigui contínua. (c) Demostreu que l'aplicació $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ donada per la "part entera" no és contínua.

4.3 Sigui X un espai topològic i $A \subset X$. Considerem la inclusió $i : A \hookrightarrow X$. Considerem a A la topologia induïda $\mathcal{T}$. Demostreu: (a) $f : Y \to A$ és contínua si i només si $if : Y \to X$ és contínua. (b) $\mathcal{T}$ és l'única topologia a A que té la propietat de l'apartat anterior.

4.4 Sigui $A = \{0, 1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots\}$ amb la topologia induïda per la inclusió $A \subset \mathbb{R}$. Demostreu que tot subespai de A és obert o tancat.

4.5 Sigui $F : [0, 2\pi] \times [-1/2, 1/2] \to \mathbb{R}^3$ l'aplicació contínua que hem utilitzat per definir la banda de Moebius. Demostreu que F és injectiva.

Capítol 5

La topologia producte

En aquest capítol volem definir i estudiar una topologia apropiada sobre el producte de dos espais topològics. Més endavant, generalitzarem aquesta construcció al producte de qualsevol família arbitrària d'espais topològics, i acabarem amb un exemple topològic important: la corba de Peano.

5.1 Topologia a $X \times Y$

Suposem que X i Y són dos espais topològics i considerem el conjunt producte $X \times Y$. Quina topologia podríem considerar sobre $X \times Y$ que sigui "apropiada", és a dir, que tingui bones propietats?

La primera cosa que hem de tenir en compte és que, si prenem com a oberts de $X \times Y$ els productes $U \times V$ on U és un obert de X i V és un obert de Y, aquests oberts, en general, **no** compleixen els axiomes de topologia.[1] Ho hem de fer millor. El que sí que és cert és que la família

$$\mathcal{B} := \{U \times V \ : \ U \text{ obert de } X,\ V \text{ obert de } Y\}$$

compleix les condicions de **base d'una topologia** que apareixen a la proposició 2.2.

Definició 5.1. *La* ***topologia producte*** *a $X \times Y$ és la topologia que té per base els conjunts de la forma $U \times V$ on U és un obert de X i V és un obert de Y.*

[1] Quins axiomes fallen? Doneu un contraexemple.

D'aquests oberts $U \times V$ en direm **oberts bàsics** de $X \times Y$. Recordem que, segons la proposició 2.2, els oberts de $X \times Y$ seran les unions (arbitràries) d'oberts bàsics. Dit d'una altra manera,

- $A \subset X \times Y$ és obert si i només si per tot $a \in A$ existeixen un obert U_a de X i un obert V_a de Y tals que $a \in U_a \times V_a \subset A$.

Per aquest mateix mètode, podem definir una topologia sobre qualsevol producte finit d'espais topològics $X_1 \times \cdots \times X_n$.

Estudiem ara les propietats més bàsiques de la topologia producte.

1. Les projeccions

$$\pi_X : X \times Y \to X, \quad \pi_Y : X \times Y \to Y$$

són contínues.

2. Una aplicació $f : Z \to X \times Y$ és contínua si i només si els seus components són continus, és a dir, si i només si $\pi_X f$ i $\pi_Y f$ són aplicacions contínues.

Demostrem-ho. En un sentit és molt senzill perquè la composició d'aplicacions contínues és contínua. En l'altre sentit, suposem que $\pi_X f$ i $\pi_Y f$ són contínues i demostrem que f també ho és. En primer lloc, sobre un obert bàsic de $X \times Y$ tenim que

$$f^{-1}(U \times V) = (\pi_X f)^{-1}(U) \cap (\pi_Y f)^{-1}(V)$$

és un obert de Z. Si ara $A \subset X \times Y$ és un obert arbitrari i $z \in f^{-1}(A)$ amb $f(z) = a \in A$, existirà un obert bàsic $U \times V$ tal que $a \in U \times V \subset A$. Aleshores,

$$z \in f^{-1}(a) \subset f^{-1}(U \times V) \subset f^{-1}(A).$$

Com que ja hem vist que $f^{-1}(U \times V)$ és un obert de Z, deduïm que, efectivament, $f^{-1}(A)$ és un obert de Z.

3. Les projeccions π_X, π_Y són obertes.[2]

[2] Això és un regal inesperat. La topologia producte s'ha definit amb la intenció que les projeccions siguin contínues (propietat 1) i amb la intenció que una aplicació a valor en un producte sigui contínua si i només si ho són els seus components (propietat 2) però ens trobem que aquesta topologia també fa que les projeccions siguin obertes.

Demostrem-ho. Sigui A un obert de $X \times Y$ i mirem de veure que, per exemple, $\pi_X(A)$ és un obert de X. Apliquem la condició d'obert que hem vist fa un moment. Sigui $x = \pi_X(a) \in \pi_X(A)$ amb $a = (x, y) \in A$. Com que A és obert, hi haurà un obert bàsic $U \times V$ tal que $a \in U \times V \subset A$. Aleshores, $x \in U = \pi_X(U \times V) \subset \pi_X(A)$ i $\pi_X(A)$ és obert de X.

En general, les projeccions no són tancades. Ho hem vist a l'exemple (101) de l'apartat 3.1.

4. Si $f_i : X_i \to Y_i$, $i = 1, 2$, són aplicacions contínues, aleshores $f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$ també és contínua.

5. Si $X_1 \cong X_2$ i $Y_1 \cong Y_2$, aleshores $X_1 \times Y_1 \cong X_2 \times Y_2$.

6. $X \times \{*\} \cong X$.

7. $X \times Y \cong Y \times X$.

8. La topologia producte i la topologia induïda en un subespai són compatibles en el sentit següent. Suposem que $A \subset X$ i $B \subset Y$ i considerem $A \times B \subset X \times Y$. En principi, sobre $A \times B$ podem considerar dues topologies

   (a) La topologia induïda sobre $A \times B$ com a subespai de l'espai $X \times Y$.

   (b) La topologia producte $A \times B$, considerant que A i B són espais topològics.

   Aquestes dues topologies coincideixen. La demostració queda com a exercici.

9. En principi, tenim dues topologies sobre $\mathbb{R}^n$:

   (a) La topologia d'espai mètric donada per la distància euclidiana.

   (b) La topologia producte $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$.

   Aquestes dues topologies coincideixen. La demostració —que també es deixa com a exercici— es basa en la següent observació geomètrica. Considerem una bola $B := B(x, \epsilon) \subset \mathbb{R}^n$ i un punt $y = (y_1, \ldots, y_n) \in B$. Aleshores, existeix $\delta > 0$ tal que

$$(y_1 - \delta, y_1 + \delta) \times \cdots \times (y_n - \delta, y_n + \delta) \subset B.$$

D'altra banda, si tenim un producte d'intervals oberts

$$P := (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n) \subset \mathbb{R}^n$$

i un punt $z \in P$, existeix $\epsilon > 0$ tal que $B(z, \epsilon) \subset P$.

Acabem aquesta secció amb dos exemples interessants.

Exemples

- El tor com a producte de circumferències. Hi ha un homeomorfisme $T \cong S^1 \times S^1$. Això es pot demostrar directament donant un homeomorfisme $f : T \to S^1 \times S^1$ i el seu invers $g : S^1 \times S^1 \to T$, d'aquesta manera:

$$f(x, y, z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \sqrt{x^2 + y^2} - 2, z \right)$$
$$g(a, b, c, d) = (a(c + 2), b(c + 2), d)$$

  Tanmateix, cal comprovar que aquestes aplicacions estan ben definides, són contínues i són inversa una de l'altra.

- El cilindre. Hi ha un homeomorfisme $\mathbb{R}^n - \{0\} \cong S^{n-1} \times \mathbb{R}$. Considerem aquestes aplicacions

$$\mathbb{R}^n - \{0\} \longrightarrow S^{n-1} \times (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$$
$$x \mapsto \left(\frac{x}{||x||}, ||x|| \right)$$
$$(a, t) \mapsto ta$$

  Són contínues i inverses una de l'altra. D'altra banda, ja sabem que $(0, \infty) \cong \mathbb{R}$.

5.2 El producte infinit

Suposem ara que tenim una família infinita d'espais topològics $\{X_i\}_{i \in I}$ i volem definir una topologia apropiada sobre el seu producte cartesià $\prod_i X_i$. Ho podem fer igual que ho hem fet en el cas finit, és a dir, prenent la topologia que té per base els oberts bàsics

$$\prod_{i \in I} U_i$$

on cada U_i és un obert de X_i. Això ens dóna una topologia sobre el producte $\prod_i X_i$.

Aquesta topologia **no** té les propietats que voldríem, com es posa de manifest en aquest exemple interessant. Considerem l'aplicació diagonal

$$f : \mathbb{R} \to \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{R}$$

donada per $f(x) = \{x\}_{i\in I}$, on prenem la topologia ordinària a $\mathbb{R}$ i la topologia producte que acabem de definir a $\prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{R}$. Lamentablement, aquesta aplicació no és contínua. Per veure-ho, considerem

$$U := \prod_{i=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}\right) \subset \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{R}$$

que, en la topologia que estem considerant, és un obert bàsic. És evident que $f^{-1}(U) = \{0\}$, que no és un obert de $\mathbb{R}$.

Per tant, la topologia en el producte infinit que pren com a oberts bàsics els productes d'oberts no té bones propietats i pràcticament no s'utilitza mai.

Definició 5.2. *La **topologia producte** a $\prod X_i$ és la topologia que té com a base d'oberts els productes*

$$\prod_{i\in I} U_i$$

tals que

1. *Cada U_i és un obert de X_i.*

2. *$U_i = X_i$ excepte per a un nombre finit de $i \in I$.*

Es comprova fàcilment que aquests oberts compleixen les propietats que exigeix la proposició 2.2. Observem que, si el conjunt d'índex I és finit, recuperem la mateixa definició de topologia producte que teníem abans. Aquesta topologia producte sí que compleix les propietats 1–8 que hem vist a l'apartat 5.1.

Posem ara un exemple molt significatiu de producte infinit: el mateix conjunt de Cantor C que hem estudiat a l'apartat 4.3.

Teorema 5.3. *El conjunt de Cantor C és homeomorf al producte infinit*

$$\prod_{i=1}^{\infty}\{a,b\}$$

on $\{a,b\}$ és un espai discret amb dos punts.

Demostració. Recordem que hem definit C com els punts de $[0,1]$ que es poden escriure en base 3 sense utilitzar la xifra 1. Si pensem l'espai $\{a,b\}$ com $\{0,2\} \subset \mathbb{R}$, podem considerar l'aplicació

$$\varphi : \prod_{i=1}^{\infty}\{0,2\} \to C$$

que envia cada successió de xifres 0, 2 al nombre real que té aquestes xifres en la seva expressió en base 3. És a dir:

$$\varphi(\{a_i\}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}.$$

Es tracta d'una funció bijectiva. Per veure que és un homeomorfisme cal demostrar que és contínua i que la inversa és també contínua. Sigui $c = \sum_1^\infty a_i 3^{-i} \in C$ i considerem una bola $B(c,\epsilon) \cap C$. Escollim un valor de N tal que $\sum_{i=N+1}^{\infty} 3^{-i} < \epsilon/2$. Aleshores, es compleix que

$$\varphi(\{a_1\} \times \cdots \times \{a_N\} \times \{0,2\} \times \{0,2\} \times \cdots) \subset B(c,\epsilon) \cap C$$

i això demostra la continuïtat de φ.

Demostrem ara que φ és oberta. N'hi ha prou amb veure que la imatge d'un obert bàsic del producte $\prod\{0,2\}$ és un obert de C. Considerem un obert bàsic

$$U = \{a_1\} \times \cdots \times \{a_N\} \times \{0,2\} \times \{0,2\} \times \cdots$$

i sigui $x = \sum_1^\infty a_i 3^{-i} \in \varphi(U)$. Es compleix que

$$B(x, 3^{-N}) \cap C \subset \varphi(U).$$

En efecte, sigui

$$s_N := \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \cdots + \frac{a_N}{3^N}.$$

Aleshores, es compleix $x \in [s_N, s_N + 3^{-N}]$ i, per tant, si $y \in B(x, 3^{-N})$, tenim

$$y \in \left(s_n - \frac{1}{3^N}, s_N + \frac{2}{3^N}\right).$$

Si ara recordem la construcció de C a partir de l'interval $[0, 1]$, dividint-lo en tres parts, eliminant el terç central i repetint el procés, veurem que

$$\left(s_N - \frac{1}{3^N}, s_N + \frac{2}{3^N}\right) \cap C \subset [s_N, s_N + 3^{-N}].$$

Per tant, si $y \in B(x, 3^{-M}) \cap C$, tindrem que $y = \sum_1^\infty b_i 3^{-i}$ amb $b_i = a_i$ per $i = 1, \ldots, N$ i, en conclusió, $y \in \varphi(U)$. □

Aquest teorema ens dóna també un exemple d'un producte d'espais discrets que no és discret. De fet, un producte infinit d'espais discrets gairebé mai no és discret.

5.3 La corba de Peano

La corba de Peano és un objecte matemàtic que sembla que vulneri la nostra intuïció de l'espai i de la dimensió. Es tracta, simplement, d'una corba contínua que passa per tots els punts del quadrat unitat $[0, 1] \times [0, 1]$.[3] La construcció d'aquesta corba utilitza el conjunt de Cantor C i la seva expressió com a producte infinit. Construirem

$$\phi : [0, 1] \to [0, 1] \times [0, 1]$$

en diversos passos.

[3] Aquesta corba va ser descoberta el 1890 pel matemàtic, lògic i filòsof italià Giuseppe Peano. Cantor havia demostrat que els punts de $\mathbb{R}^n$ es podien posar en correspondència bijectiva amb els punts de $\mathbb{R}$. Dit d'una altra manera, hi ha tants punt en un interval $[0, 1]$ com en un quadrat $[0, 1] \times [0, 1]$, la qual cosa ens diu que la idea de dimensió no té sentit a la teoria de conjunts. Té sentit a la topologia? Podria passar que dos espais euclidians de dimensions diferents $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$ fossin el mateix espai? Una resposta afirmativa —el descobriment d'un homeomorfisme $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m$— destruiria completament la idea geomètrica de dimensió. Peano, amb la seva corba, va donar un primer pas en la construcció d'aquest homeomorfisme: va trobar una aplicació $[0, 1] \to [0, 1] \times [0, 1]$ que és contínua i exhaustiva. Però no és injectiva. De fet, en aquest mateix curs demostrarem que no hi pot haver cap aplicació contínua i bijectiva $[0, 1] \to [0, 1] \times [0, 1]$. Sobre el problema general de si $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m$ diguem que la resposta és negativa, però la demostració s'escapa del contingut d'aquest curs.

- Si observem que cada punt de $[0,1]$ es pot escriure en base 2 com una suma infinita $x = \sum b_i\, 2^{-i}$ amb $b_i = 0, 1$, tenim que l'aplicació

$$\psi : \prod_{i=1}^{\infty} \{0,2\} \to [0,1]$$

  donada per $\psi(\{a_i\}) = \sum (a_i/2)\, 2^{-i}$ es exhaustiva. A més, un raonament similar al del teorema 5.3 ens diu que ψ és contínua.

- Si X és un producte infinit numerable,[4] aleshores $X \cong X \times X$. En efecte, si $X = \prod X_i$, podem considerar l'aplicació bijectiva $X \to X \times X$ donada per

$$(\{a_i\}), \{b_i\}) \mapsto \{a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots\}$$

  i comprovar que és contínua i oberta. En particular, tenim un homeomorfisme

$$\rho : \prod_{i=1}^{\infty} \{0,2\} \to \prod_{i=1}^{\infty} \{0,2\} \times \prod_{i=1}^{\infty} \{0,2\}.$$

- Reunint la informació dels apartats anteriors, tenim una aplicació $h : C \to [0,1] \times [0,1]$ definida com aquesta composició d'aplicacions

$$C \xrightarrow{\varphi^{-1}} \prod_{i=1}^{\infty} \{0,2\} \xrightarrow{\rho} \prod_{i=1}^{\infty} \{0,2\} \times \prod_{i=1}^{\infty} \{0,2\} \xrightarrow{\psi \times \psi} [0,1] \times [0,1]$$

  que és contínua i exhaustiva.

- Ara ja gairebé hem acabat la construcció. Només cal estendre l'aplicació $h : C \to [0,1] \times [0,1]$ a tot l'interval $[0,1]$. Això és senzill i es fa així. Volem definir h sobre tots els punts de $[0,1]$, sabent que ja està definida sobre els punts del conjunt de Cantor C.

  Si $[a,b]$ és algun dels intervals centrals que hem anat eliminant per construir C de manera inductiva, tindrem que $a, b \in C$ i $(a,b) \cap C = \varnothing$. Aleshores, definim h sobre $[a,b]$ com el segment de recta de $[0,1] \times [0,1]$ que uneix $h(a)$ i $h(b)$. No és difícil veure que, amb aquesta definició, tenim una aplicació contínua definida sobre tot $[0,1]$ que és exhaustiva sobre $[0,1] \times [0,1]$. És la corba de Peano que buscàvem.

[4] Encara que no sigui numerable, això també és cert.

5.4 Exercicis addicionals

5.1 Sigui D^2 el disc unitat de $\mathbb{R}^2$ i sigui $f\colon S^1 \to S^1$ un homeomorfisme. Demostreu que existeix una extensió de f al disc, $\hat{f} : D^2 \to D^2$, que és un homeomorfisme.

5.2 Demostreu que l'anell tancat $\{x \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 2\}$ és homeomorf al cilindre

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1,\ 0 \le x_3 \le 1\}.$$

5.3 Diem que un subespai $X \subset Y$ és un *retracte* de Y si existeix una aplicació contínua $r\colon Y \to X$ tal que $r \circ \iota = \mathrm{id}$, on ι denota la inclusió de X en Y. Demostreu que:

1. $[0, 1]$ és un retracte de $\mathbb{R}$.
2. D^n és un retracte de $\mathbb{R}^n$.
3. S^{n-1} és un retracte de $\mathbb{R}^n - \{0\}$.

5.4 Siguin $A \subset X$ i $B \subset Y$ subespais d'espais topològics X i Y.

1. Quina relació hi ha entre $\mathrm{Cl}(A \times B)$ i $\mathrm{Cl}(A) \times \mathrm{Cl}(B)$?
2. I entre $\mathrm{Int}(A \times B)$ i $\mathrm{Int}(A) \times \mathrm{Int}(B)$?

5.5 Demostreu que $\prod_i A_i$ és dens a $\prod_i X_i \neq \varnothing$ si i només si ho és cada $A_i \subset X_i$.

5.6 Siguin X, Y i Z espais topològics no buits tals que $X \times Y \cong X \times Z$. Implica això que $Y \cong Z$?

5.7 Trobeu condicions necessàries i suficients perquè un producte d'espais discrets sigui discret.

5.8 Demostreu la "fórmula de Leibnitz": $\partial(A \times B) = (\partial A \times \mathrm{Cl}(B)) \cup (\mathrm{Cl}(A) \times \partial B)$.

Capítol 6

La topologia quocient

Si tenim una aplicació injectiva $A \rightarrowtail X$ i X és un espai topològic, al capítol 4 vam estudiar la topologia *induïda* sobre A i vam veure que era la topologia natural que havíem de posar a A. En aquest capítol estudiarem la situació simètrica quan tenim una aplicació exhaustiva $p : X \twoheadrightarrow Y$ d'un espai topològic X en un conjunt Y i trobarem una topologia apropiada per a Y, a partir de la topologia de X i de l'aplicació p.[1]

6.1 Definició de la topologia quocient

Suposem que X és un espai topològic, Y és un conjunt i $p : X \twoheadrightarrow Y$ és una aplicació exhaustiva.

Definició 6.1. *La* ***topologia quocient*** *a Y és la topologia que té per oberts els subconjunts $U \subset Y$ que tenen la propietat que $p^{-1}(U)$ és un obert de X. Si considerem Y com espai topològic amb aquesta topologia, direm que "Y té la topologia quocient per p".*

La comprovació que es tracta efectivament d'una topologia és molt sen-

[1] Ara sí que ja entrem plenament en la topologia, perquè el que estudiarem en aquest capítol no té paral·lelisme en la teoria d'espais mètrics. De fet, la topologia quocient és una de les eines que justifiquen que abandonem els espais mètrics i ens situem en el marc més general dels espais topològics.

zilla.[2] Fem un llistat de les seves propietats més bàsiques:[3]

1. $p : X \to Y$ és contínua.
2. La topologia quocient és la topologia més fina sobre Y que fa que $p : X \to Y$ sigui contínua.
3. $T \subset Y$ és tancat si i només si $p^{-1}(T)$ és tancat de X.
4. Sigui $f : Y \to Z$ una aplicació. Es compleix que f és contínua si i només si fp és contínua.

   Aquesta propietat és essencial i s'utilitza sovint. La demostració és senzilla.

Hi ha un cas particular[4] d'això que és especialment important. Suposem que tenim un espai topològic X i una relació d'equivalència $\sim$ sobre X. Considerem el conjunt quocient i l'aplicació de projecció $\pi : X \to X/\sim$. Aleshores, podem prendre a $X/\sim$ la topologia quocient per π.[5]

Un altre exemple important de topologia quocient és el que es coneix com **col·lapsar un subespai a un punt**. Sigui X un espai topològic i sigui $A \subset X$ un subespai diferent del buit. Definim un conjunt

$$X/A := (X - A) \sqcup \{*\}$$

[2] No cal que p sigui exhaustiva, però només ens interessarà aquest cas i, per tant, sempre que parlem de topologia quocient entendrem que va donada per una aplicació exhaustiva.

[3] Hi ha dues propietats importants de la topologia quocient que no són certes, en el cas general. Es tracta de la compatibilitat entre la topologia quocient, la topologia producte i la topologia induïda. Pel que fa al producte, podem trobar aplicacions exhaustives $f : X \to Y$ i $f' : X' \to Y'$ tals que Y i Y' tenen la topologia quocient per f i f', respectivament, i en canvi $Y \times Y'$ no té la topologia quocient per $f \times f'$. Com a anècdota curiosa, podem fer esment del fet que a la primera edició del llibre de topologia de Bourbaki hi havia un teorema que afirmava el contrari. Sobre aquest assumpte, vegeu R. Brown, *"Topology and Groupoids"* p. 111. Pel que fa a la compatibilitat entre topologia quocient i subespais, és fàcil trobar exemples d'aplicacions $f : X \to Y$ i subespais $A \subset Y$ de manera que Y tingui la topologia quocient per f i en canvi A no tingui la topologia quocient per $f : f^{-1}(A) \to A$. Als exercicis addicionals d'aquest capítol hi ha un exemple d'aquests.

[4] De fet, no és un cas particular perquè tota aplicació exhaustiva es equivalent al pas al quocient per una relació d'equivalència. En efecte, suposem que $f : X \to Y$ sigui una aplicació exhaustiva. Definim a X la relació d'equivalència $a \sim b$ si i només si $f(a) = f(b)$. Sigui $\pi : X \to X/\sim$ el pas al quocient. Existeix una única aplicació bijectiva $h : X/\sim \to Y$ tal que $f = \pi h$.

[5] Ja hem dit a 1.2 que podem "fer quocient" per qualsevol relació, encara que no sigui d'equivalència.

on $\{*\}$ és un punt. Tenim una aplicació exhaustiva $p : X \to X/A$ que envia tots els punts de A al punt $*$ i és la identitat sobre els punts de $X - A$. Posem a X/A la topologia quocient per p. Obtenim un espai topològic X/A que direm que hem obtingut a partir de X col·lapsant A a un punt. Si ens hi fixem, això és exactament el que hem fet. Hem deixat els punts de fora de A "tal com estaven" i hem substituït tots els punts de A per un únic punt $*$.[6]

6.2 Exemples d'espais amb la topologia quocient

Proposició 6.2. *L'espai quocient* $[0, 1]/\{0 \sim 1\}$ *és homeomorf a la circumferència* S^1*.*

Demostració. Estem prenent l'interval unitat de $\mathbb{R}$, amb la topologia ordinària, i fem quocient per la relació $0 \sim 1$ que identifica els dos extrems de l'interval. Intuïtivament, el que fem és unir els dos extrems d'un interval i sembla lògic que el resultat sigui una circumferència.[7] Per demostrar-ho hem de construir un homeomorfisme $f : [0, 1]/\{0 \sim 1\} \to S^1$.

Considerem l'aplicació contínua ben coneguda $h : [0, 1] \to S^1$ donada per $h(t) = \exp(2\pi it)$. Aquesta aplicació té la propietat que $h(0) = h(1)$ i, per tant, factoritza a través d'una aplicació $f : [0, 1]/\{0 \sim 1\} \to S^1$ que, per una propietat fonamental de la topologia quocient que hem vist abans, també és contínua. El càlcul diferencial ens diu que l'aplicació f és bijectiva. Que f és un homeomorfisme resulta d'aplicar el teorema 3.3. □

La llibertat que tenim per identificar punts d'un espai topològic i obtenir un altre espai topològic és total. D'aquesta manera podem tenir noves maneres de construir espais coneguts —com ara mateix, que hem construït la circumferència identificant els dos extrems d'un segment— i també podem construir nous espais abstractes.

Per exemple, prenem un quadrat $I^2 := [0, 1] \times [0, 1]$ i identifiquem punts de la vora, segons ens vingui de gust. Obtindrem nous espais que poden

---

[6] De tota manera, les coses poden ser molt més complicades del que aquesta idea intuïtiva suggereix, perquè, encara que la topologia de X sigui "senzilla", la topologia de X/A pot ser molt salvatge. Com a exercici, podem pensar en l'espai topològic $[0, 1]/(0, 1)$.

[7] Aquí tenim un exemple del que dèiem que no ens hem d'obsessionar amb les relacions d'equivalència. La relació $0 \sim 1$ no és d'equivalència. Fer quocient per aquesta relació significa fer quocient per la relació d'equivalència més petita que la conté. Aquesta relació és la que es defineix així: $x \approx y$ si i nomes si $x = y$ o $x, y \in \{0, 1\}$.

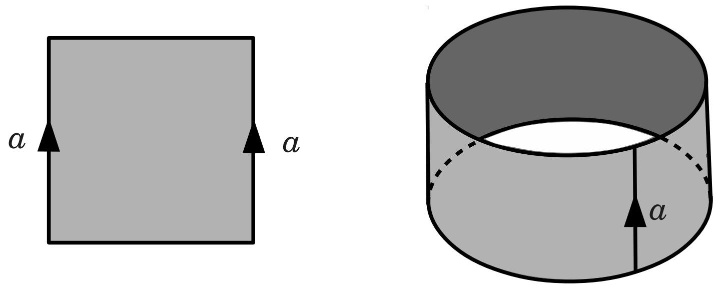


Figura 6.1: El cilindre com a quocient del quadrat I^2.

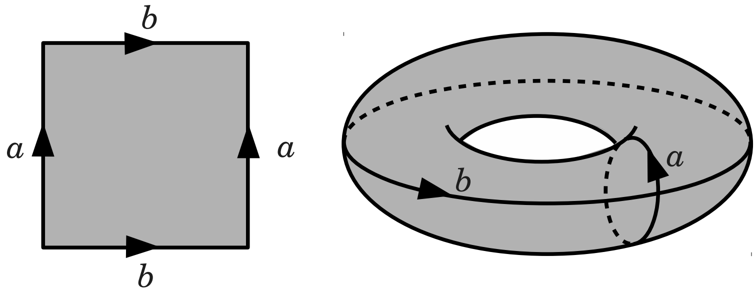


Figura 6.2: El tor com a quocient del quadrat I^2.

ser interessants i el que potser és més important és que els obtenim amb molt poc esforç.

- $(0, t) \sim (1, t)$ per tot $t \in [0, 1]$. Un raonament com el de la proposició anterior ens demostra que $I^2/\sim\ \cong S^1 \times [0, 1]$. És un cilindre (figura 6.1).

- $(0, t) \sim (1, t)$ i $(s, 0) \sim (s, 1)$ per tot $s, t \in [0, 1]$. Aquí estem identificant dos costats oposats del quadrat I^2 —obtenim un cilindre— i a continuació identifiquem els altres dos costats. Intuïtivament, obtenim un tor i el mètode anterior ens demostraria que efectivament $I^2/\sim\ \cong T^2$ (figura 6.2).

- $(0, t) \sim (1, 1-t)$ per tot $t \in [0, 1]$. Aquí estem identificant dos costats oposats d'un quadrat, però identifiquem el punt d'ordenada t amb el punt d'ordenada $1 - t$. El resultat és una banda de Moebius (figura 6.3).

- Considerem ara el disc $D^2 := \{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ ||x|| \leq 1\}$ i fem quocient per la relació $(x, y) \sim (x, -y)$ per tot $(x, y) \in S^1$. El conjunt quocient

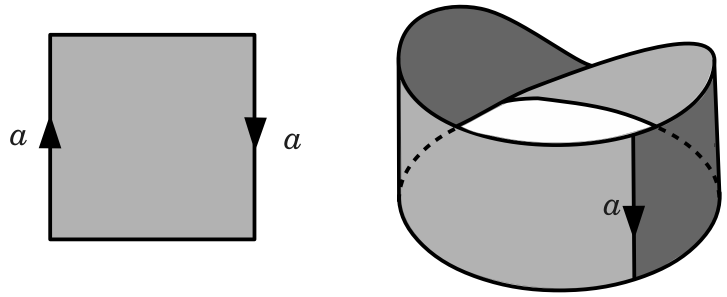


Figura 6.3: La banda de Moebius com a quocient del quadrat I^2.

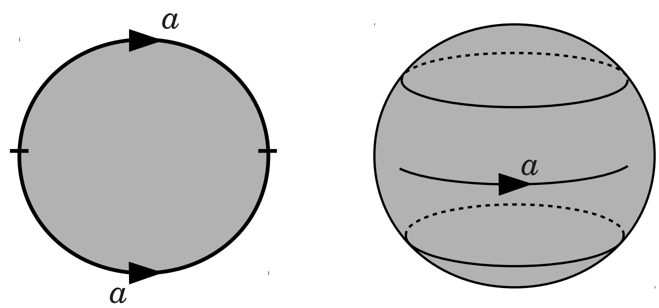


Figura 6.4: L'esfera com a quocient del disc D^2.

és l'esfera S^2 (figura 6.4).

- Tornem a considerar el quadrat I^2 i fem les identificacions $(0, t) \sim (1, t)$ i $(s, 0) \sim (1 - s, 1)$ per tot $s, t \in [0, 1]$ (figura 6.5). Si intentem construir físicament l'espai quocient com hem fet abans, no ho aconseguirem perquè resulta que hi ha un teorema[8] que diu que l'espai quocient no és homeomorf a cap subespai de $\mathbb{R}^3$. D'aquest espai quocient s'en diu l'**ampolla de Klein**[9] i s'acostuma a representar pel dibuix de la figura 6.6, que ens mostra un cert objecte de $\mathbb{R}^3$ que, segons hem dit, no pot ser homeomorf a l'ampolla de Klein, però sí que, en certa manera, la representa.[10]

[8]En aquest curs no tenim prou eines topològiques per demostrar aquest teorema.

[9]Hi ha una teoria —descrita per Francis Bonahon— que afirma que el fet d'anomenar "ampolla" a aquest espai procedeix d'una mala traducció de l'alemany o d'un simple joc de paraules entre la superfície (*Fläche*) de Klein i l'ampolla (*Flasche*) de Klein.

[10]Per entendre el significat d'aquest dibuix, imaginem que un dibuix com ∞ vulgui

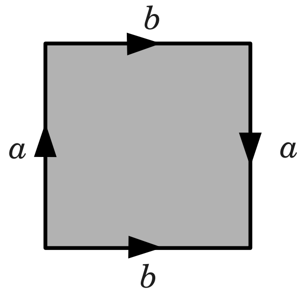


Figura 6.5: L'ampolla de Klein com a quocient del quadrat I^2.

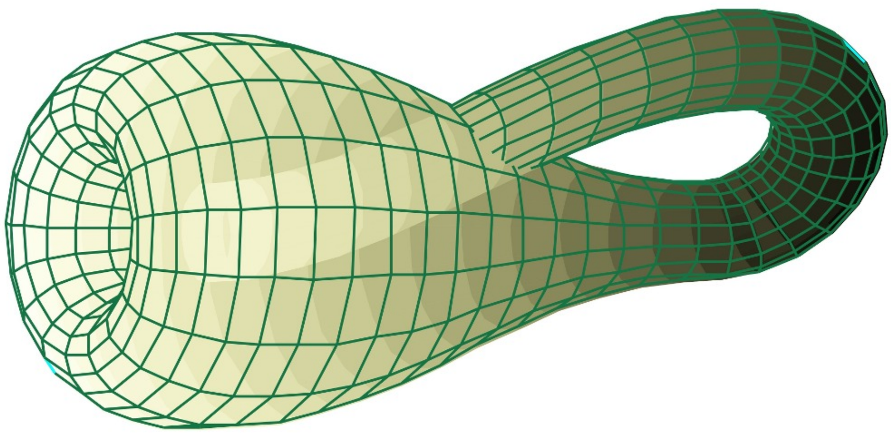


Figura 6.6: La representació clàssica de l'ampolla de Klein a $\mathbb{R}^3$. (Dibuix de Tttrung, Wikimedia Commons.)

- Tornem a considerar el disc D^2 i fem ara quocient per les identificacions $(x, y) \sim (-x, -y)$ per tot $(x, y) \in S^1$. És a dir, cada punt de la vora del disc està identificat amb el seu diametralment oposat. Novament, si intentem fer aquestes identificacions amb un objecte físic de $\mathbb{R}^3$ no ho aconseguirem i el motiu és que hi ha un teorema[8] que diu que aquest espai topològic quocient no és homeomorf a cap subespai de $\mathbb{R}^3$. Però és un espai topològic ben definit i, de fet, és un objecte matemàtic molt important que es coneix com el **pla projectiu** $\mathbb{R}P^2$. L'estudiarem a l'apartat següent.

6.3 L'espai projectiu

La perspectiva —que ja existia al segle V aC i es va començar a estudiar matemàticament al segle XIV— va acostumar els geòmetres a la idea de *punt ideal* o *punt a l'infinit* en el qual conflueixen les rectes paral·leles que van en una certa direcció. Aquests punts no existeixen a la geometria d'Euclides —que avui diríem que és la geometria de l'espai *afí*— però la visió d'un observador els introdueix automàticament. A partir del segle XVII, els geòmetres —començant amb Girard Desargues— s'adonen gradualment que si afegim a l'espai aquests punts de l'infinit on es tallen les rectes paral·leles, la geometria esdevé més senzilla. Molts teoremes admeten formulacions més generals, algunes demostracions poden ser més simples i —el que és més important— apareixen nous teoremes i fins i tot nous principis —com el *principi de dualitat*— que són propis d'aquesta nova manera d'entendre la geometria. A partir del segle XIX s'arriba al convenciment que l'àmbit natural de la geometria és l'**espai projectiu** entès com la completació de l'espai afí amb l'addició dels punts de l'infinit.

---

representar una circumferència $\bigcirc$. ∞ no és una circumferència perquè el punt central on es tallen els dos "braços" és un únic punt, mentre que a la circumferència haurien de ser dos punts diferents. Podem imaginar-nos que ∞ realment "representa" una circumferència si pensem que el punt central són realment dos punts, és a dir, si imaginem que un ésser unidimensional que caminés cap el punt central per un dels braços mai no xocaria amb un altre ésser que caminés també cap el punt central anant per l'altre braç. Si apliquem aquest mateix mètode al dibuix clàssic de l'ampolla de Klein, podem tenir una bona idea mental d'aquest espai. Observem que, en el dibuix, la superfície es talla a ella mateixa en una circumferència. Hem de pensar, doncs, que els punts de la circumferència són "dobles" i que la superfície, realment, no es talla a ella mateixa. En qualsevol cas, la definició de l'ampolla de Klein com l'espai topològic que s'obté com a quocient de I^2 per unes certes identificacions, és totalment precisa i formal i no requereix cap mena d'intuïció geomètrica.

La manera d'afegir d'un manera absolutament rigorosa aquests punts de l'infinit —que no són pas *punts especials* sinó punts com qualsevol altre punt de la geometria— és relativament senzilla si utilitzem la idea bàsica de la perspectiva. Per simplificar, imaginem que volem fer geometria plana. Considerem, a l'espai $\mathbb{R}^3$, el pla $z = -1$ i pensem en aquest pla $\mathcal{P}$ com el pla de la geometria plana d'Euclides. $\mathcal{P}$ és un espai afí de dimensió dos on hi ha rectes paral·leles i rectes que no són paral·leles. Imaginem ara un observador $\mathcal{O}$ situat al punt $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ i imaginem que aquest observador mira la geometria afí del pla $\mathcal{P}$. Cada punt del pla $\mathcal{P}$ es correspon unívocament amb una recta *no horitzontal* que passa per $\mathcal{O}$. D'altra banda, si considerem dues rectes paral·leles del pla $\mathcal{P}$, l'observador $\mathcal{O}$ veurà que aquestes dues rectes *es tallen* en un punt que ell veu perfectament clar quan dirigeix la mirada en una *direcció horitzontal*.

És a dir, hi ha una correspondència bijectiva entre els punts del pla afí $\mathcal{P}$ i les rectes de $\mathbb{R}^3$ que passen per l'origen i no són horitzontals. Les rectes horitzontals, en canvi, es corresponen a *punts a l'infinit* del pla afí, punts on es tallen les rectes paral·leles. Això ens porta a aquesta definició:

Definició 6.3. *L'espai projectiu de dimensió n és el conjunt de rectes de $\mathbb{R}^{n+1}$ que passen per l'origen de coordenades. El denotarem per $\mathbb{R}P^n$.*

Però estem fent un curs de topologia i no podem estudiar ni que sigui de manera superficial la **geometria projectiva**, que és la geometria de l'espai projectiu.[11]

En aquest curs, l'espai projectiu ens interessa com a exemple d'espai topològic. Quina topologia hem de posar a $\mathbb{R}P^n$? Si pensem $\mathbb{R}P^n$ com el conjunt de rectes per l'origen de $\mathbb{R}^{n+1}$, no es veu cap topologia evident i natural. Fem aquesta observació: Per determinar una recta per l'origen de $\mathbb{R}^{n+1}$ n'hi ha prou amb donar un vector unitari de $\mathbb{R}^{n+1}$. Ara bé, si $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ és un vector unitari, v i $-v$ determinen la mateixa recta. Per tant, els punts de l'espai projectiu $\mathbb{R}P^n$ es poden posar en correspondència bijectiva amb els vectors unitaris de $\mathbb{R}^{n+1}$, sempre que identifiquem cada vector unitari v amb el seu oposat $-v$. Com que els vectors unitaris de $\mathbb{R}^{n+1}$ són els punts de l'esfera unitat S^n, això ens duu a una nova definició de l'espai projectiu:

$$\mathbb{R}P^n = S^n/\{-v \sim v\}.$$

[11] És molt probable —i molt lamentable— que l'estudiant que arriba a aquest curs de topologia no hagi estudiat mai la geometria projectiva. L'única cosa que puc dir és que, en la meva opinió, aquesta mancança en els plans d'estudi actuals és un greu error.

Aquesta nova definició té l'avantatge que dota $\mathbb{R}P^n$ d'una topologia natural. Prenem la topologia ordinària a l'esfera S^n i prenem la topologia quocient per les identificacions $-v \sim v$. Tenim que $\mathbb{R}P^n$ és un espai topològic.

Estudiem $\mathbb{R}P^1$ —la recta projectiva— i $\mathbb{R}P^2$ —el pla projectiu.

$$\mathbb{R}P^1 = S^1/\{-v \sim v\}.$$

Pensem S^1 com els nombres complexos de norma 1 i considerem l'aplicació $f : S^1 \to S^1$ donada per $f(z) = z^2$. És una aplicació contínua que factoritza per

$$\widetilde{f} : \mathbb{R}P^1 \to S^1.$$

Aquesta aplicació $\widetilde{f}$ és contínua i bijectiva. Pel teorema 3.3, és un homeomorfisme. Per tant, la recta projectiva és el mateix que la circumferència.[12]

Proposició 6.4. *Hi ha un homeomorfisme entre el pla projectiu $\mathbb{R}P^2$ i l'espai quocient $D^2/\sim$ on D^2 és el disc unitat de $\mathbb{R}^2$ i $\sim$ és la relació*

$$(x, y) \sim (-x, -y) \text{ per tot } (x, y) \in S^1 \subset D^2.$$

Demostració. L'aplicació

$$\begin{aligned} f : D^2 &\longrightarrow S^2 \\ (x, y) &\mapsto (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}) \end{aligned}$$

(que consisteix en posar el disc D^2 com l'hemisferi superior de l'esfera S^2) factoritza així:

$$\begin{array}{ccc} D^2 & \xrightarrow{f} & S^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^2/\sim & \xrightarrow{\widetilde{f}} & S^2/\{-v \sim v\} \end{array}$$

L'aplicació $\widetilde{f}$ és contínua i bijectiva i, novament, el teoreme 3.3 ens demostra que és un homeomorfisme, si abans demostrem que el pla projectiu compleix la propietat de Hausdorff, cosa que és senzilla de fer. □

Ja hem dit que aquest espai no existeix com a subespai de $\mathbb{R}^3$ però ens podem preguntar si existeix una representació de $\mathbb{R}P^3$ a $\mathbb{R}^3$ similar a la que teníem per a l'ampolla de Klein, és a dir, una representació de

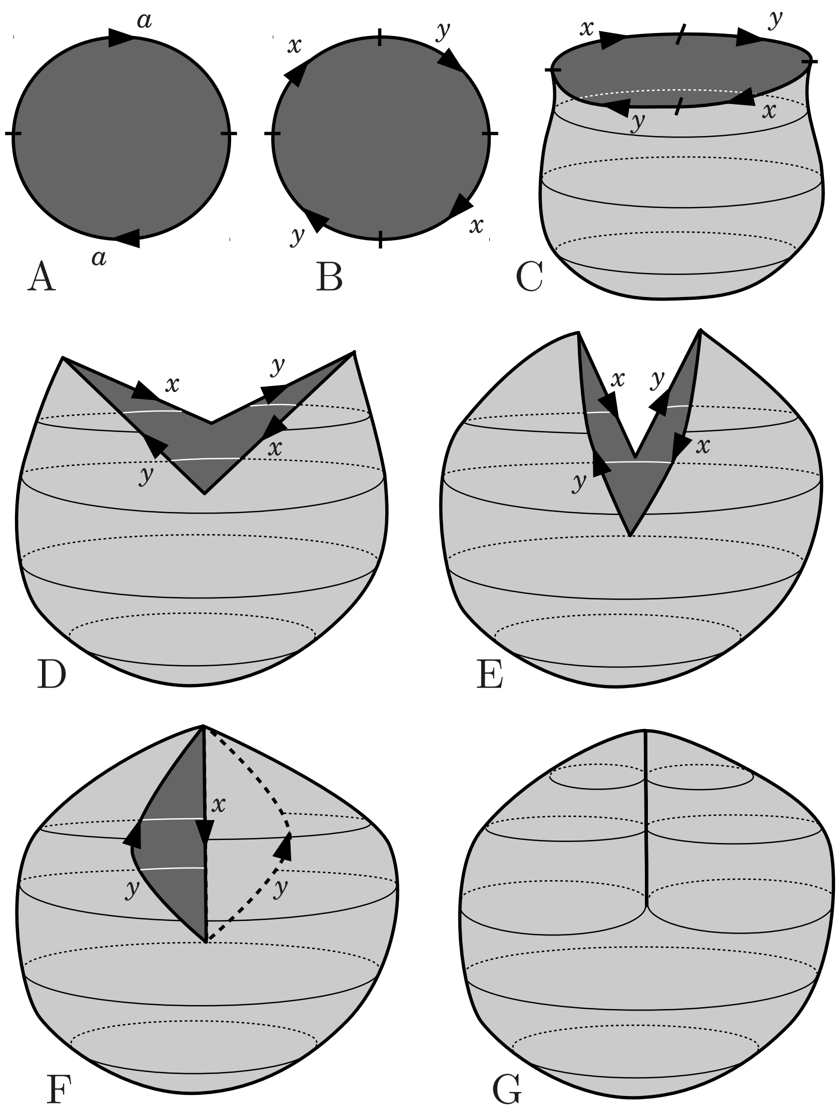


Figura 6.7: Una representació del pla projectiu a $\mathbb{R}^3$. Si al disc de la figura A identifiquem els dos costats indicats amb la lletra a, seguint el sentit de les fletxes, obtenim un pla projectiu. És clar que això és el mateix que B i que C. Els dibuixos D i E ens mostren que és possible identificar els dos segments indicats x, obtenint la figura F. Ara caldria identificar els dos segments marcats y, però això no és possible fer-ho a $\mathbb{R}^3$ perquè caldria que la figura es travessés a ella mateixa. L'objecte de G no és, doncs, el pla projectiu $\mathbb{R}P^2$, però n'és una "representació" en la qual hauríem d'entendre que cada punt del "séc" central representa dos punts de $\mathbb{R}P^2$.

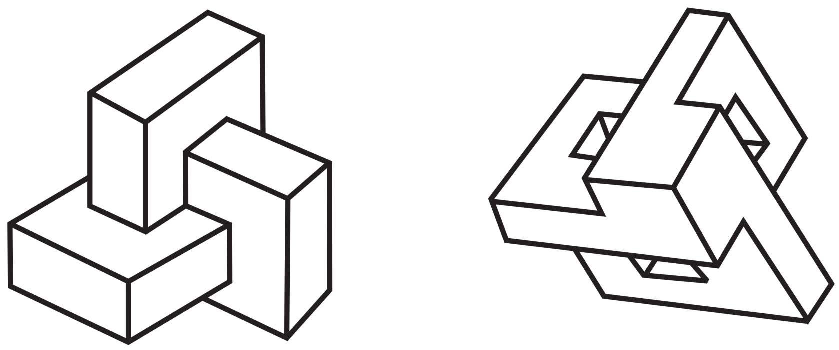


Figura 6.8: La superfície de Boy, des de dos punts de vista diferents.

$\mathbb{R}P^3$ com a una superfície de $\mathbb{R}^3$ amb autointerseccions. La manera més senzilla d'aconseguir això és fer el procés que està indicat a la figura 6.7

El resultat no és gaire bonic —no es pot comparar amb la representació de l'ampolla de Klein. Una representació més bonica és la que es coneix com a *superfície de Steiner*.[13] Hi ha un tercer exemple molt més bonic però també més difícil de visualitzar que es coneix com a a *superfície de Boy*.[13] Respecte als dos exemples anteriors, la superfície de Boy té la particularitat que no té cap "punt singular".[14] De fet, no és difícil construir una superfície de Boy amb cartró, tal com a la figura 6.8.

Per acabar aquesta secció, relacionarem el pla projectiu amb la banda de Moebius. Demostrarem que si fem un forat a un pla projectiu obtenim una banda de Moebius o, equivalentment, que si adjuntem a una banda de Moebius un disc al llarg de tota la vora de la banda de Moebius, obtenim un pla projectiu. Diguem això mateix amb més precisió. Una banda de Moebius és un quocient del quadrat després d'identificar dos dels quatre costats:

$$M = ([0,1] \times [0,1]) \big/ \{(0,t) \sim (1, 1-t) \text{ per tot } t \in [0,1]\}.$$

Els altres dos costats queden "lliures" i formen el que anomenarem la "vora" de M que denotarem ∂M.[15] Observem que aquesta vora és homeomorfa

[12] Intuïtivament, la recta projectiva ha de ser la recta afí $\mathbb{R}$ a la que hem afegit un únic punt de l'infinit. És d'esperar, doncs, que el resultat sigui la circumferència.

[13] A Internet hi ha una gran quantitat d'imatges i vídeos d'aquesta superfície.

[14] Per entendre què volem dir quan parlem de "punt singular" cal tenir alguns coneixements de geometria diferencial que no podem discutir aquí.

[15] No hem de confondre això amb el concepte topològic de "frontera" que hem definit a 2.7.

a una circumferència

$$\begin{aligned}\partial M &= ([0,1]\times\{0\}\sqcup[0,1]\times\{1\})\,/\{(0,0)\sim(1,1),\,(0,1)\sim(1,0)\}\\ &\cong S^1.\end{aligned}$$

Ara ja podem enunciar amb precisió el que estem dient.

Proposició 6.5. *$(M\sqcup D^2)/{\sim}\cong\mathbb{R}P^2$, on $\sim$ és la identificació natural entre $S^1\subset D^2$ i $S^1\cong\partial M$.*

Demostració. L'homeomorfisme entre els dos espais es pot visualitzar amb la sèrie de dibuixos de la figura 6.9.[16] □

6.4 Acció d'un grup sobre un espai

El concepte de grup

El concepte de **grup** és potser el més important i fonamental de les matemàtiques —i de la ciència. L'estudiant ja coneix què és un grup. Recordem-ho.

Definició 6.6. *Un grup és un conjunt*[17] *G amb una operació*[18] *$x*y$ que compleix aquestes tres propietats:*

1. *Per tot $x,y,z\in G$, es compleix que $(x*y)*z=x*(y*z)$ (propietat associativa).*

2. *Existeix un element $e\in G$ tal que $x*e=e*x=x$ per tot $x\in G$ (existència d'element neutre).*

[16] Alguns estudiants, acostumats a demostracions algebraiques o analítiques, poden pensar que aquests dibuixos no donen cap autèntica demostració formal de la proposició. Aquests escrúpols no estan justificats i en els capítols posteriors utilitzarem més d'una vegada dibuixos com aquests per demostrar alguns teoremes. Es tracta de demostrar que hi ha un homeomorfisme entre dos espais. Cada pas de la successió de dibuixos és la representació gràfica d'un determinat homeomorfisme que, si calgués, podria donar-se explícitament per una funció contínua. L'homeomorfisme que busquem és la composició de tots aquests homeomorfismes successius.

[17] Com tantes altres vegades, si volguéssim ser totalment precisos, hauríem de dir que "un grup és una parella $(G,*)$".

[18] Una *operació* a G no és altra cosa que una aplicació $G\times G\to G$.

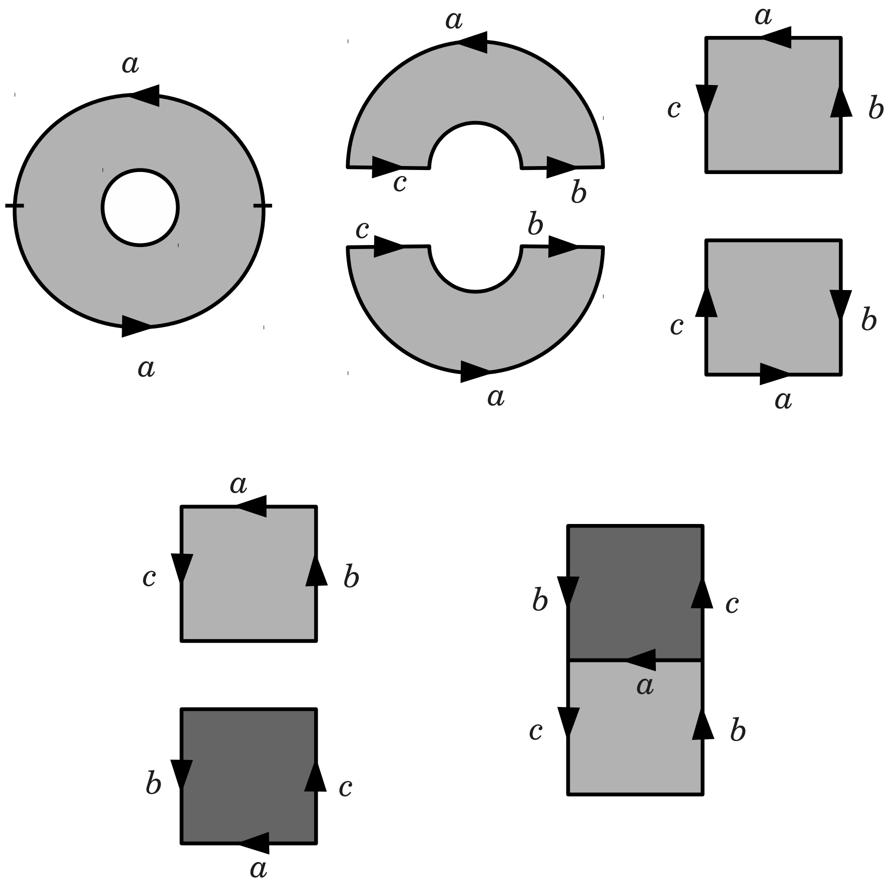


Figura 6.9: Si fem un forat a un pla projectiu obtenim una banda de Moebius.

3. *Per tot $x \in G$ existeix $y \in G$ tal que $x * y = y * x = e$ (existència d'inversos).*

Si G compleix també la propietat commutativa ($x * y = y * x$ per tot $x, y \in G$) es diu que G és un grup abelià.

A la pràctica, gairebé mai no s'utilitza el símbol $*$ per denotar l'operació d'un grup, sinó que s'utilitza una d'aquestes dues notacions:

- **Notació multiplicativa.** L'operació de x i y es denota xy, l'element neutre es denota 1 i l'invers de x es denota x^{-1}.

- **Notació additiva.** L'operació de x i y es denota $x + y$, l'element neutre es denota 0 i l'invers de x es denota $-x$. Aquesta és la notació preferida en el cas de grups abelians.

Aquesta definició de grup té l'inconvenient que no dóna cap idea sobre per què els grups són objectes importants ni per què s'han escollit precisament aquestes tres propietats i no d'altres. Per entendre el paper absolutament central de l'estructura de grup a la ciència en general, necessitem aquesta segona definició de grup, més conceptual.

> **Meta-definició de grup.** *Un grup és el conjunt de simetries d'un objecte X.*

N'hi hem dit "meta-definició" perquè hi apareixen dues paraules —objecte i simetria— a les que no hem donat un significat precís. La paraula objecte pot fer referència a moltes coses, dintre i fora de la matemàtica. Per exemple, X pot ser un conjunt, un espai vectorial, un espai topològic, l'esfera, l'icosàedre, un polinomi, el cub de Rubik, un graf, etc., etc. En cada cas, aquest objecte X té un concepte propi de simetria. Per exemple, les simetries d'un conjunt X serien les aplicacions bijectives de X en X; les simetries d'un espai vectorial serien els seus automorfismes; les simetries d'un espai topològic serien els seus auto-homeomorfismes; les simetries de l'icosàedre són ...les simetries de l'icosàedre, és a dir, les isometries de l'espai que deixen fix l'icosàedre; les simetries d'un polinomi serien les permutacions de les seves arrels que són al "grup de Galois" del polinomi; les simetries del cub de Rubik serien les configuracions del cub que es poden assolir fent moviments acceptables, etc.

Vist així, ens adonem que "hi ha grups arreu" i que realment el concepte de grup és un dels més fonamentals que hi pugui haver.[19]

Recordem alguns exemples de grups que l'estudiant ja coneix:

- El grup cíclic infinit $\mathbb{Z}$.

[19] Caldria veure que aquesta meta-defició de grup és "equivalent" a la definició formal. Depèn de què entenguem per "equivalent". El que sí que és cert és que les simetries d'un objecte es poden "composar" entre elles i formen, doncs, un grup abstracte. Recíprocament, si G és un grup, hi ha un objecte X del qual G siguin exactament les simetries? La resposta és sí i una demostració la va donar Johannes de Groot el 1959. Recordem que un *graf* és un conjunt de vèrtex i un conjunt d'arestes entre parelles d'aquests vèrtex. A partir d'un grup abstracte arbitrari G, de Groot va construir un graf $X(G)$ —la idea d'aquest graf procedeix d'uns treballs d'Arthur Cayley del 1878— tal que els seus automorfismes —les seves "simetries"— son exactament els elements del grup G.

- Els grups cíclics finits $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

- El grup simètric Σ_n és el grup de les aplicacions bijectives d'un conjunt de n elements en ell mateix (el grup de les permutacions de n elements). Aquest grup conté el grup alternat A_n que està format per les permutacions "parelles". Σ_n té $n!$ elements i A_n en té $n!/2$.

- El grup dièdric D_{2n} és el grup de les simetries d'un polígon regular de n costats. Està format, doncs, per les rotacions d'angle un múltiple de $2\pi/n$ i les reflexions respecte dels n eixos de simetria. D_{2n} té $2n$ elements.

- El grup de simetria de l'icosàedre és un grup finit amb 120 elements.

- La multiplicació dels nombres complexos ens dóna una multiplicació a S^1 que compleix els axiomes de grup abelià.

- Els nombres racionals $\mathbb{Q}$, reals $\mathbb{R}$ o complexos $\mathbb{C}$ amb la suma.

- $\mathbb{Q} - \{0\}$, $\mathbb{R} - \{0\}$, $\mathbb{C} - \{0\}$ amb el producte.

- El producte cartesià de grups.

Acció d'un grup sobre un espai

Suposem que X és un espai topològic i G és un grup (escrit multiplicativament). Direm que G actua sobre X si els elements de G ens donen transformacions de X, de manera coherent amb la multiplicació de G i la topologia de X. La definició formal és aquesta.

Definició 6.7. *Una acció d'un grup G sobre un espai topològic X consisteix en tenir, per cada $g \in G$, una aplicació contínua*

$$\theta_g : X \longrightarrow X$$

de manera que

(a) θ_1 és la identitat $I : X \to X$.

(b) $\theta_g \theta_h = \theta_{gh}$ per tot $g, h \in G$.

Si tenim una acció de G sobre X, definim $gx := \theta_g(x)$ per tot $g \in G$, $x \in X$. De vegades, per fer més clara la notació, escriurem $g \cdot x$ en lloc de gx.

Observem que, en una acció de G sobre X, les aplicacions θ_g són necessàriament homeomorfismes perquè $\theta_{g^{-1}}$ és l'aplicació inversa de θ_g.

Direm que x és un *punt fix* de l'acció si $gx = x$ per tot $g \in G$.

Quan tenim una acció de G sobre X, és important el concepte de *regió fonamental*. Una regió fonamental —també, domini fonamental— és un subespai $D \subset X$ tal que, per tot $x \in X$ existeix $g \in G$ i $x_0 \in D$ únic tal que $x = gx_0$. Sovint ens interessa trobar una regió fonamental D que sigui topològicament "senzilla" i que la seva clausura també ho sigui.

Alguns exemples

- Hi ha una acció de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{R}$ donada per $k \cdot x := k + x$. Un domini fonamental és $D = [0, 1)$.
- Hi ha una acció de $\mathbb{Z}^n$ sobre $\mathbb{R}^n$ donada per

  $$(k_1, \ldots, k_n) \cdot (x_1, \ldots, x_n) := (k_1 + x_1, \ldots, k_n + x_n).$$

  Un domini fonamental és el cub $D = [0, 1)^n$.
- Hi ha una acció de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sobre l'esfera S^n definida per l'aplicació antipodal $A : S^n \to S^n$, $A(x) = -x$. És a dir, si, en notació multiplicativa, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{1, \epsilon\}$, aleshores $\epsilon \cdot x := -x$. L'hemisferi nord és la clausura d'un domini fonamental.
- Podem considerar aquestes aplicacions afins del pla $\mathbb{R}^2$:

  $$S(x, y) := (x, y + 1), \quad T(x, y) = (x + 1, -y)$$

  i podem considerar el grup $G = \langle S, T \rangle$ generat per aquestes dues aplicacions. G actua sobre $\mathbb{R}^2$ i el quadrat $[0, 1] \times [0, 1]$ és la clausura d'un domini fonamental.

Quocient d'un espai per l'acció d'un grup

Si G és un grup que actua sobre un espai topològic X, podem considerar aquesta relació d'equivalència sobre X:

$$x \sim y \text{ si i només si existeix } g \in G \text{ tal que } gx = y.$$

Això ens permet definir l'espai quocient $X/\sim$ que denotarem X/G.[20] Tindrem també una aplicació de pas al quocient

$$\pi : X \longrightarrow X/G$$

que té una propietat especial.

Proposició 6.8. *La projecció π és oberta.*

Demostració. Sigui U un obert de X. Volem demostrar que $\pi(U)$ és un obert de X/G. Com que X/G té la topologia quocient per l'aplicació π, caldrà comprovar que $\pi^{-1}(\pi(U))$ és un obert de X. Observem això:

$$\begin{aligned}\pi^{-1}(\pi(U)) &= \{x \in X \ : \ \pi(x) \in \pi(U)\} \\ &= \{x \in X \ : \ x = gy \text{ per alguns } y \in U, g \in G\} \\ &= \bigcup_{g \in G} gU = \bigcup_{g \in G} \theta_g(U)\end{aligned}$$

Com que cada θ_g és un homeomorfisme, tenim que els subespais $\theta_g(U)$ són oberts i, per tant, $\pi^{-1}(\pi(U))$ és un obert.[21] □

Els quocients d'espais per accions de grups ens donen exemples d'espais topològics interessants. Mirem si podem identificar els espais quocients en els exemples anteriors:

- El quocient $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ amb l'acció $k \cdot x := k + x$ és homeomorf a la circumferència S^1. Això es pot demostrar de manera totalment idèntica a la demostració de la proposició 6.2.

- De manera similar, el quocient $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ amb l'acció producte és el tor de dimensió n, $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$.

- El quocient de l'esfera S^n per l'acció antipodal és, evidentment, l'espai projectiu $\mathbb{R}P^n$.

[20]Observem que aquesta notació és enganyosa perquè l'espai X/G no depèn només de l'espai X i del grup G, sino que depèn de quina sigui l'acció de G sobre X. És clar que un mateix grup G podria actuar de maneres diferents sobre un espai X —com veurem ara mateix— i els espais quocients podrien ser diferents.

[21]Observem que, si el grup G és finit, aquesta mateixa demostració, canviant la paraula "obert" per la paraula "tancat", ens demostra que la projecció π es tancada.

- El quocient $\mathbb{R}^2/\langle S, T\rangle$ amb l'acció

$$S(x,y) := (x, y+1), \quad T(x,y) = (x+1, -y)$$

és l'ampolla de Klein K perquè

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2/\langle S,T\rangle &= \mathbb{R}^2/\{(x,y) \sim (n+x, m+(-1)^n y) \ : \ n,m \in \mathbb{Z}\} \\ &= [0,1]\times[0,1]/\{(0,t)\sim(1,1-t), (s,0)\sim(s,1)\} \\ &\cong K. \end{aligned}$$

- També és possible obtenir l'ampolla de Klein com a quocient d'un tor per l'acció del grup de dos elements. En efecte, considerem T com el quocient del quadrat unitat per les identificacions habituals $(x,0)\sim(x,1)$ i $(0,y)\sim(1,y)$. Considerem aquesta aplicació contínua del tor en ell mateix:

$$\epsilon : [x,y] \mapsto [-x, y+1/2].$$

És clar que ϵ^2 és la identitat i, per tant, ϵ dóna una acció del grup $G := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sobre T. Si considerem el quocient T/G, veiem fàcilment que el podem identificar al quocient

$$\frac{[0,1]\times[0,1/2]}{\{(x,0)\sim(1-x,1/2), (0,y)\sim(1,y) : x,y\in[0,1]\}} \cong K.$$

Observem que hem obtingut el tor T^2 i l'ampolla de Klein K com a quocients del pla $\mathbb{R}^2$ per l'acció d'un grup i també hem obtingut el pla projectiu $\mathbb{R}P^2$ com a quocient de l'esfera S^2 per l'acció un altre grup.[22,23]

6.5 Exercicis addicionals

6.1 Sigui X un espai topològic i sigui $A \subset X$ un subconjunt dens. Demostreu que tots els oberts no buits de X/A tenen un punt comú.

[22] Podem obtenir el pla projectiu o l'esfera com a quocient del pla $\mathbb{R}^2$ per l'acció d'un grup? Si l'acció és prou "bona" (com les dels exemples anteriors) la resposta és no però en aquest curs no tindrem instruments per demostrar-ho.

[23] A la vista del que hem dit a la nota 3, els arguments d'aquests exemples, encara que semblin plausibles, no estan totalment justificats. De tota manera, es poden donar demostracions vàlides de tots aquests exemples utilitzant el teorema 3.3.

6.2 Sigui $f : X \to Y$ una aplicació contínua. Suposem que f té una *secció*, és a dir, existeix una aplicació contínua $s : Y \to X$ tal que fs és la identitat. Demostreu que Y té la topologia quocient per f.

6.3 Considereu els espais quocient $X = \mathbb{R}/(0,1)$ i $Y = \mathbb{R}/[0,1]$. Demostreu que $Y \cong \mathbb{R}$. Demostreu que X i Y no són homeomorfs.

6.4 Demostreu que si A és obert o tancat a X, aleshores $X - A \cong X/A - \{*\}$. Comproveu que això no és necessàriament cert per a un conjunt A qualsevol.

6.5 Sigui $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \text{ o } y = 0\}$ i sigui $q \colon A \to \mathbb{R}$ la projecció sobre la primera coordenada. Demostreu que $\mathbb{R}$ té la topologia quocient per q però q no és oberta ni tancada.

6.6 Sigui X un espai i $\sim$ una relació d'equivalència a X. Per cada $A \subset X$, definim

$$\widehat{A} := \{x \in X : \text{existeix } a \in A \text{ tal que } x \sim a\}$$

Demostreu que són equivalents: (a) La projecció $p : X \to X/\sim$ és oberta; (b) A obert implica $\widehat{A}$ obert.

6.7 El grup additiu de $\mathbb{Q}$ opera sobre la recta real com $q \cdot x = q + x$. Demostreu que la projecció $\pi \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ no és tancada.

6.8 Sigui G un grup que actua sobre els espais X i Y i sigui $f : X \to Y$ una aplicació contínua. Direm que f és *equivariant* si es compleix que $f(gx) = gf(x)$ per tot $x \in X$ i tot $g \in G$. Demostreu que si f és equivariant i és un homeomorfisme, aleshores f indueix un homeomorfisme $X/G \cong Y/G$.

6.9 Considerem un quadrat $Q = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ amb la topologia ordinària. Sigui $p : Q \to T$ la projecció canònica sobre el tor T. Demostreu que p no és oberta.

6.10 Considerem l'acció del grup $G := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sobre l'esfera S^2 donada per $(x, y, z) \mapsto (x, y, -z)$. Demostreu que l'espai quocient és homeomorf al disc D^2.

Capítol 7

Espais compactes

En l'estudi dels espais mètrics o en l'estudi de la topologia de $\mathbb{R}^n$, és gairebé segur que l'estudiant ja ha vist el concepte d'espai compacte. En aquest capítol estudiarem el concepte de compacitat en espais topològics generals.

7.1 Recobriments

La compacitat és una certa *propietat de finitud* extraordinàriament important que poden tenir els espais topològics. Té a veure amb la quantitat d'oberts necessària per recobrir un espai. Comencem parlant de *recobriments* d'un espai.

Definició 7.1.

- *Un **recobriment** d'un espai X és una família $\{U_i\}_{i\in I}$ de subespais de X tals que $X = \bigcup_{i\in I} U_i$. Si I és finit, direm que el recobriment és finit. Si I és infinit, direm que el recobriment és infinit.*

- *Si els subespais U_i, $i \in I$ són oberts (a X, s'entén), direm que $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ és un **recobriment obert** de X.*

- *Si $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ és un recobriment de X, un **subrecobriment** és un recobriment $X = \bigcup_{i\in J} U_j$ format per una subfamília de la família inicial $\{U_j\}_{j\in J}$, $J \subset I$.*

Posem alguns exemples.

- $X = X$ i $X = X \cup X \cup X \cup X$ són dos recobriments oberts de X amb un obert i amb quatre oberts, respectivament. $X = X \cup X \cup \cdots$ és un recobriment obert infinit de X.

- $\mathbb{R} = (-\infty, 1) \cup (0, \infty)$ és un recobriment obert de la recta real $\mathbb{R}$. Aquest recobriment obert no té cap subrecobriment propi (és a dir, diferent d'ell mateix).

- El recobriment
$$\mathbb{R} = \bigcup_{i=1}^{\infty} (-i, i)$$
és un recobriment obert infinit de la recta real $\mathbb{R}$. Aquest recobriment té molts subrecobriments. Per exemple,
$$\mathbb{R} = \bigcup_{i=1}^{\infty} (-2i, 2i)$$
és un subrecobriment del recobriment anterior, també amb infinits oberts. Observem, en canvi, que aquest recobriment obert no té cap subrecobriment que sigui *finit*.

- El recobriment
$$[0, 1] = (1/3, 1] \cup \bigcup_{i=2}^{\infty} [0, 1/i)$$
és un recobriment obert infinit de l'interval $[0, 1]$. Aquest recobriment sí que té subrecobriments finits. Per exemple:
$$\mathbb{R} = (1/3, 1] \cup [0, 1/2).$$

- En canvi, el recobriment obert
$$(0, 1] = \bigcup_{i=2}^{\infty} (1/i, 1]$$
no admet cap subrecobriment finit.

- El recobriment obert de la recta $\mathbb{R}$ donat per
$$\mathbb{R} = \bigcup_{i=-\infty}^{\infty} (i, i+2)$$
no admet cap subrecobriment propi. En efecte, si suprimim l'obert $(i, i+2)$ ja no tenim un recobriment de $\mathbb{R}$ perquè l'obert $(i, i+2)$ és l'únic obert del recobriment que conté el punt $i+1$.

- El recobriment
$$\mathbb{R} = \bigcup_{x\in\mathbb{R}} \{x\}$$
és un recobriment tancat de $\mathbb{R}$ que no admet cap subrecobriment propi. Aquest exemple il·lustra el fet que els recobriments tancats no ens interessen gaire.

És a dir, tenir recobriments oberts finits o infinits no té cap mèrit: tots els espais en tenen. El que ja és més problemàtic, com hem vist als exemples anteriors, és que un cert recobriment tingui subrecobriments propis o no en tingui —i que en tingui de finits o no en tingui de finits.

7.2 El concepte de compacitat

A l'apartat anterior hem posat exemples de recobriments oberts que tenen subrecobriments finits i exemples de recobriments oberts que no tenen subrecobriments finits. Això ens permet fer aquesta definició:

Definició 7.2. *Un espai topològic X direm que és compacte si tot recobriment obert de X té algun subrecobriment finit.*

Comentaris i exemples

- La propietat de ser compacte o no ser-ho és una propietat intrínseca de l'espai topològic X i no depèn de que X el considerem com a subespai de Y o de Z.[1]
- La propietat de ser compacte és una propietat topològica i, per això mateix, si X és compacte i $X \cong Y$, també Y serà compacte.
- Per demostrar que un espai *no* és compacte, n'hi ha prou amb trobar *un* recobriment obert que no tingui cap subrecobriment finit. En canvi, demostrar que un espai *sí* que és compacte requereix demostrar que *tot* recobriment obert té algun subrecobriment finit. Això, normalment, és més difícil.

[1] Comparem, per exemple, amb ser "obert", que no té significat intrínsec, sinó que només té sentit en relació a un altre espai. X sempre és obert (i tancat) a X, però pot ser obert o no ser-ho a Y. En canvi, un espai X és compacte o no ho és, sense que calgui dir res del tipus "compacte a tal espai".

- Si un espai només té un nombre finit d'oberts, és evident que qualsevol recobriment obert tindrà un subrecobriment finit i l'espai haurà de ser compacte. En conseqüència, qualsevol espai amb la topologia grollera és compacte i qualsevol espai amb un nombre finit de punts també és compacte.

- Un espai discret és compacte si i només si és finit.

- A l'apartat anterior hem vist un exemple d'un recobriment obert de $\mathbb{R}$ que no tenia cap subrecobriment finit. Això ens demostra que $\mathbb{R}$ no és compacte. Com que $\mathbb{R} \cong (a, b)$, qualsevol interval obert de $\mathbb{R}$ és no compacte. També hem trobat un recobriment obert de $(0, 1]$ sense cap subrecobriment finit. Per tant, $(0, 1]$ tampoc no és compacte.

- Si en un espai mètric X la funció distància d és no acotada —és a dir, hi ha punts a distància tan gran com es vulgui— aleshores X no pot ser compacte. N'hi ha prou amb prendre un punt $x_0 \in X$ i considerar el recobriment obert de X format per les boles $B(x_0, n)$, $n > 0$. En particular, $\mathbb{R}^n$ no és compacte.

- Si tenim un recobriment obert de X

  $$X = \bigcup_{i \in I} U_i$$

  i prenem complementaris a X, tenim una igualtat

  $$\varnothing = \bigcap_{i \in I} C_i$$

  on els $C_i := X - U_i$ són tancats. Això ens porta a una caracterització de la compacitat per tancats: *X és compacte si i només si tota família de tancats amb intersecció buida té alguna subfamília finita amb intersecció buida.* Aquesta caracterització per tancats pot ser útil en algun cas.

- Suposem que $A \subset X$. Aleshores, és fàcil veure que la compacitat de A es pot caracteritzar d'aquesta manera lleugerament diferent a la definició d'espai compacte.

  > *A és compacte si i només si per tota família $\{U_i\}_{i \in I}$ d'oberts de X tals que $A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$, existeix una subfamília finita $\{U_j\}_{j \in J}$, $J \subset I$, tal que $A \subset \bigcup_{j \in J} U_j$.*

7.3 Tres propietats importants dels espais compactes

Teorema 7.3. *La imatge d'un compacte per una aplicació contínua és un compacte*

Demostració. Sigui $f : X \to Y$ una aplicació contínua entre espais topològics i sigui $S \subset X$ un espai compacte. Estem dient que $f(S)$ és també un espai compacte. La demostració és molt senzilla. Sigui

$$f(S) \subset \bigcup_{i \in I} U_i$$

un recobriment obert de $f(S)$ (per oberts de Y). Aleshores, considerant les antiimatges tenim que

$$S \subset \bigcup_{i \in I} f^{-1} U_i$$

és un recobriment de S per oberts de X. Com que S és compacte, aquest recobriment tindrà un subrecobriment finit

$$S \subset f^{-1} U_{i_1} \cup \cdots \cup f^{-1} U_{i_n}.$$

Aplicant f als dos costats d'aquesta inclusió, tenim que

$$f(S) \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}.$$

□

En particular, aquest teorema ens diu que un quocient d'un espai compacte és compacte.

Teorema 7.4. *Un subespai tancat d'un espai compacte és compacte*

Demostració. Suposem que X és compacte i $S \subset X$ un subespai tancat. Volem demostrar que S també és compacte. Sigui

$$S \subset \bigcup_{i \in I} U_i$$

un recobriment de S per oberts de X. Aleshores,

$$X = \left(\bigcup_{i \in I} U_i \right) \cup (X - S)$$

és un recobriment obert de X. Com que X és compacte, tindrem

$$X = U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n} \cup (X - S)$$

i, en conseqüència, $S \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$. $\square$

Teorema 7.5. *El producte d'una família d'espais compactes no buits és compacte si i només si cada espai ho és.*

Demostració. La demostració d'aquest resultat —que es coneix com a teorema de Tychonoff— és complicada i només la farem en el cas d'un producte de dos espais —que implicarà que el teorema és cert per a qualsevol producte d'un nombre finit d'espais.

Suposem que $X \times Y \neq \varnothing$ és un espai compacte. La projecció $\pi_X : X \times Y \to X$ és contínua. Pel teorema 7.3, X és compacte. El mateix és cert per a Y.

La part difícil és, doncs, veure que si X i Y són espais compactes, també $X \times Y$ és un espai compacte. Sigui

$$X \times Y = \bigcup_{i \in I} W_i$$

un recobriment obert de $X \times Y$. Per cada punt $(x, y) \in X \times Y$, escollim un obert del recobriment $W_{i(x,y)}$ que contingui (x, y). Com que l'índex d'aquest obert dependrà del punt (x, y), escrivim aquest índex com $i(x, y)$.

Per la definició de la topologia producte, existirà un obert bàsic tal que

$$(x, y) \in U_{x,y} \times V_{x,y} \subset W_{i(x,y)}.$$

Observem ara que, si fixem un punt $x \in X$, podem escriure

$$Y = \bigcup_{y \in Y} V_{x,y}$$

que és un recobriment obert de l'espai compacte Y. Per tant, tindrem un subrecobriment finit

$$Y = V_{x,y_1(x)} \cup \cdots \cup V_{x,y_{n(x)}(x)}.$$

Observem que el nombre d'oberts dependrà de x i, per això, hem escrit $n(x)$. També, el segon subíndex de cada obert dependrà de x i, per això, hem escrit $y_j(x)$.

Ara *definim*

$$U_x := U_{x,y_1(x)} \cap \cdots \cap U_{x,y_{n(x)}(x)}$$

que, com que és una intersecció *finita* d'oberts, és un obert. Tenim $x \in U_x$. Ara observem que

$$X = \bigcup_{x \in X} U_x$$

és un recobriment obert de X, que és un espai compacte. Tindrem un subrecobriment finit

$$X = U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_m}.$$

Ara, si hi posem una mica d'atenció, veurem que aquesta igualtat complicada és certa:

$$X \times Y = \bigcup_{r=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{n(x_r)} U_{x_r} \times V_{x_r,y_j(x_r)}$$

i, en conseqüència,

$$X \times Y = \bigcup_{r=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{n(x_r)} W_{i(x_r,y_j(x_r))}$$

és un subrecobriment finit del recobriment obert inicial. □

La topologia compacte-obert

Quina topologia podem considerar en el conjunt de les aplicacions contínues entre dos espais? Hi ha diversos candidats, però la topologia que més s'utilitza és l'anomenada *topologia compacte-obert* que introduirem en aquest apartat.

Siguin X, Y espais topològics i definim

$$\mathrm{map}(X,Y) := \{f : X \to Y \ : \ f \text{ és contínua}\}.$$

Per cada $A \subset X$ i $B \subset Y$, podem considerar aquest subconjunt de l'espai d'aplicacions contínues $\mathrm{map}(X,Y)$:

$$\mathcal{F}_{(A,B)} := \{f \in \mathcal{F}(X,Y) \ : \ f(A) \subset B\}.$$

Considerem ara totes les interseccions finites

$$U := \mathcal{F}_{(A_1,B_1)} \cap \cdots \cap \mathcal{F}_{(A_n,B_n)}$$

amb $n > 0$, $A_i \subset X$ compacte i $B_i \subset Y$ obert de Y. Es compleix que aquests subconjunts $U \subset \mathcal{F}(X,Y)$ compleixen les condicions del teorema 2.2 i són, per tant, base d'una topologia ben definida sobre el conjunt $\mathrm{map}(X,Y)$. Se'n diu la *topologia compacte-obert*.

7.4 Compactes de $\mathbb{R}^n$

Molt probablement, l'estudiant ja coneix aquest teorema important[2] que es coneix amb el nom de *teorema de Heine-Borel*.

Teorema 7.6. *Un subespai de $\mathbb{R}^n$ —amb la topologia ordinària— és compacte si i només si és tancat i acotat.*

Demostració. L'únic pas difícil de la demostració consisteix en veure que l'interval $[0, 1]$ és un espai compacte. Suposem-ho vist. Com que qualsevol interval tancat és homeomorf a $[0, 1]$,[3] ja tenim que tot interval tancat és compacte. Com que el producte de compactes és compacte (teorema 7.5), ja tenim que tot cub $[a, b]^n \subset \mathbb{R}^n$ és compacte. Suposem ara que $A \subset \mathbb{R}^n$ és tancat i acotat. Per ser acotat, estarà inclòs a algun cub $A \subset [a, b]^n$. Pel teorema 7.4, A serà compacte.

Recíprocament, ja hem dit abans que un espai mètric amb distància no acotada no pot ser compacte. Faltaria demostrar que tot compacte de $\mathbb{R}^n$ és tancat a $\mathbb{R}^n$. Això es deduirà d'una proposició senzilla que veurem més endavant (proposició 8.2).

Per tant, tot es redueix a demostrar que $[0, 1]$ és un espai compacte. Això s'ha de fer, necessàriament, pel mateix mètode —basat en la propietat del suprem dels nombres reals— que l'alumne ja deu haver estudiat en algun curs anterior. No reproduirem aquesta demostració aquí. □

Aquest teorema ens permet donar molts exemples d'espais compactes. Per exemple, entre els espais que han anat apareixent en aquest curs, tenim que les esferes S^n, els tors T^n, el conjunt de Cantor i la banda de Moebius són compactes per aplicació directa del teorema de Heine-Borel. D'altra banda, el teorema 7.3 ens diu que qualsevol quocient d'un compacte és un compacte. Per tant, l'espai projectiu $\mathbb{R}P^n$ —que és un quocient de l'esfera— i l'ampolla de Klein —que és un quocient del quadrat $[0, 1]^2$— són espais compactes.

[2] Fins i tot, molts estudiants coneixen *massa bé* aquest teorema! Prenen com una mena de mantra que "compacte és tancat i acotat" i això els pot dur a error en el cas d'espais topològics generals. En efecte, en un espai topològic X hi pot haver subespais no tancats que siguin compactes. D'altra banda, el concepte d'acotat no té cap sentit en un espai topològic que no sigui un espai mètric. Cal tenir-ho present.

[3] Per exemple, podem prendre un homeomorfisme afí $f : [a, b] \to [0, 1]$ per tot $a, b \in \mathbb{R}$.

Compacitat i successions

La majoria d'estudiants que arriben a aquest curs de topologia saben que

- Els compactes són els tancats i acotats.
- Compacte és equivalent a que tota successió té una parcial convergent.

Sobre el primer punt, ja hem dit quina és la situació: és cert a $\mathbb{R}^n$ (amb la topologia ordinària!) i simplement no té sentit en un espai topològic general.[4]

Què passa amb la segona afirmació que caracteritza els compactes com aquells espais on tota successió té una parcial convergent? Resulta que les successions són molt útils en els espais mètrics i, principalment, a $\mathbb{R}^n$, però no es comporten gaire bé en un espai topològic general. Per exemple:

- El concepte de límit d'una successió es pot definir a un espai topològic sense cap problema, però pot passar que el límit d'una successió no sigui únic.
- La relació que hi ha a $\mathbb{R}^n$ entre límit de successions i punts adherents deixa de ser vàlida a un espai topològic general. És a dir, podem tenir un espai topològic X i un puny $x \in \mathrm{Cl}(A) \subset X$ tal que no hi hagi cap successió de punts de A que convergeixi a y. Si repassem la demostració d'aquest teorema en el cas de $\mathbb{R}^n$ veurem que utilitza un argument amb les boles $B(x, 1/n)$ per $n = 1, 2, 3, \ldots$ Aquest argument no es pot generalitzar a un espai topològic general.
- És cert que en un espai compacte de Hausdorff (recordem la propietat de Hausdorff que hem mencionat a la pàgina 21) tota successió té algun punt d'acumulació, però hi ha espais compactes de Hausdorff amb successions sense cap parcial convergent.
- Hi ha espais de Hausdorff que no són compactes i on tota successió té una parcial convergent. Aquí el problema és que la propietat que tota

[4] En un espai mètric general, el teorema sí que té sentit, però és fals perquè, encara que sí que és cert que un compacte dintre d'un espai mètric ha de ser tancat i acotat, en canvi hi pot haver subespais tancats i acotats dintre d'un espai mètric que no són compactes. Un exemple trivial d'això seria un espai discret infinit on tots els punts estan a distància 1 un de l'altre. És tancat (en ell mateix) i acotat, però no és compacte.

successió tingui una parcial convergent implica que tot recobriment *numerable* té un subrecobriment finit. Però això és més fluix que ser compacte —se'n diu *compacitat numerable*.

En resum, quan treballem amb subespais de $\mathbb{R}^n$ podem utilitzar les dues caracteritzacions d'espai compacte —subespais tancats i acotats o bé subespais on tota successió té una parcial convergent—, però no hem d'utilitzar aquestes caracteritzacions en un espai topològic general.

7.5 La compactificació per un punt

Hi ha diverses maneres d'incloure un espai topològic X arbitrari en un espai compacte $\widetilde{X}$. La més senzilla és la que es coneix com a *compactificació per un punt*, que es diu així perquè $\widetilde{X}$ s'obté afegint a X un únic punt.

Sigui X un espai topològic i definim $\widetilde{X} = X \sqcup \{*\}$. És a dir, $\widetilde{X}$ s'obté afegint un nou punt a X. Tenim una inclusió natural $X \subset \widetilde{X}$. Ara definirem una topologia apropiada sobre el conjunt $\widetilde{X}$.

Direm que $U \subset \widetilde{X}$ és un obert si es compleix una d'aquestes dues condicions

1. $U \subset X$ i U és un obert de X.
2. $U = U' \sqcup \{*\}$, U' és un obert de X i $X - U'$ és compacte.

Deixem com a exercici la demostració d'aquest resultat:

Proposició 7.7. *Aquesta definició dota $\widetilde{X}$ d'una topologia. L'espai X té la topologia induïda per la inclusió $X \subset \widetilde{X}$. L'espai $\widetilde{X}$ és compacte.*[5] □

Si prenem $X = \mathbb{R}^n$ —que no és compacte— i el compactifiquem per aquest mètode, quin espai compacte obtenim? Obtenim l'esfera.

Proposició 7.8. *La compactificació per un punt de $\mathbb{R}^n$ és un espai homeomorf a S^n.*

[5] Si l'espai X inicial ja és compacte, la compactificació $\widetilde{X}$ és poc interessant. És simplement $X \sqcup \{*\}$ amb el que es coneix com la topologia de la unió disconnexa (vegeu l'inici del capítol 9).

Demostració. Sigui x_0 un punt fixat a l'esfera S^n. Definim $f : \mathbb{R}^n \sqcup \{*\} \to S^n$ així:

$$f(x) := \begin{cases} p(x) & x \neq * \\ x_0 & x = * \end{cases}$$

on $p : \mathbb{R}^n \to S^n - \{x_0\}$ és la projecció estereogràfica —o, millor dit, la seva inversa— respecte del punt x_0. Demostrarem que f és un homeomorfisme. És evident que f és bijectiva. Estudiem-ne la continuïtat.

Sigui U un obert de S^n. Si $x_0 \notin U$, aleshores $f^{-1}(U) = p^{-1}(U)$ és un obert de $\mathbb{R}^n \sqcup \{*\}$. Si $x_0 \in U$, aleshores $f^{-1}(U) = p^{-1}(U - \{x_0\}) \sqcup \{*\}$ i tot es redueix a demostrar que $K := \mathbb{R}^n - p^{-1}(U - \{x_0\})$ és un compacte de $\mathbb{R}^n$. És clar que és tancat. Cal només veure que és acotat, és a dir que existeix r tal que

$$\mathbb{R}^n - p^{-1}(U - \{x_0\}) \subset B(0, r).$$

Considerem $x_0 \in U$. Com que U és un obert de S^n, existirà un $\epsilon > 0$ tal que $B(x_0, \epsilon) \subset U \subset S^n$. Per projecció estereogràfica, la bola $B(x_0, \epsilon) \subset S^n$ es transforma en el complement d'una bola $B(0, r) \subset \mathbb{R}^n$. Per tant, $\mathbb{R}^n - p^{-1}(U - \{x_0\}) \subset B(0, r)$ i hem acabat la demostració de la continuïtat de f. Ens faltaria veure que f^{-1} també és contínua. Això es pot demostrar directament, utilitzant un argument similar al de la continuïtat de f, o bé es pot deduir immediatament com a conseqüència del teorema 8.4. $\square$

7.6 Exercicis addicionals

7.1 Considerem l'el·lipsoide

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} + z^2 = 1 \right\}$$

i l'hiperboloide

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z^2 = x^2 - y^2 \right\}$$

amb la topologia de subespai de $\mathbb{R}^3$. Raoneu si són o no són compactes.

7.2 Demostreu que la gràfica d'una funció $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ és compacta si i només si f és contínua. Doneu un exemple d'una funció discontínua $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ amb gràfica tancada però no compacta.

7.3 Demostreu que tota intersecció de compactes tancats és compacta i tancada. En canvi, en general, una intersecció de compactes pot no ser compacta. Per veure-ho, sigui $X = \mathbb{N} \cup \{-1, -2\}$ i sigui $\mathcal{T}$ definit per: $M \in \mathcal{T}$ si i només si $M \subset \mathbb{N}$ o bé $\mathbb{N} \subset M$. Proveu que $\mathcal{T}$ és una topologia sobre X, que X és compacte amb aquesta topologia i que existeixen subconjunts compactes X_1 i X_2 de X tals que $X_1 \cap X_2$ no és compacte.

7.4 Sigui X un espai topològic i sigui $I = [0, 1]$. Considerem $X \times I$ amb la topologia producte. Fixem $x_0 \in X$ i sigui $U \subset X \times I$ un obert que conté $\{x_0\} \times I$. Proveu que hi ha un obert $V \subset X$ tal que $\{x_0\} \times I \subset V \times I \subset U$.

7.5 Siguin X_1 i X_2 dos espais topològics i siguin $K_i \subset X_i$, $i = 1, 2$, subespais compactes. Demostreu que tot entorn U de $K_1 \times K_2$ a $X_1 \times X_2$ conté un entorn de la forma $U_1 \times U_2$ amb $K_i \subset U_i$, $i = 1, 2$.

7.6 Proveu que si X és compacte, la projecció $p_2 : X \times Y \to Y$ és tancada.

7.7 Sigui $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ on

$$C_n = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x - \frac{1}{n} \right)^2 + y^2 = \frac{1}{n^2} \right\}$$

(aquest espai s'anomena *les arracades hawaianes*), amb la topologia de subespai. Sigui $Y = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ amb la topologia quocient. Proveu que X i Y no són espais homeomorfs.

7.8 Sigui $X = [-1, 1]$ amb la següent topologia: $U \subset [-1, 1]$ és obert si $(-1, 1) \subset U$ o bé $0 \notin U$. És X compacte?

7.9 Direm que una aplicació $f : X \to Y$ és pròpia si la antiimatge de tot compacte és compacte. Demostreu que si f és contínua i tancada i $f^{-1}(y)$ és compacte per tot $y \in Y$, aleshores f és pròpia.

7.10 Siguin X, Y espais i considerem la topologia compacte-obert al conjunt d'aplicacions contínues $\mathrm{map}(X, Y)$. Sigui $x_0 \in X$. Demostreu que l'aplicació d'avaluació

$$e : \mathrm{map}(X, Y) \to Y$$

donada per $e(f) = f(x_0)$, és contínua.

7.11 Si $x_1, x_2, \ldots$ és una successió infinita de punts d'un espai topològic X, diem que $a \in X$ és un quasilímit de (x_n) si tot entorn de a conté infinits termes de la successió (x_n). Demostreu que si X és compacte, aleshores tota successió de punts de X té algun quasilímit.

Capítol 8

Espais de Hausdorff

8.1 L'axioma de Hausdorff

L'axiomàtica dels espais topològics tal com la coneixem avui es deu al matemàtic Felix Hausdorff (1868–1942) que la va establir a la seva obra fonamental *Grundzüge der Mengenlehre*[1] publicada el 1914. Hausdorff no axiomatitza el concepte d'obert —com hem fet nosaltres— sinó el concepte d'*entorn d'un punt*. En tot cas, els seus primers tres axiomes d'entorn són equivalents als nostres axiomes d'espai topològic. A més d'aquests tres axiomes,[2] Hausdorff imposa també un quart axioma que, traspassat a la nostra axiomàtica d'oberts, diu això:

> **Axioma de Hausdorff.** Donats $x \neq y$, existeixen oberts disjunts U, V tals que $x \in U$, $y \in V$.

[1]Aquesta obra de 476 pàgines comença amb la teoria de conjunts i acaba amb l'estudi dels espais topològics. En aquells moments inicials, la topologia era indestriable de la teoria de conjunts. Per fer-nos una idea de la importància de l'obra de Hausdorff, podem llegir el primer paràgraf del comentari que es va publicar sobre aquest llibre el 1920 al Bull. Amer. Math. Soc.: *"If there are still mathematicians who hold the theory of aggregates* [la teoria de conjunts] *under general suspicion, and are reluctant to grant it full recognition as a rigorous, mathematical discipline, they will find it hard to retain their doubts under fire of the logic of Hausdorffs treatise. It would be difficult to name a volume in any field of mathematics, even in the unclouded domain of number theory, that surpasses the Grundzüge in clearness and precision.*

[2]Aquests axiomes diuen això: (A) Cada punt té algun entorn i tot entorn d'un punt conté el punt; (B) la intersecció de dos entorns d'un punt x conté un entorn del punt x; (C) Si un punt y és a un entorn U de x, aleshores existeix un entorn V de y tal que $V \subset U$.

Aquest axioma és una *propietat de separació* i té una gran importància. Ja n'havíem parlat a la pàgina 21. De tota manera, els nostres espais topològics no compleixen, en general, aquest axioma. Pensem, per exemple, en un espai groller de dos punts. Els espais que sí que el compleixen els anomenarem espais de Hausdorff o —utilitzant la paraula Hausdorff com a adjectiu— **espais Hausdorff**:

Definició 8.1. *Un espai topològic X direm que és Hausdorff si compleix l'axioma de Hausdorff.*

Vegem algunes propietats elementals dels espais Hausdorff:

- La propietat de Hausdorff és una propietat topològica intrínseca de l'espai. Per tant, si X és Hausdorff i $X \cong Y$, també Y ha de ser Hausdorff.
- Un espai mètric és sempre Hausdorff. En efecte, si $d(x, y) = r > 0$, podem prendre $U := B(x, r/2)$, $V := B(y, r/2)$ i comprovar fàcilment que aquestes dues boles són disjuntes.
- Un espai groller amb més d'un punt no és Hausdorff.
- En un espai Hausdorff els punts són subespais tancats.[3] La demostració és immediata.
- La propietat de Hausdorff s'hereta per subespais. Si X és Hausdorff i $A \subset X$, aleshores A també és Hausdorff.
- En canvi, la propietat de Hausdorff no s'hereta per pas al quocient. És a dir, un quocient d'un espai Hausdorff pot ser que no sigui Hausdorff. Considerem per exemple el quocient $[0, 1]/(0, 1]$ que és un espai amb dos punts que no és Hausdorff.

Hi ha altres *axiomes de separació*, més febles o més forts que l'axioma de Hausdorff. Per exemple, tenim aquests axiomes escrits per ordre del més feble al més fort:

- Espais T_0 o espais de Kolmogorov. Donats dos punts diferents, hi ha un obert que conté un d'ells i no l'altre.

[3]Convé recordar que en un espai topològic general els subespais amb un únic punt poden no ser tancats.

- Espais T_1 o espais de Fréchet. Donats $x \neq y$, hi ha oberts U, V tals que $x \in U - V$, $y \in V - U$. Aquest axioma és equivalent a que els punts siguin tancats.
- Els espais T_2 són els espais Hausdorff.
- Espais T_3 o espais regulars. Es compleix l'axioma T_1 i a més donats un tancat F i un punt $x \notin F$, existeixen oberts disjunts U, V tals que $x \in U$, $F \subset V$.
- Espais T_4 o espais normals. Es compleix l'axioma T_1 i a més donats tancats disjunts A, B, existeixen oberts disjunts U, V tals que $A \subset U$, $B \subset V$.

8.2 Algunes propietats dels espais Hausdorff

Proposició 8.2. *Si X és un espai de Hausdorff i $A \subset X$ és compacte, aleshores A és tancat a X.*[4]

Demostració. Podem suposar que $A \neq \varnothing, X$. Sigui $x \notin A$. Volem trobar un obert U tal que $x \in U$ i $U \cap A = \varnothing$. Procedim d'aquesta manera. Per cada $a \in A$, aplicant la propietat de Hausdorff a x, a, tindrem oberts disjunts U_a, V_a tals que $x \in U_a$, $a \in V_a$. Prenent tots els oberts V_a per $a \in A$, tindrem un recobriment obert de A.

$$A \subset \bigcup_{a \in A} V_a.$$

Com que A és compacte, aquest recobriment tindrà un subrecobriment finit

$$A \subset V_{a_1} \cup \cdots \cup V_{a_n}.$$

Aleshores, l'obert

$$U := U_{a_1} \cap \cdots \cap U_{a_n}$$

compleix el que volíem.[5] □

[4] Recordem que la propietat de ser compacte és una propietat intrínseca d'un espai, mentre que la de ser tancat és una propietat relativa a un altre espai. Malgrat això, aquest teorema ens diu que, en els espais Hausdorff, els espais compactes són el que en podríem dir "intrínsecament tancats", és a dir, són tancats en qualsevol espai Hausdorff que els contingui.

[5] Aquest tipus d'argument l'utilitzarem diverses vegades. És important que l'estudiant el conegui i el sàpiga usar.

Aquesta proposició ens permet completar l'argument del teorema 7.6 que havia quedat inacabat.

Proposició 8.3. *Un producte d'espais no buits és Hausdorff si i només si ho són cada un dels factors.*

Demostració. Ho farem amb un producte de dos espais perquè el cas general es fa igual. Si $X \times Y$ és Hausdorff, aleshores podem prendre $y \in Y$ i observar que $X \cong X \times \{y\} \subset X \times Y$ ha de ser Hausdorff. Podem fer el mateix amb Y.

Recíprocament, suposem que X, Y són espais Hausdorff i siguin (x_1, y_1), (x_2, y_2) dos punts diferents del producte $X \times Y$. Sense pèrdua de generalitat, podem suposar $x_1 \neq x_2$. Com que X és Hausdorff, existiran oberts disjunts U_1, U_2 de X tals que $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$. Aleshores, $U_1 \times Y$ i $U_2 \times Y$ són dos oberts disjunts de $X \times Y$ que separem els dos punts (x_1, y_1), (x_2, y_2). □

Fins ara hem utilitzat diverses vegades un resultat que no hem demostrat. Es tracta del teorema 3.3 que ens dóna un criteri per concloure que una aplicació contínua i bijectiva és un homeomorfisme, sense necessitat de demostrar que la seva inversa és contínua. Ara podem demostrar fàcilment aquell teorema, que és un corol·lari immediat d'aquest resultat:

Proposició 8.4. *Sigui $f : X \to Y$ una aplicació contínua i bijectiva. Suposem que X és un espai compacte i Y és un espai Hausdorff. Aleshores, f és un homeomorfisme.*

Demostració. La demostració és molt senzilla. Per tal que f sigui un homeomorfisme només caldria comprovar que és una aplicació tancada. Sigui $A \subset X$ un tancat. Com que X és compacte, per la proposició 7.4, A és compacte. Aleshores, la proposició 7.3 ens diu que $f(A) \subset Y$ és un compacte. Finalment, la proposició 8.2 ens diu que $f(A)$ és un tancat de Y. □

El següent resultat ens demostra que, en el cas compacte, la propietat de Hausdorff implica una propietat de separació molt més forta com és la dels espais T_4 o normals.

Proposició 8.5. *Tot espai compacte Hausdorff és normal.*

Demostració. Tornarem a utilitzar un argument que ja hem usat abans. Suposem que A i B són dos tancats disjunts d'un espai compacte Hausdorff X. Volem trobar oberts disjunts que els separin. Fixem un punt $a \in A$.

Per cada punt $b \in B$ existiran oberts disjunt $U_{a,b}$, $V_{a,b}$ tals que $a \in U_{a,b}$, $b \in V_{a,b}$. Observem ara que els oberts $V_{a,b}$, variant $b \in B$, formen un recobriment obert de B:

$$B \subset \bigcup_{b \in B} V_{a,b}.$$

Però B és un tancat de l'espai compacte X. Per la proposició 7.4, B és compacte i podem trobar un subrecobriment finit

$$B \subset V_{a,b_1(a)} \cup \cdots \cup V_{a,b_{n(a)}(a)}.$$

Considerem ara

$$\begin{aligned} U_a &:= U_{a,b_1(a)} \cap \cdots \cap U_{a,b_{n(a)}(a)} \\ V_a &:= V_{a,b_1(a)} \cup \cdots \cup V_{a,b_{n(a)}(a)} \end{aligned}$$

Tenim que U_a i V_a són oberts disjunts i es compleix $a \in U_a$, $B \subset V_a$. Fem ara variar $a \in A$. Tenim un recobriment obert

$$A \subset \bigcup_{a \in A} U_a.$$

Novament, com que A és compacte, podrem extreure un subrecobriment finit

$$A \subset U_{a_1} \cup \cdots \cup U_{a_m}.$$

Definim ara

$$\begin{aligned} U &:= U_{a_1} \cup \cdots \cup U_{a_m} \\ V &:= V_{a_1} \cap \cdots \cap V_{a_m} \end{aligned}$$

Tenim que U i V són oberts disjunts amb $A \subset U$, $B \subset V$, com volíem demostrar. □

Hem vist que un quocient d'un espai Hausdorff pot deixar de ser Hausdorff. La proposició següent ens presenta un cas important en que aquest problema no apareix.

Proposició 8.6. *Sigui X un espai compacte Hausdorff i sigui $A \subset X$ un subespai tancat. El quocient X/A és compacte Hausdorff.*

Demostració. Ja hem vist que un quocient d'un compacte és compacte (teorema 7.3). Es tracta de provar que X/A compleix la propietat de Hausdorff. Designem per $\pi : X \to X/A$ la projecció canònica. Siguin $x, y \in X$ dos punts que representin punts diferents a l'espai quocient X/A. Si $x, y \notin A$, com que X és Hausdorff podem trobar oberts disjunts $U, V \subset X - A$ tals que $x \in U$, $y \in V$. Aleshores, $\pi(U)$ i $\pi(V)$ són oberts disjunts de X/A que separen $\pi(x)$ i $\pi(y)$.

El cas interessant és quan un dels dos punts x, y que volem separar és a A. Suposem $y \in A$. Per la proposició 8.5, X és un espai normal i A, $\{x\}$ són tancats de X. Per tant, existiran oberts disjunts U, V tals que $x \in U$, $A \subset V$. Aleshores, $\pi(U)$ i $\pi(V)$ són oberts disjunts que separen $\pi(x)$ i $\pi(y)$. □

Proposició 8.7. *Sigui X un espai compacte Hausdorff i sigui G un grup finit que actua sobre X. Aleshores, el quocient X/G és compacte Hausdorff.*

Demostració. La demostració és similar a la de la proposició anterior i la deixem com a exercici. □

Ja tenim instruments per decidir si són Hausdorff o no ho són els diversos exemples d'espais que hem anat trobant al llarg d'aquest curs. En primer lloc, els espais que són subespais de $\mathbb{R}^n$ són automàticament Hausdorff. D'altra banda, l'espai projectiu i l'ampolla de Klein són Hausdorff per aplicació de la proposició anterior perquè hem de recordar que l'espai projectiu és un quocient de l'esfera per una acció del grup de dos elements i l'ampolla de Klein és un quocient del tor per una acció del grup de dos elements (pàgina 74).

8.3 La topologia de Zariski

Com és que no exigim l'axioma de Hausdorff a la nostra axiomàtica dels espais topològics? Hi ha dos motius. En primer lloc, sabem que en els espais Hausdorff no podem, en general, fer quocients. El segon motiu és que, en contrast amb el que passava quan Hausdorff va introduir la seva axiomatització, ara tenim exemples importants d'espais topològics que no compleixen l'axioma de Hausdorff. Potser l'exemple més interessant el proporciona la *topologia de Zariski*, que és una topologia que juga un paper fonamental a la geometria algebraica.

Sigui k un cos arbitrari —per exemple el cos des complexos $\mathbb{C}$— i considerem l'espai afí $X := k^n$. Hi ha una manera de dotar X d'una topologia que reflecteix la geometria de X. Definirem aquesta topologia utilitzant els subconjunts *tancats*. Els subconjunts tancats de X seran les solucions de famílies d'equacions polinòmiques. És a dir, si

$$f_i(Z_1, \dots, Z_n), \quad i \in I$$

és una família de polinomis en n variables amb coeficients al cos k, definim un subconjunt de X així:

$$V(\{f_i : i \in I\}) := \{(z_1, \dots, z_n) \in X \ : \ f_i(z_1, \dots, z_n) = 0 \text{ per tot } i \in I\}.$$

Aleshores, aquests subconjunts $V(\{f_i : i \in I\}) \subset X$ compleixen els axiomes de tancats d'una topologia.

1. $\varnothing = V(1)$ i $X := V(0)$ són tancats.

2. És clar que

$$\bigcap_{j \in J} V(\{f_i^j : i \in I_j\}) = V(\{f_i^j : i \in I_j,\ j \in J\}).$$

   Per tant, la intersecció arbitrària de tancats és un tancat.

3. La unió de dos tancats és un tancat. En efecte, considerem dos tancats $V(\{f_i : i \in I\})$, $V(\{g_j : j \in J\})$. Considerem ara la família formada per *tots* els polinomis h tals que h es pot escriure

$$h = \sum_{i \in I} a_i f_i$$
$$h = \sum_{j \in J} b_j g_j$$

   on a_i i b_j són polinomis en n variables amb coeficients al cos k (i, evidentment, són tots zero excepte un nombre finit, per tal que les sumes anteriors tinguin sentit). Aleshores, es pot comprovar fàcilment que

$$V(\{f_i : i \in I\}) \cup V(\{g_j : j \in J\}) = V(\{h\}).$$

Aquestes són algunes de les propietats més elementals d'aquesta topologia:

1. Els punts són tancats, és a dir, la topologia de Zariski és T_1.

2. Si el cos k és infinit, la topologia de Zariski a $X := k^n$ no és Hausdorff. En efecte, siguin $x, y \in X$ dos punts diferents i siguin A, B oberts disjunts que els separen. Aleshores, $A = X - V(\{f_i\})$, $B = X - V(\{g_j\})$ i es complirà que

$$X = V(\{f_i\}) \cup V(\{g_j\})$$

Escollim ara un polinomi $f \in \{f_i\}$ i un polinomi $g \in \{g_j\}$ i considerem el polinomi $h := fg$. Tindrem que aquest polinomi h s'ha d'anul·lar a *tots* els punts de k^n. Ara bé, un resultat senzill de la teoria de polinomis ens diu que l'únic polinomi que s'anul·la a tots els punts de k^n (amb k infinit) és el polinomi zero. Per tant, $A = \varnothing$ o $B = \varnothing$, una contradicció.

3. També es pot demostrar que k^n, amb la topologia de Zariski, és un espai compacte i, de fet, tots els seus subespais són també compactes. Per demostrar això cal tenir alguns coneixements de teoria d'anells commutatius, perquè el resultat es dedueix de l'anomenat *teorema de la base de Hilbert*. No en parlarem aquí.

4. En particular, podem considerar la topologia de Zariski a l'espai afí $\mathbb{R}^n$ que ens dóna un exemple d'una topologia a $\mathbb{R}^n$ que és matemàticament significativa i molt diferent de la topologia ordinària.

8.4 Exercicis addicionals

8.1 Sigui $X = [-1, 1]$ amb la següent topologia: $U \subset [-1, 1]$ és obert si $(-1, 1) \subset U$ o bé $0 \notin U$. És X Hausdorff?

8.2 Sigui X un espai Hausdorff i $x \in X$. Demostreu que la intersecció de tots els oberts que contenen x és $\{x\}$. Doneu un contraexemple si X no és Hausdorff.

8.3 Sigui $A \subsetneq X$ un subespai dens d'un espai topològic X. Demostreu que X/A no és Hausdorff.

8.4 Siguin $f, g\colon X \to Y$ aplicacions contínues entre espais topològics, amb Y Hausdorff. Sigui A un subconjunt dens de X tal que $f(a) = g(a)$ per tot $a \in A$. Proveu que $f = g$.

8.5 Siguin X un espai topològic Hausdorff i $A_1, \dots, A_n$ subespais compactes tals que $\bigcap_{i=1}^n A_i = \varnothing$. Proveu que existeixen oberts $U_1, \dots, U_n$ de X amb $A_i \subset U_i$ per tot $i = 1, \dots, n$ i tals que $\bigcap_{i=1}^n U_i = \varnothing$.

8.6 Sigui $f\colon X \to Y$ contínua i exhaustiva, amb X compacte i Y Hausdorff. Demostreu que Y té la topologia quocient determinada per f.

8.7 Sigui X compacte Hausdorff i sigui $f\colon X \to Y$ una aplicació exhaustiva tal que Y té la topologia quocient per f. Proveu que les següents afirmacions són equivalents: (1) Y és Hausdorff. (2) f és tancada. (3) Δ_f és tancat a $X \times X$, on $\Delta_f = \{(x_1, x_2) \in X \times X : f(x_1) = f(x_2)\}$.

8.8 Sigui $X \neq \varnothing$ un espai topològic compacte Hausdorff i $f : X \to X$ una aplicació contínua. Considereu el subespai $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} f^i(X)$. Proveu les següents afirmacions: (a) A és compacte i tancat; (b) A no és buit; (c) $f(A) = A$.

8.9 Sigui $f : D^n \to D^n$ una aplicació contínua tal que $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ per tot $x \neq y$, on d és la mètrica euclidiana. Proveu que f té un únic punt fix. (Aquí $D^n := \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| \leq 1\}$.)

8.10 Demostreu que la condició T_1 és equivalent a que els punts siguin tancats.

8.11 Sigui X un conjunt i siguin $\mathcal{T}' \subsetneq \mathcal{T} \subsetneq \mathcal{T}''$ topologies sobre X. Suposem que X, amb la topologia $\mathcal{T}$, és compacte Hausdorff. Demostreu que X, amb la topologia $\mathcal{T}''$, no és compacte. Demostreu que X, amb la topologia $\mathcal{T}'$, no és Hausdorff. (Aquest curiós resultat es pot interpretar dient que els espais compactes Hausdorff es troben en un cert *punt d'equilibri*, en el sentit que si els traiem algun obert, deixen de ser Hausdorff, i si els afegim algun obert, deixen de ser compactes.)

8.12 Si X és un espai i $x \in X$, diem que x és un punt d'acumulació si tot entorn de x té punts de X diferents de x. Sigui X un espai Hausdorff amb dos punts d'acumulació diferents. Demostreu que X té un subespai que no és ni obert ni tancat.

Capítol 9

Connexió

Si X i Y són dos espais topològics, és molt senzill posar una topologia a la unió disjunta $X \sqcup Y$ prenent com a oberts les unions $U \sqcup V$ on U és un obert de X i V és un obert de Y. Direm que $X \sqcup Y$, amb aquesta topologia, és la **unió disconnexa** de X i Y. Observem que, amb aquesta topologia, X i Y són oberts i tancats a $X \sqcup Y$. En aquest capítol estudiarem la situació contrària: espais que no es poden posar com a unió disconnexa d'altres espais (no buits!).[1]

Com que la frase *espai topològic no buit* es repetirà moltes vegades en aquest capítol, utilitzarem aquest conveni: un **espai-p** ("espai ple") serà un espai topològic no buit. També parlarem d'obert-p, tancat-p, etc.

9.1 Espais connexos

Proposició 9.1. *Sigui Z un espai topològic. Aquestes condicions són equivalents:*

1. *Z no és (homeomorf a una) unió disconnexa de dos espais-p.*

2. *Z no és unió de dos oberts-p disjunts.*

[1] Observem que no és el mateix una *unió disjunta* que una *unió disconnexa*. Unió disjunta és un terme de teoria de conjunts i vol dir que $X = A \cup B$ amb $A \cap B = \varnothing$, mentre que unió disconnexa és un concepte de topologia i vol dir que X és unió disjunta de A i B i, a més, la topologia de X és tal que els seus oberts són les unions d'un obert de A i un obert de B. Per exemple, $[0, 2]$ és unió disjunta de $[0, 1]$ i $(1, 2]$, però no és unió disconnexa de $[0, 1]$ i $(1, 2]$.

3. *Z no és unió de dos tancats-p disjunts.*

4. *Si $A \subset Z$ és obert i tancat, aleshores $A = \varnothing, Z$.*

La demostració d'aquesta proposició és molt senzilla i no l'escrivim aquí.

Definició 9.2. *Un espai topològic diem que és **connex** si compleix les condicions de la proposició anterior.*

A la pràctica, quan volem demostrar que un cert espai és connex o no ho és, hem de triar, entre les condicions equivalents de la proposició anterior, la que sigui més senzilla de comprovar.

Exemples

- Tot espai groller és connex.

- Un espai discret amb més d'un punt no és connex.

- La recta real menys un punt no és connexa. En efecte:

  $$\mathbb{R} - \{a\} = (-\infty, a) \cup (a, \infty)$$

  és una descomposició de $\mathbb{R} - \{a\}$ com unió de dos oberts-p.

- $\mathbb{Q}$, amb la topologia de subespai de $\mathbb{R}$, no és connex perquè podem escriure

  $$\mathbb{Q} = \left(\mathbb{Q} \cap (-\infty, \sqrt{2})\right) \cup \left(\mathbb{Q} \cap (\sqrt{2}, \infty)\right).$$

  De fet, $\mathbb{Q}$ és un exemple del que es coneix com a **espai totalment disconnex**. Un espai X diem que és totalment disconnex si té més d'un punt i tot subespai de X amb més d'un punt és no connex. Observem que un espai discret amb més d'un punt és totalment disconnex, però $\mathbb{Q}$ ens dóna un exemple d'espai totalment disconnex no discret.[2]

- Igual que en el cas de $\mathbb{Q}$, és fàcil veure que el conjunt de Cantor C és totalment disconnex.

[2]Observem que els punts de $\mathbb{Q}$ no són oberts, mentre que en un espai discret els punts són oberts.

- Tot interval tancat de la recta real és connex. En efecte, suposem que tenim una descomposició $[a, b] = A \cup B$ amb A, B tancats-p a $[a, b]$ (i, per tant, tancats-p a $\mathbb{R}$) disjunts. Suposem, sense pèrdua de generalitat, que $a \in A$. Sigui

$$a_0 := \sup \{t \in A : t < s \text{ per tot } s \in B\}.$$

Aleshores, és fàcil comprovar que tot entorn de a_0 conté punts de A i punts de B i, per tant, $a_0 \in A \cap B = \emptyset$, una contradicció.

9.2 Algunes propietats dels espais connexos

En primer lloc, si enganxem espais connexos amb intersecció no buida, el resultat és connex. Dit amb més precisió,

Proposició 9.3. *Siguin $Y_i \subset X$, $i \in I$, subespais connexos d'un espai X, tals que $\cap_i Y_i \neq \emptyset$. Aleshores, $\cup_i Y_i$ és un espai connex.*

Demostració. Utilitzarem que els espais connexos són aquells en què l'únic subespai-p obert i tancat és l'espai total. Sigui $A \subset \cup_i Y_i$ un subespai-p obert i tancat. Existirà $i_0 \in I$ tal que $A \cap Y_{i_0}$ és un subespai-p obert i tancat de Y_{i_0}. Com que Y_{i_0} és connex, tindrem $A \cap Y_{i_0} = Y_{i_0}$ i $Y_{i_0} \subset A$. Per tot j es compleix que $Y_{i_0} \cap Y_j \neq \emptyset$. Per tant, $A \cap Y_j$ és també un subespai-p obert i tancat de Y_j i deduïm, igual que abans, que $Y_j \subset A$. En conclusió, $A = \cup_i Y_i$. □

Corollari 9.4. *Siguin $Y_i \subset X$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, subespais connexos d'un espai X, tals que, per tot i, $Y_i \cap Y_{i+1} \neq \emptyset$. Aleshores, $\cup_i Y_i$ és un espai connex.*

Demostració. Ni ha prou amb considerar

$$Z_j := \bigcup_{i=0}^{j} Y_i, \quad j = 0, 1, 2, \ldots$$

i aplicar la proposició anterior dues vegades. □

Corollari 9.5. *$\mathbb{R}$ és connex. Qualsevol interval de $\mathbb{R}$ (acotat o no, obert, tancat o semi-obert) és connex. Recíprocament, si $A \subset \mathbb{R}$ és connex, aleshores A és un interval.* □

Si apliquem una funció contínua a un espai connex, seguirà essent-ho.

Proposició 9.6. *Si $f : X \to Y$ és contínua i $A \subset X$ és connex, aleshores $f(A)$ és connex.*

Demostració. Considerem la restricció $f : A \to f(A)$ que també és contínua. Si $Z \subset f(A)$ és un subespai-p que és obert i tancat, aleshores $f^{-1}(Z)$ serà un subespai-p obert i tancat a A. Com que A és connex, necessàriament $f^{-1}(Z) = A$ i, per tant, $Z = f(A)$. □

En particular, la connexió es manté per pas al quocient. També es manté per producte:

Proposició 9.7. *Un producte d'espais-p és connex si i només si ho és cada factor.*

Demostració. Només considerarem el cas de dos espais. Si $X \times Y$ és connex, aleshores X i Y ho són per la proposició 9.6. Recíprocament, suposem que X i Y són connexos. Escollim $y \in Y$ i escrivim

$$X \times Y = \bigcup_{x \in X} \big[(X \times \{y\}) \cup (\{x\} \times Y)\big].$$

Per la proposició 9.3, $X \times Y$ és connex. □

Ja sabem, doncs, que $\mathbb{R}^n$ és connex. Com que el tor T^n és un quocient del pla, també sabem que el tor és connex. El mateix podem dir de l'ampolla de Klein o la banda de Moebius. Pel que fa a l'esfera S^n, $n > 0$, observem que l'esfera es pot posar com a unió

$$S^n = \big(S^n - \{(1, 0, \dots, 0)\}\big) \cup \big(S^n - \{(0, \dots, 0, 1)\}\big).$$

Observem ara que cada un dels dos subespais de la descomposició anterior és connex perquè és homeomorf a $\mathbb{R}^n$ per projecció estereogràfica. Per tant, per la proposició 9.3 l'esfera S^n és connexa si $n > 0$. Finalment, l'espai projectiu $\mathbb{R}P^n$ que és un quocient de l'esfera també serà un espai connex.

Un altre resultat útil és el que diu que l'adherència d'un subespai connex és connex. De fet, això es pot generalitzar una mica:

Proposició 9.8. *Sigui $A \subset B \subset \mathrm{Cl}(A) \subset X$ i suposem que A és connex. Aleshores B també ho és.*

Demostració. Sigui $Y \subset B$ obert i tancat a B. Això vol dir que existeixen un obert U de X i un tancat T de X tals que $U \cap B = Y = T \cap B$. Considerem

$Z := Y \cap A$ que serà un obert i tancat de A. Com que A és connex, només hi ha dues possibilitats: $Z = \varnothing$ o $Z = A$.

Si $Z = A$, això implica que $A \subset T$. Per tant, $\mathrm{Cl}(A) \subset T$ i $Y = B$.

Si $Z = \varnothing$, això implica que $U \cap A = \varnothing$. Per tant, $U \cap \mathrm{Cl}(A) = \varnothing$ i $Y = \varnothing$. □

9.3 Connexió per camins

Si X és un espai topològic, un **camí** a X és una aplicació contínua $\omega : I \to X$ on I és l'interval tancat $[0, 1] \subset \mathbb{R}$. Els punts $\omega(0)$ i $\omega(1)$ són els punt *origen* i *final* del camí ω, respectivament. Si $\omega(0) = \omega(1)$, direm que el camí ω és un **llaç**.

Definició 9.9. *Un espai X és **connex per camins** —també en direm arc-connex— si per tota parella de punts $x, y \in X$ existeix un camí ω que té origen a x i final a y.*

Sembla que aquesta condició de connexió per camins ha de tenir alguna relació amb la connexió. Efectivament:

Proposició 9.10. *Tot espai connex per camins és connex.*

Demostració. En primer lloc, observem que, com que l'interval I és connex (corol·lari 9.5), la imatge de qualsevol camí $\omega(I)$ és un espai connex, per la proposició 9.6.

Suposem que $X \neq \varnothing$ és un espai connex per camins i sigui $x_0 \in X$. Per cada punt $x \in X$ sigui ω_x un camí de X amb origen x_0 i final x. Aleshores

$$X = \bigcup_{x \in X} \omega_x(I)$$

i, aplicant la proposició 9.3, X és connex. □

En canvi, un espai pot ser connex sense ser arc-connex. Un exemple interessant d'aquest fenomen és el següent. Considerem la gràfica (figura 9.1) de la funció

$$f(x) = \sin \frac{1}{x}$$

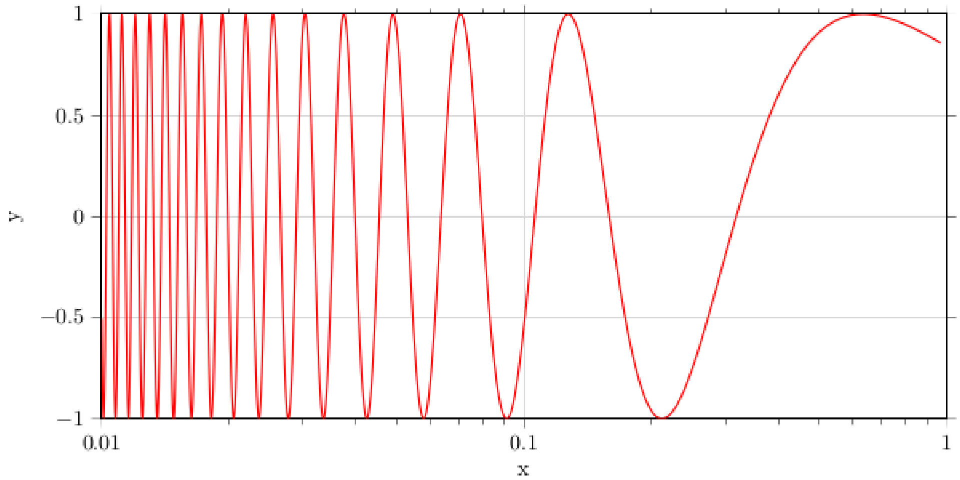


Figura 9.1: La funció $y = \sin(1/x)$ (en escala logarítmica perquè es vegi millor).

per $x \in (0,1]$ i unim a aquesta gràfica el segment vertical entre $(0,-1)$ i $(0,1)$. Anomenem X el subespai de $\mathbb{R}^2$ que resulta, amb la topologia induïda per la topologia ordinària de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} A &:= \{(0,y) : -1 \leq y \leq 1\} \\ B &:= \{(x,y) : y = \sin(1/x),\ 0 < x \leq 1\} \\ X &:= A \cup B \end{aligned}$$

Aleshores,

- X no és connex per camins. Suposem que hi ha un camí ω amb inici a $(0,0)$ i final a $(1, \sin 1)$. Tindrem, per cada $t \in I$,

  $$\omega(t) = (\omega_1(t), \omega_2(t)) \in X \subset \mathbb{R}^2.$$

  El conjunt $\{t : \omega_1(t) = 0\}$ és un tancat de $[0,1]$ i, per tant, tindrà un element màxim t_0. Aleshores, si $t > t_0$ es compleix que $\omega(t) \in B$ i

  $$\omega_2(t) = \sin \frac{1}{\omega_1(t)}$$

  mentre que $\omega_2(t_0) \in [-1,1]$. Això és absurd perquè

  $$\lim_{t \to t_0} \sin \frac{1}{\omega_1(t)}$$

  no existeix.

- X és connex. En efecte, B és connex perquè és la imatge del connex $(0,1]$ per l'aplicació contínua ω. Com que $X = \mathrm{Cl}(B)$ a $\mathbb{R}^2$, aplicant la proposició 9.8, tenim que X és connex.

Algunes de les propietats dels espais connexos són també vàlides per als espais connexos per camins. Per exemple, un producte (d'espais-p) és connex per camins si i només si ho és cada factor; la imatge d'un espai connex per camins per una aplicació contínua és connexa per camins; un quocient d'un espai connex per camins és connex per camins. La connexió per camins és també una propietat topològica. Com que dos punts qualsevol de $\mathbb{R}^n$ es poden unir amb un segment, $\mathbb{R}^n$ és connex per camins. Els cercles màxims de S^n ($n > 0$) ens demostren que l'esfera S^n amb $n > 0$ és connexa per camins. També ho són el tor, l'ampolla de Klein i els espais projectius.

9.4 Components connexos d'un espai

Sigui X un espai i considerem aquesta relació d'equivalència:

$$x \sim y \text{ si i només si existeix } C \subset X \textbf{ connex} \text{ tal que } x, y \in C.$$

Les propietats reflexiva i simètrica són evidents i la propietat transitiva resulta de la proposició 9.3. Les classes d'equivalència respecte d'aquesta relació s'anomenen **components connexos**[3] de X.

Fem una llista d'algunes de les propietats bàsiques dels components connexos d'un espai.

- Si $x \in X$, el component connex que conté x és

$$C(x) = \bigcup_{\substack{x \in A \\ A \text{ connex}}} A$$

[3]Component connex o component connexa? Hi havia una certa tradició d'utilitzar la paraula component en femení —per exemple en el cas de "les components d'un vector"— que es va estendre al cas de "les components connexes" d'un espai. Tanmateix, la primera edició del DLC només admetia el gènere masculí, en tots els casos. És més, en aquesta primera edició hi consta l'exemple concret *"els components d'un vector"*. Per tant, és evident que cal parlar de *"els components connexos d'un espai"*. Curiosament, la segona edició del DLC diu que la paraula "component" es pot usar en masculí o femení **en el cas dels vectors**. No sabem quina és la justificació d'aquest canvi de criteri entre les dues edicions del DLC. En conclusió, encara que potser es podria usar "component" en femení per referir-se a les parts connexes d'un espai topològic, ens sembla que és més apropiat utilitzar aquesta paraula en masculí.

- $C(x)$ és maximal entre els subespais connexos de X que contenen x.
- Cada component connex $C(x)$ és connex. Això resulta de la proposició 9.3.
- Els components connexos d'un espais són disjunts.
- Cada component connex de X és un tancat de X. En efecte, si C és un component connex de X, hem vist que C és connex. Per la proposició 9.8, $\mathrm{Cl}(C)$ també és connex. Per la maximalitat de C, tenim $C = \mathrm{Cl}(C)$.
- En canvi, els components connexos poden no ser oberts. Pensem, per exemple, en l'espai $\mathbb{Q}$ amb la topologia ordinària. Hem vist que és un espai totalment disconnex. Per tant, els seus components connexos són els punts, que no són oberts.
- Si X té un nombre finit de components connexos $C_1, \ldots, C_n$, aleshores cada component connex és obert i tancat i X és homeomorf a la unió disconnexa $C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_n$.

De manera similar a com hem definit els components connexos d'un espai, podem definir els **components arc-connexos** d'un espai X. Considerem la relació d'equivalència

$$x \sim y \text{ si i només si existeix un camí de } X \text{ que uneix } x \text{ i } y.$$

i definim els components arc-connexos de X com les classes d'equivalència respecte d'aquesta relació. Evidentment, si dos punts són al mateix component arc-connex, també són al mateix component connex, però l'exemple anterior d'un espai connex que no és arc-connex ens demostra que, en general, els components connexos i els components arc-connexos d'un espai poden ser diferents.

El concepte de connexió que estudiem en aquest capítol ens permet distingir entre espais que, fins ara, no podíem saber si eren homeomorfs o no. Per exemple:

Proposició 9.11. *$\mathbb{R}$ no és homeomorf a $\mathbb{R}^n$, $n > 1$.*[4]

[4]Aquest no és el teorema que ens agradaria. El que realment voldríem és demostrar que si $n \neq m$, aleshores $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$ no són homeomorfs. L'argument de connexió que acabem d'utilitzar no és útil en aquesta situació més general. La demostració d'aquest teorema necessita eines de topologia algebraica que introdueixen conceptes de *connexió d'ordre superior*.

Demostració. Suposem que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ fos un homeomorfisme. Aleshores, restringint f a $\mathbb{R} - \{0\}$ tindríem un homeomorfisme

$$\mathbb{R} - \{0\} \cong \mathbb{R}^n - \{f(0)\}.$$

Però això és impossible perquè $\mathbb{R} - \{0\}$ no és connex i $\mathbb{R}^n - \{f(0)\}$ és connex per camins i, per tant, és connex.[5] □

9.5 El teorema de la corba de Jordan

Imaginem un llaç al pla, és a dir, una aplicació contínua $\omega : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ tal que $\omega(0) = \omega(1)$. Observem que això és essencialment el mateix que dir que tenim una aplicació contínua $S^1 \to \mathbb{R}^2$. Imaginem que aquesta aplicació és *injectiva*. Tradicionalment, diríem que ω és una *corba tancada simple* o també una *corba de Jordan*, en honor al matemàtic francès Camille Jordan (1838–1922).

El **teorema de la corba de Jordan** fa una afirmació que sembla evident i que, en canvi, és relativament difícil de demostrar:

Teorema 9.12. *Una corba tancada simple al pla $\mathbb{R}^2$ divideix el pla en dos components connexos. Un d'aquests components és acotat i s'anomena l'interior de la corba; l'altre component és no acotat i s'anomena l'exterior de la corba. La frontera de cada component és la corba.*

És a dir, el teorema diu que $\mathbb{R}^2 - \omega(I)$ té dos components connexos, un és acotat i l'altre no. La història d'aquest teorema és interessant perquè es va donar com a evident fins que alguns matemàtics es van adonar que no ho era gens. Finalment, Jordan va donar una demostració del teorema el 1887, que no era gens trivial. Per tal d'adonar-nos que aquest teorema és més profund del que sembla, fem aquests comentaris:

- Tinguem present l'existència de la corba de Peano, que és una corba contínua al pla que passa per tots els punts del quadrat unitat. El teorema de la corba de Jordan no s'aplica a la corba de Peano, perquè no és injectiva, però aquest exemple ens ha de fer recordar que una corba contínua pot ser un objecte força complex.

[5]El mateix argument ens demostraria que, si $n > 1$, S^1 i S^n no són homeomorfs i $I = [0, 1]$ i I^n, no són homeomorfs. Com a conseqüència, obtenim que no pot existir una *corba de Peano injectiva*, és a dir, una aplicació contínua exhaustiva $I \to I^2$ no pot ser injectiva. Si ho fos, pel teorema 8.4 hauria de ser un homeomorfisme.

- El teorema de la corba de Jordan es pot generalitzar a dimensions superiors. La idea és la següent. Una corba de Jordan és una aplicació contínua injectiva $S^1 \to \mathbb{R}^2$, per tant, l'objecte anàleg en dimensió n seria una aplicació contínua injectiva $\omega : S^{n-1} \to \mathbb{R}^n$. Aleshores, el teorema (que es coneix com a *teorema de separació de Jordan-Brouwer*) diria que, en aquestes circumstàncies, $\mathbb{R}^n - \omega(S^{n-1})$ té dos components connexos, un d'acotat i l'altre que no ho és.

- Intuïtivament, sembla que el teorema de la corba de Jordan es podria completar amb una conclusió suplementària, consistent en afirmar que l'interior de la corba és homeomorf a l'interior d'un disc D^2 i l'exterior de la corba és homeomorf al complement del disc. Efectivament, això és cert i es coneix com a *teorema de Schönflies* (i tampoc no és senzill de demostrar). Curiosament, aquest teorema que també sembla "evident" és *fals* en dimensions superiors. En particular, podem posar una esfera S^2 de manera contínua i injectiva a $\mathbb{R}^3$ de manera que l'interior no sigui homeomorf a l'interior de la bola D^3.[6]

- Com ja hem dit, la demostració del teorema de la corba de Jordan per mètodes més o menys elementals no és senzilla. En canvi, les eines bàsiques de la topologia algebraica permeten donar una demostració senzillíssima del teorema *en dimensió arbitrària*.

9.6 Exercicis addicionals

9.1 Siguin $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_2$ dues topologies en el mateix conjunt X, de manera que $\mathcal{T}_2$ sigui més fina que $\mathcal{T}_1$. Si X és connex amb la topologia $\mathcal{T}_1$, és cert que també ho serà amb la topologia $\mathcal{T}_2$?

9.2 Demostreu que aquests dos subconjunts del pla $\mathbb{R}^2$ (amb les topologies usuals) no són homeomorfs: $X = \{x : d(x, p_0) = 1 \text{ o } d(x, p_1) = 1\}$, $Y = \{x : d(x, p_2) = 1\}$ on $p_0 = (0, -1)$, $p_1 = (0, 1)$ i $p_2 = (0, 5)$.

[6] L'exemple més conegut és *l'esfera amb banyes d'Alexander*, descoberta el 1924 per James Alexander, quan intentava generalitzar el teorema de Schönflies a dimensions superiors. L'estudiant podrà trobar a Internet moltes imatges d'aquest objecte, si hi està interessat.

9.3 Sigui X un espai topològic amb la topologia discreta que conté com a mínim dos punts. Proveu que un espai topològic Y és connex si i només si tota aplicació contínua $f : Y \to X$ és constant.

9.4 Sigui X un conjunt infinit amb la topologia cofinita. Proveu que X és connex.

9.5 Direm que dos subconjunts A i B d'un espai topològic X estan separats si $\mathrm{Cl}(A) \cap B = \varnothing = \mathrm{Cl}(B) \cap A$. Proveu les afirmacions següents:

1. X és connex si i només si X no és la unió de dos subconjunts-p separats.

2. Sigui Y un subespai connex de X. Per tota parella de subespais separats A i B de X tals que $Y \subset A \cup B$, es compleix que $Y \subset A$ o $Y \subset B$.

9.6 Siguin A i B dos subespais connexos de X tals que $A \cap \mathrm{Cl}(B) \neq \varnothing$. Demostreu que $A \cup B$ és connex.

9.7 Demostreu que aquest subespai de $\mathbb{R}^2$ és connex:

$$\{(x, y) : 1/2 \leq x \leq 1,\ y = 0\} \cup \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1,\ y = x/n,\ n \in \mathbb{Z}\}.$$

9.8 Siguin $\{C_n\}_{n>0}$ subconjunts connexos i compactes d'un espai Hausdorff tals que $C_{n+1} \subset C_n$ per tot $n > 0$. Demostreu que $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ és connex.

Doneu un exemple d'una família de subconjunts connexos tancats $C_n \subset \mathbb{R}^2$ tals que $C_{n+1} \subset C_n$ per a tot $n \in \mathbb{N}$, però $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ no sigui connex.

9.9 Sigui $A \neq \varnothing, X$ un subespai de X, on X és connex. Proveu que $\partial A \neq \varnothing$.

9.10 Proveu les següents afirmacions:

1. Sigui X un espai topològic i C un subespai connex de X. Si per a un subespai E de X es compleix $C \cap E \neq \varnothing$ i $C \cap (X - E) \neq \varnothing$, aleshores $C \cap \partial E \neq \varnothing$.

2. Siguin X un espai topològic, $A \subset X$, $x \in \mathrm{Int}(A)$, $y \notin A$. Aleshores tot camí que uneix x amb y talla la frontera de A.

9.11 Sigui $f : S^1 \to \mathbb{R}$ una aplicació contínua. Proveu que existeix $x \in S^1$ tal que $f(x) = f(-x)$. [Això es pot expressar dient que, en cada instant de temps, hi ha dos punts de l'equador de la Terra, antípoda un de l'altre, amb la mateixa temperatura.]

9.12 A $\mathbb{R}^2$, considereu la família de subconjunts $\mathcal{B} = \{[a, b) \times [c, d) : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$.

1. Proveu que $\mathcal{B}$ és base d'oberts d'una topologia $\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}^2$ i que $\mathcal{S}$ és més fina que la topologia usual de $\mathbb{R}^2$.

2. Proveu que el conjunt

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(1, 0)\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 2)^2 + y^2 < 1\}$$

és connex amb la topologia usual però no ho és amb la topologia $\mathcal{S}$.

9.13 Sigui d la distància ordinària de $\mathbb{R}^2$ i considereu aquests tres subespais:

$$A := \{x : d(x,(1,0)) < 1\} \cup \{x : d(x,(-1,0)) < 1\}$$

$$B := A \cup \{(0,0)\}, \quad C := \mathrm{Cl}(A)$$

Demostreu que A, B, C no són homeomorfs.

9.14 Un espai es diu que és localment arc-connex si hi ha una base de la seva topologia que està formada per espais connexos per camins. Demostreu que si X és un espai connex i localment arc-connex, aleshores X és connex per camins.

Capítol 10

Varietats topològiques

Si comparem espais com puguin ser l'esfera, el tor o l'espai projectiu amb espais com el conjunt de Cantor, un espai groller o l'espai $\mathbb{Q}$, veiem que els primers tenen en comú que, *a petita escala*, són indistingibles de l'espai euclidià $\mathbb{R}^n$. Els espais que tenen aquesta propietat d'assemblar-se *"localment"* a l'espai euclidià tenen una enorme importància. Reben el nom de **varietats**[1] —o, si volem evitar la confusió amb altres tipus de varietats, **varietats topològiques**.[2]

10.1 El concepte de varietat

Definició 10.1. *Un espai topològic $X \neq \varnothing$ és una **varietat** de dimensió n si tot punt $x \in X$ té un entorn que és homeomorf a $\mathbb{R}^n$ (i X compleix dues propietats tècniques que discutirem més endavant).*[3]

Observem que res no canviaria si haguéssim definit una varietat com un espai on tot punt té un entorn que és homeomorf a un obert de $\mathbb{R}^n$.[4]

[1] En anglès, aquests objectes que estudiarem ara s'anomenen *manifolds*. En aquest punt tenim un petit dèficit de lèxic respecte de l'anglès perquè les dues paraules angleses *variety* i *manifold* corresponen a una única paraula en català.

[2] En aquest curs només estudiarem varietats topològiques i, per tant, no tindrem cap problema si les anomenem simplement "varietats". La idea dels altres tipus de varietats —per exemple, *les varietats diferenciables*— és la mateixa: espais que s'assemblen, localment, a l'espai euclidià. El que canvia, però és el significat de "assemblar-se". En el nostre cas, el que volem és que la *topologia* s'assembli a la de $\mathbb{R}^n$.

[3] Sovint, direm que una varietat és un espai *localment homeomorf* a $\mathbb{R}^n$.

[4] Cal utilitzar el fet que una bola oberta $B(0, \epsilon)$ és homeomorfa a $\mathbb{R}^n$. Un homeomorfisme ve donat per l'aplicació $x \mapsto x/(\epsilon - ||x||)$.

Si X és una varietat de dimensió 2, direm que X és una **superfície**.

Per exemple, la Terra no és plana —l'esfera S^2 no és homeomorfa al pla $\mathbb{R}^2$— però a cada punt de la Terra podem dibuixar un "mapa" —en direm una *carta local*— que ens doni un homeomorfisme entre un entorn d'aquest punt i un obert de $\mathbb{R}^2$. De fet, podem construir un *atles*, que serà un conjunt de cartes locals que cobreixin tota la Terra. Aquests conceptes tenen sentit en una varietat qualsevol M. Una varietat admet un **atles**

$$\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$$

que és un conjunt de **cartes locals** U_i que són oberts de M amb homeomorfismes

$$\phi_i : U_i \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n$$

de manera que $\cup_i U_i = M$. En els llocs on dues cartes locals es tallin, tindrem uns *canvis de coordenades* que seran homeomorfismes

$$\mathbb{R}^n \supset \phi_j(U_i \cap U_j) \xrightarrow{\phi_j^{-1}} U_i \cap U_j \xrightarrow{\phi_i} \phi_i(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{R}^n.$$

Aquests homeomorfismes s'anomenen **funcions de transició**.

Exemples

- No cal dir que la propietat de ser una varietat és topològica.
- Tot espai discret és una varietat de dimensió zero. (Vegeu, però, més avall.)
- $\mathbb{R}^n$ és una varietat de dimensió n.[5]
- Un obert de $\mathbb{R}^n$ és una varietat de dimensió n. Més en general, un obert d'una varietat de dimensió n és també una varietat de dimensió n.
- Si N és una varietat de dimensió n i M és una varietat de dimensió m, aleshores $N \times M$ és una varietat de dimensió $n + m$.
- L'esfera S^n és una varietat de dimensió n. La projecció estereogràfica ens demostra que el complement d'un punt a S^n és homeomorf a $\mathbb{R}^n$. Per tant, tot punt de S^n té un entorn homeomorf a $\mathbb{R}^n$.

[5] Però encara no som capaços de demostrar que $\mathbb{R}^n$ *no* sigui una varietat de dimensió m per algun $m \neq n$.

- El tor $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ és una varietat de dimensió n.

- L'espai projectiu $\mathbb{R}P^n$ és una varietat de dimensió n. La demostració és senzilla. Recordem que

$$\mathbb{R}P^n = S^n/\{-v \sim v\}.$$

  Donat $[x] \in \mathbb{R}P^n$, sigui $U := B(x, \epsilon)$ una bola de S^n de radi prou petit perquè no hi hagi dos punts de U que siguin diametralment oposats. Recordem (proposició 6.8) que la projecció $\pi : S^n \to \mathbb{R}P^n$ és oberta i tancada. Aleshores, la imatge de U a $\mathbb{R}P^n$ és un obert homeomorf a U i, per tant, a $\mathbb{R}^n$.

- L'ampolla de Klein és una varietat de dimensió 2. Recordem que l'ampolla de Klein es pot obtenir com un quocient del tor per una certa acció del grup de dos elements (pàgina 74) i podem aplicar el mateix argument del punt anterior.

10.2 Dues condicions tècniques

A la definició de varietat hem dit que, a banda de la característica essencial d'una varietat de ser localment homeomorfa a un espai euclidià, una varietat també ha de complir dues condicions més que havíem de discutir més endavant. Ho farem ara.

La primera condició que cal exigir a la definició de varietat és que sigui **Hausdorff**. A primera vista, podria semblar que, com que $\mathbb{R}^n$ és Hausdorff, qualsevol espai localment homeomorf a $\mathbb{R}^n$ també ho hauria de ser, però hi ha exemples senzills que demostren que això no és així. Sigui X la unió disconnexa de dues còpies de la recta $\mathbb{R}$

$$X := \mathbb{R}_1 \sqcup \mathbb{R}_2$$

i ara fem un quocient de X consistent en identificar cada punt de la primera recta amb el mateix punt de la segona recta $x_1 \sim x_2$ —excepte l'origen. Sigui M l'espai quocient.

Podem imaginar M com una recta real amb "dos orígens" 0_1, 0_2. La topologia de M és tal que cada punt té un entorn homeomorf a $\mathbb{R}$, és a dir, M podria ser una varietat. Però M no és Hausdorff perquè tot entorn de 0_1 talla tot entorn de 0_2.

Per tal d'explicar quina és la segona condició convé fer aquesta observació. Considerem aquesta família d'oberts de $\mathbb{R}^n$.

$$\left\{ B\left(x, \frac{1}{n}\right) : x \in \mathbb{Q}^n,\ n = 1, 2, 3, \dots \right\}.$$

Aquesta família és numerable i és una base d'oberts de $\mathbb{R}^n$. És a dir, l'espai topològic $\mathbb{R}^n$ **té una base d'oberts numerable**. També diem que compleix el **segon axioma de numerabilitat**.[6] Un exemple trivial d'un espai que no compleix aquest segon axioma seria un espai discret no numerable. En principi, un espai Hausdorff localment homeomorf a $\mathbb{R}^n$ podria no complir aquest segon axioma de numerabilitat. Per tant, a partir d'ara exigim que una varietat compleixi aquest segon axioma de numerabilitat.[7] Aquesta condició és important perquè el segon axioma es necessita per demostrar diverses propietats de les varietats.

Com que hem posat dues noves restriccions al concepte de varietat, ara ens cal veure que en els exemples de varietat que hem considerat a l'apartat anterior es compleixen aquestes dues condicions. Només cal corregir el que hem dit abans sobre els espais discrets. Tot espai discret numerable és una varietat, però un espai discret no numerable no compleix el segon axioma de numerabilitat i no és una varietat.

En principi, no insistirem en aquestes qüestions.

10.3 Varietats connexes

Evidentment, una varietat pot ser connexa o no ser-ho. Si M i N són varietats, és clar que la unió disconnexa $M \sqcup N$ és també una varietat i no és connexa.

[6] El primer axioma de numerabilitat afirma que per tot punt de l'espai hi ha una família numerable $\mathcal{B}$ d'entorns d'aquest punt tal que tot entorn del punt conté un entorn de la família $\mathcal{B}$.

[7] L'exemple clàssic de varietat connexa que no compleix el segon axioma de numerabilitat —i que, per tant, no considerarem que sigui una varietat— és l'espai topològic que es coneix com la *recta llarga*. Com que no l'utilitzarem en aquest curs, n'hi haurà prou amb donar una idea aproximada de com es construeix aquest espai. En primer lloc, observem que la recta ordinària $\mathbb{R}$ es pot construir com la unió d'una família numerable d'intervals $[0, 1)$ amb una topologia que fa que l'extrem superior de cada interval estigui "adherit" a l'extrem inferior del següent interval. De manera similar, la recta llarga es construeix a partir d'una família no numerable d'intervals $[0, 1)$ amb una topologia que fa que l'extrem superior de cada interval estigui adherit a l'extrem inferior del "següent" interval. Per tal de donar sentit a l'expressió "següent" cal utilitzar la teoria d'ordinals.

El teorema següent ens diu que si coneixem les varietats connexes, ja coneixem totes les varietats.[8]

Teorema 10.2. *Sigui M una varietat de dimensió n i siguin M_i, $i \in I$ els seus components connexos.*

1. *Els M_i són oberts de M.*
2. *I és numerable. Si M és compacta, aleshores I és finit.*
3. *Cada M_i és una varietat de dimensió n.*
4. *M és unió disconnexa dels seus components connexos: $M = \coprod_{i \in I} M_i$.*

Demostració. Cada punt de M té un entorn homeomorf a $\mathbb{R}^n$. Per tant, cada punt de M té un entorn connex. Això implica immediatament que cada M_i és obert. Com que un obert d'una varietat és una varietat, tenim que cada M_i és una varietat. La condició (4) és certa per a tot espai en que els components connexos siguin oberts. Si I no fos numerable, M no podria tenir una base numerable d'oberts. Si I és infinit, és evident que M no pot ser compacta. $\square$

En conclusió, tota varietat és unió disconnexa numerable de varietats connexes. A partir d'ara, doncs, només ens preocuparem per les varietats connexes.

10.4 Políedres amb cares identificades

Hem vist diversos exemples de superfícies obtingudes fent quocient d'un quadrat I^2 per unes certes identificacions entre els punts dels costats. El tor, l'esfera, el pla projectiu i l'ampolla de Klein els hem obtingut d'aquesta manera —encara que també hem vist construccions alternatives. Podem fer coses similars amb un polígon ("ple"). Podem prendre un polígon $P \subset \mathbb{R}^2$ i fer quocient per algunes identificacions entre els seus costats. Normalment, aquestes identificacions es representen gràficament

[8] Per entendre millor el teorema que ve a continuació, recordem que tot espai és unió disjunta dels seus components connexos, però no tot espai és unió *disconnexa* dels seus components connexos. Per exemple, els components connexos de $\mathbb{Q}$ són els punts, però una unió disconnexa de punts és un espai discret i $\mathbb{Q}$ no ho és. Aquest fenomen també es pot donar en espais compactes: els components connexos del conjunt de Cantor C —que és compacte— són els punts, però C no és discret. El que diu el teorema és que aquesta situació no es pot donar a les varietats.

orientant els costats i anomenant amb una mateixa lletra els costats que identifiquem, com a la figura 10.1.

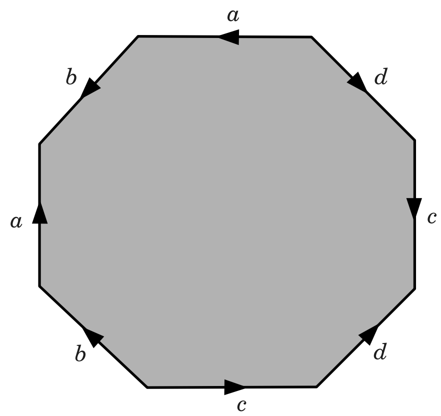


Figura 10.1: Un octògon amb els costats identificats.

En cada cas, l'espai quocient està perfectament ben definit, però pot ser que no sigui una superfície. En una superfície, cada punt ha de tenir un entorn homeomorf a un disc D^2. Per als punts de l'interior del polígon P, això és evident, però per als punts dels costats de P, dependrà de com siguin les identificacions i en cada cas, cal comprovar amb paciència si els punts interiors de les arestes tenen entorns homeomorfs a D^2 i si això també és cert per als vèrtex. Per exemple, si volem que el quocient sigui una superfície, és clar que una condició necessària és que els costats estiguin identificats dos a dos, és a dir, que cada costat de P estigui identificat a un únic costat de P —en particular, el nombre de costats de P ha de ser parell.[9] També és cert —encara que no sigui evident— que aquesta condició és suficient.

Per exemple, en el cas de l'octògon P de la figura 10.1, es pot comprovar que el quocient és una superfície que es pot representar com un subespai de $\mathbb{R}^3$ (figura 10.2) que s'anomena el "doble tor". Però hi pot haver exemples en que s'obtinguin superfícies que, com el pla projectiu o l'ampolla de Klein, no siguin subespais de $\mathbb{R}^3$.

Aquestes construccions també es poden fer en dimensions superiors. Per exemple, si agafem un políedre ("ple") de $\mathbb{R}^3$ i identifiquem les seves

[9]Sembla evident que si hi ha tres arestes identificades, el quocient *no pot ser una superfície*, però la demostració no és del tot trivial i utilitza el teorema de la corba de Jordan.

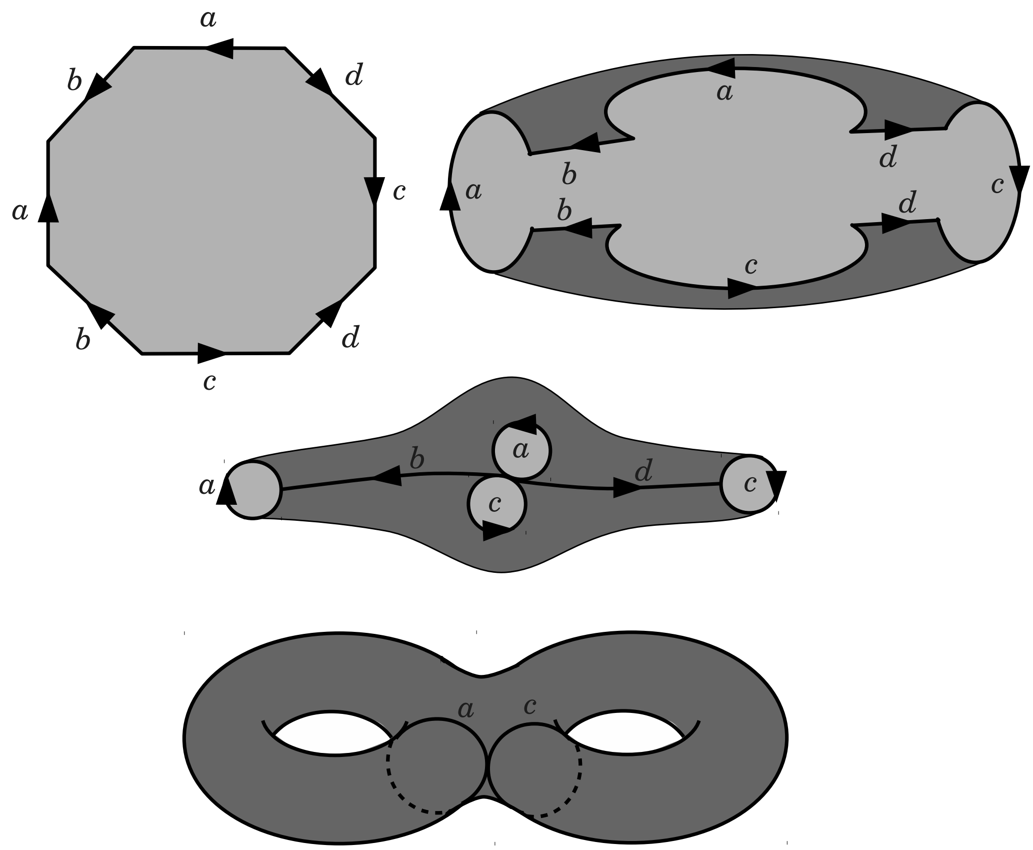


Figura 10.2: El doble tor a partir d'un octògon amb els costats identificats.

cares d'alguna manera, l'espai quocient podria resultar que és una varietat de dimensió 3. Un exemple fàcil consisteix en prendre un cub I^3 i identificar els seus costats de manera que l'espai quocient sigui el tor de dimensió 3 $T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$. Un exemple més sofisticat i molt més interessant és el de l'**esfera de Poincaré**.[10]

[10]Aquesta varietat de dimensió 3 la va descobrir Henri Poincaré el 1904 com a contraexemple a la primera versió de la famosa *conjectura de Poincaré*. A la vista d'aquest contraexemple, el mateix Poincaré va modificar la seva conjectura i la nova versió va ser un dels problemes fonamentals de les matemàtiques fins l'any 2002 en que Grigori Perelman va demostrar que la conjectura és correcta. Si llegim l'obra original de Poincaré, observarem que no va mai presentar el seu problema com una conjectura, sinó com una pregunta. *"Est-il possible que le groupe fondamental de V se réduise à la substitution identique, et que pourtant V ne soit pas simplement connexe? [...] Mais cette question nous entrainerait trop loin."* I tant! Han calgut cent anys d'avenços de la topologia i la geometria per respondre aquesta pregunta!

Podem construir l'esfera de Poincaré a partir d'un dodecàedre (sòlid) identificant les seves cares de la següent manera. Cada cara és un pentàgon. Identifiquem cada cara amb la seva diametralment oposada fent un gir de $\pi/5$ en el sentit de les agulles del rellotge (figura 10.3).

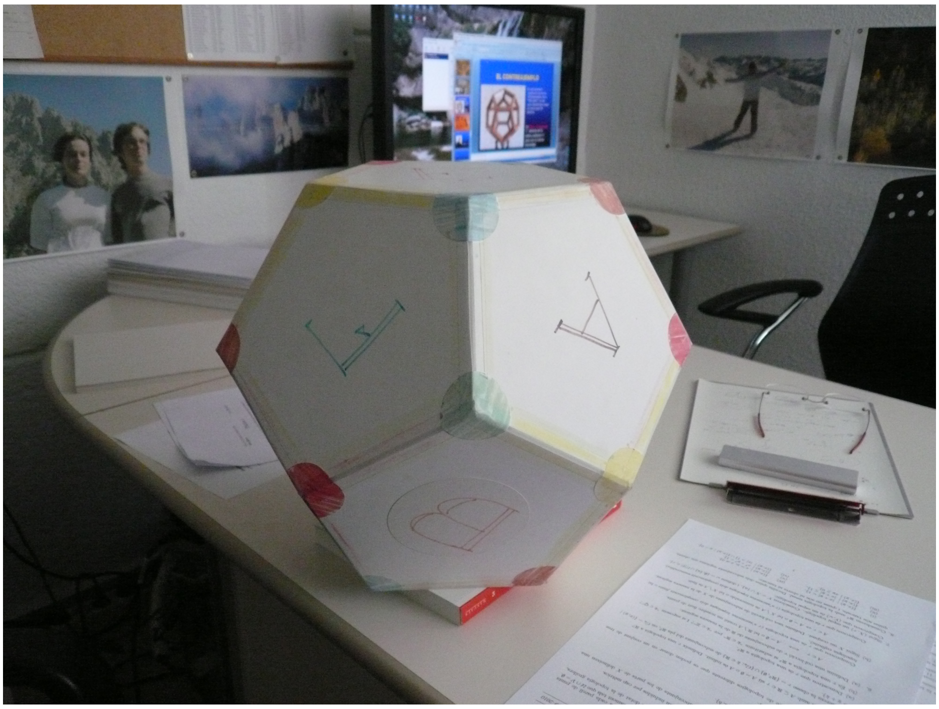


Figura 10.3: Un dodecàedre amb les cares identificades de manera que l'espai quocient és l'esfera de Poincaré.

No és evident que l'espai quocient del dodecàedre per aquestes identificacions sigui una varietat: cal comprovar amb paciència que els vèrtex i els punts de les arestes del dodecàedre tenen entorns homeomorfs a D^3. Hi ha una altra construcció més conceptual d'aquesta varietat de dimensió 3 com a quocient d'una esfera S^3 per l'acció d'un cert grup finit G que actua lliurement sobre S^3.[11]

[11] La situació és aquesta. Existeix un políedre regular a $\mathbb{R}^4$, inscrit a l'esfera unitat $S^3 \subset \mathbb{R}^4$, que té 120 cares que són dodecàedres sòlids. Hi ha un grup de 120 simetries d'aquest políedre que té per regió fonamental un qualsevol d'aquests dodecàedres i de manera que l'espai quocient per l'acció d'aquest grup és una varietat de dimensió 3 que és l'esfera de Poincaré. A Internet hi podem trobar visualitzacions molt interessants —i boniques— de tot això.

10.5 Orientacions

Orientar un segment és posar-se d'acord en què significa, a cada punt, "endavant" i "endarrere". Orientar una superfície és posar-se d'acord en quin ha de ser el sentit de les agulles del rellotge a cada punt. Orientar una varietat de dimensió tres és posar-se d'acord en com han de girar els tirabuixons a cada punt de la varietat. Això de vegades es pot fer i de vegades és impossible. Per exemple, si dibuixem un rellotge sobre una banda de Moebius i fem que es mogui per la banda, quan torni al punt inicial les seves busques podrien girar en sentit contrari —en funció de quin camí hagi seguit.

Aquesta és la idea intuïtiva d'orientabilitat. Si volem formalitzar matemàticament aquesta idea, de seguida topem amb dificultats importants. A continuació, intentarem donar un tractament correcte d'aquest concepte, però cal avisar que *no és possible tractar el tema de l'orientabilitat de les varietats (topològiques) sense utilitzar eines de topologia algebraica.* Per això mateix, al llarg d'aquesta secció donarem arguments que no podrem justificar completament.

Comencem amb els espais vectorials sobre $\mathbb{R}$.[12] Per exemple, una recta —és a dir, un espai vectorial V de dimensió 1 sobre el cos $\mathbb{R}$. Tindrem V orientat tan bon punt hàgim escollit un vector $v \in V$, $v \neq 0$. Aleshores, qualsevol vector λv amb $\lambda > 0$ donarà la mateixa orientació i qualsevol vector λv amb $\lambda < 0$ donarà l'orientació contrària. Per orientar un espai vectorial de dimensió 2 cal escollir una base ordenada v_1, v_2. Això també ens determinarà un *sentit de gir positiu* que serà el que passa de v_1 a v_2 pel camí més curt. Una segona base ordenada w_1, w_2 donarà la mateixa orientació si el determinant del canvi de base és positiu i donarà l'orientació contrària si el determinant del canvi de base és negatiu.

En general, orientar un espai vectorial és escollir una base ordenada, de manera que dues bases ordenades donen la mateixa orientació si el determinant del canvi de base és positiu. Un espai vectorial té, doncs, dues orientacions possibles. L'espai vectorial $\mathbb{R}^n$ el podem considerar sempre orientat per la seva base canònica.

Si $f : V \to V'$ és un isomorfisme *lineal* entre dos espais vectorials

[12]Que el cos base sigui el cos del nombres reals és essencial en el concepte d'orientabilitat. En el fons, el "problema" de l'orientabilitat prové del fet que l'espai d'automorfismes lineals de $\mathbb{R}^n$ té dos components connexos: el dels automorfismes de determinant positiu i el dels automorfismes de determinant negatiu. Sobre el cos dels nombres complexos, per exemple— podríem dir que no hi ha problema d'orientabilitat.

orientats, direm que f *conserva (inverteix) l'orientació si el determinant de* f *—respecte de les bases que donen les orientacions— és positiu (negatiu).*[13]

Suposem ara que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ és un homeomorfisme. Resulta que, encara que f no sigui una aplicació lineal *té sentit dir si* f *conserva l'orientació*. Per exemple, si f és una aplicació diferenciable, direm que f conserva l'orientació si el determinant de la seva matriu jacobiana és positiu. Si f és simplement una aplicació contínua, no podem utilitzar les eines del càlcul diferencial —com el jacobià— i és aquí on ens calen unes eines de topologia algebraica que no caben en aquest curs. Acceptem, doncs, que aquest concepte està ben definit. Amb aquestes mateixes eines, no és pas més difícil donar sentit a la frase f *conserva l'orientació* si $f : U \to U'$ és un homeomorfisme entre dos oberts de $\mathbb{R}^n$.[14]

Ara ja podem definir què entenem per varietat orientable. Suposem que tenim una varietat M. Recordem que M tindrà un atles format per cartes locals homeomorfes a $\mathbb{R}^n$ i que a les interseccions de parelles de cartes locals tindrem unes funcions de transició $\phi_{i,j}$ que són homeomorfismes entre oberts de $\mathbb{R}^n$. Per tant, aquestes funcions de transició poden conservar l'orientació o no.

Definició 10.3. *Direm que una varietat M és* ***orientable*** *si admet un atles on totes les funcions de transició conserven l'orientació.*

Vegem alguns exemples de varietats orientables i varietats no orientables.

- $\mathbb{R}^n$ —i, més en general, qualsevol obert de $\mathbb{R}^n$— és orientable.
- L'esfera S^n és orientable.

  Hem vist que la projecció estereogràfica ens dóna un atles de S^n amb dues úniques cartes locals

  $$U = S^n - \{(0, \dots, 0, 1)\}, \quad V = S^n - \{(0, \dots, 0, -1)\}.$$

  Per tant, hi ha una única funció de transició.

  $$\Phi : \mathbb{R}^n - \{0\} \to \mathbb{R}^n - \{0\}.$$

[13] Per exemple, una rotació conserva l'orientació i una reflexió respecte d'un hiperplà inverteix l'orientació.

[14] Si els oberts són connexos, només hi ha dues possibilitats: f conserva l'orientació o f inverteix l'orientació. Si els oberts no fossin connexos, aleshores podria passar que f conservés l'orientació en uns components connexos i l'invertís en uns altres components connexos.

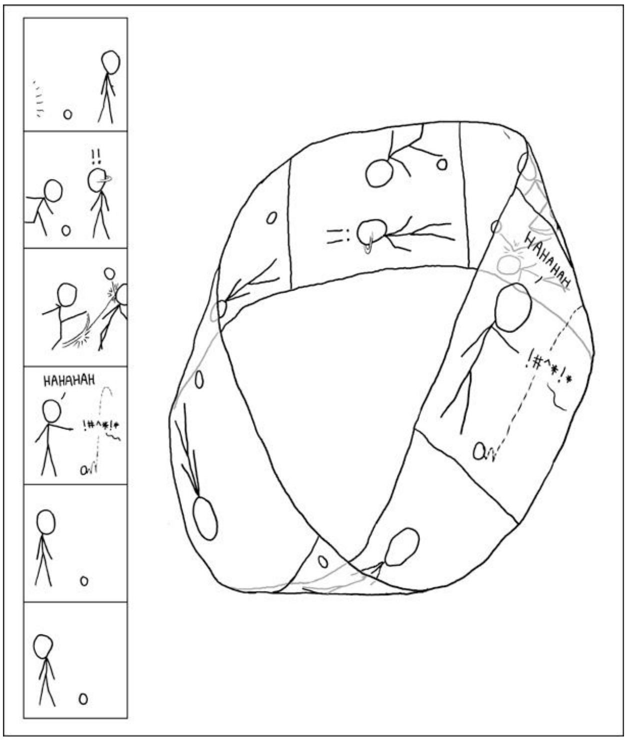


Figura 10.4: "Moebius Battle" (xkcd.com, Creative Commons License).

Si calculem aquesta funció de transició i veiem que conserva l'orientació ja haurem demostrat que S^n és orientable. De fet, si $n > 1$ no cal fer cap càlcul. En efecte, com que Φ està definida sobre un espai connex, només hi ha dues possibilitats: conserva l'orientació o bé inverteix l'orientació. Si conserva l'orientació, ja tenim que S^n és orientable. Si inverteix l'orientació, aleshores n'hi ha prou amb canviar una de les dues projeccions estereogràfiques —composant, per exemple, amb una reflexió a $\mathbb{R}^n$— i tindrem que la funció de transició conserva l'orientació. En el cas $n = 1$, aquest argument no és vàlid, perquè la funció de transició està definida sobre l'espai no connex $\mathbb{R} - \{0\}$ i podria, per exemple, conservar l'orientació en els negatius i invertir-la en els positius. Si calculem aquesta funció de transició, veiem que és la funció $\Phi(x) = 1/x$ que té derivada negativa arreu i, per tant, inverteix l'orientació arreu.

- La banda de Moebius no és orientable (figura 10.4).[15]

[15]Sovint es diu que *la banda de Moebius és una superfície d'una sola cara*, com

D'entrada, la banda de Moebius tal com l'hem definida al llarg d'aquests apunts *no* és una superfície,[16] però si hi fem una petita modificació consistent en eliminar els punts de la vora, és a dir, si considerem

$$M' := [0,1] \times (0,1) \big/ \{(0,t) \sim (1, 1-t) : t \in (0,1)\}$$

aleshores sí que tenim una superfície. Aquesta superfície no és orientable. Donem una idea de la demostració. Considerem $M' \subset \mathbb{R}^3$ de la manera habitual i suposem que tenim una orientació a M'. Al voltant de cada punt $x \in M'$ hi podem dibuixar una petita circumferència c_x i, utilitzant l'orientació, podem marcar un sentit de gir en aquesta circumferència "de manera coherent" a tota la superfície. Si ara prenem la recta normal a la superfície a cada punt, en aquesta recta normal hi ha dos vectors unitaris que apunten en direccions contràries. D'aquests dos vectors, definim v_x que sigui el que, respecte del sentit de gir de c_x, segueix la regla del tirabuixó.

Sigui ara $M'' := (0,1) \times (0,1) \subset M'$. Orientem M'' i fem amb M'' el mateix que hem fet amb M': obtenim, per a cada punt $x \in M''$ un vector normal w_x. Evidentment, per a cada punt $x \in M''$ es complirà que $v_x = \pm w_x$. Invertint, si cal, l'orientació de M'', podem aconseguir que hi hagi com a mínim un punt $x \in M''$ tal que $v_x = w_x$. Considerem ara aquesta funció contínua ($\langle -, - \rangle$ és el producte escalar de $\mathbb{R}^3$)

$$\begin{aligned} M'' &\to \{+1, -1\} \\ x &\mapsto \langle v_x, w_x \rangle \end{aligned}$$

Com que M'' és un espai connex, aquesta funció ha de ser constant. Per tant, $v_x = w_x$ per tot $x \in M''$. Això és impossible. En efecte, considerem el punt $[0, 1/2] = [1, 1/2] \in M' - M''$ i el vector $w_{[0,1/2]} \in S^2$. D'una banda, la funció $w_{[t,1/2]}$ és contínua. D'altra banda, $w_{[t,1/2]} = v_{(t,1/2)}$ si $t \neq 0, 1$. Finalment,

$$\lim_{t \to 0} v_{(t,1/2)} = - \lim_{t \to 1} v_{(t,1/2)}$$

si això fos sinònim de no orientabilitat. El cas és que són conceptes molt diferents. L'orientabilitat d'una superfície és una propietat *intrínseca* de la superfície, mentre que *tenir una cara o dues cares* és un concepte que depèn de la inclusió de la superfície en un espai de dimensió tres, com pugui ser $\mathbb{R}^3$. Per exemple, com que l'ampolla de Klein no es pot incloure a $\mathbb{R}^3$, no té sentit preguntar-se si té una cara o dues cares.

[16] De fet, la banda de Moebius que hem estudiat és un exemple de *varietat amb vora*. Aquest concepte de varietat amb vora —que no volem tractar en aquest curs— generalitza el concepte de varietat. La banda de Moebius, el disc D^n, el cilindre $S^1 \times [0,1]$, etc. són exemples de varietats amb vora que no són varietats.

i això és impossible.

- Si una superfície conté una banda de Moebius, no pot ser orientable. Això és "evident"[17] perquè una orientació a la superfície donaria immediatament una orientació a la banda de Moebius, que sabem que no en té cap. Com que hem vist que el pla projectiu i l'ampolla de Klein contenen una banda de Moebius, obtenim que ni el pla projectiu ni l'ampolla de Klein són orientables.

- El producte de dues varietats orientables és orientable. Per tant, el tor és orientable.

- L'espai projectiu $\mathbb{R}P^n$ és orientable si i només si n és senar. L'explicació d'això es basa en el fet que l'aplicació antipodal $v \mapsto -v$ conserva l'orientació a $\mathbb{R}^{2m}$ (té determinant 1) i inverteix l'orientació a $\mathbb{R}^{2m+1}$ (té determinant -1).

10.6 Varietats de dimensió 1

Essencialment, només hi ha dues varietats connexes de dimensió 1: la recta i la circumferència —que són diferents, perquè una és compacta i l'altra no ho és.

Teorema 10.4. *Si M és una varietat connexa de dimensió 1, aleshores $M \cong \mathbb{R}$ o $M \cong S^1$.*

Demostració. La farem en diverses etapes.

- Evidentment, si M es pot recobrir amb una única carta local, aleshores $M \cong \mathbb{R}$ i hem acabat.

- El pas clau de la demostració és entendre què passa si M es pot recobrir amb *dues* cartes locals.

[17] Si entenem que la banda de Moebius és la superfície sense vora M' de l'apartat anterior i si suposem que M' és un *obert* d'una superfície S, aleshores sí que és evident que S no pot ser orientable, perquè si $\{U_i\}$ és un atles orientable a S, tindríem que $\{U_i \cap M'\}$ seria un atles orientable a M', que sabem que no pot existir. La condició que M' sigui un obert de S és una conseqüència del *teorema d'invariància del domini*, que no podem demostrar en aquest curs.

Suposem que $M = U \cup V$ on $U, V \subsetneq M$ són oberts de M, cadascun d'ells homeomorf a $\mathbb{R}$ a través d'homeomorfismes

$$\phi : U \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}, \quad \psi : V \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}.$$

Com que M és connexa, aquests dos oberts no poden ser disjunts. Considerem

$$A := \phi(U \cap V) \subset \mathbb{R}$$

que és un obert de $\mathbb{R}$ i, per tant, és una varietat de dimensió 1. Pel teorema 10.2, els seus components connexos són oberts connexos de $\mathbb{R}$, és a dir, intervals oberts (corol·lari 9.5). El pas següent consisteix en veure que aquests intervals no poden ser acotats.

Suposem que, per exemple, A tingués un component connex de la forma (a, b), amb $a, b \in \mathbb{R}$. Considerem

$$\phi^{-1}(a, b) \subset U \cap V \subset V.$$

En primer lloc, $\phi^{-1}(a, b)$ és un obert de V. Però també és tancat a V, perquè

$$\phi^{-1}(a, b) = \left(\phi^{-1}[a, b]\right) \cap V$$

i $\phi^{-1}[a, b]$ és tancat de M perquè és compacte (proposició 8.2). Com que $\phi^{-1}(a, b)$ és un obert i tancat de $V \cong \mathbb{R}$, tenim que $\phi^{-1}(a, b) = V$ i això implica $V \subset U$ i $U = M$, contradicció.

Hem vist que els components connexos de A són intervals no acotats (diferents de tota la recta $\mathbb{R}$). Com que els components connexos han de ser disjunts, això només és possible en dos casos:

- A és connex de la forma $(-\infty, a)$ o (a, ∞), per algun $a \in \mathbb{R}$.
- A és de la forma $(-\infty, a) \cup (b, \infty)$ per uns certs $a < b$.

Com que $B := \psi(U \cap V) \cong \phi(U \cap V) = A$, el mateix podem dir de B.

Ara, és relativament senzill en el primer cas construir un homeomorfisme $M \cong \mathbb{R}$ i en el segon cas construir un homeomorfisme $M \cong S^1$. Deixem aquests detalls com exercici.

- Suposem ara que M es pot recobrir amb un nombre finit de cartes locals $U_1, \ldots, U_n$. Demostrem el teorema per inducció sobre n. Si $n = 1, 2$, ja hem vist que el teorema és cert. Apliquem el teorema a $M' := U_1 \cup \cdots \cup U_{n-1}$. Si $M' \cong \mathbb{R}$, tenim que M' és una carta local de M i M es pot recobrir per dues cartes locals. Si $M' \cong S^1$, aleshores M' és compacte, per tant, és tancat a M i com que és també obert, tindrem $M = M' \cong S^1$ i hem acabat.

- Ens falta el cas general en que M no es pot recobrir amb un nombre finit de cartes locals. En primer lloc, és fàcil adonar-se que el segon axioma de numerabilitat implica que M es pot recobrir amb una quantitat numerable de cartes locals

$$M = U_1 \cup U_2 \cup U_3 \cup \cdots$$

Pel raonament del punt anterior, per tot $n > 1$ tenim

$$V_n := U_1 \cup \cdots \cup U_n \cong \mathbb{R} \cong (0, 1)$$

i és senzill "enganxar" tots tots aquests homeomorfismes per obtenir un homeomorfisme $M \cong \mathbb{R}$.

$\square$

10.7 Exercicis addicionals

10.1 Demostreu que l'espai $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$ no és una varietat.

10.2 Demostreu que l'espai $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xy = 0,\ z \geq 0\}$ no és una superfície.

10.3 Doneu un exemple d'un espai que no sigui unió disconnexa dels seus components connexos. Doneu un exemple d'un espai compacte Hausdorff que no sigui unió disconnexa dels seus components connexos.

10.4 Sigui $n \geq k$ i definim $G(k, n)$ com el conjunt dels subespais vectorials de dimensió k de $\mathbb{R}^n$. Trobeu una topologia natural a $G(k, n)$ que faci que sigui un espai compacte. Feu-ho seguint aquests passos:

1. Considereu l'aplicació $\phi : G(k, n) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ que assigna a cada subespai la projecció ortogonal sobre ell. Demostreu que ϕ és injectiva i, per tant, $G(k, n)$ és un subespai de $M_{n\times n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$.

2. Demostreu que la imatge de ϕ consisteix en les matrius idempotents, simètriques i de traça k.

3. Demostreu que $G(k, n)$ és un espai compacte.

10.5 Demostreu que l'espai topològic $G(k, n)$ de l'exercici anterior és una varietat diferenciable. Seguiu aquests passos:

1. Sigui $L \in G(k,n)$ i sigui $A \in M_{n\times k}(\mathbb{R})$ la matriu que té per columnes els vectors d'una base de L. Aleshores, la projecció ortogonal sobre L ve donada per la matriu $P = A(A^tA)^{-1}A^t$.

2. Fixem $L_0 \in G(k,n)$ i considerem l'aplicació $\Psi : \mathcal{L}(L_0, L_0^\perp) \to G(k,n)$ que assigna a cada aplicació lineal φ el subespai $\Psi(\varphi) := \{v + \varphi(v) : v \in L_0\}$. Demostreu que Ψ és contínua.

3. Sigui $\mathcal{U}$ és el subespai de $G(k,n)$ format per les matrius tals que el seu primer menor principal $k \times k$ té determinant diferent de zero. Demostreu que $\mathcal{U}$ és un obert de $G(k,n)$ i que la imatge de Ψ és $\mathcal{U}$.

4. Demostreu que $\Psi : \mathcal{L}(L_0, L_0^\perp) \to \mathcal{U}$ és un homeomorfisme i que $G(k,n)$ és una varietat topològica.

10.6 Considereu un triangle equilàter ple i identifiqueu els seus costats en la forma aaa^{-1}. Considereu l'espai quocient M (conegut com a *dunce hat*). Demostreu que M no és una superfície.

10.7 Utilitzeu la "recta amb dos orígens" per donar un exemple d'una família de subconjunts connexos compactes tancats C_n, $n > 0$, tals que $C_{n+1} \subset C_n$ per a tot n, però $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ no sigui connex.

10.8 Demostreu que l'esfera de Poincaré és una varietat de dimensió 3.

10.9 Considereu l'aplicació $F : [0,\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^4$ donada per

$$F(u,v) = (\cos 2u \cos v, \sin 2u \cos v, \cos u \sin v, \sin u \sin v).$$

Demostreu que la imatge de F és un subespai de $\mathbb{R}^4$ homeomorf a l'ampolla de Klein.

10.10 Considereu l'aplicació $F : S^2 \to \mathbb{R}^4$ donada per $F(x,y,z) = (xy, xz, y^2 - z^2, 2yz)$. Demostreu que la imatge de F és un subespai de $\mathbb{R}^4$ homeomorf al pla projectiu.

10.11 Considereu $S^3 \subset \mathbb{R}^4$. Escrivim els punts de $\mathbb{R}^4$ en la forma (x,y) amb $x, y \in \mathbb{R}^2$. Tenim: $S^3 = A_+ \cup A_-$ on $A_+ := \{(x,y) \in S^3 : |x| \le |y|\}$ i $A_- := \{(x,y) \in S^3 : |x| \ge |y|\}$. Demostreu que $A_+ \cong A_- \cong S^1 \times D^2$ i $A_+ \cap A_- \cong T^2$. És a dir, l'esfera S^3 es pot representar com dos tors sòlids amb les vores identificades.

Capítol 11

Superfícies compactes

Al final del capítol anterior hem classificat, sense fer gaire esforç, les varietats de dimensió 1, però la classificació de les varietats de dimensió arbitrària és un problema irresoluble.[1] En canvi, sí que és possible classificar les superfícies compactes, és a dir, fer una llista completa i sense repeticions de totes les superfícies compactes (llevat d'homeomorfisme) i trobar un criteri per decidir si dues superfícies compactes són homeomorfes o no. En aquest capítol discutirem aquest teorema de classificació. Enunciarem el teorema i donarem una idea precisa de com es demostra, però no entrarem en els detalls de la demostració.

Al llarg del curs hem anat trobant algunes superfícies compactes. Per exemple, coneixem l'esfera S^2, el tor T, l'ampolla de Klein K, el pla projectiu $\mathbb{R}P^2$ i també hem vist el doble tor. Algunes d'aquestes superfícies són orientables i algunes altres no ho són. El teorema de classificació ens dirà que les superfícies compactes s'obtenen a partir d'aquestes per unió disconnexa i per una nova operació que s'anomena *suma connexa*.

En aquest capítol, la paraula "superfície" voldrà dir "superfície compacta i connexa".

11.1 La suma connexa de superfícies

La idea és geomètricament ben senzilla. Suposem que tenim dues superfícies. La seva **suma connexa** és la superfície que s'obté fent un petit

[1] L'any 1960, Andrey Markov va demostrar que el problema de la classificació de les varietats de dimensió ≥ 4 és indecidible.

forat circular a cada superfície i enganxant les dues superfícies per aquest forat (figura 11.1).

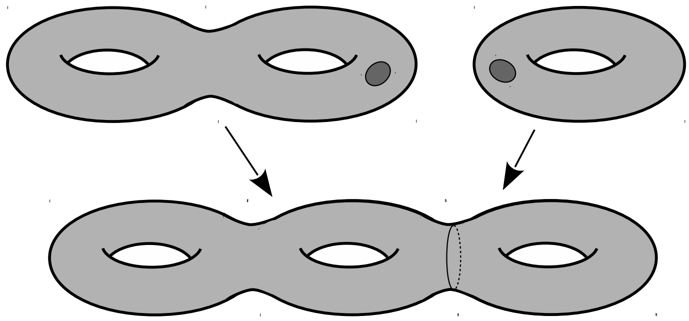


Figura 11.1: Suma connexa de dues superfícies.

Siguem una mica més precisos. Sigui S una superfície i $x \in S$ un punt qualsevol. Sigui U una carta local al punt x. És a dir, $x \in U$ i hi ha un homeomorfisme $\phi : U \cong \mathbb{R}^2$. No és restrictiu suposar que $\phi(x) = 0 \in \mathbb{R}^2$. Sigui $D \subset U$ l'obert que, en aquest homeomorfisme, es correspon amb la bola oberta $B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$. Direm que $S' := S - D$ és *"la superfície S amb un forat"*. La *vora* del forat és

$$\partial S' := \phi^{-1}(S^1) \subset U$$

on S^1 és la circumferència unitat de $\mathbb{R}^2$. Es compleix, per tant, que $\partial S' \cong S^1$.

Sigui ara R una altra superfície. Li fem un forat i obtenim R'. També tenim que $\partial R' \cong S^1$. Ara **definim la suma connexa** de les superfícies S i R com el quocient[2]

$$S + R := S' \sqcup R' \big/ \{\partial S' \sim \partial R'\}$$

on la identificació consisteix en identificar cada punt de la circumferència $\partial S'$ amb el punt de la circumferència $\partial R'$ que li correspon per l'homeomorfisme $\partial S' \cong S^1 \cong \partial R'$.

Ja veiem que hi ha diverses coses que cal demostrar si volem que aquesta operació tingui sentit.

Proposició 11.1. *Si R i S són superfícies, l'espai topològic $S + R$ està ben definit i és una superfície.*[3] $\square$

[2] Indicarem la suma connexa amb el símbol $+$. Molts autors utilitzen el símbol $\#$, però no sembla que calgui introduir un símbol nou.

[3] En canvi, la suma connexa no està ben definida en el cas d'espais topològics generals. Hi ha problemes fins i tot en el cas de varietats de dimensió més gran que dos.

Observem que, a priori, l'espai $S+R$ depèn de diverses eleccions. Hem escollit un punt a cada superfície i una carta local a cadascun d'aquests punts. La proposició ens diu que el resultat final és independent d'aquestes eleccions. No demostrarem aquest resultat.

Proposició 11.2. *La suma connexa de superfícies compleix aquestes propietats:*

1. *És commutativa:*[4] $S + R \cong R + S$.
2. *És associativa:* $S + (R + M) \cong (S + R) + M$.
3. *L'esfera actua com a element neutre:* $S + S^2 \cong S$.
4. $S + R$ *és orientable si i només si* S *i* R *són orientables.* □

Aquesta operació ens permet, en principi, construir una infinitat de superfícies. Per exemple, aquestes:

- La **superfície orientable de gènere** g es defineix, per cada enter $g \geq 0$, com la superfície
$$S_g := S^2 + T + \overset{g}{\cdots} + T.$$
Geomètricament, és molt fàcil visualitzar aquestes superfícies perquè es poden representar a $\mathbb{R}^3$. La superfície orientable de gènere zero és l'esfera, la de gènere 1 és el tor, la de gènere dos és el doble tor i així successivament (figura 11.2).

- La **superfície no orientable de gènere** h es defineix, per cada enter $h > 0$, com la superfície
$$N_h := \mathbb{R}P^2 + \overset{h}{\cdots} + \mathbb{R}P^2.$$
Aquestes superfícies no es poden representar a $\mathbb{R}^3$ (això no ho podem demostrar ara). Com que un pla projectiu amb un forat és una banda de Moebius, la superfície N_h ens la podem imaginar com una esfera amb h forats a la que hem enganxat una banda de Moebius a cada forat.

[4] De fet, la suma connexa no és ni commutativa ni associativa ni té element neutre. El que succeeix és que aquestes propietats es compleixen "llevat d'homeomorfisme".

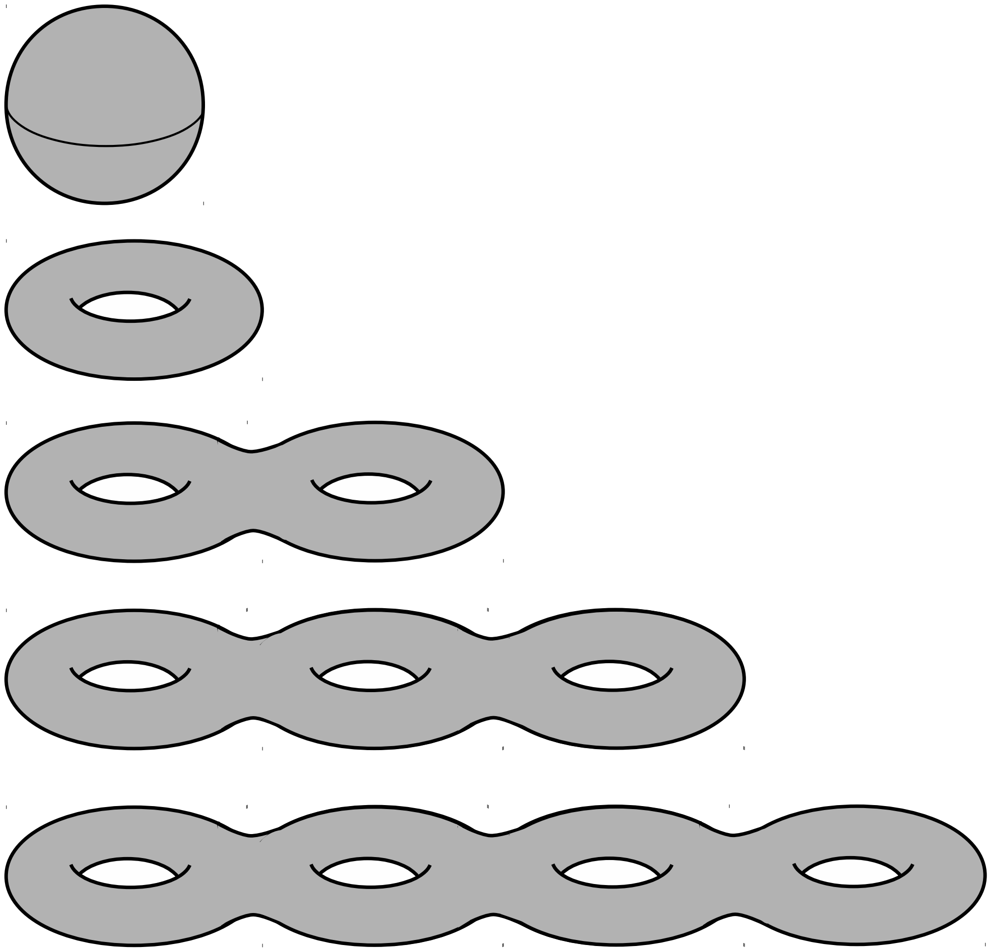


Figura 11.2: Les superfícies orientables S_g per $g = 0, 1, 2, 3, 4$.

Evidentment, també podem fer sumes connexes "mixtes" de superfícies orientables i no orientables, per exemple

$$T + T + \mathbb{R}P^2 + K + \mathbb{R}P^2$$

però veurem més endavant (proposició 11.6) que aquestes sumes mixtes no ens donen exemples nous.

Una altra operació que podem fer a una superfície és la que es coneix com *adjuntar una nansa*. Suposem que S és una superfície i fem dos forats (disjunts!) a S. Obtenim una superfície amb dos forats S'. Considerem ara un cilindre $M = S^1 \times [0, 1]$ (que és el mateix que una esfera amb dos forats) i considerem l'espai que s'obté de $S' \sqcup M$ identificant cada extrem del cilindre amb un dels forats que hem fet a S.

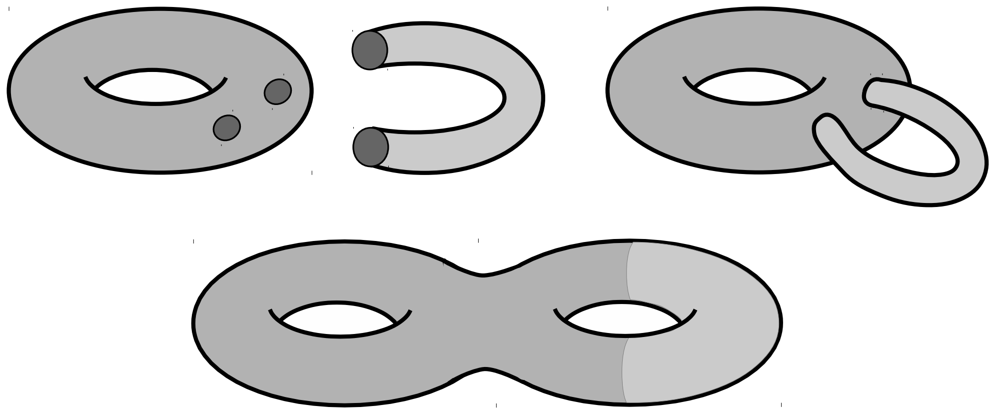


Figura 11.3: Adjuntar una nansa es el mateix que fer suma connexa amb un tor.

Direm que hem **adjuntat una nansa a** S (figura 11.3). Tanmateix, aquesta operació no dóna res nou, perquè

Proposició 11.3. *Si adjuntem una nansa a una superfície S la superfície que obtenim és homeomorfa a $S + T$ (figura 11.3).* □

Per tant, la superfície S_g també s'acostuma a anomenar *l'esfera amb g nanses*.

11.2 Polígons amb costats identificats

Recordem que un mètode que havíem utilitzat a l'apartat 10.4 per construir superfícies era el de començar amb un polígon (ple) amb un nombre parell de costats i identificar els costats dos a dos. Per indicar com es fan aquestes identificacions, cada costat té una lletra i un sentit, de manera que dos costats s'identifiquen si tenen la mateixa lletra i la identificació es fa en el sentit indicat. L'espai que obtenim és una superfície.

Hi ha una manera natural de codificar aquesta construcció que consisteix en començar a recórrer la vora del polígon en un cert sentit i anar anotant les lletres de cada costat, amb l'exponent -1 si el costat està orientat en sentit contrari a com recorrem el polígon. Per exemple:

- L'esfera es pot representar per aa^{-1}.
- El tor es pot representar per $aba^{-1}b^{-1}$.

- El pla projectiu es pot representar per aa.
- L'ampolla de Klein es pot representar per $aba^{-1}b$.
- El doble tor es pot representar per $aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1}$.

Aquestes representacions no són úniques: dues "paraules" diferents

$$a_1 \cdots a_n \text{ i } b_1 \cdots b_m$$

poden donar superfícies homeomorfes. Aquestes representacions es poden relacionar fàcilment amb la suma connexa.

Proposició 11.4. *Sigui S una superfície representada per la paraula*

$$a_1 \cdots a_n$$

i sigui S' una superfície representada per la paraula

$$b_1 \cdots b_m.$$

Aleshores, la superfície $S + S'$ està representada per la paraula

$$a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m. \qquad \square$$

Això és evident si ens adonem que fer un forat a una superfície que hem obtingut com un polígon amb els costats identificats és el mateix que afegir un nou costat al polígon, que no està identificat a cap altre.[5] D'aquesta manera, veiem (figura 11.4) que les superfícies S_g i N_h que hem definit abans es poden obtenir com a polígons amb els costats identificats:

- S_g es pot representar com un polígon de $4g$ costats, identificats segons
$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$$
- N_h es pot representar com un polígon de $2h$ costats, identificats segons
$$a_1 a_1 \cdots a_h a_h$$

Donem ara un exemple interessant de dues representacions diferents d'una mateixa superfície.

[5] Sempre que els vèrtex del polígon estiguin tot identificats a un únic vèrtex, com és el cas dels polígons que donen S_g i N_h.

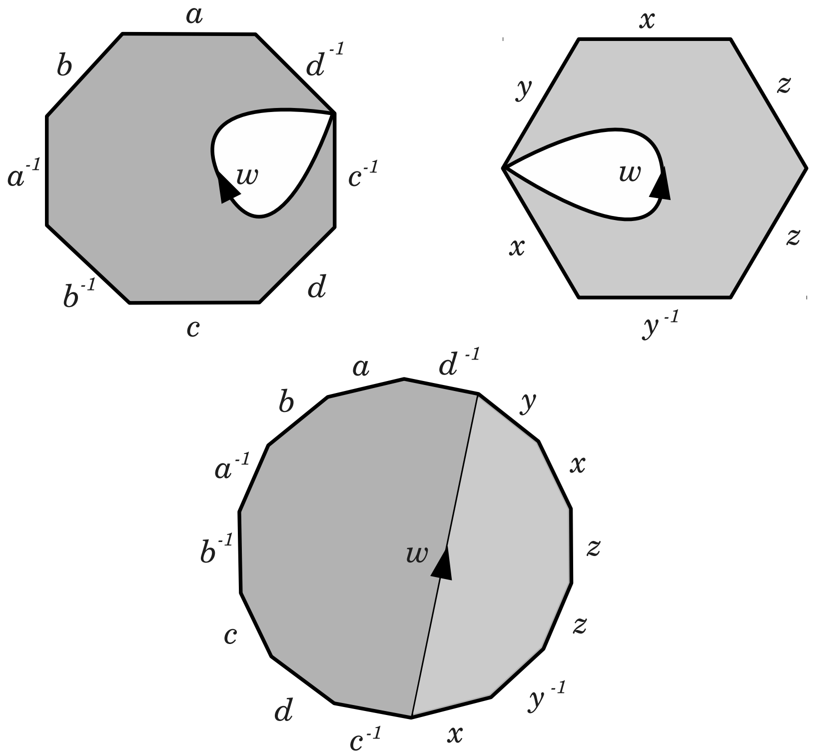


Figura 11.4: Suma connexa de dos polígons amb costats identificats.

Proposició 11.5. $K \cong \mathbb{R}P^2 + \mathbb{R}P^2$.

Demostració. Estem dient que les paraules $aba^{-1}b$ i $xxyy$ representen la mateixa superfície. La demostració es fa per un mètode que sovint s'anomena *"tisores i cola"* que ve indicat a la figura 11.5. □

A l'apartat anterior ens hem plantejat si sumant tors i plans projectius podem obtenir superfícies noves. La resposta és no perquè tenim aquest resultat:

Proposició 11.6. *$T + \mathbb{R}P^2 \cong \mathbb{R}P^2 + \mathbb{R}P^2 + \mathbb{R}P^2$. Per tant, $S_g + N_h \cong N_k$ amb $k = h + 2g$.*

Demostració. Podríem demostrar aquest resultat amb *tisores i cola*[6] però és més divertit utilitzar un argument de tipus geomètric. Segons la pro-

[6]Vegeu L. Ch. Kinsey, *Topology of Surfaces* p. 85.

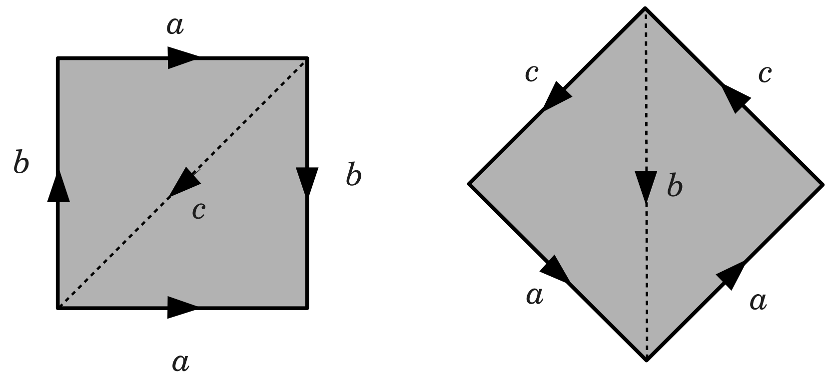


Figura 11.5: L'ampolla de Klein com a suma connexa de dos plans projectius.

posició anterior, n'hi ha prou amb demostrar que

$$T + \mathbb{R}P^2 \cong K + \mathbb{R}P^2.$$

Per poder visualitzar aquest homeomorfisme, fem un forat a $\mathbb{R}P^2$ i recordem que obtenim una banda de Moebius M, que sí que podem dibuixar a $\mathbb{R}^3$. Si demostrem que $M + T \cong M + K$, després tornarem a adjuntar el disc que hem tret a cada costat i tindrem l'homeomorfisme que volíem.

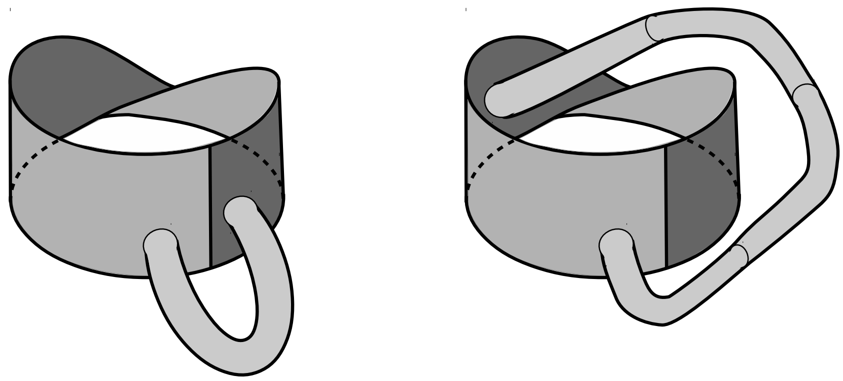


Figura 11.6: Adjunció d'una nansa a una banda de Moebius, de dues maneres equivalents.

$M + T$ és el mateix que una banda de Moebius amb una nansa. La figura 11.6 representa una banda de Moebius amb una nansa i ens mostra com podem fer un homeomorfisme de manera que la nansa quedi adjuntada com en el segon dibuix de la mateixa figura.

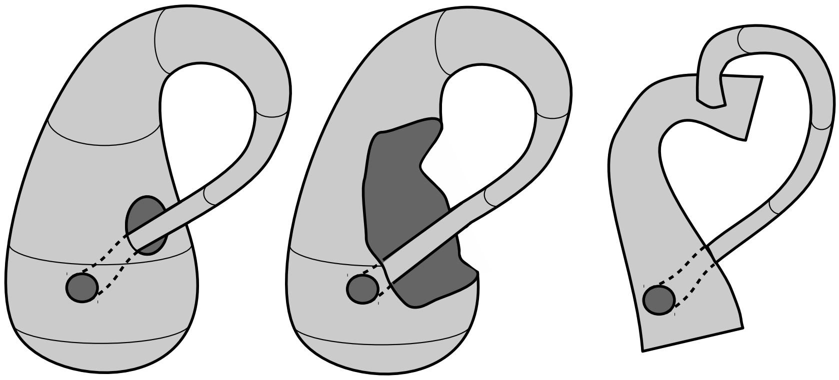


Figura 11.7: Una ampolla de Klein amb un forat.

Una ampolla de Klein amb un forat també es pot representar a $\mathbb{R}^3$: n'hi ha prou amb prendre el dibuix ordinari de l'ampolla de Klein a $\mathbb{R}^3$ —que no és "correcte" perquè hi ha una circumferència de punts dobles— i fer-li el forat precisament de manera que la "trompa" pugui entrar dintre de l'ampolla. Si ho fem així, els dibuixos de la figura 11.7 ens mostren que el resultat és homeomorf a un rectangle amb una nansa adjuntada de manera que el resultat no és orientable. Si ara fem un forat rectangular a una banda de Moebius i en aquest forat hi adjuntem l'ampolla de Klein amb forat, obtenim la banda de Moebius amb nansa de la figura 11.6. □

11.3 Superfícies triangulades

Una *triangulació d'una superfície* és una descomposició de la superfície en triangles (plens) de manera que els triangles que es toquin comparteixin una aresta o un vèrtex. Per exemple, la superfície d'un tetràedre regular és una triangulació de l'esfera amb quatre triangles i la superfície de l'icosàedre regular és una triangulació de l'esfera amb vint triangles.

La paraula "triangle" s'acostuma a reservar per indicar un polígon de tres costats sense l'interior. Per al triangle "ple" s'acostuma a utilitzar la paraula "símplex" o, si volem fer èmfasi en que és una figura de dimensió 2, parlarem del 2-simplex. Exactament, el 2-símplex estàndard es defineix com aquest triangle equilàter ple:

$$\Delta_2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1,\ x, y, z \geq 0\}.^7$$

Els vèrtex del símplex són els punts $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$ i $(1, 0, 0)$ i les arestes són les interseccions amb els plans $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Si S és una superfície, una **triangulació** de S és una descomposició

$$S = D_1 \cup \cdots \cup D_n$$

on cada $D_i \cong \Delta_2$ i a més es compleix que si $D_i \cap D_j \neq \varnothing$ amb $i \neq j$, aleshores $D_i \cap D_j$ és una aresta de D_i i de D_j o bé és un vèrtex de D_i i de D_j.

Totes les superfícies que hem vist fins ara admeten alguna triangulació. En el cas de l'esfera, ja ho sabem. La figura 11.8 ens mostra un exemple de triangulació del tor i la figura 11.9 ens mostra una triangulació del pla projectiu.

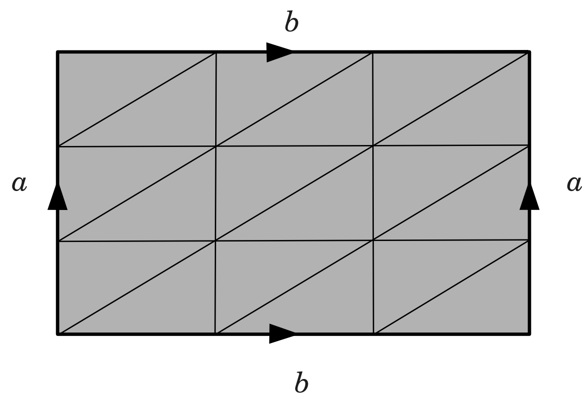


Figura 11.8: Una triangulació del tor amb 18 triangles.

Si tenim una triangulació de S i una triangulació de S', és molt fàcil obtenir una triangulació de la suma connexa $S + S'$. N'hi ha prou amb fer

[7] Aquesta definició és interessant perquè ens permet definir molt fàcilment els anàlegs del triangle equilàter (que és el 2-símplex estàndard) i el tetràedre regular (que és el 3-símplex estàndard) en dimensió arbitrària. Definim

$$\Delta_n := \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_0 + \cdots + x_n = 1,\ x_i \geq 0,\ i = 0, \ldots, n\}.$$

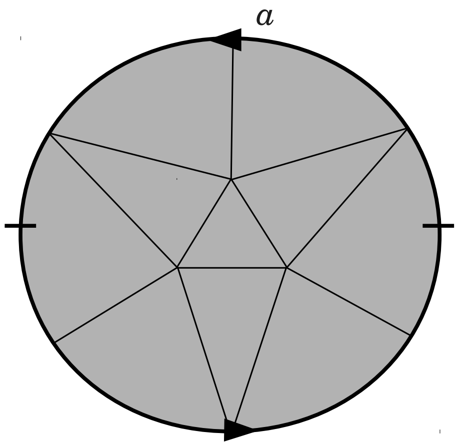


Figura 11.9: Una triangulació del pla projectiu amb 10 triangles.

que el forat que fem a cada superfície abans d'enganxar-les sigui precisament l'interior d'un 2-símplex. Per tant, totes les superfícies S_g, $g \geq 0$ i N_h, $h > 0$, són triangulables. Pot haver-hi superfícies que no siguin triangulables? La resposta és no, però la demostració és relativament complicada i l'ometrem.

Teorema 11.7. *Tota superfície és triangulable.*[8] □

11.4 La característica d'Euler

El tetràedre té 4 vèrtex, 6 arestes i 4 cares. El cub té 8 vèrtex, 12 arestes i 6 cares. L'octàedre té 6 vèrtex, 12 arestes i 8 cares. El dodecàedre té 20 vèrtex, 30 arestes i 12 cares. L'icosàedre té 12 vèrtex, 30 arestes i 20

[8] Què podem dir de les varietats de dimensió > 2? La pregunta si totes les varietats són triangulables es va plantejar des dels inicis de la teoria de varietats. El 1920, el matemàtic hongarès Tibor Radó va demostrar que les superfícies són triangulables (teorema 11.7) i trenta anys més tard Edwin E. Moise i R.H. Bing van demostrar que les varietats de dimensió tres també ho són. En un article publicat el 1982, Michael Freedman va construir una varietat de dimensió 4 que no es pot triangular. Freedman va rebre la medalla Fields el 1986. En el moment d'escriure aquests apunts (juliol de 2013) fa pocs mesos que s'ha penjat a Internet un treball del matemàtic romanès Ciprian Manolescu que demostra que en qualsevol dimensió ≥ 5 hi ha varietats que no es poden triangular.

cares. Observem això:

$$\begin{aligned} 4-6+4&=2\\ 8-12+6&=2\\ 6-12+8&=2\\ 20-30+12&=2\\ 12-30+20&=2 \end{aligned}$$

Va ser Euler qui va adonar-se que si fem aquesta suma alternada per a qualsevol políedre —regular o no— sempre surt 2. El 1752, en una de les obres que es consideren fundacionals de la topologia,[9] Euler publica el *Teorema d'Euler sobre els políedres* que afirma que, en un políedre qualsevol, si sumem el nombre de cares amb el nombre de vèrtex obtenim un nombre que supera en dues unitats el nombre d'arestes. La demostració d'aquesta *insigne propietat* es fa per inducció i no és difícil imaginar un argument heurístic que fa que el resultat sigui plausible. Considerem un políedre i eliminem-li un vèrtex. Imaginem que en aquest vèrtex que hem eliminat hi confluïen n arestes. Això fa que el nombre de vèrtex decreixi en una unitat, el nombre d'arestes decreix en n unitats i el nombre de cares decreixi en $n-1$ unitats. Per tant, la suma alternada de vèrtex, arestes i cares no ha canviat.

De fet, la demostració d'Euler no és del tot correcta i el teorema només és cert per a políedres que, en el nostre llenguatge, siguin homeomorfs a l'esfera. Per exemple, si acceptéssim com a vàlid el políedre homeomorf al tor de la figura 11.10, veuríem que la suma alternada de vèrtex, arestes i cares no dóna 2 sinó que dóna 0. El cas és que el teorema d'Euler és realment un teorema sobre les descomposicions de l'esfera en polígons. El que és més important és que el teorema d'Euler es pot generalitzar a qualsevol superfície, substituint 2 per un nombre que depèn únicament del tipus topològic de la superfície.

Una descomposició simplicial d'una superfície S és el mateix que una triangulació, però admetent que cada peça de la triangulació, en lloc de ser un triangle és un polígon arbitrari. Aleshores:

Teorema 11.8. *Per cada superfície S existeix un nombre enter $\chi(S)$, anomenat la característica d'Euler de S, que compleix que si tenim una des-*

[9] Són dos treballs d'Euler a la revista *Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* que es titulen *Elementa doctrinae solidorum* i *Demonstratio nonnullarum insignium proprieatatum, quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita.* L'altre treball que es considera que marca el naixement de la topologia és el d'Euler del 1736 sobre el problema dels ponts de Koenigsberg.

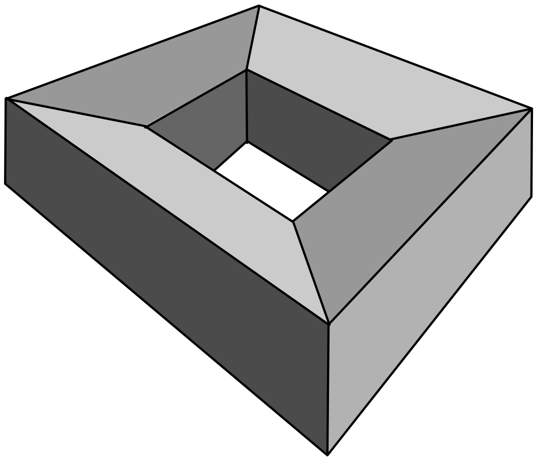


Figura 11.10: Un políedre tòric que té 16 cares (que són quadrilàters), 16 vèrtex i 32 arestes.

composició simplicial qualsevol de S i aquesta descomposició simplicial té v vèrtex, a arestes i c cares, aleshores

$$v - a + c = \chi(S).$$

No tenim prou instruments per demostrar aquest teorema. Si l'acceptem com a vàlid, podem calcular fàcilment la característica d'Euler de les superfícies que coneixem. N'hi ha prou amb trobar una descomposició simplicial de la superfície —per exemple una triangulació.

- Ja hem vist que la característica d'Euler de l'esfera S^2 és 2.
- El políedre tòric de la figura anterior ens diu que el tor té característica igual a 0.
- Si calculem el nombre de vèrtex, arestes i cares de la triangulació del pla projectiu que hem vist a la secció 11.3, obtindrem que $\chi(\mathbb{R}P^2) = 1$.
- És senzill trobar quin és el comportament de la característica d'Euler respecte de la suma connexa de superfícies. Quan fem els dos forats, eliminem dues cares i quan enganxem les dues superfícies eliminem 3 arestes i 3 vèrtex. Per tant:

$$\chi(S + S') = \chi(S) + \chi(S') - 2.$$

Per inducció, la característica de les superfícies S_g i N_h és

$$\chi(S_g) = 2 - 2g$$
$$\chi(N_h) = 2 - h.$$

- Del teorema 11.8 es desprèn que dues superfícies homeomorfes han de tenir la mateixa característica d'Euler. Però dues superfícies diferents poden tenir la mateixa característica. Per exemple, el tor i N_2 tenen característica zero, però no són superfícies homeomorfes, perquè el tor és orientable i N_2 no ho és.

- Hem enunciat el teorema 11.8 de manera molt més general que l'original d'Euler, però encara no és l'enunciat més general possible. Fixem-nos en aquest cas extrem. Considerem un punt a l'esfera i pensem això com una mena de *pseudo*-descomposició amb un vèrtex, cap aresta i una cara. Curiosament, també es compleix que $1-0+1 = 2$.[10]

11.5 El teorema de classificació

A la secció 10.6 vam *classificar* les varietats de dimensió 1: només n'hi ha dues de connexes, una de compacta que és la circumferència i una de no compacta que és la recta. També hi ha un fantàstic teorema de classificació de les superfícies:

Teorema 11.9. *Tota superfície compacta i connexa és homeomorfa a una i només una d'aquestes superfícies:* S_g, $g \geq 0$, N_h, $h > 0$.

Demostrar ara aquest resultat fonamental no seria gens complicat perquè els tres punts difícils ja els hem acceptat sense demostració. Són aquests:

- Tota superfície és triangulable (teorema 11.7).

- El concepte d'orientabilitat està ben fonamentat (secció 10.5).

- El teorema d'Euler per a les superfícies compactes (teorema 11.8).

[10] El teorema encara es pot generalitzar molt més, perquè no és només un teorema de superfícies ni de varietats, sinó que és vàlid per a qualsevol espai que admeti alguna descomposició simplicial amb símplex de dimensió arbitrària. És un dels primers teoremes de la *teoria d'homologia*.

La demostració del teorema de classificació aniria així.

En primer lloc, entre les superfícies S_g i N_h no n'hi pot haver dues d'-homeomorfes perquè no n'hi ha dues que tinguin la mateixa característica d'Euler i la mateixa orientabilitat.

Si tenim una superfície arbitrària S, en primer lloc la triangulem i a continuació utilitzem aquesta triangulació per convertir-la en un polígon amb els costats identificats. Finalment, agafem aquest polígon i apliquem sistemàticament tècniques de *"tisores i cola"* i els teoremes 11.5 i 11.6 fins que el convertim en un dels polígons estàndard de S_g o N_h. Tot això és relativament senzill i no ho farem perquè, des d'un punt de vista didàctic, té un interès limitat. Les idees realment importants ja les hem anat discutint al llarg d'aquests dos últims capítols del curs.

Corollari 11.10. *Dues superfícies (compactes, connexes) S i S' són homeomorfes si i només si $\chi(S) = \chi(S')$ i les dues tenen la mateixa orientabilitat.* □

Després d'aquests dos teoremes tan bonics, és un bon moment per donar el curs per acabat.

11.6 Exercicis addicionals

11.1 Sigui $X \neq \varnothing$ un graf finit connex. És a dir, X és un subespai de $\mathbb{R}^3$ format per un nombre finit de punts (anomenats vèrtex), units per un nombre finit de corbes lineals a trossos (anomenades arestes) que només es tallen en els vèrtex. Es pot demostrar que existeix un $\epsilon > 0$ tal que els punts de $\mathbb{R}^3$ a distància ϵ de X formen una superfície compacta connexa orientable $S(X)$. Calculeu el gènere de $S(X)$ en funció del nombre de vèrtex v i el nombre d'arestes a del graf X.

11.2 La vora d'una banda de Moebius és una circumferència. Considereu dues bandes de Moebius i identifiqueu les seves vores. Demostreu que s'obté una ampolla de Klein.

11.3 Sigui S una superfície compacta connexa i sigui χ la seva característica d'Euler. Si c és el nombre de cares, a és el nombre d'arestes i v el nombre de vèrtexs d'una triangulació de S, proveu que $3c = 2a$, $a = 3(v - \chi)$ i $v \geq \frac{1}{2}(7 + \sqrt{49 - 24\chi})$.

11.4 Demostreu que els únics políedres regulars possibles són els cinc sòlids platònics.

11.5 Un habitant d'un món bidimensional vol saber la forma global del seu món. Per això el divideix en pentàgons de manera que cada aresta és comú a dos pentàgons i cada vèrtex és comú a quatre pentàgons. Observa, a més, que tothom sempre porta el rellotge a la mà dreta. Cada vegada que compta les cares s'equivoca, però sempre obté un número entre vint i trenta. Quantes cares hi ha realment? Com és el seu món?

11.6 Suposem que tenim una superfície compacta S subdividida en pentàgons, de manera que (a) dos pentàgons són o bé disjunts o bé tenen un únic vèrtex en comú o bé tenen una única aresta en comú; (b) a cada vèrtex hi conflueixen el mateix nombre de pentàgons. Demostreu que S no pot ser el tor.

11.7 Demostreu que tota superfície compacta connexa és homeomorfa a una, i només una de les següents superfícies: $S^2 + nT$, $P + nT$ o bé $K + nT$ on n és un nombre enter positiu o zero, T és un tor, P és un pla projectiu i K és una ampolla de Klein.

11.8 Sigui S una superfície compacta connexa que resulta d'identificar dos a dos els costats d'un octògon. Demostreu que $\chi(S) \geq -2$. Demostreu que qualsevol superfície X tal que $\chi(X) \geq -2$ es pot aconseguir identificant dos a dos els costats d'un octògon.

11.9 Una superfície està triangulada amb 54 triangles i 26 vèrtex. Classifiqueu-la.

11.10 Considerem la superfície S_g i la superfície N_h. Fem dos petits forats disjunts D_1, D_2 a S_g i dos petits forats disjunts D_1', D_2' a N_h. Identifiquem $\partial D_i = \partial D_i'$ per $i = 1, 2$. Classifiqueu la superfície que s'obté.

11.11 Designem per $\mathcal{Q}_n$ les funcions polinòmiques reals de grau ≤ 2 en n variables i identifiquem $\mathcal{Q}_n$ amb un espai euclidià. Per exemple, $\mathcal{Q}_2 \cong \mathbb{R}^6$ i $\mathcal{Q}_1 \cong \mathbb{R}^3$. Sigui D el disc unitat de $\mathbb{R}^2$ i considerem

$$\mathcal{M} := \left\{ f \in \mathcal{Q}_2 : \int_D f = 0,\ \int_D f^2 = 1 \right\}$$

amb la topologia induïda. (Aquest espai apareix en uns certs treballs de percepció visual. Vegeu, per exemple, G. Carlsson, *Topology and data*, Bull. Amer. Math. Soc. 46-2 (2009) 255–308.) Definim $\mathcal{M}_0$ com el subespai de $\mathcal{M}$ format per les funcions $f \in \mathcal{M}$ que es poden expressar com

$$f(x, y) = q(\lambda x + \mu y)$$

per uns certs $q \in \mathcal{Q}_1$ i $(\lambda, \mu) \in S^1$. Es tracta de demostrar que l'espai topològic $\mathcal{M}_0$ és homeomorf a l'ampolla de Klein. Feu-ho seguint aquests passos:

1. Sigui $A := \{q = a + bt - 4at^2 \in \mathcal{Q}_1 : \int_{-1}^{1} q^2 = 1\}$. Demostreu que $A \cong S^1$.

2. Si $q \in A$ i $(\lambda, \mu) \in S^1$, considereu la funció $f \in \mathcal{Q}_2$ donada per

$$f(x, y) := q(\lambda x + \mu y).$$

   Demostreu que $\int_D f = 0$ i $\int_D f^2 \neq 0$.

3. Considereu l'aplicació $F : A \times S^1 \to \mathcal{M}_0$ definida

$$F(q, \lambda, \mu)(x, y) := \left(\int_D q(\lambda x + \mu y)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} q(\lambda x + \mu y).$$

   Demostreu que F és exhaustiva.

4. Si $F(q, \lambda, \mu) = f$, demostreu que

$$F^{-1}(f) = \{(q, \lambda, \mu), (\overline{q}, -\lambda, -\mu)\}$$

on hem utilitzat la notació $\overline{q}(t) = q(-t)$.

5. Demostreu que $\mathcal{M}_0$ és homeomorf a l'ampolla de Klein.

Capítol 12

Epíleg

L'estudiant que ha seguit aquest curs haurà adquirit un llenguatge i uns fonaments mínims que li han de permetre intuir la grandesa i la profunditat d'aquest univers anomenat topologia. És probable que tingui ganes de saber-ne més, de caminar una mica més per aquestes regions immenses. En aquest epíleg donarem alguns indicis d'algunes comarques i serralades que anirà trobant si emprèn aquest camí. Tanmateix, haurem de ser força superficials en les nostres descripcions.

Teoria d'homologia

La teoria d'homologia va néixer de la ment de Poincaré a l'hora que naixia el segle XX i es va anar desenvolupant i consolidant al llarg de la primera meitat del segle passat. Aquesta teoria permet associar a cada espai topològic X una família d'invariants algebraics que s'anomenen els *grups d'homologia* de X.

$$X \mapsto H_i(X), \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

L'homologia permet resoldre alguns dels problemes que han aparegut al llarg d'aquest curs, la solució dels quals ha quedat fora del nostre abast. Per exemple, la teoria d'homologia és l'eina que permet demostrar que, si $n \neq m$, aleshores S^n i S^m són espais diferents i també que $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$ són espais diferents si $n \neq m$. Permet fonamentar rigorosament el concepte d'orientabilitat. Serveix per demostrar el teorema de la corba de Jordan i el teorema de la característica d'Euler—en dimensió arbitrària. És una eina molt poderosa.

Topologia algebraica

La teoria d'homologia va molt més enllà de ser una eina per demostrar els teoremes que hem mencionat abans. És la porta d'entrada a la *topologia algebraica*, una de les branques més importants de les matemàtiques. Dit d'una manera molt general, la topologia algebraica associa invariants algebraics —grups, anells, etc.— als espais topològics. Aquests invariants ens permeten distingir els espais entre ells i estudiar-ne les seves propietats.

Un exemple elemental podria ser la *característica d'Euler*, que és un nombre enter que és un invariant topològic dels espais. Un altre exemple serien els *grups d'homologia* $H_*(X)$. El desenvolupament de la topologia algebraica des dels treballs de Poincaré ha conduït a la introducció d'invariants algebraics més i més sofisticats: l'anell de cohomologia, les operacions de Steenrod, la teoria K, la teoria de cobordisme, la cohomologia el·líptica,...

Si, per exemple, h és un d'aquests invariants i som capaços de calcular-lo per a dos espais X i Y i veiem que $h(X) \ncong h(Y)$, aleshores deduïm que $X \ncong Y$. Si, en canvi, obtenim $h(X) \cong h(Y)$ i sospitem que $X \ncong Y$, aleshores en caldrà inventar un invariant més sofisticat, més *fi*, que distingeixi l'espai X de l'espai Y.

El grup fonamental

La famosa *conjectura de Poincaré* afirma que l'única varietat compacta de dimensió 3 que és *simplement connexa* és l'esfera. Aquest concepte de "simplement connexa" va ser introduït pel mateix Poincaré i fa referència a que tot llaç es pot contraure a un punt. Més en general, considerem un espai topològic X, escollim un punt $x_0 \in X$ i considerem tots els llaços de X amb origen i final a x_0. Aleshores, identifiquem dos llaços $\omega_0 \sim \omega_1$ si es pot passar d'un a l'altre per una família contínua de llaços ω_t, $t \in [0, 1]$. Resulta que el conjunt que obtenim és un *grup* amb l'operació de concatenar un llaç després d'un altre. Aquest grup és un invariant topològic de l'espai X i s'anomena el *grup fonamental* de X:

$$\pi_1(X)$$

El grup fonamental d'un espai ens dóna informació important sobre l'espai, però també ens dóna un *pont* entre la teoria de grups i la topologia.

En efecte, si G és un grup arbitrari, podem construir un cert espai topològic, anomenat BG, canònicament associat al grup G, que té per grup fonamental el grup G.

$$\pi_1(BG) = G$$

Això ens permet, en alguns casos, estudiar propietats dels grups a partir d'estudiar la topologia dels espais BG. Per exemple, qualsevol dels instruments de la topologia algebraica que hem comentat abans, quan els apliquem a un espai BG d'aquests, ens donarà algun invariant del grup abstracte G.

Varietats diferenciables i fibrats vectorials

Hem dit que les varietats són uns dels espais topològics més importants que hi ha. Dintre de les varietats, les més importants són les *varietats diferenciables*. Una varietat és un espai que, localment, té la topologia de $\mathbb{R}^n$. Però $\mathbb{R}^n$ té molta més estructura, més enllà de la seva topologia. Per exemple, hi ha una estructura *diferencial* que ens permet parlar de funcions diferenciables, derivades parcials, formes diferencials, camps vectorials, integració, etc. Una varietat diferenciable és una varietat topològica que, a més, està localment modelada sobre $\mathbb{R}^n$, amb la seva estructura diferencial.

Tot estudiant de matemàtiques hauria de conèixer la teoria elemental de les varietats diferenciables i les seves subvarietats, els conceptes de camp tangent, forma diferencial, integració, derivada covariant, etc.

Dins de la topologia, les varietats diferenciables també hi juguen un paper molt important perquè són les varietats que tenen un millor comportament i sobre les que és possible desenvolupar una teoria més satisfactòria.

L'estudi de les varietats diferenciables ens durà a la teoria de *fibrats vectorials* i *classes característiques*, que són les eines bàsiques per atacar preguntes com aquestes, que ja hem trobat en aquests apunts:

- És possible incloure una varietat N a $\mathbb{R}^n$?
- És possible incloure una varietat N a la varietat M?
- Si N és una varietat compacta, existirà una varietat compacta M que tingui N com a vora?

Teoria d'homotopia

A la topologia ens agradaria poder decidir si dos espais són homeomorfs o no i ens agradaria poder conèixer quines són les aplicacions contínues entre ells. Com que això és monstruosament difícil (de fet, és impossible en general), la teoria d'homotopia proposa una relació més feble que la de ser homeomorfs, que és la de ser *homotòpicament equivalents*.

Dues aplicacions contínues $f_0, f_1 : X \to Y$ es diu que són *homotòpiques* si pertanyen a una família contínua d'aplicacions f_t, $t \in [0, 1]$. Aleshores, dos espais X, Y són homotòpicament equivalents si existeixen aplicacions $f : X \to Y$ i $g : Y \to X$ tals que fg i gf siguin aplicacions homotòpiques a les aplicacions identitat corresponents.

El pas a la *categoria homotòpica* és una simplificació dràstica. Per exemple, les aplicacions contínues de S^n a S^n formen un espai topològic que sembla molt difícil de descriure però, llevat d'homotopia, les aplicacions de S^n a S^n es coneixen perfectament i n'hi ha exactament una per cada nombre enter. Tanmateix, aquesta simplificació dràstica ens manté encara en un món d'una riquesa i una complexitat impressionants.

La pregunta central de la teoria d'homotopia és la de determinar quines són, llevat d'homotopia, les aplicacions d'una esfera S^m en una altra esfera S^n. La teoria neix el 1931 quan Heinz Hopf va donar la idea clau per classificar les aplicacions

$$S^3 \to S^2$$

llevat d'homotopia —n'hi ha exactament una per cada nombre enter. Des d'aleshores, la tecnologia que s'ha anat desenvolupant per atacar aquest problema —que no s'ha resolt— és impressionant.

La teoria d'homotopia està íntimament relacionada amb la topologia algebraica i va molt més enllà d'atacar el problema de les aplicacions $S^m \to S^n$, per dos motius:

1. Hi ha molts problemes de topologia que a primera vista no sembla que siguin problemes de teoria d'homotopia, fins que es demostra que la solució del problema és equivalent a la solució d'un determinat problema homotòpic.

2. S'ha vist que les idees abstractes que són a la base de la teoria d'homotopia es poden aplicar a molts altres àmbits fora de la topologia.

Topologia geomètrica

Normalment, s'anomena *topologia geomètrica* l'estudi topològic de les varietats, amb totes les eines que hem discutit fins ara i també amb unes eines específiques, d'un caire més geomètric, com la teoria de la *cirurgia*. En el cas de les varietats diferenciables, també s'ha utilitzat el nom *topologia diferencial*.

Normalment, es distingeix entre la topologia de *dimensió baixa*, que és la de les varietats de dimensió 3 i 4 i la topologia de les varietats de dimensió ≥ 5, que tenen un comportament molt diferent i, curiosament, més senzill que el de les varietats de dimensions inferiors. Pensem, per exemple, en la conjectura de Poincaré, que pot generalitzar-se a qualsevol dimensió. Poincaré la va plantejar l'any 1900. El 1961 Stephen Smale va demostrar que és certa en qualsevol dimensió ≥ 5. Vint-i-un anys més tard, Michael Freedman va demostrar que és certa en dimensió 4. El cas de dimensió 3 —el més difícil— no es va resoldre fins l'any 2003. L'explicació d'aquesta dificultat especial de les dimensions 3 i 4 és que en dimensions grans hi ha "prou espai" per utilitzar una tècnica de transformació d'unes varietats en unes altres que va inventar John Milnor el 1961 i es coneix amb el nom de *cirurgia*.

La conjectura de Poincaré ha estat esperonant l'estudi de les —dificilíssimes— varietats de dimensió tres durant més d'un segle i ara la teoria matemàtica d'aquestes varietats és una àrea riquíssima dins de la geometria.

A l'àmbit de la topologia geomètrica també hi podem incloure la **teoria de nusos**, que és una branca ben activa de la topologia. Matemàticament, un *nus* és una aplicació injectiva i diferenciable de la circumferència a $\mathbb{R}^3$ i dos nusos són equivalents —són *el mateix* nus— si hi ha un homeomorfisme de $\mathbb{R}^3$ que conserva l'orientació i transforma un en l'altre. El concepte és molt senzill, però la teoria de nusos és molt rica en problemes oberts. Quins nusos hi ha? Com podem decidir si dos nusos són iguals? Els avenços més importants s'han produït quan s'han pogut descobrir *invariants* dels nusos, és a dir, objectes matemàtics —per exemple, un polinomi— associats a qualsevol nus, que es puguin calcular i tals que dos nusos equivalents tinguin sempre el mateix invariant.

Pensem que comptar i fer nusos deuen haver estat les primeres activitats matemàtiques dels éssers humans. Curiosament, l'aritmètica i la teoria de nusos estan plenes de problemes no resolts, amb enunciats elementals.

Topologia i teoria de grups

Ja hem indicat que, formalment, podríem mirar la teoria de grups com una branca de la topologia perquè hi ha una manera canònica d'associar a cada grup G un espai BG i a cada homomorfisme de grups $\phi : G \to H$ una aplicació contínua $B\phi : BG \to BH$. De fet, aquestes construccions es fan dintre de la teoria d'homotopia.

El cas és que la relació entre la teoria de grups i la topologia ha estat constant des de l'època de Poincaré. Per exemple, s'ha utilitzat topologia per demostrar teoremes sobre grups —principalment a partir de la idea de les accions d'un grup sobre un espai— i s'han utilitzat els invariants de la topologia algebraica per obtenir invariants significatius del grups abstractes.

Un cas especialment interessant és el dels grups de Lie, que són objectes que són, simultàniament, grups i varietats diferenciables. L'estudi de la topologia dels grups de Lie G i dels espais BG ha suscitat alguns dels avenços més significatius de la història de la teoria d'homotopia. Recentment, s'ha encunyat el terme *teoria homotòpica de grups* per incloure tota una sèrie de desenvolupaments en els que les tècniques de la topologia —més exactament, de la teoria d'homotopia— s'usen per estudiar diverses famílies importants de grups, com poden ser els grups finits, els grups de Lie i algunes generalitzacions.

Topologia i medalles Fields

Repassant la llista de matemàtics guardonats amb les medalles Fields —52 fins l'any 2013— podem fer-nos una idea del pes que ha tingut la topologia en la matemàtica dels últims vuitanta anys. Els casos més notables són aquests:

1954 **Jean-Pierre Serre** havia fet una sèrie d'avenços que pràcticament inauguraven la topologia algebraica moderna.

1958 **René Thom** rep la medalla pels seus treballs sobre cobordisme, que utilitzen les tècniques més avançades de topologia algebraica de l'època per classificar les varietats respecte de la relació de ser *cobordants*.

1962 **John Milnor** acabava de demostrar una sèrie de resultat revolucionaris en topologia. Per exemple, l'existència d'esferes exòtiques

—espais homeomorfs a l'esfera però que com a varietats diferenciables no són equivalents a l'esfera—, o la demostració que una conjectura fonamental sobre triangulacions que havia rebut el nom de *Hauptvermutung* és falsa.

1966 **Michael Atiyah** havia descobert la teoria K i, juntament amb Isadore Singer, havia demostrat el gran *teorema de l'índex* que relaciona el comportament dels operadors pseudo-diferencials en una varietat amb la topologia de la varietat. **Stephen Smale**, ja ho hem dit abans, va demostrar la conjectura de Poincaré en totes les dimensions ≥ 5 i va demostrar el famós teorema del $h-$cobordisme, que és la base per començar a estudiar la topologia de les varietats de dimensió gran. Aquest mateix any també es va concedir la medalla Fields a **Alexander Grothendieck** que, en tant que geni universal, també ha tingut una influència molt gran en el desenvolupament de la topologia.

1970 **Sergei Novikov** era un dels grans topòlegs de l'època. En topologia algebraica havia treballat en cobordisme i havia inventat la successió espectral d'Adams-Novikov, però també va jugar un paper molt important a la topologia geomètrica. És l'autor de la *conjectura de Novikov*, un dels problemes oberts més importants de la topologia.

1978 La *teoria K algebraica* va relacionar, de manera sorprenent, la teoria d'homotopia i la teoria d'anells. Va ser inventada per **Daniel Quillen**, que també és el creador de l'axiomàtica abstracta de la teoria d'homotopia. A banda d'aquests dos resultats fonamentals, la influència de Quillen en el desenvolupament de la topologia algebraica i en les relacions amb l'àlgebra i la teoria de grups, ha estat molt gran.

1982 **William Thurston** ha estat definit com el més gran dels geòmetres del segle XX i ha inspirat una gran part dels desenvolupaments al voltant de la conjectura de Poincaré. En particular, ell va intuir i formular el que es va conèixer com a *conjectura de geometrització* —ara és un teorema— que explica quina és l'estructura de totes les varietats de dimensió 3.

1986 **Simon Donaldson** i **Michael Freedman** van rebre la medalla Fields pels seus treballs fonamentals sobre varietats de dimensió 4.

1990 **Vaughan Jones** havia descobert el polinomi que du el seu nom, que és un invariant dels nusos que, curiosament, va néixer a partir dels estudis de Jones sobre àlgebres d'operadors. També va rebre una medalla Fields el polifacètic **Edward Witten** que, encara que se'l consideri principalment com a físic teòric, l'impacte de les seves idees a la topologia és immens.

1998 **Maxim Kontsevich** ha treballat en les relacions entre la teoria de nusos i la física.

2002 **Vladimir Voevodsky** va demostrar la *conjectura de Milnor* i ho va fer inventant tècniques noves de topologia algebraica. Gràcies a la seva obra, la teoria d'homotopia ha anat trobant significat en camps com la geometria algebraica o, més recentment, els fonaments de les matemàtiques.

2006 Aquest any es concedeix la medalla Fields al famós **Grigori Perelman** —que la va rebutjar— per haver trobat, després de més de cent anys, una demostració de la conjectura de Poincaré. De fet, Perelman ha demostrat molt més que la conjectura de Poincaré, perquè ha resolt la conjectura de geometrització de Thurston.

Setze sobre 52: més del 30% de les medalles Fields fins el 2006 han premiat contribucions rellevants en el camp de la topologia.

Índex alfabètic

FI

Jaume Aguadé (Barcelona 1953) és professor al Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona. Al llarg de la seva carrera, ha impartit cursos de topologia a tots els nivells —i també innombrables cursos d'àlgebra lineal, càlcul infinitesimal i estadística elemental. Dirigeix el **Grup de Recerca en Topologia Algebraica de Barcelona (GTAB)** i la seva recerca s'inscriu dintre la teoria d'homotopia, amb especial atenció a les àlgebres de cohomologia i els espais classificadors dels grups de Lie. Més enllà de les matemàtiques, els seus interessos inclouen la muntanya —en totes les seves facetes, de l'alpinisme a l'excursionisme passant per l'esquí de muntanya— i l'enografia.