

Democràcia: dels vots als escons*

Aureli Alabert

La democràcia parlamentària està basada en l'elecció justa d'un nombre petit d'individus (diputats) per representar un nombre molt més gran de ciutadans. És una idea ben clara, llevat que... què vol dir *justa*?

Al nostre país, els candidats a diputat es presenten a les eleccions agrupats en les anomenades *candidatures* o *llistes*, que poden ser presentades per partits polítics o per coalicions de partits. Cada elector vota una de les llistes. A partir del nombre de vots obtinguts, cada llista rep una certa quantitat d'escons.

La pregunta és, doncs, com determinar, a partir del nombre de vots que rep cada llista, la quantitat d'escons que li correspon. El sistema que s'utilitza a les eleccions al Parlament de Catalunya es coneix amb el nom de *lei de d'Hondt*, i els càlculs que requereix són molt fàcils de fer. Prenguem com a exemple els resultats de les eleccions del 17 d'octubre de 1999 a la circumscripció de Lleida, on calia escollir 15 diputats.

Fem una taula amb una fila per a cada candidatura, i posem a la primera columna el nombre de vots v que ha obtingut cadascuna. La llista amb més vots (CiU) rep el primer escó. Hi fem una marca, i posem a la segona columna el nombre de vots dividit per 2.

| | v | $v/2$ | | |
|-------------|--------|-------|--|--|
| CiU | •91199 | 45600 | | |
| PSC-CC-IC-V | 55963 | | | |
| ERC | 22011 | | | |
| PP | 15121 | | | |

*Aparegut prèviament com a Capítol 2.1 del llibre *Fes Matemàtiques*, Dept. de Matemàtiques, Univ. Autònoma de Barcelona, 2000.

Entre tots els números de la taula que no estan marcats, escollim el més gran. La candidatura corresponent rep el segon escó. En aquest cas, és la coalició PSC-CC-IC-V. Marquem el número i posem també a la columna següent aquest número dividit per 2. El següent número més alt sense marcar és un altre cop el de CiU, que rep el tercer escó. Ara posem a la tercera columna el nombre de vots dividit per 3.

El procediment continua fins que s'han esgotat els 15 escons. A cada columna cal dividir els vots per 1, 2, 3, 4, ... La taula resultant, amb els escons e assignats finalment a cada candidatura és:

| | v | $v/2$ | $v/3$ | $v/4$ | $v/5$ | $v/6$ | $v/7$ | $v/8$ | $v/9$ | e |
|-------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-------|----------|
| CiU | •91199 | •45600 | •30400 | •22800 | •18240 | •15200 | •13028 | •11400 | 10133 | 8 |
| PSC-CC-IC-V | •55963 | •27982 | •18654 | •13991 | •11193 | | | | | 5 |
| ERC | •22011 | 11006 | | | | | | | | 1 |
| PP | •15121 | 7561 | | | | | | | | 1 |

La llei de d'Hondt és un algorisme, és a dir, un procediment que mena a la resolució d'un cert problema matemàtic. Per tant, és lògic demanar-se:

- Quin problema matemàtic resol la llei de d'Hondt?
- És aquest problema matemàtic un bon model per al repartiment just dels escons?

En principi, el que voldríem d'un *sistema electoral proporcional* és que la proporció d'escons de cada llista fos igual a la proporció de vots que ha obtingut. Veiem a la taula que ERC, per exemple, ha rebut 22 011 vots sobre un total de 184 294. Per conservar aquesta proporció, la *quota* d'escons q que li correspon es calcularia fent

$$\frac{22\,011}{184\,294} = \frac{q}{15}, \Rightarrow q = 1.79.$$

El mateix càlcul per a les altres llistes ens dóna quotes de 7.42, 4.55 i 1.23. Atès que no podem assignar fraccions d'escó, hem de trobar una manera d'aproximar aquests valors de q per nombres enters. Examinarem tres possibilitats, entre les moltes que hi ha.

Suposem que hi ha n candidatures. Denotem per v_i , $i = 1, \dots, n$ la quantitat de vots aconseguits per la candidatura i . Si li assignem una quantitat e_i (entera) d'escons, aleshores el quocient v_i/e_i és el preu, en vots, de cada escó obtingut per i . La llista més afavorida és la que obté el preu $\min_{i=1, \dots, n} v_i/e_i$. Aquest mínim sempre està acotat superiorment (per V/E , on V és el nombre total de vots emesos i E és el nombre total d'escons per repartir). Per tant,

si escollim els e_i de manera que el preu mínim sigui el màxim possible, estem uniformitzant el preu per escó de totes les candidatures.

En definitiva, obtenim el problema matemàtic de trobar les n quantitats e_1, \dots, e_n , enteres positives i de suma E , per a les quals s'obté el

$$\max \min_{i=1, \dots, n} \frac{v_i}{e_i}.$$

Aquest problema pertany a una classe de problemes d'optimització, anomenats de *programació entera*, que són en general molt difícils. Afortunadament, però, en aquest cas hi ha un algorisme molt eficient per resoldre'l. Es tracta precisament de la llei de d'Hondt. Això respon a la primera pregunta que formulàvem.

Com acabem de veure, el model matemàtic de “justícia electoral” que hi ha darrere de la llei de d'Hondt pretén uniformitzar els preus per escó “a l'alça”. També podem uniformitzar “a la baixa”: la llista menys afavorida és la que paga el preu $\max_{i=1, \dots, n} v_i/e_i$. Escollirem aleshores els e_i de forma que aquest preu sigui el mínim possible. S'obté el problema

$$\min \max_{i=1, \dots, n} \frac{v_i}{e_i}.$$

Aquest problema també té un algorisme de resolució eficient, similar al de la llei de d'Hondt. Només cal canviar els divisors de cada columna, que eren 1, 2, 3, 4, ... per la seqüència 0, 1, 2, 3, ... L'algorisme s'anomena *llei d'Adams* o *dels divisors més petits*. En el nostre exemple de Lleida obtindríem la taula següent, on el resultat de la divisió per 0 el representem amb el símbol ∞ , que cal interpretar en el sentit que totes les llistes reben un primer escó abans que cap d'elles en rebí el segon.

| | $v/0$ | $v/1$ | $v/2$ | $v/3$ | $v/4$ | $v/5$ | $v/6$ | $v/7$ | e |
|-------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-------|----------|
| CiU | $\bullet\infty$ | $\bullet 91199$ | $\bullet 45600$ | $\bullet 30400$ | $\bullet 22800$ | $\bullet 18240$ | $\bullet 15200$ | 13028 | 7 |
| PSC-CC-IC-V | $\bullet\infty$ | $\bullet 55963$ | $\bullet 27982$ | $\bullet 18654$ | 13991 | | | | 4 |
| ERC | $\bullet\infty$ | $\bullet 22011$ | 11006 | | | | | | 2 |
| PP | $\bullet\infty$ | $\bullet 15121$ | | | | | | | 2 |

Considerarem finalment el model següent: si E és el nombre total d'escons i V el nombre total de vots, és lògic demanar que cada elector tingui un “poder d'influència” sobre aproximadament E/V escons. Si vota la llista i , el seu poder d'influència ha estat realment de e_i/v_i , puix que e_i és el nombre d'escons assignats a la llista i . Les diferències $\frac{e_i}{v_i} - \frac{E}{V}$ es poden interpretar com

una desviació de l'assignació ideal deguda a circumstàncies aleatòries. Una mesura habitual d'aquestes desviacions és l'error quadràtic. Si volem que aquest error quadràtic sigui mínim, haurem de trobar l'assignació e_1, \dots, e_n , que fa

$$\min \sum_{i=1}^n v_i \left(\frac{e_i}{v_i} - \frac{E}{V} \right)^2 .$$

Aquest model està en certa manera a mig camí entre el corresponent a la llei de d'Hondt i el que dona lloc a la llei d'Adams, com es pot veure del fet que també és resoluble mitjançant una seqüència de divisors, que en aquest cas és 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, ... (equivalentment, es pot usar la seqüència 1, 3, 5, 7, ..., que dona el mateix resultat). L'algorisme es coneix amb el nom de *llei de Sainte-Laguë*. L'assignació d'escons resultant a Lleida és la següent:

| | v | $v/3$ | $v/5$ | $v/7$ | $v/9$ | $v/11$ | $v/13$ | $v/15$ | e |
|-------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|----------|
| CiU | •91199 | •30400 | •18240 | •13028 | •10133 | •8291 | •7015 | 6080 | 7 |
| PSC-CC-IC-V | •55963 | •18654 | •11193 | •7995 | •6218 | | | | 5 |
| ERC | •22011 | •7337 | 4402 | | | | | | 2 |
| PP | •15121 | 7561 | | | | | | | 1 |

Observem que els resultats dels tres models matemàtics de “justícia electoral” que hem presentat són diferents. No obstant això, tots tres estan ben motivats en termes d'una funció objectiu que cal minimitzar o maximitzar i que representa una mesura de desproporcionalitat respecte a la quota. La conclusió és que no es pot parlar d'una única manera justa d'assignar escons. L'elecció del criteri a emprar és arbitrària i s'ha de fer a partir de consideracions polítiques. Un cop escollit el criteri, correspon a les matemàtiques trobar la manera adequada de representar-lo sense ambigüitats i proporcionar algun mètode eficient per obtenir els resultats. A la vegada, la simulació de resultats d'eleccions sota diferents criteris pot aportar idees per a l'adopció d'un sistema electoral, o per a la invenció de nous sistemes.

El lector pot dissenyar fàcilment altres mètodes a partir dels anteriors; de fet, se'n poden assajar infinits com a variants de les regles de divisors que hem vist aquí. Són possibles també altres criteris molt raonables de repartiment proporcional, i que no són resolubles mitjançant seqüències de divisors. La llei de d'Hondt deu el seu nom al jurista belga Victor d'Hondt, que el proposà el 1878, tot i que ja havia estat inventat anteriorment pel nord-americà Thomas Jefferson. S'utilitza, a més de Catalunya, a Espanya, Portugal i Finlàndia, entre d'altres. A. Sainte-Laguë publicà el seu mètode el 1910, i és conegut a

Amèrica del Nord amb el nom de llei de Webster. S'utilitza actualment, en forma pura, a Nova Zelanda i, amb certes modificacions, a molts altres llocs. La llei d'Adams està en desús.

Si bé els tres models vistos donen resultats diferents, que podrien certament conduir a molt diversos escenaris a l'hora de la cerca de l'estabilitat parlamentària i la formació de govern, és clar que les diferències són petites. Hi ha dos factors més del disseny d'un sistema electoral que solen tenir una influència més gran en la desproporció entre vots i escons que de vegades s'observa. El primer d'aquest factors és la *divisió en circumscripcions*; el segon és el *llindar inferior*.

La divisió en circumscripcions pretén que els futurs diputats representin també un territori, a més de representar a electors concrets. Si comparem la proporció d'electors a cadascuna de les quatre circumscripcions catalanes amb el nombre de diputats que escullen, veiem que la circumscripció de Barcelona està infrarepresentada en benefici de les altres tres.

| Circumscripció | Electors | Quota | Escons |
|----------------|----------|--------|--------|
| Barcelona | 2376050 | 102.35 | 85 |
| Tarragona | 284221 | 12.24 | 18 |
| Girona | 283346 | 12.21 | 17 |
| Lleida | 190309 | 8.20 | 15 |
| Totals | 3133926 | 135 | 135 |

El terme *quota* vol dir aquí els escons teòrics que correspondrien a cada circumscripció si mantinguéssim la proporcionalitat estricta amb la població d'electors que contenen. Determinar aquesta assignació és un problema completament anàleg al de repartir escons entre candidatures. Per exemple, a les eleccions al Congrés dels Diputats espanyol, cada circumscripció (província) rep dos escons inicials i la resta es reparteix arrodonint cap amunt les quotes que tenen una part decimal més gran, i arrodonint cap avall la resta.

El segon factor que hem esmentat, el llindar inferior, estableix que una candidatura que no obtingui almenys el 3% dels vots en una circumscripció és automàticament eliminada, i els seus vots es perden. La justificació política d'aquesta norma és evitar que hi hagi una excessiva dispersió de partits en el Parlament.

En el nostre exemple de Lleida, hem descartat ja d'entrada les set llistes que no van arribar al llindar. De fet, en aquest cas concret, tampoc no haurien obtingut representació (amb la llei de d'Hondt) encara que no s'hagués

establert el llindar. En efecte, la cinquena llista en nombre de vots, EV-CEC, n'obtingué 1232, que, com es comprova fàcilment a la taula, és insuficient per obtenir l'últim escó.

Examinarem la influència de la divisió en circumscripcions i del llindar inferior aplicant la llei de d'Hondt amb una sola circumscripció i sense imposar cap llindar mínim. En la taula següent, comparem els resultats que s'obtidrien amb aquest sistema (S_2) amb els resultats oficials del sistema actualment en vigor (S_1).

| Llista | Vots | % | Quota | S_1 | S_2 |
|-------------|---------|-------|-------|-----------|-----------|
| CiU | 1178420 | 37.70 | 51.37 | 56 | 53 |
| PSC-CIPC | 948202 | 30.33 | 41.33 | 36 | 42 |
| PSC-CC-IC-V | 235097 | 7.52 | 10.25 | 16 | 10 |
| PP | 297265 | 9.51 | 12.96 | 12 | 13 |
| ERC | 271173 | 8.67 | 11.82 | 12 | 12 |
| IC-V | 78441 | 2.51 | 3.42 | 3 | 3 |
| EUiA | 44454 | 1.42 | 1.94 | 0 | 1 |
| EV-CEC | 22797 | 0.73 | 0.99 | 0 | 1 |
| EV-AV | 8254 | 0.26 | 0.36 | 0 | 0 |
| POSI | 2784 | 0.09 | 0.12 | 0 | 0 |
| EC | 1774 | 0.06 | 0.08 | 0 | 0 |
| PHC | 1327 | 0.04 | 0.06 | 0 | 0 |
| FE-JONS | 1281 | 0.04 | 0.06 | 0 | 0 |
| UC-CDS | 1161 | 0.04 | 0.05 | 0 | 0 |
| PLN | 1029 | 0.03 | 0.04 | 0 | 0 |
| UNIC-FIC | 881 | 0.03 | 0.04 | 0 | 0 |
| TPR | 833 | 0.03 | 0.04 | 0 | 0 |
| PE | 799 | 0.03 | 0.03 | 0 | 0 |
| LI(LIT-CI) | 485 | 0.02 | 0.02 | 0 | 0 |
| UFD | 447 | 0.01 | 0.02 | 0 | 0 |
| CAM | 110 | 0.00 | 0.00 | 0 | 0 |
| PDEP | 108 | 0.00 | 0.00 | 0 | 0 |

Dues curiositats de l'assignació S_2 : s'observa que els escons estan sempre a distància més petita que 1 de la quota, excepte en el cas de CiU, que sembla anormalment suprarepresentada. En canvi, EUiA sembla injustament

infrarepresentada. De fet, aquests dos partits es disputen l'últim escó en joc. Si 15 votants de CiU (curts de vista) confonguessin la seva papereta amb la de EUiA, l'escó canviaria de mans. D'altra banda, si les dues coalicions formades al voltant del PSC presentessin una única candidatura, obtindrien un escó més (53), en perjudici de CiU (52) i sense afectar la resta de llistes.

Les sigles que hem utilitzat corresponen a les candidatures següents:

| | |
|-------------|--|
| CiU | Convergència i Unió |
| PSC-CIPC | PSC-Ciutadans pel Canvi |
| PSC-CC-IC-V | PSC-Ciutadans pel Canvi-IC-Verds |
| PP | Partit Popular |
| ERC | Esquerra Republicana de Catalunya |
| IC-V | Iniciativa per Catalunya-Verds |
| EUiA | Esquerra Unida i Alternativa |
| EV-CEC | Els Verds (Confederació Ecologista de Catalunya) |
| EV-AV | Els Verds-Alternativa Verda |
| POSI | Partit Obrer Socialista Internacionalista |
| EC | Estat Català |
| PHC | Partit Humanista de Catalunya |
| FE-JONS | Falange Española de las J.O.N.S. |
| UC-CDS | Unión Centrista-Centro Democrático y Social |
| PLN | Partit de la Llei Natural |
| UNIC-FIC | UNIC-FIC |
| TPR | Trabajadores Públicos Rebotados |
| PE | Partit Espinaltià |
| LI(LIT-CI) | Lluita Internacionalista |
| UFD | Unión Federal Democrática |
| CAM | Catalans al Món |
| PDEP | Partido Democrático del Pueblo |

La llei que regula les eleccions a tot el territori espanyol és essencialment la Llei orgànica 5/1985, de 19 de juny, del règim electoral general (BOE núm. 147, de 20 de juny), amb algunes modificacions posteriors.

Els resultats complets, per circumscripcions, comarques, municipis i candidatura, de les eleccions al Parlament de Catalunya del 17 d'octubre de 1999 es poden trobar a les pàgines d'Internet de la Generalitat de Catalunya (<http://www.gencat.cat>).



Aureli Alabert
Dept. de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
08193 Bellaterra
Aureli.Alabert@uab.cat

Publicat el 18 de setembre de 2006