MAT^2
MATerials MATemàtics
Volum 2006, treball no. 5, 4 pp. ISSN: 1887-1097
Publicació electrònica de divulgació del Departament de Matemàtiques
de la Universitat Autònoma de Barcelona
www.mat.uab.cat/matmat

El floc de neu de von Koch*

Antonio Teruel

Un exemple clàssic d'objecte fractal és la corba de von Koch (introduïda l'any 1904), l'interior de la qual es coneix com floc de neu de von Koch. A la figura 1 representem els primers passos en la construcció d'un dels costats de la corba de von Koch.

Figura 1: Portada del llibre

La construcció comença amb un triangle equilàter de costat l igual a la unitat de mesura, per exemple metres, i per tant de perímetre p igual a 3 metres. A continuació, en el terç central de cadascun dels costats es col·loca un triangle equilàter, amb els costats de longitud $l = 1/3\,m$, vegeu la figura 2.(b). D'aquesta manera s'obté una estrella de sis puntes. Notem que cadascun dels tres costats del triangle original s'ha substituït per quatre segments de longitud $1/3\,m$, per la qual raó la figura actual consta de $12 = 3 \times 4$ costats i té un perímetre de $p = 12 \times 1/3 = 3 \times 4/3\,m$. En el pas següent substituïm novament cada terç central dels dotze costats per un triangle equilàter de costat $l = 1/9 = 1/3^2\ m$, vegeu la figura 1.(c). Això proporciona un polígon de $36 = 12 \times 3 = 3 \times 4^2$ costats i de perímetre $p = 36 \times 1/3^2 = 3 \times 4^2/3^2\ m$.

Si repetim el procés n cops, és senzill concloure que la figura obtinguda és un polígon de 3×4^n costats i que la longitud de cada costat es $l = 1/3^n$ m, i dona com a resultat que el perímetre és de $p = 3 \times (4/3)^n\ m$. Ni tan sols en aquest moment tenim una representació completa de la corba de von Koch. Per aconseguir això hem de fer el pas al límit quan n tendeix a infinit.

---

*Aparegut prèviament com a Capítol 1.6 (explicació de la portada) del llibre *Fes Matemàtiques*, Dept. de Matemàtiques, Univ. Autònoma de Barcelona, 2000.

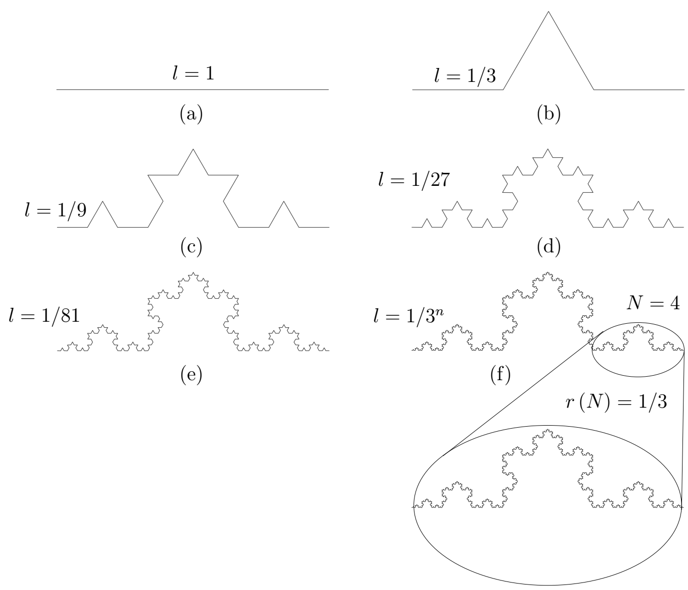

Figura 2: Construcció d'un dels costats de la corba de von Koch. (a) 1 costat de longitud 1; (b) 4 costats de longitud $1/3$; (c) 4^2 costats de longitud $1/3^2$; (d) 4^3 costats de longitud $1/3^3$; (e) 4^4 costats de longitud $1/3^4$; (f) 4^n costats de longitud $1/3^n$.

D'aquí es dedueix que el perímetre del floc de neu de von Koch té longitud infinita, $\lim_{n \nearrow +\infty} 3 \times (4/3)^n = +\infty$.

Hauríem canviat poc la nostra percepció del món si continuéssim contestant les mateixes preguntes que contestava Pitàgores en els seus resultats, el perímetre de la figura. És tanmateix ara la matemàtica la que qüestiona: quines propietats pot tenir una corba generada d'aquesta manera? La resposta, deguda a Hausdorff (1919) i elaborada per Besicovitch (1934) és el que s'anomena dimensió fractal o dimensió de Hausdorff–Besicovitch. El concepte de dimensió de Hausdorff-Besicovitch és prou complex per exigir un espai i unes eines que s'allunyen dels nostres propòsits. Tanmateix podem introduir aquí un concepte equivalent (útil en el cas de figures autosemblants), la dimensió de semblança.

Diem que una figura (en el nostre cas una corba) és *autosemblant* si es pot dividir en trossos de manera que cadascun sigui semblant al total. Per exemple, un segment de recta es pot dividir en N trossos, sent cadascun semblant a tot el segment amb raó de semblança $r(N) = 1/N$. En el cas d'un rectangle succeeix una cosa anàloga: podem dividir-lo en N rectangles de manera que cadascun sigui semblant al total amb una raó de semblança $r(N) = 1/N^{1/2}$. El mateix podem fer en el cas d'un paral·lelepípede rectangular i obtenim una raó de semblança $r(N) = 1/N^{1/3}$. Un examen detallat de l'anterior ens porta a pensar que si la raó de semblança d'un objecte s'expressa com $r(N) = 1/N^{1/D}$, llavors D és la dimensió euclidiana de l'objecte. En el cas del segment, $r(N) = 1/N^{1/1}$; així doncs; $D = 1$ i és cert que la dimensió euclidiana d'un segment és 1. El mateix succeeix en el cas d'un rectangle, per al qual $D = 2$ coincideix amb la dimensió euclidiana del rectangle, i en el cas del paral·lelepípede $D = 3$. D'aquest raonament sorgeix el concepte de dimensió de semblança. Si la raó de semblança $r(N)$ d'una figura autosemblant s'expressa com

$$r(N) = \frac{1}{N^{1/D}},$$

diem que la *dimensió de semblança* de la figura és D. Prenent logaritmes i aïllant D s'obté

$$D = \frac{\log(1/N)}{\log(r(N))}.$$

En el cas particular de la corba de von Koch s'observa que cadascun dels costats es pot dividir en quatre parts ($N = 4$) semblants al costat sencer, amb una raó de semblança $r(N) = 1/3$, (vegeu la figura 1.(f)). Així doncs, la corba de von Koch té dimensió de semblança

$$D = \frac{\log(1/4)}{\log(1/3)} = \frac{\log(4)}{\log(3)} = 1.2618...$$

La dimensió fractal ha esdevingut en els darrers anys una eina molt útil en l'estudi de la natura i ha transformat la nostra manera d'entendre-la. Objectes com les costes marines, els núvols, els arbres, etc. exhibeixen un comportament fàcilment identificable amb un fractal, encara que parlant amb propietat el terme fractal no seria aplicable a cap d'aquestes coses (tampoc el concepte d'esfera és estrictament aplicable a la Terra i ningú no dubta respecte al canvi de pensament que va produir el fet de considerar-la com a tal).

Aquest no és un exemple isolat de la capacitat creadora de les matemàtiques / matemàtics. La matemàtica n'és plena, de fet, no conté res més que això.

Antonio Teruel
Dept. de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de les Illes Balears
antonioe.teruel@uib.es

Publicat el 18 de setembre de 2006