MAT²
MATerials MATemàtics
Volum 2008, treball no. 3, 29 pp. ISSN: 1887-1097
Publicació electrònica de divulgació del Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona
www.mat.uab.cat/matmat

Caminant a l'atzar tots els camins porten a Roma

Xavier Bardina

Resum

Un individu surt tan begut de la taverna que no recorda on és casa seva. Decideix llavors caminar aleatòriament pel carrer de la següent forma: tira una moneda, si li surt cara fa un pas cap endavant i si li surt creu fa un pas enrera. Tornarà a la taverna? Arribarà a casa seva? I si enlloc de moure's per un carrer és mou per tota una ciutat i a cada cruïlla ha d'escollir entre 4 possibilitats: davant, darrera, dreta o esquerra? I si es mou a l'espai i ha d'escollir entre sis possibilitats diferents: davant, darrera, dreta, esquerra, amunt o avall?

Veurem que en els dos primers casos, a la recta i al pla, el nostre individu tornarà amb probabilitat 1 tant a la taverna com a casa seva. Podríem dir que demostrarem que *caminant a l'atzar tots els camins porten a Roma.* A l'espai però, veurem que pot ser que no torni mai ni a la taverna ni a casa seva. Finalment comentarem què passa en dimensions superiors i estudiarem el mateix problema en una xarxa hexagonal.

Caminant a l'atzar

El passeig aleatori és un problema clàssic de probabilitat que es pot resoldre de diferents formes. En el cas de la recta una forma habitual de considerarlo (vegeu Feller [2]) és fent un paral·lelisme amb el problema de la ruïna d'un jugador. Aquest problema consisteix en un jugador que juga tot el seu capital, d'unitat en unitat, contra un altre jugador en un joc amb una certa probabilitat p de guanyar i una probabilitat $q = 1 - p$ de perdre. El passeig aleatori que estem plantejant és el cas particular en què $p = q = \frac{1}{2}$ i el nostre contrincant té un capital infinit. Arribar a casa seva és equivalent a arruïnar-se o assolir una determinada quantitat de diners.

Nosaltres però resoldrem el problema directament. Això ens obligarà a treballar amb sèries, però aquest altre mètode té l'avantatge que és fàcilment generalitzable a dues o més dimensions.

A internet, es poden trobar molts *applets* que permeten simular passejos aleatoris. Per exemple, l'enllaç següent, vegeu [7], ens permet generar passejos aleatoris en una dimensió.

http://www.math.uah.edu/stat/applets/RandomWalkExperiment.xhtml

Una propietat important del passeig aleatori és que permet obtenir aproximacions per al moviment Brownià. Més concretament, a partir d'un passeig aleatori es poden construir uns processos, que per un resultat molt important de probabilitats, el *Teorema Central del Límit Funcional* se sap que convergeixen cap al moviment Brownià.

El *moviment Brownià* és el nom donat a l'irregular moviment del pol·len suspès en l'aigua observat pel botànic Robert Brown el 1828. A. Einstein, vegeu [1], va començar a desenvolupar el 1905 una teoria física d'aquest moviment. Einstein va argumentar que si la teoria molecular era correcta, les molècules d'aigua colpejarien el fluid aleatòriament per totes direccions, fent descriure a la partícula de pol·len un moviment de l'estil de l'observat per Brown. Cal esmentar que en aquella època la teoria molecular encara no estava totalment acceptada. En un sentit més ampli, hom anomena també moviment brownià la classe de models matemàtics que permeten descriure aquest procés físic i altres fenòmens anàlegs. Actualment, el moviment brownià i el càlcul estocàstic que se'n deriva s'utilitzen en molts models de la física i de l'economia on surten equacions diferencials amb pertorbacions aleatòries.

Pólya (1921), vegeu [4], va ser el primer en demostrar que en un passeig aleatori en dimensions 1 i 2 es retorna amb probabilitat 1 a l'origen mentre que això no passa en dimensions superiors. Montroll (1956), vegeu [3], va trobar una representació integral que permet calcular la probabilitat de retorn per dimensions iguals o superiors a 3. La integral que permet calcular la probabilitat pel cas de dimensió 3 havia estat resolta per Watson (1939), vegeu [6].

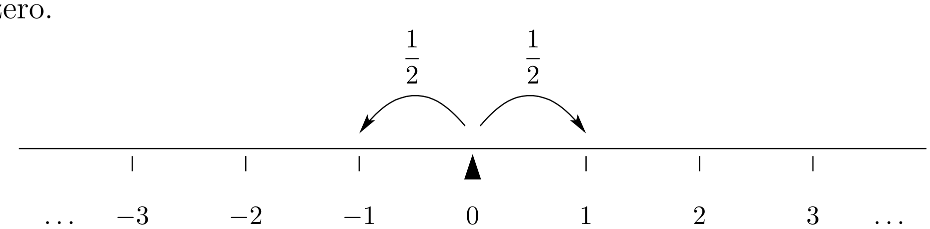
En la primera secció tractarem el problema en una dimensió. Veurem que amb probabilitat 1 el nostre individu tornarà tant a la taverna com a casa seva. En la segona secció estudiarem el problema al pla i veurem que en aquest cas passa el mateix. A la tercera secció veurem que a l'espai aquesta probabilitat ja no és 1 sinó que és aproximadament 0.34. Això ens permetrà enunciar, en la quarta secció, una llei del **0-1** a més de comentar què passa en dimensions superiors. Finalment, en la darrera secció veurem un passeig aleatori en un rusc d'abelles.

1 Passeig aleatori en una dimensió

Considerem un individu que surt tan begut de la taverna que no recorda on és casa seva i decideix caminar a l'atzar pel carrer de la següent manera: tira una moneda, si li surt cara fa un pas endavant i si li surt creu fa un pas enrera. Volem calcular quina és la probabilitat que retorni a la taverna i quina és la probabilitat que arribi a casa seva.

1.1 Retorn a la taverna

El problema, des del punt de vista matemàtic, és un passeig aleatori pels enters partint del zero (la taverna) i avançant o retrocedint un enter cada cop amb probabilitat $\frac{1}{2}$. Ens preguntem quina és la probabilitat de tornar al zero.



Passeig aleatori en una dimensió.

Considerarem les variables $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ que representaran els resultats dels llançaments de la moneda. Aquestes variables valdran 1 o -1 segons si el resultat del llançament ha estat cara (un pas endavant) o creu (un pas enrera).

D'altra banda, com que aquestes variables són el resultat del llançament d'una moneda és igual de probable que prenguin el valor 1 que el valor -1, és a dir,

$$P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = \frac{1}{2} \qquad n = 1, 2, ...$$

Definim ara les variables S_n que ens diran en quina posició estem a l'instant n. Com que sortim de la taverna, a l'instant zero estem a la posició 0 (la taverna), és a dir, $S_0 = 0$ i a l'instant n hem fet tantes passes endavant com cares han sortit i tantes passes enrera com creus han sortit. Això és el mateix que sumar 1 quan surt cara (fem un pas endavant) i restar 1 quan surt creu (fem un pas enrera), per tant, tenim que la posició a l'instant n ve donada per

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n.$$

Per exemple, suposem que en els successius llançaments l'individu treu la següent sèrie de cares i creus:

$$C\,C\,X\,X\,C\,C\,X\,C\,X \cdots$$

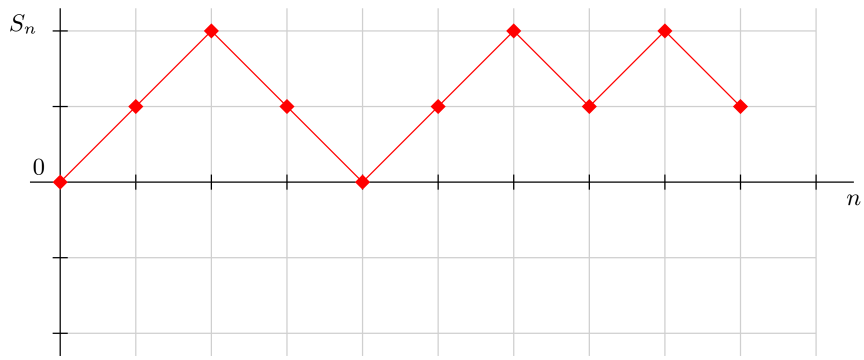
Aleshores, les primeres variables que hem introduït valdran

$$X_1 = 1,\ X_2 = 1,\ X_3 = -1,\ X_4 = -1,\ X_5 = 1,$$
$$X_6 = 1,\ X_7 = -1,\ X_8 = 1,\ X_9 = -1,\ \cdots$$

I les variables que ens donen la posició en cada instant prendran els següents valors:

$$\begin{aligned}
S_1 &= X_1 = 1\\
S_2 &= X_1 + X_2 = 1 + 1 = 2\\
S_3 &= X_1 + X_2 + X_3 = 1 + 1 - 1 = 1\\
S_4 &= X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 1 + 1 - 1 - 1 = 0\\
S_5 &= X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = 1 + 1 - 1 - 1 + 1 = 1\\
S_6 &= X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_6 = 1 + 1 - 1 - 1 + 1 + 1 = 2\\
S_7 &= X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_7 = 1 + 1 - 1 - 1 + 1 + 1 - 1 = 1\\
S_8 &= X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_8 = 1 + 1 - 1 - 1 + 1 + 1 - 1 + 1 = 2\\
S_9 &= X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_9 = 1 + 1 - 1 - 1 + 1 + 1 - 1 + 1 - 1 = 1\\
&\cdots
\end{aligned}$$

El gràfic següent mostra una forma de representar aquesta sèrie.



Volem calcular la probabilitat que l'individu retorni a la taverna. És a dir, la probabilitat que existeixi un $n \geq 1$ tal que $S_n = 0$. Això ho escriurem de la següent forma

$$P\{\exists\, n \geq 1 \text{ tal que } S_n = 0\}.$$

Per poder calcular aquesta probabilitat introduirem dos esdeveniments. D'una banda, anomenarem A_n l'esdeveniment que correspon al fet que l'individu torna a la taverna per primer cop a l'instant de temps n. És a dir, a l'instant 0, $A_0 = \emptyset$ (el conjunt buit), ja que l'individu no ha pogut tornar a la taverna perquè encara no n'ha sortit. A l'instant 1 altre cop, $A_1 = \emptyset$, perquè no podem tornar a la taverna amb una sola passa. Per $n > 1$,

$$A_n := \{S_n = 0,\, S_1 \neq 0,\, S_2 \neq 0,\, \dots, S_{n-1} \neq 0\,\}.$$

I d'altra banda, anomenarem B_n l'esdeveniment d'estar a la taverna a l'instant n independentment de si és o no el primer retorn. És a dir,

$$B_n := \{S_n = 0\}.$$

Definim ara les següents probabilitats,

$$a_n := P(A_n) \qquad b_n := P(B_n).$$

Com que $A_0 = \emptyset$ tenim que $a_0 = 0$. D'altra banda, $B_0 = \Omega$ (l'esdeveniment segur) i per tant $b_0 = 1$, ja que a l'instant 0 l'individu és a la taverna.

Observem que per $n \geq 1$,

$$B_n = \bigcup_{k=0}^{n} (B_n \cap A_k).$$

Com que aquests esdeveniments són disjunts tenim que

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} P\{B_n \cap A_k\}.$$

D'altra banda, si $k \leq n$,

$$\begin{aligned} P\{B_n \cap A_k\} &= P\{A_k, X_{k+1} + X_{k+2} + \cdots + X_n = 0\} \\ &= P\{A_k\} \cdot P\{X_{k+1} + X_{k+2} + \cdots + X_n = 0\}, \end{aligned}$$

on hem utilitzat que els esdeveniments $\{A_k\}$ i $\{X_{k+1} + X_{k+2} + \cdots + X_n = 0\}$ són independents.

Observem que,

$$P\{X_{k+1} + X_{k+2} + \cdots + X_n = 0\} = P\{X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-k} = 0\},$$

per tant, hem demostrat que

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \qquad \text{per } n = 1, 2, ...$$

Veurem a continuació el següent resultat:

Lema 1.1. *Amb les definicions que hem introduït es compleix que*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1 - \frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n}.$$

Prova: Observem que les sèries $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n s^n$ i $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n s^n$ són convergents per valors de $s \in (-1, 1)$. En efecte, com que a_n i b_n són probabilitats, estan fitades per 1 i per tant, en ambdós casos, la sèrie formada pels valors absoluts es pot fitar per

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |s|^n = \frac{1}{1 - |s|} < \infty \qquad \text{per } s \in (-1, 1).$$

Si fem el producte d'aquestes dues sèries n'obtindrem una de nova. Denotarem per c_n els coeficients dels termes s^n d'aquesta nova sèrie:

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n s^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n s^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n s^n,$$

observem que $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ perquè són els coeficients que corresponen al terme s^n ja que $s^k s^{n-k} = s^n$. Però, d'una banda, $c_0 = 0$ perquè $a_0 = 0$ i d'altra banda havíem vist que $\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = b_n$, per $n \geq 1$, per tant,

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n s^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n s^n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n s^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n s^n - 1.$$

Així doncs, per a tot $s \in (-1, 1)$ tenim que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n s^n = 1 - \frac{1}{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n s^n}.$$

Tots els coeficients a_n i b_n són positius perquè són probabilitats. Per tant, si fem el límit quan la s tendeix a 1 per l'esquerra tenim una successió monòtona creixent. Aleshores, pel Teorema de la Convergència Monòtona per sèries, en fer aquest límit, obtenim la següent igualtat:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1 - \frac{1}{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n}.$$

$\square$

Tornem ara a la probabilitat que volíem calcular, la probabilitat que l'individu retorni a la taverna. Utilitzant que els esdeveniments $\{A_n\}_n$ són disjunts dos a dos i el lema que acabem de demostrar tenim que

$$P\{\exists\, n \geq 1 \text{ tal que } S_n = 0\} = P\left\{\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right\} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1 - \frac{1}{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n}.$$

Veurem a continuació que $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = +\infty$. Observem que si demostrem això ja haurem provat que l'individu retornarà a la taverna amb probabilitat 1. Tenim que per $n \geq 1$,

$$b_n = P\{S_n = 0\} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ és senar} \\ \binom{2k}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^k & \text{si } n = 2k. \end{cases}$$

En efecte, per tal que l'individu a l'instant n estigui a l'origen cal que hagi fet el mateix nombre de passes endavant que enrera. Per tant, cal que n sigui parell ($n = 2k$) i la probabilitat que hagi fet k passes endavant i k passes enrera és la probabilitat que una binomial de paràmetres $2k$ (ha fet en total $2k$ passes) i probabilitat d'èxit $\frac{1}{2}$ (cada cop fa un pas endavant amb aquesta probabilitat) prengui el valor k (k èxits, és a dir k passes endavant, i per tant també k fracassos, és a dir, k passes enrera).

Recordem que la fórmula de Stirling ens diu que quan k és prou gran, $k!$ es pot aproximar per $\left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2k\pi}$. Això és conseqüència del fet que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k!}{\left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2k\pi}} = 1$$

i s'acostuma a escriure de la següent forma

$$k! \sim \left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2k\pi}.$$

Per tant utilitzem aquest símbol, $\sim$, per referir-nos a que el quocient entre les dues expressions tendeix a 1 quan fem tendir k a infinit.

Així doncs, per k prou gran,

$$b_{2k} = \frac{(2k)!}{(k!)^2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} \sim \frac{(2k)^{2k}\sqrt{4k\pi}}{k^{2k}2k\pi}\frac{1}{2^{2k}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{k}}.$$

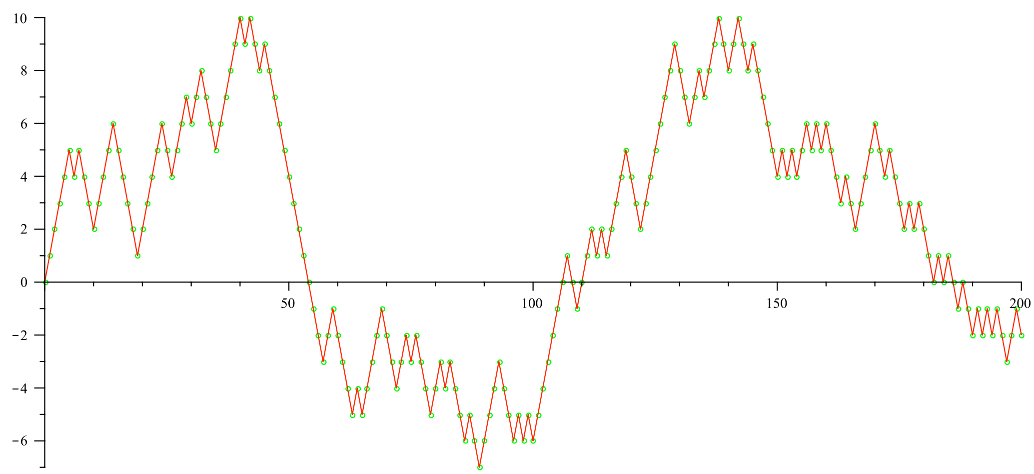
Per tant,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \sum_{k=0}^{+\infty} b_{2k} = +\infty,$$

ja que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = +\infty$, i per tant hem provat que

$$P\{\exists\, n \geq 1 \ \text{ tal que } S_n = 0\} = 1,$$

és a dir, hem vist que amb probabilitat 1 l'individu tornarà a la taverna.



Representació gràfica d'un passeig aleatori de 200 passos.

1.2 Retorn a casa

Des del punt de vista matemàtic volem calcular la probabilitat que partint del zero s'arribi, caminant d'aquella forma, a qualsevol $x \in \mathbb{Z}$ (és a dir, sigui quin sigui el x que correspon a casa seva).

Definim, per tot $x \in \mathbb{Z}$, $f(x)$ com la probabilitat que existeixi un $n \geq 1$ tal que $S_n = x$. És a dir, per a tot $x \in \mathbb{Z}$,

$$f(x) := P\{\exists\, n \geq 1 \ \text{ tal que } S_n = x\}.$$

Pel problema anterior sabem que $f(0) = 1$. En efecte, hem demostrat que amb probabilitat 1 l'individu retornava a la taverna (el 0) en algun instant $n \geq 1$.

Demostrarem ara que per a tot $x \in \mathbb{Z}$

$$f(x) = \frac{1}{2} f(x-1) + \frac{1}{2} f(x+1). \tag{1}$$

En efecte, suposem que $x \neq 1, -1$

$$\begin{aligned}
f(x) &= P\{\exists\, n \geq 1 \text{ tal que } S_n = x\} \\
&= P\{\exists\, n \geq 1 \text{ tal que } X_1 + \cdots + X_n = x\} \\
&= P\{\exists\, n \geq 1 \text{ tal que } X_1 + \cdots + X_n = x, X_1 = 1\} \\
&\qquad + P\{\exists\, n \geq 1 \text{ tal que } X_1 + \cdots + X_n = x, X_1 = -1\} \\
&= P\{\exists\, n \geq 1 \text{ tal que } X_1 + \cdots + X_n = x | X_1 = 1\} P(X_1 = 1) \\
&\quad + P\{\exists\, n \geq 1 \text{ tal que } X_1 + \cdots + X_n = x | X_1 = -1\} P(X_1 = -1) \\
&= \frac{1}{2} P\{\exists\, n \geq 2 \text{ tal que } X_2 + \cdots + X_n = x - 1\} \\
&\qquad + \frac{1}{2} P\{\exists\, n \geq 2 \text{ tal que } X_2 + \cdots + X_n = x + 1\}.
\end{aligned}$$

Però observem que aquesta darrera expressió és igual a

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} P\{\exists\, n - 1 \geq 1 \text{ tal que } X_1 + \cdots + X_{n-1} = x - 1\} \\
&\qquad + \frac{1}{2} P\{\exists\, n - 1 \geq 1 \text{ tal que } X_1 + \cdots + X_{n-1} = x + 1\} \\
&= \frac{1}{2} P\{\exists\, m \geq 1 \text{ tal que } X_1 + \cdots + X_m = x - 1\} \\
&\qquad + \frac{1}{2} P\{\exists\, m \geq 1 \text{ tal que } X_1 + \cdots + X_m = x + 1\} \\
&= \frac{1}{2} f(x-1) + \frac{1}{2} f(x+1).
\end{aligned}$$

Si $x = 1$ seguint els mateixos passos obtenim que $f(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} f(2)$ i com que $f(0) = 1$ també val la fórmula anterior. El mateix passa quan $x = -1$. En aquest cas obtenim $f(-1) = \dfrac{1}{2} f(-2) + \dfrac{1}{2}$.

Demostrarem ara per inducció que $f(x) = 1$ per a tot $x \in \mathbb{Z}$. Sabem que $f(0) = 1$. Suposem que $f(x) = 1$ veurem que això implica necessàriament que $f(x-1) = 1$ i que $f(x+1) = 1$. En efecte, per la fórmula (1) sabem que

$$1 = f(x) = \frac{1}{2} f(x-1) + \frac{1}{2} f(x+1).$$

Com que aquestes funcions són probabilitats,

$$\begin{aligned}
f(x-1) &\leq 1, \\
f(x+1) &\leq 1.
\end{aligned}$$

Però si $f(x-1) < 1$ o $f(x+1) < 1$ no podria donar-se la igualtat anterior, perquè tindríem que

$$\frac{1}{2}f(x-1) + \frac{1}{2}f(x+1) < \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 1 = 1,$$

per tant necessàriament,

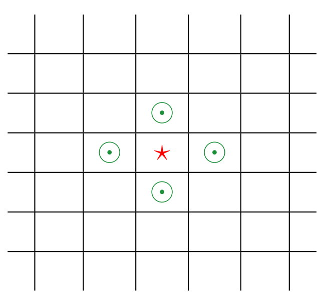
$$\begin{aligned} f(x-1) &= 1, \\ f(x+1) &= 1. \end{aligned}$$

Hem vist que $f(0) = 1$ i que si per un enter qualsevol aquesta funció val 1 també ha de valer 1 per l'enter anterior i per l'enter posterior. Això demostra, per inducció, que per a qualsevol enter $x \in \mathbb{Z}$, $f(x) = 1$. És a dir, que sigui on sigui la casa de l'individu, amb probabilitat 1 hi arribarà.

2 Passeig aleatori en dues dimensions

Considerem ara el problema en dues dimensions, és a dir, suposem que no hi ha només un carrer sinó infinits carrers horitzontals i infinits carrers verticals, de forma que a cada cruïlla té quatre opcions igualment probables. Tornarà a la taverna? Tornarà a casa seva?

Ara estem al pla, i partint del zero ens mourem per punts formats per dos enters. El **Gràfic 1** mostra la nova situació. El nostre individu es troba situat on hi ha el símbol $\star$ i pot anar a qualsevol de les quatre posicions marcades amb el símbol $\odot$ amb probabilitat $\frac{1}{4}$.



Gràfic 1: Passeig aleatori en dues dimensions.

Denotarem, com abans, per S_n la posició de l'individu a l'instant n. Així, $S_0 = \vec{0}$ i

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

on $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ és una successió de vectors aleatoris independents tals que per a tot $i \geq 1$,

$$P(X_i = e_1) = P(X_i = e_2) = P(X_i = -e_1) = P(X_i = -e_2) = \frac{1}{4},$$

on $\{e_1, e_2\}$ són dos vectors ortonormals del pla.

Volem calcular la probabilitat que l'individu retorni a la taverna, és a dir,

$$P\{\exists\, n \geq 1 \text{ tal que } S_n = \vec{0}\}.$$

Utilitzarem les mateixes notacions que pel cas d'una sola dimensió:

$$\begin{aligned} b_n &:= P\{S_n = \vec{0}\}, \\ a_n &:= P\{S_n = \vec{0},\ S_1 \neq \vec{0},\ S_2 \neq \vec{0},\ \ldots, S_{n-1} \neq \vec{0}\,\}. \end{aligned}$$

I per tant, igual que abans, obtenim que,

$$P\{\exists\, n \geq 1 \text{ tal que } S_n = \vec{0}\} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1 - \frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n}.$$

Així doncs, tornarà amb probabilitat 1 a la taverna només si $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = +\infty$.

Observem que per $n \geq 1$, si n és senar,

$$b_n = P\{S_n = \vec{0}\} = 0,$$

ja que és impossible retornar a l'origen en un nombre senar de passos. Per retornar a l'origen cal haver fet el mateix nombre de passos endavant que endarrera i el mateix nombre de passos a dreta que a esquerra.

Si n és parell ($n = 2k$), aleshores

$$b_n = b_{2k} = P\{S_{2k} = \vec{0}\} = \frac{1}{4^{2k}} \sum_{j=0}^{k} \frac{(2k)!}{j!j!(k-j)!(k-j)!}.$$

En efecte, totes les trajectòries de longitud $2k$ tenen probabilitat $\frac{1}{4^{2k}}$ perquè en cada pas escollim de forma equiprobable entre 4 possibilitats i en total hem fet $2k$ passos. Hem de comptar doncs quantes trajectòries hi ha de longitud $2k$ que acabin a l'origen. Són totes aquelles que fem el mateix nombre de passos endavant (j) que endarrera i el mateix nombre de passos a dreta ($k-j$) que a esquerra. La j pren valors entre 0 (cap pas ni endavant ni enrera i k passos a dreta i k a esquerra) i k (k passos endavant i k enrera i cap pas ni a dreta ni a esquerra). D'aquí surt el sumatori en j. Falta veure d'on surt el darrer nombre combinatori. Hem de comptar quantes trajectòries hi ha que estiguin formades en total per j passos endavant, j passos enrera, $k-j$ passos a dreta i $k-j$ passos a esquerra. Això és el mateix que comptar de quantes formes podem treure $2k$ boles d'una urna si en tenim j de blanques, j de negres, $k-j$ de vermelles i $k-j$ de blaves. I la resposta a aquest problema combinatori és que es poden extreure les boles de

$$\frac{(2k)!}{j!j!(k-j)!(k-j)!}$$

formes diferents.

Treballarem a continuació una mica amb aquest nombre que hem obtingut:

$$\begin{aligned} b_{2k} &= \frac{1}{4^{2k}} \sum_{j=0}^{k} \frac{(2k)!}{j!j!(k-j)!(k-j)!} \\ &= \frac{1}{4^{2k}} \sum_{j=0}^{k} \frac{(2k)!}{k!k!} \frac{k!k!}{j!j!(k-j)!(k-j)!} \\ &= \frac{1}{4^{2k}} \binom{2k}{k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^2 \\ &= \frac{1}{4^{2k}} \binom{2k}{k}^2. \end{aligned}$$

En l'últim pas hem utilitzat que

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^2 = \binom{2k}{k}. \tag{2}$$

Anem a justificar perquè és certa aquesta igualtat. Recordem que el binomi de Newton ens diu que donats dos nombres reals a i b i un enter positiu n es compleix que

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}. \tag{3}$$

Si apliquem el binomi de Newton a $(x+1)^{2k}$ obtenim

$$(x+1)^{2k} = \sum_{i=0}^{2k} \binom{2k}{i} x^i. \tag{4}$$

Però també tenim que

$$(x+1)^{2k} = (x+1)^k(x+1)^k = \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x^j\right)\left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} x^i\right). \tag{5}$$

Però, és clar, tant si apliquem el binomi de Newton directament com si ho fem d'aquesta segona manera el resultat ha de ser el mateix. Per tant, els coeficients de les diferents potències de x de l'expressió (4) i de l'expressió (5) han de coincidir. Ens fixem només amb el coeficient del terme x^k. A l'expressió (4) aquest coeficient és $\binom{2k}{k}$, mentre que a l'expressió (5), en fer el producte, el terme x^k apareixerà en tots els termes tals que $i+j=k$. Obtenim doncs que

$$\binom{2k}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}\binom{k}{k-j} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}\binom{k}{j} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^2.$$

Hem vist doncs que

$$b_{2k} = \left(\frac{1}{2^{2k}}\binom{2k}{k}\right)^2,$$

i utilitzant el que havíem obtingut en el cas de dimensió 1 mitjançant la fórmula de Stirling, tenim que

$$b_{2k} \sim \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2 = \frac{1}{\pi k},$$

per n prou gran.

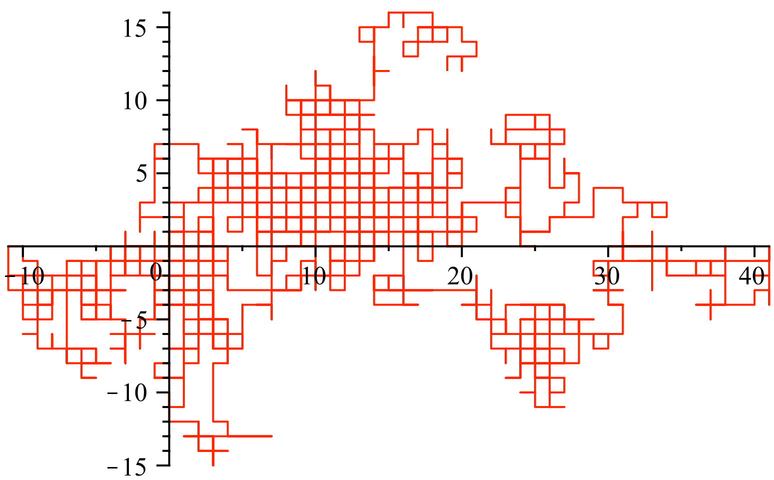
Per tant,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \sum_{k=0}^{+\infty} b_{2k} = +\infty,$$

ja que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty$, i per tant hem provat que

$$P\{\exists\, n \geq 1 \text{ tal que } S_n = \vec{0}\} = 1,$$

és a dir, hem vist que encara que l'individu visqui en un món pla, amb probabilitat 1 tornarà a la taverna.



Recorregut d'un passeig aleatori al pla de 2000 passos.[1]

Arribarà ara a casa seva?

Definim per a tot $\vec{x} = x_1 e_1 + x_2 e_2$ amb $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ la funció $g(\vec{x})$ que representa la probabilitat que per algun $n \geq 1$, S_n prengui el valor $\vec{x}$. És a dir, per a tot $\vec{x} \in \mathbb{Z}^2$,

$$g(\vec{x}) = P\{\exists\, n \geq 1 \text{ tal que } S_n = \vec{x}\}.$$

Hem vist que retorna a la taverna amb probabilitat 1. És a dir, $g(\vec{0}) = 1$. D'altra banda, seguint la demostració del problema unidimensional s'obté

[1] Fent clic sobre el gràfic s'obrirà el navegador i veureu una animació del recorregut del passeig aleatori.

que

$$g(\vec{x}) = \frac{1}{4}(g(\vec{x} - e_1) + g(\vec{x} + e_1) + g(\vec{x} - e_2) + g(\vec{x} + e_2)),$$

i, per a tot $\vec{y} \in \mathbb{Z}^2$, $0 \leq g(\vec{y}) \leq 1$, perquè són probabilitats.

Suposem que $g(\vec{x}) = 1$. Aleshores,

$$1 = g(\vec{x}) = \frac{1}{4}(g(\vec{x} - e_1) + g(\vec{x} + e_1) + g(\vec{x} - e_2) + g(\vec{x} + e_2)),$$

i, com que són probabilitats, aquesta igualtat implica que necessàriament

$$g(\vec{x} - e_1) = g(\vec{x} + e_1) = g(\vec{x} - e_2) = g(\vec{x} + e_2) = 1.$$

Així doncs, per inducció hem provat que $g(\vec{x}) = 1$ per a tot $\vec{x} \in \mathbb{Z}^2$. És a dir, que sigui on sigui casa seva, amb probabilitat 1 hi arribarà.

3 Passeig aleatori en tres dimensions

Considerem ara el problema en dimensió 3. A cada cruïlla l'individu pot escollir entre sis opcions diferents: davant, darrera, dreta, esquerra, amunt o avall. Igual que en els casos precedents, totes les opcions són equiprobables. En aquest cas, escull cada cop una de les 6 opcions amb probabilitat $\frac{1}{6}$. Podem pensar, per exemple, que a cada cruïlla llença un dau per decidir quin dels 6 camins possibles tria. Ens fem les mateixes preguntes: tornarà a la taverna? arribarà a casa seva?

Veurem que en aquest cas, la probabilitat que torni a l'origen o que passi per tot punt, sorprenentment, ja no és 1.

A la pel·lícula *Cube*, vegeu [8], els protagonistes es trobaven dins d'un cub i havien d'escollir cap on anaven entre aquestes 6 possibilitats. Es tractava d'un passeig aleatori en tres dimensions, però era més complicat que el que aquí presentem perquè l'entorn també es movia aleatòriament.

Denotarem, com en els casos anteriors, per S_n la posició de l'individu a l'instant n.

Volem calcular la probabilitat que l'individu retorni a la taverna, és a dir,

$$P\{\exists\, n \geq 1 \text{ tal que } S_n = \vec{0}\}.$$

Utilitzarem les mateixes notacions que pels casos d'una i dues dimensions:

$$b_n := P\{S_n = \vec{0}\},$$
$$a_n := P\{S_n = \vec{0},\, S_1 \neq \vec{0},\, S_2 \neq \vec{0},\, \ldots, S_{n-1} \neq \vec{0}\}.$$

I per tant, igual que abans, obtenim que,

$$P\{\exists\, n \geq 1 \text{ tal que } S_n = \vec{0}\} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1 - \frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n}.$$

Així doncs, tornarà amb probabilitat 1 a la taverna només si $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = +\infty$.

Observem que per $n \geq 1$, si n és senar,

$$b_n = P\{S_n = \vec{0}\} = 0,$$

ja que és impossible retornar a l'origen en un nombre senar de passos. Per retornar a l'origen cal haver fet el mateix nombre de passos endavant que endarrera, el mateix nombre de passos amunt que avall i el mateix nombre de passos a dreta que a esquerra.

Si n és parell ($n = 2k$), aleshores

$$b_n = b_{2k} = P\{S_{2k} = \vec{0}\} = \frac{1}{6^{2k}} \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=0}^{k-j} \frac{(2k)!}{j!j!i!i!(k-j-i)!(k-j-i)!}.$$

En efecte, podem fer un raonament semblant al que havíem fet pel cas de dues dimensions. D'una banda totes les trajectòries de longitud $2k$ tenen probabilitat $\frac{1}{6^{2k}}$ perquè en cada pas escollim de forma equiprobable entre 6 possibilitats i en total hem fet $2k$ passos. Hem de comptar doncs quantes trajectòries hi ha de longitud $2k$ que acabin a l'origen. Són totes aquelles que fem el mateix nombre de passos endavant (j) que endarrera, el mateix nombre de passos amunt (i) que avall i el mateix nombre de passos a dreta ($k-j-i$) que a esquerra. La j pren valors entre 0 (cap pas ni endavant ni enrera) i k (k passos endavant i k enrera). D'aquí surt el sumatori en j. La i pren valors entre 0 (cap pas ni amunt ni avall i per tant $k-j$ passos a dreta i $k-j$ a esquerra) i $k-j$ ($k-j$ passos amunt i $k-j$ passos avall i per tant cap pas ni a dreta ni a esquerra). Falta veure d'on surt el darrer nombre combinatori. Hem de comptar quantes trajectòries hi ha que estiguin formades en total per j passos endavant, j passos enrera, i passos amunt, i passos avall, $k-j-i$ passos a dreta i $k-j-i$ passos a esquerra. Això és el mateix que comptar de quantes formes podem treure $2k$ boles d'una urna si en tenim j de blanques, j de negres, i de vermelles, i de blaves, $k-j-i$ de grogues i $k-j-i$ de verdes. I la resposta és que es poden extreure les boles de

$$\frac{(2k)!}{j!j!i!i!(k-j-i)!(k-j-i)!}$$

formes diferents.

Observem que

$$\begin{aligned} b_{2k} &= \frac{1}{6^{2k}} \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=0}^{k-j} \frac{(2k)!}{j!j!i!i!(k-j-i)!(k-j-i)!} \\ &= \frac{1}{2^{2k}} \frac{1}{3^{2k}} \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=0}^{k-j} \frac{(2k)!}{k!k!} \frac{k!k!}{j!j!i!i!(k-j-i)!(k-j-i)!} \\ &= \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k} \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=0}^{k-j} \left(\frac{1}{3^k} \frac{k!}{j!i!(k-j-i)!} \right)^2 . \end{aligned} \tag{6}$$

Els termes que apareixen en aquest sumatori són els termes d'una distribució trinomial. En efecte, suposem que tenim 3 boles (una blanca, una negra i una vermella) en una urna. Fem k extraccions amb reposició i definim les variables aleatòries:

$$\begin{aligned} X &= \text{nombre de boles blanques en les } k \text{ extraccions,} \\ Y &= \text{nombre de boles negres en les } k \text{ extraccions,} \\ Z &= \text{nombre de boles vermelles en les } k \text{ extraccions.} \end{aligned}$$

Aleshores, per a tot $j, i \in 1, 2, \ldots, k$ amb $j + i \leq k$ tenim que

$$P\{X = j,\, Y = i,\, Z = k-j-i\} = \frac{1}{3^k} \frac{k!}{j!i!(k-j-i)!}.$$

Per tant, sabem que

$$\sum_{j=0}^{k} \sum_{i=0}^{k-j} \frac{1}{3^k} \frac{k!}{j!i!(k-j-i)!} = 1.$$

En l'expressió però que hem trobat per b_{2k}, vegeu (6), tenim cada terme elevat al quadrat.

Utilitzarem ara que quan tenim una variable que només pot prendre n valors diferents amb probabilitats $p_1, p_2, ..., p_n$ respectivament, llavors

$$p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_n^2 \leq \max_i p_i.$$

En efecte,

$$\sum_{j=1}^{n} p_j^2 \leq \sum_{j=1}^{n} p_j \left(\max_{1\leq i\leq n} p_i \right) \leq \left(\max_{1\leq i\leq n} p_i \right) \sum_{j=1}^{n} p_j = \left(\max_{1\leq i\leq n} p_i \right) \cdot 1 = \left(\max_{1\leq i\leq n} p_i \right).$$

Així doncs,

$$b_{2k} \leq \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k} \max_{0\leq i,j\leq k} \left(\frac{1}{3^k} \frac{k!}{j!i!(k-j-i)!} \right).$$

La probabilitat màxima de la distribució trinomial s'obté quan X, Y i Z prenen totes tres el mateix valor (o el més semblant possible). Més concretament, si $k = 3m$ (amb $m \in \mathbb{N}$), la probabilitat màxima s'obté quan totes tres prenen el valor m. Si k és de la forma $k = 3m+1$ la probabilitat màxima s'obté quan dues variables prenen el valor m i l'altra el valor $m+1$. Finalment, si k és de la forma $k = 3m-1$ el valor màxim s'obté quan dues variables prenen el valor m i l'altra el valor $m-1$.

Així doncs, si k és de la forma $k = 3m$,

$$b_{2k} \leq \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k} \left(\frac{1}{3^{3m}} \frac{(3m)!}{m!m!m!} \right).$$

Utilitzant la fórmula de Stirling i els càlculs fets pel cas de dimensió 1, on havíem vist que

$$\frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{k}},$$

tenim que aquest darrer terme es comporta com,

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{1}{3^{3m}} \frac{\left(\frac{3m}{e}\right)^{3m} \sqrt{6m\pi}}{\left(\left(\frac{m}{e}\right)^m \sqrt{2m\pi}\right)^3} = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{k}} \frac{\sqrt{3}}{2\pi m} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi\sqrt{\pi}} \frac{1}{k\sqrt{k}} = \frac{C_1}{k\sqrt{k}},$$

on $C_1 = \dfrac{3\sqrt{3}}{2\pi\sqrt{\pi}}$.

Si $k = 3m + 1$, utilitzant de nou la formula de Stirling, s'obté també que b_{2k} és menor que un terme que es comporta com

$$\frac{C_2}{k\sqrt{k}},$$

per una certa constant C_2 i el mateix passa si k és de la forma $k = 3m - 1$, per una certa constant C_3.

Si prenem

$$C := \max\{C_1, C_2, C_3\}$$

tenim que,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \sum_{k=0}^{+\infty} b_{2k} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k} \max_{0\leq i,j\leq k} \left(\frac{1}{3^k} \frac{k!}{j!i!(k-j-i)!} \right),$$

i aquesta sèrie es pot fitar per una altra que té el mateix comportament que

$$C \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}} < +\infty.$$

Per tant, la probabilitat de tornar a l'origen ja no és 1. Però sabem que, òbviament, és positiva. Recordem que la probabilitat de tornar a l'origen és $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$. Hi ha un terme d'aquesta sèrie que és fàcil de calcular: $a_2 = \frac{1}{6}$, ja que la probabilitat que a l'instant 2 tornem a l'origen és la probabilitat que en el segon llançament ens surti la direcció oposada del primer, independentment de quina fos aquesta. De fet, es pot demostrar (vegeu la Secció 4) que la probabilitat de tornar a l'origen en el passeig aleatori de dimensió 3 és aproximadament 0.34. Podem veure però que la convergència és força lenta. D'una banda sabem calcular els termes b_n per tot valor de n. D'altra banda, usant l'expressió $b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, que a_n només pren valors diferents de 0 si n és parell i que $a_0 = 0$, és fàcil veure que

$$a_{2n} = b_{2n} - \sum_{j=1}^{n-1} a_{2j} b_{2n-2j}.$$

I per tant, usant un manipulador algebraic, és fàcil calcular el valor de la suma $\sum_{k=0}^{n} a_k$, per diferents valors de n. Concretament, usant el manipulador algebraic *Maple*, s'obté que per $n = 10$,

$$\sum_{k=0}^{10} a_k = \sum_{j=1}^{5} a_{2j} = \frac{1}{6} + \frac{5}{72} + \frac{155}{3888} + \frac{2485}{93312} + \frac{3619}{186624} = 0.25277,$$

per $n = 40$, la suma dóna 0.29554, per $n = 200$ s'obté 0.32028 i per $n = 1000$, 0.33147.

Arribarà a casa seva?

En els casos d'una i de dues dimensions hem vist que del fet que la probabilitat de retorn a l'origen fos 1 es dedueix, per inducció, que la probabilitat que el passeig visiti qualsevol punt també és 1. Aquest mateix raonament ens servirà ara per veure que la probabilitat que retorni a casa no pot ser 1.

Definim per tot $\vec{x} \in \mathbb{Z}^3$ la funció $g(\vec{x})$ que representa la probabilitat que per algun $n \geq 1$, S_n prengui el valor $\vec{x}$. És a dir, per a tot $\vec{x} \in \mathbb{Z}^3$,

$$g(\vec{x}) = P\{\exists\, n \geq 1 \text{ tal que } S_n = \vec{x}\}.$$

Suposem que existís un punt $\vec{d}$ de l'espai $\mathbb{Z}^3$ tal que $g(\vec{d}) = 1$. Aleshores, si considerem $\{e_1, e_2, e_3\}$ tres vectors ortonormals de l'espai, tindríem que

$$1 = g(\vec{d}) = \frac{1}{6}\Big(g(\vec{d}+e_1) + g(\vec{d}-e_1) + g(\vec{d}+e_2) + g(\vec{d}-e_2) + g(\vec{d}+e_3) + g(\vec{d}-e_3)\Big),$$

i d'aquí deduiríem que

$$g(\vec{d}+e_1) = g(\vec{d}-e_1) = g(\vec{d}+e_2) = g(\vec{d}-e_2) = g(\vec{d}+e_3) = g(\vec{d}-e_3) = 1.$$

Per inducció, podríem provar que per tot $\vec{x} \in \mathbb{Z}^3$, $g(\vec{x}) = 1$. I això ens porta a contradicció, perquè hem demostrat que $g(\vec{0}) < 1$. Contradicció que ve del fet de suposar que pot existir un punt $\vec{d}$ de l'espai $\mathbb{Z}^3$ amb $g(\vec{d}) = 1$. Per tant, la probabilitat que retorni a casa seva, també és estrictament menor que 1.

4 Dimensions superiors i llei del 0-1

4.1 Què passa en dimensions superiors?

En dimensions superiors a tres, com és d'esperar, passa el mateix que en dimensió tres. És a dir, la probabilitat de tornar a l'origen o a casa seva ja no és 1. Montroll, vegeu [3], va demostrar que es pot donar una representació en forma d'integral de la suma de la sèrie dels b_n que recordem que representen la probabilitat d'estar a l'origen a l'instant n.

Concretament, va demostrar que, si denotem per d la dimensió del nostre passeig aleatori, per $d \geq 3$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \sum_{k=0}^{+\infty} b_{2k} = \frac{d}{(2\pi)^d} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{d - \sum_{j=1}^{d} \cos(x_j)} dx_1 dx_2 \cdots dx_d.$$

En el cas de dimensió tres, $d = 3$, aquesta integral havia estat resolta per Watson, vegeu [6], i s'obté que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} b_n &= \sum_{k=0}^{+\infty} b_{2k} \\
&= \frac{3}{(2\pi)^3} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{3 - (\cos(x) + \cos(y) + \cos(z))} dx dy dz \\
&= \frac{\sqrt{6}}{32\pi^3} \Gamma\left(\frac{1}{24}\right) \Gamma\left(\frac{5}{24}\right) \Gamma\left(\frac{7}{24}\right) \Gamma\left(\frac{11}{24}\right) \\
&= 1.516386059\ldots,
\end{aligned}$$

on hem utilitzat la funció Gamma d'Euler que ve definida per

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

D'aquí, obtenim que la probabilitat de retornar a l'origen, quan $d = 3$ és,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1 - \frac{1}{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n} = 1 - \frac{1}{1.516386059\ldots} = 0.340537329\cdots$$

Per dimensions superiors a 3 només se saben trobar aproximacions numèriques d'aquesta integral. Denotem per $p(d)$ la probabilitat de retorn a l'origen en un passeig aleatori de dimensió d. A la **Taula 1** s'observen els valors obtinguts mitjançant aproximacions numèriques d'aquestes probabilitats.

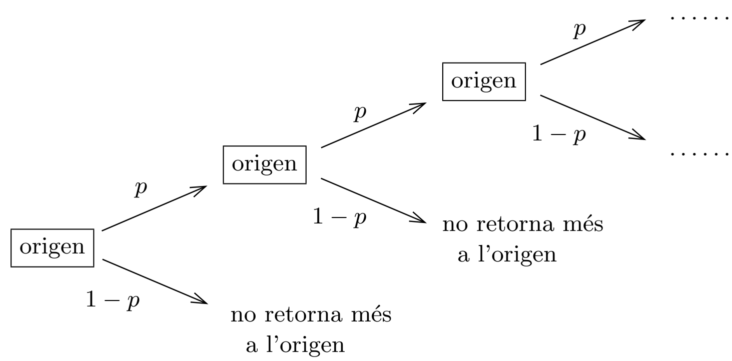
d	$p(d)$
3	0.340537
4	0.193206
5	0.135178
6	0.104715
7	0.085845
8	0.072913

Taula 1: Probabilitats de retorn a l'origen en un passeig aleatori de dimensió d.

4.2 Llei del 0-1

Hem vist que en dimensió 1 i 2, amb probabilitat 1 l'individu retorna a l'origen i arriba a casa seva. Observem que si hi retorna almenys un cop amb probabilitat 1 també hi retorna infinites vegades amb probabilitat 1. En efecte, ja que un cop s'ha produït el primer retorn, podem considerar que comencem un nou passeig aleatori, en el qual tornarà a tenir probabilitat 1 de retornar a l'origen, i així successivament. Una cosa semblant passa amb l'arribada a casa seva. Un cop ha arribat a casa seva, podem suposar que comencem un nou passeig aleatori, en el qual retornarà al nou origen (casa seva) amb probabilitat 1. Per tant, passarà infinites vegades per casa seva. És a dir, en un passeig aleatori en 1 o 2 dimensions tots els punts es visiten infinites vegades amb probabilitat 1.

En dimensions superiors però, la probabilitat que retorni almenys un cop a l'origen és estrictament menor que 1 (recordem que en el cas $d = 3$ és aproximadament 0.34). La denotarem per p i sabem que $p < 1$. Igual que abans, si s'ha produït un primer retorn a l'origen, podem considerar que comencem un nou passeig aleatori en el qual tornarà a tenir probabilitat p de retornar a l'origen, i així successivament. Per tant, usant l'argument que acabem de descriure, la probabilitat que retorni almenys 2 cops a l'origen serà $p \cdot p$, la probabilitat que hi retorni almenys n vegades serà p^n, etc... El **Gràfic 2** mostra aquest fet.



Gràfic 2: Retorns a l'origen pel passeig aleatori en tres dimensions ($p \approx 0.34$) o més.

Així, la probabilitat que retorni infinites vegades a l'origen serà

$$\lim_{n \to \infty} p^n = 0,$$

ja que $p < 1$. El mateix passarà amb el retorn d'infinites vegades a casa seva. L'individu surt de l'origen i la probabilitat que arribi a casa seva és estrictament menor que 1. Però si hi arribés, començaríem un nou passeig aleatori amb aquest nou origen i on tindria per tant probabilitat p de retornar a casa seva. Per tant la probabilitat que hi retorni infinites vegades també serà 0.

Hem vist doncs que la probabilitat que l'individu retorni infinites vegades a la taverna i infinites vegades a casa seva és 1 en un passeig aleatori en una o en dues dimensions, mentre que és 0 en un passeig aleatori en tres o més dimensions.

Dit d'una altra manera, en un passeig aleatori en una o dues dimensions tots els punts es visiten infinites vegades amb probabilitat 1, mentre que en un passeig aleatori en tres o més dimensions tot punt té probabilitat 0 de ser visitat infinites vegades.

5 Altres passejos aleatoris

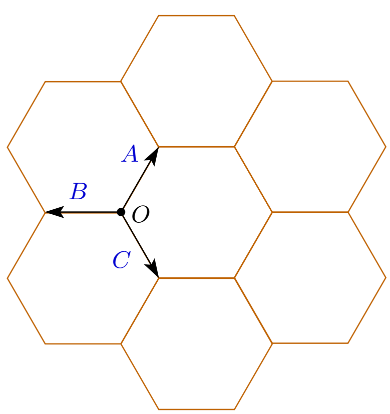
En aquesta secció estudiarem què passa si ens movem per d'altres superfícies. Concretament estudiarem un passeig aleatori pel contorn d'un rusc d'abelles, o el que és el mateix, per la vora d'un mosaic de rajoles hexagonals, com els que es mostren en el **Gràfic 3**. Aquest passeig fou estudiat per Vidakovic, vegeu [5], l'any 1994.

Gràfic 3: Passeig aleatori per una superfície hexagonal.

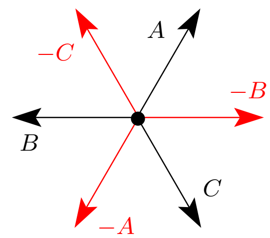
Observem que aquest passeig aleatori també és equivalent a un passeig aleatori pels marges de les totxanes d'una pared com la del **Gràfic 4**.

Gràfic 4: Passeig aleatori pels marges de les totxanes d'una pared.

En aquest cas, en cada punt podem escollir només entre tres opcions possibles, però que són diferents segons si el nombre de passes que hem fet m és parell o senar. Vegeu els **Gràfics 5 i 6**



Gràfic 5: Passeig aleatori per una superfície hexagonal.



Gràfic 6: Direccions possibles en el passeig aleatori per una superfície hexagonal segons si el nombre de passes és parell (en negre) o senar (en vermell).

Quan el nombre de passes realitzades és parell, hem d'escollir una de les direccions $\{A, B, C\}$ que es mostren als **Gràfics 5 i 6**. Mentre que quan aquest nombre és senar, hem d'escollir una de les tres direccions oposades $\{-A, -B, -C\}$. Per retornar a l'origen, hem d'haver fet el mateix nombre de passes en la direcció A que en la $-A$, el mateix nombre en la direcció B que en la $-B$ i el mateix nombre en la direcció C que en la $-C$.

Per un argument molt semblant al del passeig aleatori en dimensió 3, però tenint en compte que en cada pas només podem escollir entre tres direccions possibles i que les direccions A, B, i C només es poden escollir quan el nombre de passes realitzades és parell i les direccions $-A$, $-B$, i $-C$ quan aquest nombre és senar, s'obté que

$$\begin{aligned} b_{2k} &= \frac{1}{3^{2k}} \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=0}^{k-j} \frac{k!}{j!i!(k-j-i)!} \frac{k!}{j!i!(k-j-i)!} \\ &= \frac{1}{3^{2k}} \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=0}^{k-j} \left(\frac{k!(k-j)!}{(k-j)!j!i!(k-j-i)!} \right)^2 \\ &= \frac{1}{3^{2k}} \sum_{j=0}^{k} \left(\frac{k!}{j!(k-j)!} \right)^2 \sum_{i=0}^{k-j} \left(\frac{(k-j)!}{i!(k-j-i)!} \right)^2 \\ &= \frac{1}{3^{2k}} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{k-j}^2 \binom{2(k-j)}{k-j}, \end{aligned}$$

on en el darrer pas hem utilitzat la igualtat (2). D'altra banda, fent el canvi de variable $i = k - j$ observem que aquesta darrera expressió és igual a

$$\frac{1}{3^{2k}} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}^2 \binom{2i}{i}. \tag{7}$$

Demostrarem que per $m \geq 1$,

$$\frac{1}{2\sqrt{m}} \leq \frac{1}{2^{2m}}\binom{2m}{m} \leq \frac{\sqrt{6}}{4\sqrt{m}}. \tag{8}$$

En efecte, observem que

$$\frac{1}{2^{2m}}\binom{2m}{m} = \frac{1}{2^{2m}}\prod_{i=1}^{m}\frac{2i(2i-1)}{i^2} = \frac{1}{2}\prod_{i=2}^{m}\frac{2i-1}{2i},$$

i d'altra banda,

$$\frac{1}{\sqrt{m}} = \prod_{i=2}^{m}\frac{\sqrt{2i-2}}{\sqrt{2i}} \leq \prod_{i=2}^{m}\frac{2i-1}{2i} \leq \prod_{i=2}^{m}\frac{\sqrt{2i-1}}{\sqrt{2i+1}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2m+1}} \leq \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{m}},$$

on les desigualtats centrals es comproven fàcilment elevant els termes al quadrat i utilitzant que per a tot $a \in \mathbb{R}$, $a^2 > (a-1)(a+1)$.

Usant aquest fet veurem que el terme que apareix dins el sumatori de l'expressió (7) es pot fitar de la següent forma:

$$\binom{k}{i}^2\binom{2i}{i} \geq \frac{\sqrt{6}}{12}\frac{1}{k}2^{2i}\binom{2k}{2i}.$$

En efecte, aquesta fita és fàcil de provar quan $i = 0$ o bé $i = k$. Si $1 \leq i \leq k-1$, usant les desigualtats de l'expressió (8) observem que

$$\binom{k}{i}^2\binom{2i}{i} = \frac{\binom{2i}{i}^2\binom{2k}{2i}\binom{2(k-i)}{k-i}}{\binom{2k}{k}} \geq \frac{\sqrt{6}}{12}\frac{\sqrt{k}}{i\sqrt{k-i}}2^{2i}\binom{2k}{2i} \geq \frac{\sqrt{6}}{12}\frac{1}{k}2^{2i}\binom{2k}{2i}.$$

Així doncs,

$$b_{2k} = \frac{1}{3^{2k}}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}^2\binom{2i}{i} \geq \frac{1}{3^{2k}}\frac{\sqrt{6}}{12}\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k}\binom{2k}{2i}2^{2i}.$$

Però observem que

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{2k}{2i}2^{2i} = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=0}^{2k}\binom{2k}{j}2^j + \sum_{j=0}^{2k}\binom{2k}{j}(-2)^j\right),$$

i aquesta darrera expressió, usant el binomi de Newton, vegeu (3), és igual a

$$\frac{1}{2}\left((1+2)^{2k}+(1-2)^{2k}\right)=\frac{3^{2k}+1}{2}.$$

Així doncs,

$$b_{2k}\geq\frac{1}{3^{2k}}\frac{\sqrt{6}}{12}\frac{1}{k}\frac{3^{2k}+1}{2}=\frac{C}{k}\frac{3^{2k}+1}{3^{2k}}\geq\frac{C}{k},$$

on $C=\dfrac{\sqrt{6}}{24}$.

Per tant,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}b_n=\sum_{k=0}^{+\infty}b_{2k}\geq C\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k}=+\infty.$$

És a dir, en un passeig aleatori en una superfície hexagonal es retorna a l'origen amb probabilitat 1.

Referències

[1] Einstein, A. On the movement of small particles suspended in a stationary liquid demanded by the molecular-kinetic theory of heat. *Ann. Physik* **17**, 1905.

[2] Feller, W. An Introduction to Probability Theory and Its Applications. Vol. I. John Wiley & Sons, Inc., New York, N.Y., 1950.

[3] Montroll, E. W. Random Walks in Multidimensional Spaces, Especially on Periodic Lattices. *J. SIAM* **4**, 241-260, 1956.

[4] Pólya, G. Über eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung betreffend die Irrfahrt im Straßennetz. *Math. Ann.* **84** 149-160, 1921.

[5] Vidakovic, B. All roads lead to Rome, even in the honeycomb world. *Amer. Statist.* **48(3)**, 234-236, 1994.

[6] Watson, G. N. Three Triple Integrals. *Quart. J. Math., Oxford Ser.* **2(10)**, 266-276, 1939.

[7] Enllaç del Department of Mathematical Sciences de la University of Alabama in Huntsville que conté un *applet* que permet obtenir passejos aleatoris en una dimensió. http://www.math.uah.edu/ stat/ applets/ RandomWalkExperiment.xhtml

[8] Cube (1997). Dirigida per *Vincenzo Natali*. Escrita per *André Bijelic, Vincenzo Natali* i *Graeme Manson*. Protagonitzada per *Nicole de Boer, Nicky Guadagni, David Hewlett, Andrew Miller, Julian Richings, Wayne Robson* i *Maurice Dean Wint*. Sinopsis: *Diverses persones desperten a l'interior d'una habitació amb forma de cub. No es coneixen de res i aparentment no tenen res en comú, excepte que no recorden com han anat a parar allí i que no saben on són ni perquè. Cada habitació està connectada amb unes altres sis habitacions d'aspecte idèntic a l'anterior formant una espècie de laberint ple de trampes: passar d'un cub a un altre pot significar la mort. Cada un dels personatges, entre ells una estudiant de matemàtiques, té una habilitat que és vital per intentar trobar la sortida.*

Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
Xavier.Bardina@uab.cat
http://mat.uab.cat/~bardina

Publicat el 18 de juny de 2008