MAT^2

MATerials MATemàtics
Volum 2011, treball no. 3, 20 pp. ISSN: 1887-1097
Publicació electrònica de divulgació del Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona
www.mat.uab.cat/matmat

Lleis de Kepler i mesura del temps

Joan Girbau

Les lleis de Kepler són les que governen el moviment dels planetes entorn del Sol. Johannes Kepler (1571-1630) les va obtenir de les dades observacionals de la posició dels planetes. Les dues primeres lleis (basades en l'observació del planeta Mart) estan contingudes en la seva obra *Astronomia Nova* publicada el 1609. En canvi, la tercera va ser obtinguda molt més tard. Està continguda en els tres volums de la seva obra *Epitome Astronomia Copernicanae* que van aparèixer entre 1617 i 1620. Gairebé un segle després Newton va utilitzar aquestes lleis basades en l'observació directa dels planetes per formular la seva llei de gravitació universal, de la qual les de Kepler es poden deduir. Aquest camí deductiu és el que seguirem en aquest escrit. Les tres lleis de Kepler, però, no donen explícitament la posició d'un planeta en la seva òrbita en cada instant de temps. Per obtenir això s'ha de resoldre el que es coneix amb el nom d'*equació de Kepler*, que potser és la primera equació important no algebraica (transcendent) de la història de la ciència. Explicarem aquí aquestes lleis (a partir de zero!) i com intervenen en la mesura del temps que nosaltres fem servir: el *temps solar mitjà* (el que marquen els nostres rellotges de pulsera i el que ens donen per televisió).

1 Conceptes previs

1.1 El·lipse en polars

Considerem una el·lipse de $\mathbb{R}^2$ centrada a l'origen:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \,, \quad (a > 0,\ b > 0) \,. \tag{1}$$

Suposarem $a > b$. Sigui $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Els punts de coordenades $(\pm c, 0)$ s'anomenen focus. El nombre $e = c/a = \sqrt{1 - (b/a)^2}$ s'anomena excentricitat. Com que hem suposat que $a > b$, l'excentricitat és sempre < 1. En el cas de paràboles i d'hipèrboles (que aquí no tractem) es defineix l'excentricitat de manera anàloga, però resulta ser igual a 1 en el cas de les paràboles i més gran que 1 en el cas de les hipèrboles. Tornem a les el·lipses que estàvem estudiant. Quan $a = b$ (és a dir, en el cas d'una circumferència) l'excentricitat és nul·la. Prenem coordenades polars (r, φ) centrades al focus $(c, 0)$. És a dir,

$$\begin{aligned} x - c &= r\cos\varphi \\ y \quad &= r\sin\varphi\ . \end{aligned}$$

Ens proposem escriure l'equació de l'el·lipse en aquestes coordenades polars (r, φ). Substituint les fórmules de canvi anteriors a l'equació cartesiana de l'el·lipse i operant s'obté

$$r^2\left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right) + r\,\frac{2e}{a}\,\cos\varphi + (e^2 - 1) = 0\ .$$

Això és una equació de segon grau en r, que té per solucions

$$r = \frac{-\frac{2e}{a}\cos\varphi \pm \frac{2}{a}}{2\left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right)}\ .$$

Substituint $\sin^2\varphi$ per $1 - \cos^2\varphi$ en el denominador de l'expressió anterior i operant, aquesta s'escriu

$$r = \frac{b^2}{a}\,\frac{-e\cos\varphi \pm 1}{1 - e^2\cos^2\varphi}\ .$$

Dels dos signes que hi ha al numerador hem de triar necessàriament el positiu perquè si no r seria negatiu. Per tant

$$r = \frac{b^2}{a}\,\frac{1 - e\cos\varphi}{1 - e^2\cos^2\varphi} = \frac{b^2}{a}\,\frac{1 - e\cos\varphi}{(1 - e\cos\varphi)(1 + e\cos\varphi)}\ .$$

Per tant, l'equació en polars que cercàvem és

$$r = \frac{b^2}{a}\,\frac{1}{1 + e\cos\varphi}\ . \tag{2}$$

1.2 Quantitat de moviment, força

Sigui $\vec{r}$ el vector posició d'una partícula de massa m que es mou. El vector posició es pren amb referència a un origen de $\mathbb{R}^3$ que s'ha fixat prèviament. La quantitat de moviment de la partícula és $\vec{p} = m d\vec{r}/dt$. En relativitat la quantitat de moviment s'acostuma a denominar impulsió. En canvi en mecànica quàntica s'acostuma a denominar moment. La força es defineix com $\vec{F} = d\vec{p}/dt = m\, d^2\vec{r}/dt^2$.

Observació. Malgrat que el vector posició $\vec{r}$ de la partícula depèn de l'origen pres a l'espai, ni la quantitat de moviment ni la força depenen de l'origen perquè si fem un canvi d'origen $\vec{r}\,' = \vec{r} + \vec{Q}$ (essent $\vec{Q}$ un vector constant), es té $d\vec{r}\,'/dt = d\vec{r}/dt$.

1.3 Centre de masses

Si tenim n partícules de masses respectives $m_1, \ldots, m_n$ i si $\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_n$ indiquen els vectors posició, el centre de masses del sistema de les n partícules es defineix com el punt $\vec{c}$ donat per

$$\vec{c} = \frac{m_1\vec{r}_1 + \ldots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + \ldots + m_n} \ . \tag{3}$$

Sigui $m = m_1 + \ldots + m_n$ la massa total del sistema. De (3) es té

$$m\,\vec{c} = m_1\vec{r}_1 + \ldots + m_n\vec{r}_n \ . \tag{4}$$

Si les partícules es mouen els vectors $\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_n$ dependran del temps i el centre de masses donat per (3) també. Derivant (4) respecte al temps tindrem:

$$m\frac{d\vec{c}}{dt} = m_1\frac{d\vec{r}_1}{dt} + \ldots + m_n\frac{d\vec{r}_n}{dt} = \text{quantitat de mov. total del sistema.}$$

Per tant, el centre de masses és un punt (on possiblement no hi ha cap partícula del sistema) la velocitat del qual multiplicada per la massa total dóna la quantitat de moviment total del sistema.

1.4 Moment de la quantitat de moviment respecte a un punt

Si $\vec{r}$ indica el vector posició d'una partícula de massa m que es mou (respecte a un origen fix de l'espai elegit prèviament), s'anomena moment de la quantitat de moviment de la partícula respecte a l'origen el producte vectorial $\vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\, d\vec{r}/dt$. En mecànica quàntica aquest moment de la quantitat de moviment es denomina usualment moment angular de la partícula.

1.5 Llei de gravitació universal de Newton

Considerem dues partícules de masses respectives m_1 i m_2 i de vectors posició $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$. La llei de gravitació universal de Newton diu que la partícula 1 exerceix sobre la partícula 2 una força donada per

$$\vec{F}_{12} = -G\,\frac{m_1\, m_2\, (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3} \ ,$$

on G és una constant denominada constant de gravitació universal. Anàlogament la partícula 2 exerceix sobre la partícula 1 una força $\vec{F}_{21}$ igual a $-\vec{F}_{12}$. Observeu que els dos membres de l'expressió anterior de $\vec{F}_{12}$ romanen inalterats per un canvi d'origen. Per tant la llei de gravitació universal no depèn del particular origen fix que s'hagi pres a l'espai.

2 Comportament gravitatori del sistema Sol-Terra i lleis de Kepler

Designem per m_s la massa del Sol, per m_t la de la Terra, per $\vec{r}_s$ el vector posició del Sol respecte a un origen fix de l'espai elegit prèviament, i per $\vec{r}_t$ el de la Terra. Designarem per $\vec{F}_{st}$ la força gravitatòria que fa el Sol sobre la Terra i per $\vec{F}_{ts}$ la que fa la Terra sobre el Sol. Sigui $\vec{c}$ el centre de masses del sistema. Derivant (4) dues vegades respecte al temps, tindrem

$$(m_s + m_t)\frac{d^2\vec{c}}{dt^2} = m_s\frac{d^2\vec{r}_s}{dt^2} + m_t\frac{d^2\vec{r}_t}{dt^2} = \vec{F}_{ts} + \vec{F}_{st} = 0 \ .$$

D'aquí deduïm que el centre de masses del sistema Sol-Terra es comporta com si sobre ell no actués cap força. Per tant es mou amb un moviment rectilini i uniforme.

Partim de la identitat $(m_s+m_t)\vec{r}_t = (m_s+m_t)\vec{r}_t$ i sumem-hi i restem-hi al segon membre el terme $m_s\vec{r}_s$. Tindrem,

$$(m_s + m_t)\vec{r}_t = (m_s + m_t)\vec{r}_t + m_s\vec{r}_s - m_s\vec{r}_s \ .$$

Això ho podem escriure

$$(m_s + m_t)\vec{r}_t = m_s(\vec{r}_t - \vec{r}_s) + m_t\vec{r}_t + m_s\vec{r}_s \ .$$

I, tenint en compte la definició de centre de masses,

$$\vec{r}_t = \frac{m_s}{m_s + m_t}\,(\vec{r}_t - \vec{r}_s) + \vec{c} \ .$$

D'ara endavant designarem per $\vec{r}$ el vector posició de la Terra respecte al Sol, és a dir $\vec{r} = \vec{r}_t - \vec{r}_s$. Ens interessarem només pel moviment relatiu de la Terra respecte al Sol. És a dir, per com varia el vector $\vec{r}$ amb el temps. La igualtat anterior s'escriurà

$$\vec{r}_t = \frac{m_s}{m_s + m_t}\,\vec{r} + \vec{c} \ . \tag{5}$$

Si sabem com varia $\vec{r}$ amb el temps, (5) ens donaria (si hi estiguéssim interessats) la posició absoluta de la Terra en cada moment. I una igualtat similar ens donaria (si hi estiguéssim interessats) el moviment absolut del

Sol. Derivant dues vegades (5), multiplicant els dos membres per m_t, i tenint en compte que $d^2\vec{c}/dt^2 = 0$, tindrem

$$m_t \ddot{\vec{r}}_t = \frac{m_t m_s}{m_s + m_t}\, \ddot{\vec{r}}\,. \tag{6}$$

Ara bé, $m_t \ddot{\vec{r}}_t$ ha de ser igual a la força que actua sobre la Terra, que és la que fa el Sol per la llei de gravitació. Per tant,

$$m_t \ddot{\vec{r}}_t = -G\, \frac{m_t m_s \vec{r}}{||\vec{r}||^3}\,. \tag{7}$$

Igualant (6) i (7), tenim:

$$\frac{m_t m_s}{m_s + m_t}\, \ddot{\vec{r}} = -G\, \frac{m_t m_s \vec{r}}{||\vec{r}||^3}\,.$$

És a dir

$$\ddot{\vec{r}} = -G\,(m_s + m_t)\, \frac{\vec{r}}{||\vec{r}||^3}\,, \tag{8}$$

que és l'equació diferencial que ha de complir el vector $\vec{r}$ que ens dóna en cada moment la posició relativa de la Terra respecte al Sol.

Considerem el moment $\vec{m}$ de la quantitat de moviment de la Terra, prenent com origen el Sol. O sigui, $\vec{m} = \vec{r} \times m_t \dot{\vec{r}}$. Com que $\vec{r}$ varia amb el temps, el vector $\vec{m}$ en principi també hauria de dependre del temps. Però tenim el següent teorema:

Teorema. *El vector $\vec{m}$ no depèn del temps. És a dir, és un vector constant.*

DEMOSTRACIÓ: Es té

$$\frac{d\vec{m}}{dt} = \dot{\vec{r}} \times m_t \dot{\vec{r}} + \vec{r} \times m_t \ddot{\vec{r}}\,.$$

El primer terme és òbviament nul (per les propietats del producte vectorial) i el segon terme també ho és en virtut de l'expressió de $\ddot{\vec{r}}$ de (8). Això demostra el teorema.

Per la definició de $\vec{m}$ el vector $\vec{r}$ és perpendicular a $\vec{m}$. Ara bé $\vec{r}$ depèn del temps, però $\vec{m}$ no en depèn. Això vol dir que per a tot t el vector $\vec{r}(t)$ és perpendicular al vector fix $\vec{m}$. Això implica que els vectors $\vec{r}(t)$ per als diferents instants de temps t estan continguts en el pla perpendicular a $\vec{m}$ que passa per l'origen. Si considerem el moviment relatiu de la Terra respecte al Sol determinat pel vector $\vec{r}$, el Sol és l'origen i això ens diu que l'òrbita de la Terra entorn del Sol és plana. D'ara endavant podem treballar en aquest pla. Hem convertit, doncs, un problema de dimensió 3 en un problema de dimensió 2. En el pla de l'òrbita de la Terra en què el Sol ocupa l'origen de coordenades, prenguem coordenades polars (r, φ). Millor encara, considerem que aquest pla és el pla complex $\mathbb{C}$ i expressem el vector $\vec{r}$ d'aquest pla en la forma

$$\vec{r} = r\mathrm{e}^{i\varphi} \tag{9}$$

amb $r =$ mòdul de $\vec{r}$ i φ el seu argument. Derivem dues vegades (9) respecte al temps (tenint en compte que r i φ varien amb el temps). Es té

$$\ddot{\vec{r}} = \left[\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\, i\right] \mathrm{e}^{i\varphi} \ .$$

Igualem ara l'expressió de $\ddot{\vec{r}}$ de (8) amb la que acabem de trobar. Tindrem:

$$-G\,(m_s + m_t)\frac{r\mathrm{e}^{i\varphi}}{r^3} = \left[\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\, i\right] \mathrm{e}^{i\varphi} \ .$$

Simplificant el factor $\mathrm{e}^{i\varphi}$ que està en els dos membres i igualant llavors part real i part imaginària, ens queda finalment

$$\begin{cases} r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0 \\ \qquad\qquad \ddot{r} = r\dot{\varphi}^2 - G\,\dfrac{m_s + m_t}{r^2} \end{cases} \tag{10}$$

que són les dues equacions diferencials que determinen la variació amb el temps de les coordenades polars (r, φ). La primera equació es pot escriure $\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0$. És a dir,

$$r^2\dot{\varphi} = h \ , \tag{11}$$

on h és una constant. Si $h = 0$ tindríem $\dot{\varphi} = 0$. Llavors φ seria constant i la trajectòria de la Terra respecte al Sol seria una recta. La Terra aniria contra el Sol en línia recta i xocaria amb ell. L'òrbita d'un planeta queda determinada per la posició i per la velocitat d'aquest en un determinat instant. Si aquesta velocitat inicial fos nul·la, la Terra aniria contra el Sol. Suposem a partir d'ara que la constant h és diferent de zero. Llavors serà positiva.

L'element d'àrea dA escombrada pel vector $\vec{r}$ en el temps dt és $\frac{r^2\dot{\varphi}dt}{2}$. Per tant, la fórmula anterior es pot escriure així

$$\frac{dA}{dt} = \frac{h}{2} \ . \tag{12}$$

Integrant això entre dos instants de temps t_1 i t_2 obtenim que l'àrea escombrada pel vector $\vec{r}$ entre dos instants de temps t_1 i t_2 és $(h/2)(t_2 - t_1)$. O sigui, l'àrea escombrada és proporcional al temps emprat en escombrar-la. Això es pot enunciar així:

Segona llei de Kepler: *El radi vector que uneix qualsevol planeta amb el Sol escombra àrees iguals en temps iguals.*

De (11) s'obté $r^2 d\varphi = h dt$. Per tant $d/dt = (h/r^2)(d/d\varphi)$. Substituint això a la segona equació de (10) s'obté

$$\frac{h}{r^2}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}\right) = \frac{h^2}{r^3} - \frac{G\,(m_s+m_t)}{r^2}\ ,$$

que és l'equació diferencial que ens dóna r en funció de φ i ens descriu, per tant, geomètricament la trajectòria. Aquesta equació se simplifica si es fa el canvi de variable $u = 1/r$. Llavors ens queda

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{G(m_s+m_t)}{h^2}\ ,$$

que és lineal amb coeficients constants. La solució general ve donada per

$$u = \frac{G\,(m_s+m_t)}{h^2}\left(1 + e\cos(\varphi-\omega)\right)\ ,$$

on e i ω són constants d'integració. Podem suposar $e \geq 0$ a condició de modificar, si cal, ω. D'aquí obtenim

$$r = \frac{h^2}{G\,(m_s+m_t)}\,\frac{1}{1+e\cos(\varphi-\omega)}\ . \tag{13}$$

Si la constant d'integració e és < 1 això és l'equació en polars d'una el·lipse (amb un origen d'angles diferent, determinat per la constant ω). Si e fos igual a 1 l'equació correspondria a una paràbola i si $e > 1$, correspondria a una hipèrbola. En aquests dos casos el planeta s'allunyaria infinitament del Sol en el transcurs del temps. Com que aquest no és el cas dels planetes del sistema solar, podem enunciar:

Primera llei de Kepler: *Els planetes descriuen el·lipses entorn del Sol, el qual està situat en un dels focus.*

Comparant (13) amb (2), veiem que

$$\frac{b^2}{a} = \frac{h^2}{G(m_s+m_t)}\ .$$

Per tant,

$$h = \frac{b\sqrt{G(m_s+m_t)}}{\sqrt{a}}\ . \tag{14}$$

Designem per T el temps que triga la Terra a donar una volta entorn del Sol (d'això se'n diu el *període*). Integrant (12) entre 0 i T, tindrem

$$\pi ab = \frac{h}{2}T\ .$$

Per tant,

$$T = \frac{2\pi ab}{h} = \text{(usant (14))} = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{G\,(m_s + m_t)}}\ .$$

Això es pot escriure també de la manera següent:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G\,(m_s + m_t)}{4\pi^2}\ . \tag{15}$$

Si considerem que la massa d'un planeta és despreciable en relació amb la del Sol, el segon membre d'aquesta identitat no depèn del particular planeta que considerem, i d'aquí surt la llei següent:

Tercera llei de Kepler: *El quocient del cub del semieix major de l'el·lipse descrita per un planeta dividit pel quadrat del seu període és el mateix per a tots els planetes del sistema solar. És a dir: Els cubs dels semieixos majors són proporcionals als quadrats dels seus períodes.*

L'enunciat anterior no és ben bé el que va donar Kepler originàriament. Procedirem a obtenir l'enunciat original. Considerem l'el·lipse de $\mathbb{R}^2$ d'equació (1). Els seus focus són $(\pm c, 0)$. La distància del punt $(a, 0)$ del semieix major al focus $(c, 0)$ és $a - c$. La distància del punt $(-a, 0)$ al mateix focus és $c + a$. La suma d'aquestes dues distàncies és $2a$. Per tant, a és la semisuma de les distàncies màxima i mínima dels punts de l'el·lipse a un focus. Així, doncs, la tercera llei de Kepler pot ser enunciada en la forma següent:

Enunciat original de la tercera llei: *Els cubs de les distàncies mitjanes d'un planeta al Sol són proporcionals als quadrats dels seus períodes.*

Els períodes dels planetes es poden determinar fàcilment per observació directa (quant temps triguen a donar una volta entorn del Sol). La tercera llei ens diu que si coneixem els períodes dels planetes i la distància mitjana de qualsevol d'ells al Sol, coneixem les distàncies de tots els planetes al Sol. Per trigonometria podem calcular la distància de Venus a la Terra quan Venus està molt a prop nostre. Aquesta única dada calculada per trigonometria ens permet determinar (en virtut de la tercera llei) les distàncies de tots els planetes al Sol. Això va significar una verdadera revolució dintre de l'astronomia.

3 Posició relativa de la Terra respecte al Sol en cada instant de temps

A la secció anterior hem obtingut les equacions diferencials (10) que regeixen el moviment relatiu de la Terra respecte al Sol. D'aquelles equacions hem obtingut moltes conclusions (lleis de Kepler), però no hem arribat a integrar la segona de (10). Substituint en ella $\dot{\varphi}$ per h/r^2 queda una equació de segon ordre en r. No és fàcil trobar una solució explícita d'aquesta equació diferencial, però si no la trobem no som capaços de determinar r i φ en funció del temps (és a dir, la posició relativa de la Terra respecte al Sol en cada instant). Com que és complicat trobar una solució explícita de la segona de (10), presentarem l'argument geomètric de Kepler per trobar-ne les solucions de manera indirecta (a l'època de Kepler no existien ni derivades ni equacions diferencials ni la llei de gravitació universal).

A la Figura 1 hem representat l'òrbita el·líptica de la Terra entorn del Sol. Hem designat el Sol per S, el qual està situat en un focus de l'el·lipse i la Terra per E (seria més lògic designar la Terra per T, però abans ja hem usat T per designar el període, o sigui que hem pres la inicial anglesa de *Earth*). Tracem pel centre O de l'el·lipse una circumferència de radi el semieix major a (circumferència que serà tangent a l'el·lipse en els dos extrems del seu eix major). La transformació f de $\mathbb{R}^2$ que a cada punt (x, y) fa correspondre $(x, \frac{b}{a}y)$ transforma aquesta circumferència en l'el·lipse inicial. Sigui $E'' = f^{-1}(E)$ situat en la intersecció de la circumferència amb la vertical per E a l'eix major de l'el·lipse. L'angle $\varphi = \widehat{PSE}$ s'anomena *anomalia vertadera* i és l'angle φ de les coordenades polars (r, φ) que venim utilitzant. L'angle $u = \widehat{E''OP}$ s'anomena *anomalia excèntrica*. Més endavant trobarem les fórmules que fan passar de φ a u i de u a φ.

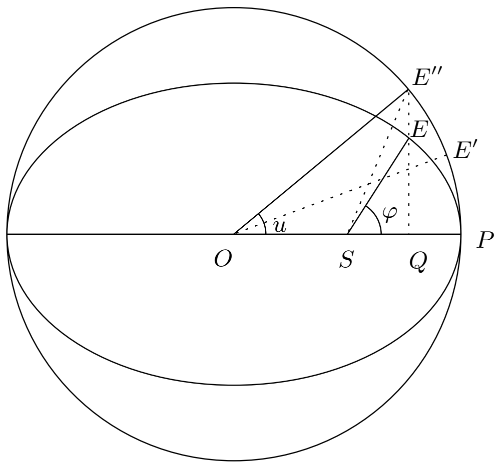


Figura 1

Kepler va considerar un punt E' sobre la circumferència definit per la condició que l'àrea del sector circular $E'OP$ fos igual a l'àrea de la regió del cercle limitada pels segments PS i SE''. D'ara endavant designarem per $\mu(E'OP)$ i per $\mu(E''SP)$ respectivament les àrees d'aquestes dues regions. L'angle $\widehat{E'OP}$ s'anomena *anomalia mitjana* i el designarem per M.

La transformació f de $\mathbb{R}^2$ definida abans compleix la propietat següent: Si $\mathcal{R}$ és qualsevol regió fitada de $\mathbb{R}^2$, l'àrea de la regió $f(\mathcal{R})$ és igual a l'àrea de $\mathcal{R}$ multiplicada pel factor b/a. Ara bé f transforma la regió $E''SP$ del cercle en la regió ESP de l'el·lipse. Per tant, tindrem:

$$\mu(ESP) = \frac{b}{a}\,\mu(E''SP) = \frac{b}{a}\,\mu(E'OP) = \frac{b}{a}\,\frac{a^2M}{2} = \frac{abM}{2}\ . \tag{16}$$

D'aquí s'obté

$$M = \frac{2\mu(ESP)}{ab}\ . \tag{17}$$

Ara bé, la posició E de la Terra en la seva òrbita varia amb el temps t. Quan vulguem explicitar aquest fet posarem $E(t)$ en lloc de E. Per tant, l'angle M que depèn de la posició de la Terra, també dependrà de t. Anem a calcular explícitament la funció $M(t)$. Sabem que l'àrea $\mu(E(t)SP)$ és proporcional al temps t si aquest temps es compte a partir del pas de la Terra pel punt P. O sigui: $\mu(E(t)SP) = kt$, essent k la constant de proporcionalitat. Quan t és igual al període T es té $\pi ab = kT$, d'on $k = \pi ab/T$. Per tant, $\mu(E(t)SP) = (\pi ab/T)t$. Substituint això a (17) s'obté la dependència següent de M respecte al temps:

$$M = \frac{2\pi t}{T}\ . \tag{18}$$

Relacionarem ara aquesta anomalia mitjana M amb l'anomalia excèntrica u. Mirant la Figura 1 veiem que $\mu(E''SP) = \mu(E''OP) - \mu(E''OS)$. Ara bé $E''OP$ és un sector circular d'angle u. Per tant la seva àrea serà $a^2u/2$. D'altra banda $E''OS$ és un triangle de base c i altura $a\sin u$. Tenint en compte que $c = ea$, es té $\mu(E''OS) = (ea^2\sin u)/2$. Per tant:

$$\mu(E''SP) = \frac{a^2}{2}\,(u - e\sin u)\ .$$

Per tant,

$$\mu(ESP) = \frac{b}{a}\,\mu(E''SP) = \frac{ba}{2}\,(u - e\sin u)\ .$$

Igualant això amb l'expressió de $\mu(ESP)$ obtinguda a (16), (i tenint en compte (18)) ens queda:

$$\frac{2\pi t}{T} = M = u - e\sin u\ , \tag{19}$$

que és l'*equació de Kepler*. En aquesta equació no és possible aïllar explícitament u en funció de t. Si ens interessa calcular la u que correspon a un cert t, això s'haurà de fer per mètodes aproximats (mètode de Newton o bé algun desenvolupament en sèrie de u en funció de t).

Volem ara, finalment, trobar les fórmules que relacionen les coordenades polars (r, φ) amb u. Es té:

$$\begin{aligned} \overline{SQ} &= \overline{OQ} - c = a\cos u - c = a\cos u - ae = a(\cos u - e) \\ \overline{QE} &= (b/a)\overline{QE''} = b\sin u\ . \end{aligned} \tag{20}$$

Si volem ara l'expressió de r en funció de u, tenim $r = \sqrt{\overline{SQ}^2 + \overline{QE}^2}$. En virtut de (20), això queda

$$r = \sqrt{a^2(\cos u - e)^2 + b^2 \sin^2 u}\ .$$

Substituint aquí b^2 per $a^2(1-e^2)$ i $\sin^2 u$ per $1-\cos^2 u$, ens queda

$$r = a(1 - e\cos u)\ . \tag{21}$$

Per trobar l'expressió de φ en funció de u, partim de $\overline{SQ} = r\cos\varphi$ i $\overline{QE} = r\sin\varphi$. Tenint present (20) i (21) ens queda:

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{\cos u - e}{1 - e\cos u} \\[2ex] \sin\varphi = \dfrac{\sin u\sqrt{1-e^2}}{1 - e\cos u}\ . \end{cases} \tag{22}$$

Resumint, què s'ha de fer per calcular la posició exacta de la Terra en cada instant de temps? Doncs, s'ha de fer el següent:

1. Primerament s'ha de conèixer el semieix major a i l'excentricitat e de l'òrbita de la Terra entorn del Sol, així com el període de la seva revolució. Aquest període (o any) es pot mesurar de moltes maneres. El que intervé a les lleis de Kepler és el que es coneix com *any anomalístic*, que és l'interval de temps entre dos passos consecutius de la Terra pel periheli (el periheli és el punt de l'órbita més pròxim al Sol). Aquest any no és el que fem servir habitualment, lligat a les estacions i al calendari (l'any que fem servir habitualment és l'any tròpic).

2. S'agafa com origen de temps el moment en què la Terra està al periheli. Donat llavors un instant de temps t qualsevol, s'ha de resoldre l'equació de Kepler (19) i trobar la u que correspon al t donat. Això s'ha de fer o bé per mètodes numèrics (el mètode de Newton, per exemple, és un bon mètode) o bé per algun desenvolupament en sèrie que doni aproximadament u en funció de t. Per exemple:

$$\begin{aligned} u = M(t) + e\sin M(t) + \frac{e^2}{2}\sin 2M(t) \\ + \frac{e^3}{8}(3\sin 3M(t) - \sin M(t)) \\ + \frac{e^4}{6}(2\sin 4M(t) - \sin 2M(t)) + \dots \end{aligned}$$

3. Una vegada tenim u es calcula r per la fórmula (21) i φ per les fórmules (22).

4 Esfera celeste: ascensió recta i declinació dels astres

Si observeu el cel una nit qualsevol veureu que les diferents estrelles es mouen lentament i que el seu moviment es comporta com si totes elles estiguessin enganxades a una gran esfera de centre l'observador i radi molt gran, la qual girés entorn d'un eix que uneix l'observador amb l'estrella polar. L'estrella polar, per estar molt pròxima a l'eix de rotació, gairebé no es mou de lloc. En canvi les altre estrelles descriuen durant la nit arcs de circumferència. Fins al Renaixement es va creure que la Terra estava immòbil al centre de l'univers i que totes les estrelles estaven enganxades a una gran esfera que tenia per centre el de la Terra. Aquesta esfera, anomenada *volta celeste* o *esfera celeste* tenia un radi molt gran en comparació amb el de la Terra i girava uniformement entorn de l'eix determinat pels dos pols de la Terra (ja hem dit que la Terra es considerava immòbil). Aquesta concepció explicava a la perfecció el moviment aparent de totes les estrelles durant la nit.

Malgrat saber en l'actualitat que la volta celeste no existeix i que és la Terra la que gira diàriament entorn del seu eix, per a molts problemes d'astronomia de posició és molt útil l'antic punt de vista. Si el que de veritat ens interessa és el moviment relatiu de les estrelles respecte a nosaltres, podem perfectament suposar que elles són les que giren cada dia 360° i que nosaltres estem quiets. D'altra banda, si fem abstracció de les distàncies a les que es troben els estels, el que nosaltres veiem d'ells queda determinat pel raig de llum que uneix l'estella i l'observador. Aquest raig talla la imaginària volta celeste en un únic punt. Per tant nosaltres veiem aquella estrella com si de veritat estigués enganxada a la imaginària esfera celeste.

El cercle màxim de l'esfera celeste obtingut per intersecció d'aquesta esfera amb el pla que passa pel seu centre i és perpendicular al seu eix de rotació s'anomena *equador celeste*.

La utilització de l'esfera celeste com un objecte matemàtic útil xoca una mica amb les idees que ens han ensenyat de petits. En efecte, hem après que la Terra té dos moviments: el de rotació entorn del seu eix i el de translació entorn del Sol. Pel moviment de rotació dóna una volta cada dia entorn del seu eix i pel de translació dóna una volta cada any entorn del Sol. Ara bé, durant tot l'any l'eix de la Terra es manté paral·lel a ell mateix durant el desplaçament entorn del Sol. L'estrella polar, que és una estrella situada a més de 300 anys llum de nosaltres –és a dir, molt lluny–, es troba per casualitat aproximadament sobre la prolongació de l'eix de rotació de la Terra cap al nord. El fet que l'eix de rotació de la Terra es mantingui paral·lel a ell mateix en el moviment de translació ens garanteix que durant tot l'any trobarem l'estrella polar en la prolongació cap al nord de l'eix de la Terra (ja que rectes paral·leles es tallen en un punt de l'infinit, i l'estrella polar és com si estigués a l'infinit). Això justifica que vegem durant tot l'any que el moviment de rotació de l'esfera celeste es produeix entorn d'un eix que apunta cap a un punt molt pròxim de l'estrella polar.

Quan s'adopta el punt de vista segons el qual la Terra està fixa i el que es mou és l'esfera celeste, qualsevol observador situat en un punt de la Terra pot suposar-se situat al seu centre (ja que el radi de la Terra és infinitament petit respecte al radi de l'esfera celeste). L'angle que forma l'eix de rotació de la volta celeste (que uneix l'observador amb un punt molt pròxim a l'estrella polar) amb el pla horitzontal de l'observador no és altra cosa que la latitud geogràfica de l'observador, com queda palès en el dibuix de la Figura 2. La circumferència de la Figura 2 representa la Terra. En el punt P de la Terra es considera l'angle que forma la recta per P paral·lela a l'eix de rotació de la Terra amb el pla horitzontal de l'observador situat en el punt P. Aquest angle, tal com es pot veure a la figura, coincideix amb la latitud geogràfica ja que angles de costats perpendiculars són iguals.

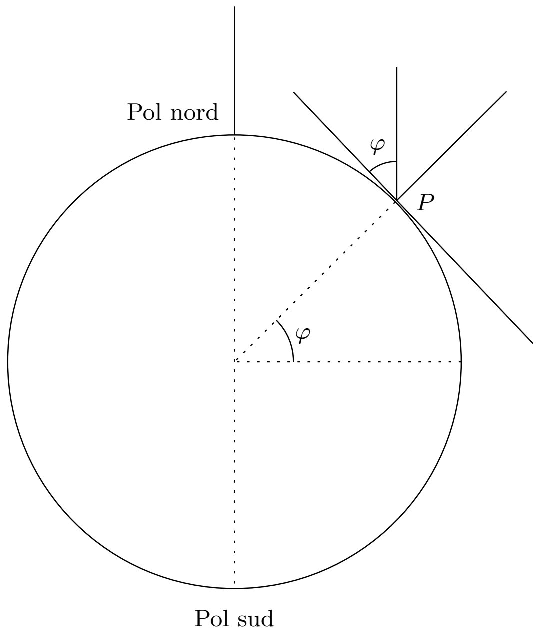


Figura 2

Malgrat que totes les estrelles es mouen unes respecte a les altres, com que estan molt lluny de nosaltres, al llarg de la nostra curta vida nosaltres gairebé no apreciem el seu moviment, a no ser que usem aparells molt precisos. Per tant, en primera aproximació podem suposar que les posicions relatives d'unes respecte a les altres es mantenen inalterables i es comporten, per tant, com si totes elles estiguessin enganxades a la volta celeste i aquesta fos un sòlid rígid. Ara bé, la posició dels planetes, del Sol i de la Lluna sí que varia respecte a la posició de les estrelles fixes. Durant el dia també hi ha estrelles al cel, però la llum del sol ens impedeix veure-les. Si les poguéssim veure podríem apreciar que la posició del Sol respecte a aquestes estrelles va canviant d'un dia a l'altre. El Sol al llarg de tot un any es va movent per l'esfera celeste i descriu un cercle màxim d'aquesta esfera (anomenat *eclíptica*) que forma amb l'equador celeste un angle aproximat de $23°$ i $26'$. Cal remarcar que el moviment del Sol sobre aquest cercle màxim segueix el sentit invers del sentit de gir de l'esfera celeste en el seu moviment diari. La Figura 3 representa l'esfera celeste amb l'equador i l'eclíptica. El punt d'intersecció entre l'eclíptica i l'equador celeste corresponent al moment en què el Sol passa de l'hemisferi sud al nord s'anomena *punt Àries* (designat per γ a la figura). En aquesta figura s'ha marcat sobre l'equador celeste el sentit de gir de l'esfera celeste en el seu moviment diari i sobre l'eclíptica s'ha marcat el sentit de recorregut del Sol sobre l'eclíptica (invers de l'anterior).

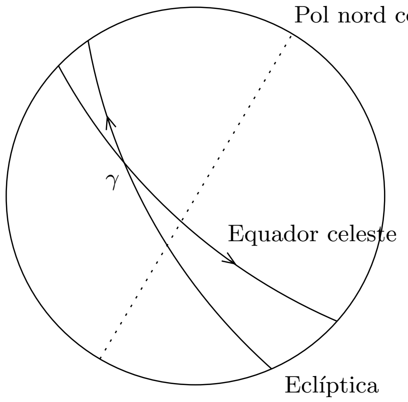


Figura 3

La noció d'esfera celeste (tot i que aquesta esfera no existeix en realitat) permet assignar a cada astre del firmament dues coordenades anàlogues a la longitud i latitud terrestres. Però les coordenades anàlogues a l'esfera celeste reben noms diferents. La coordenada anàloga a la latitud s'anomena *declinació* i l'anàloga a la longitud s'anomena *ascensió recta*.

La declinació δ d'un astre P es defineix com l'angle entre l'equador celeste i P mesurat sobre el meridià celeste que passa per P. Aquest angle es pren positiu si l'astre està a l'hemisferi nord i negatiu si està a l'hemisferi sud. Per tant, $-90° \leq \delta \leq 90°$. L'ascensió recta α d'un astre P es defineix com l'angle mesurat sobre l'equador entre el punt Àries i la intersecció amb l'equador del meridià que passa per P. El sentit de recorregut per mesurar aquest angle es pren contrari al sentit del moviment de l'esfera celeste en el seu moviment diari. L'ascensió recta varia entre $0°$ i $360°$ i s'acostuma a mesurar en hores (multiplicant per 15 els graus) perquè es pot interpretar com l'hora de temps sideral en què un astre passa pel meridià origen (però nosaltres aquí no expliquem aquest punt de vista).

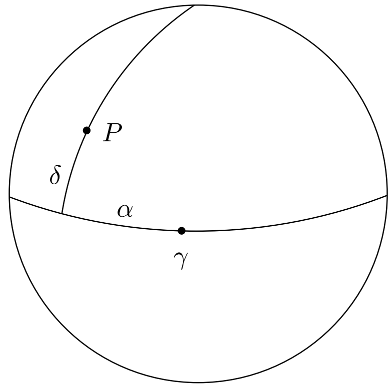


Figura 4

5 Temps solar mitjà i equació de temps

A l'escola primària ens ensenyaven que el migdia local és l'instant de temps en què el sol passa pel meridià de l'observador. És a dir, són les 12 del migdia en una certa localitat quan allà el sol està el més alt possible sobre l'horitzó. Després vam aprendre que les nostres hores s'acostumaven a referir al meridià de Greenwich i no pas al meridià de cada localitat. Segons això seria d'esperar que el sol passés cada dia pel meridià de Greenwich a les 12. Ara bé, en els anuaris astronòmics hi ha l'hora de pas del sol pel meridià de Greenwich dia a dia, i aquesta hora no coincideix pas amb les 12. Com pot ser això?

Un dia solar vertader és l'interval de temps entre dos passos consecutius del sol per un meridià (que per simplificar prendrem el de Greenwich). Els dies solars vertaders no són uniformes. Entre la durada d'un dia i la durada del dia següent hi ha una petita diferència. Aquestes diferències són acumulatives i per aquesta causa els rellotges mecànics no poden marcar el temps solar vertader, perquè la durada dels dies solars vertaders no és uniforme. Aquest fenomen es va començar a notar al segle XVII quan es van poder construir rellotges mecànics prou precisos per apreciar aquestes diferències. Com que el temps solar vertader no és uniforme es va inventar el temps solar mitjà perquè pogués ésser mesurat pels rellotges mecànics. Un dia solar mitjà és l'interval de temps que resulta de fer una mitjana de les durades dels dies solars vertaders al llarg de l'any. El dia solar mitjà es divideix en 24 parts iguals anomenades hores de temps solar mitjà i aquestes es divideixen anàlogament en 60 minuts mitjans i els minuts mitjans en 60 segons mitjans.

Per descriure això de manera més precisa hem d'analitzar les causes per les quals els dies solars vertaders no són uniformes. Primer de tot observem que dos astres que tinguin la mateixa ascensió recta α passen per un determinat meridià (per exemple, el de Greenwich) en el mateix instant. Per tant l'instant de pas d'un astre pel meridià de Greenwich queda determinat només per l'ascensió recta α de l'astre. El Sol es mou sobre l'eclíptica al llarg de l'any. Suposem que avui quan passa pel meridià de Greenwich té ascensió recta α i demà, quan hi torna a passar, té ascensió recta α'. La duració del dia seria uniforme si la diferència $\alpha' - \alpha$ fos constant al llarg de l'any. Per tal que els dies solars vertaders fossin uniformes l'ascensió recta del Sol hauria de ser una funció lineal del temps, comptant el temps en unitats qualssevol (mentre sigui un temps uniforme). Però no ho és per dues causes:

1. El Sol no descriu l'eclíptica amb moviment angular constant, sinó que (degut a les lleis de Kepler) a vegades va més de pressa i altres vegades va més a poc a poc. La distància angular λ mesurada sobre l'eclíptica des del punt Àries fins a la posició del Sol en un instant determinat s'anomena *longitud eclíptica* del Sol en aquell instant. Aquesta longitud eclíptica no és funció lineal del temps.

2. Encara que la longitud eclíptica λ del Sol fos funció lineal del temps, la seva projecció sobre l'equador (que és l'ascensió recta α) no ho seria.

Per definir el temps solar mitjà es considera un Sol imaginari, que denominarem *Sol mitjà* que recorre l'equador amb moviment angular constant i que triga a donar una volta el mateix temps que el Sol real triga a donar una volta sobre l'eclíptica, des del punt Àries fins a tornar al punt Àries. Aquest temps s'anomena *any tròpic* i serà designat per T_τ (T sempre indica un període i el subíndex τ correspon a la inicial de *tròpic*). Aquest Sol mitjà encara no està ben definit per la condició que acabem d'imposar, com veurem més endavant. Però suposem que ho estigués. Llavors serien les 12 del migdia de temps solar mitjà de Greenwich d'un dia determinat quan aquell dia el Sol mitjà (i no el real) passés pel meridià de Greenwich. Si mesurem el temps uniforme t en qualsevol classe d'unitats des d'un origen arbitrari, sigui t_s l'instant de temps en què s'inicia la primavera (el subíndex s fa referència a la paraula anglesa *spring*. No podem fer servir la inicial de la paraula catalana *primavera* perquè més endavant haurem d'utilitzar el temps de pas de la Terra pel periheli que té la mateixa inicial). L'ascensió recta α_m del Sol mitjà mesurada en radians haurà de ser de la forma

$$\alpha_m(t) = \frac{2\pi(t - t_s)}{T_\tau} + K \ , \tag{23}$$

essent K una constant arbitrària, on el temps t i el període T_τ han d'estar mesurats amb les mateixes unitats. Observem que α_m és funció lineal del temps uniforme t i que $\alpha_m(t + T_\tau) = \alpha_m(t) + 2\pi$ =(per tractar-se d'angles)= $\alpha_m(t)$. Per tant, qualsevol Sol mitjà que es mogui sobre l'equador amb una ascensió recta α_m donada per (23) complirà les dues propietats següents: (a) Recorrerà l'equador amb velocitat angular constant, i (b) Trigarà a donar una volta a l'equador el mateix temps que el Sol real triga a donar una volta sobre l'eclíptica. Hi ha, doncs, infinits sols mitjans possibles que compleixen aquestes dues propietats, segons els infinits valors que pot prendre la constant K de (23). Ara bé, perquè l'elecció de la constant K sigui satisfactòria, el Sol mitjà hauria de complir també la propietat següent: (c) El valor absolut de la diferència entre l'ascensió recta $\alpha_m(t)$ del Sol mitjà i l'ascensió recta $\alpha(t)$ del Sol de veritat en cada instant de temps t ha de ser petit (per tal que la diferència entre l'hora de temps solar vertader i de temps solar mitjà sigui petita). Com que la condició (c) és imprecisa des del punt de vista matemàtic, hi continua havent infinites possibilitats de definició del Sol mitjà i, per tant, infinites possibilitats de definició de temps solar mitjà.

La possibilitat més intuïtiva consisteix a prendre $K = 0$ en la fórmula (23). Tindríem llavors $\alpha_m(t) = \frac{2\pi(t-t_s)}{T_\tau}$. Com que quan comença la primavera l'ascensió recta del Sol real és nul·la, $\alpha(t_s) = 0$, es té $\alpha_m(t_s) = \alpha(t_s) = 0$ i el Sol real coincidiria amb el Sol mitjà a l'inici de la primavera. Per simetria, també coincidirien els dos Sols a l'inici de la tardor. Però aquesta no és l'elecció del Sol mitjà que es fa. L'elecció que es fa es fonamenta en raons històriques basades en fórmules de càlcul, però de cap manera en fenòmens astronòmics reals. Expliquem a continuació quina constant K es pren a la fórmula (23) per definir el Sol mitjà que fa servir tothom i que influeix tant directament en les nostres vides (tots els rellotges depenen de l'elecció d'aquesta constant!).

Sigui λ_p la longitud eclíptica del Sol en el moment en què passa pel perigeo. Sigui t_p l'instant en què el Sol passa pel perigeo (aquí adoptem el punt de vista segons el qual el Sol gira entorn de la Terra; per aquesta raó parlem de *perigeo* en lloc de *periheli*). La constant K que s'agafa a la fórmula (23) és

$$K = \lambda_p - \frac{2\pi(t_p - t_s)}{T} \ ,$$

on T indica (d'acord amb les seccions anteriors) el temps que triga el Sol entre dos passos consecutius pel perigeo (any anomalistic). Si el Sol es mogués per l'eclíptica amb moviment angular uniforme, la longitud eclíptica del Sol en el moment de pas pel perigeo seria $\frac{2\pi(t_p-t_s)}{T}$. Per tant la constant K anterior seria nul·la. Com que l'excentricitat de l'òrbita de la Terra és petita, el moviment del Sol per l'eclíptica s'aproxima molt a un moviment angular uniforme i la constant K anterior és petita en valor absolut, que és una de les condicions que ha de complir K si volem que es compleixi la condició (c) que hem imposat al Sol mitjà.

Resumint, el Sol mitjà (que serveix per mesurar el temps solar mitjà) està definit de la manera següent: És el Sol que es mou sobre l'equador celeste i l'ascensió recta α_m del qual ve donada en funció d'un temps uniforme t per la fórmula

$$\alpha_m(t) = \frac{2\pi(t-t_s)}{T_\tau} + \lambda_p - \frac{2\pi(t_p-t_s)}{T} \ .$$

Els períodes T_τ i T de la fórmula anterior són diferents. Un és l'any tròpic i l'altre, l'any anomalístic. Com que tenen valors molt pròxims, si a la fórmula anterior fem $T = T_\tau$, cometrem només un petit error. Llavors la fórmula anterior esdevé

$$\alpha_m(t) \simeq \frac{2\pi(t-t_p)}{T} + \lambda_p \ . \tag{24}$$

Veiem, doncs, que l'ascensió recta $\alpha_m(t_p)$ del Sol mitjà quan el Sol real passa pel perigeo ($t = t_p$) és λ_p. Per tant, si fem la simplificació $T = T_\tau$, el Sol mitjà queda definit per les dues condicions següents:

1. Recorre l'equador celeste amb moviment angular uniforme i inverteix el temps T (any anomalístic) a donar una volta a l'equador.

2. En el moment en què el Sol real passa pel perigeo, el Sol mitjà té una ascensió recta igual a la longitud eclíptica del Sol real en aquell moment.

Hem de remarcar que el terme $\frac{2\pi(t-t_p)}{T}$ de (24) és igual a l'anomalia mitjana de la Secció 3 definida per la fórmula (18) (recordem que allà s'agafava com a origen de temps el moment de pas del Sol pel perigeo).

S'anomena *equació de temps* la diferència entre el temps solar mitjà i el vertader (a vegades es pren com a definició l'oposada, és a dir, la diferència entre el temps solar vertader i el mitjà). Això implica que l'equació de temps és la diferència angular $\alpha_m - \alpha$ transformada a temps. Per tant, l'equació $E(t)$ de temps val

$$E(t) \simeq \frac{2\pi(t-t_p)}{T} + \lambda_p - \alpha \ . \tag{25}$$

Hem de remarcar que l'equació de temps corresponent a un determinat dia de l'any a les 0 hores depèn de l'any. Cada any canvia respecte a l'any anterior (entre altres coses perquè cada quatre anys hi ha un any de traspàs i s'afegeix de cop i volta a la durada de l'any un dia més). Però la diferència entre l'equació de temps un mateix dia de l'any entre dos anys qualssevol és petita. Si no exigim molta precisió en els valors de l'equació de temps, es poden agafar unes constants a la fórmula (25) que facin que la fórmula (de manera aproximada) valgui per a tots els anys. Anem a descriure aquestes constants. En primer lloc, la longitud eclíptica del Sol en el moment de pas pel perigeo es pren $\lambda_p = 282,94719°$. En segon lloc, si prenem com origen del temps uniforme t el començament de l'any (0 hores de temps solar mitjà de Greenwich de l'u de gener), el valor de t_p es pren $t_p = 3,539$

dies. L'any anomalístic T és de 365,256876 dies. L'ascensió recta α del Sol real que intervé a la fórmula (25) es calcula de la manera següent: Primer es calcula l'anomalia vertadera φ del Sol tal com s'ha indicat al final de la Secció 3. Després es calcula la longitud eclíptica λ del Sol real per la fórmula $\lambda = \varphi + \lambda_p$. Finalment, es calcula α en funció de λ per la fórmula de trigonometria esfèrica següent:

$$\tan \alpha = \cos \epsilon \tan \lambda \ ,$$

on ϵ és l'angle entre l'eclíptica i l'equador, que és $\epsilon = 23,4394°$. La Figura 5 mostra el triangle esfèric (rectangle) al qual s'aplica la fórmula anterior. El costat superior d'aquest triangle representa l'eclíptica i l'inferior, l'equador celeste.

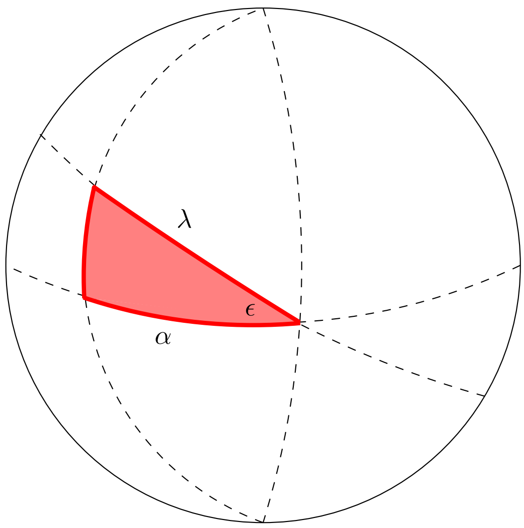


Figura 5

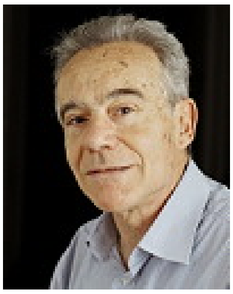
Bibliografia addicional

[1] A. Abad, J. A. Docobo, A. Elipe. *Curso de astronomía*. Prensas Universitarias de Zaragoza, 2002.

[2] A. Danjon. *Astronomie Générale*. Albet Blanchard, Paris, 1986.

[3] C. D. Murray, S. F. Dermott. *Solar System Dynamics*. Cambridge University Press, 1999.

[4] http://en.wikipedia.org/wiki/Equation_of_time



Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
girbau@mat.uab.cat

Publicat el 9 de maig de 2011

UAB