MAT^2

MATerials MATemàtics
Volum 2012, treball no. 1, 23 pp. ISSN: 1887-1097
Publicació electrònica de divulgació del Departament de Matemàtiques
de la Universitat Autònoma de Barcelona
www.mat.uab.cat/matmat

El problema de Dido, abelles, billars i principis de màxims i mínims.

José González Llorente

1 Introducció

Natura, tu ets la meva deessa, i a la teva llei cenyeixo els meus serveis.
(W. Shakespeare, **El Rei Lear**, acte I, escena II).

Per què determinades formes geomètriques apareixen reiteradament al món natural? En virtut de quins principis la Natura tria certes configuracions i no altres també possibles? Aquesta mena de preguntes van impulsar el naixement de les Matemàtiques fa milers d'anys. Una de les funcions bàsiques del coneixement matemàtic al llarg de la història ha estat la interpretació i comprensió del món natural. La convicció que la Natura es regeix per una mena de *principi d'economia* ha estat una peça clau en aquest procés, no només des d'un punt de vista estètic sinó també perquè es tracta d'una idea que combina l'eficiència i la senzillesa.

Un segment rectilini és el trajecte més curt entre dos punts del pla. Un arc de cercle màxim és el trajecte més curt entre dos punts de la superfície d'una esfera. De totes les corbes tancades de perímetre fix, la que envolta més àrea és la circumferència. Qüestions d'aquest estil –els anomenats *Problemes de Màxims i Mínims*– ja van interessar els matemàtics grecs i des d'aleshores no només han contribuït de manera decisiva al desenvolupament de les matemàtiques sinó també de la física, les ciències de la vida, l'economia i l'art. La nostra vida diària planteja constantment problemes que requereixen *maximitzar* o *minimitzar* alguna quantitat, en el sentit de treure el màxim profit d'una determinada situació a partir d'uns mitjans donats. Per què la Natura s'hauria de comportar de manera diferent? A partir del segle XVII i paral·lelament al desenvolupament del Càlcul Diferencial, els problemes de màxims i mínims han proporcionat eines fonamentals per donar sentit al principi d'economia de mitjans de què parlàvem abans i aprofundir en la comprensió del món físic.

En aquesta nota farem un breu recorregut, necessàriament parcial i incomplet, per alguns dels problemes de màxims i mínims més rellevants de la història i les seves implicacions en qüestions del món natural.

2 El problema d'Heró d'Alexandria, la reflexió de la llum i el billar.

Un dels problemes de mínims més antics està relacionat amb la geometria de la reflexió de la llum i s'atribueix al matemàtic, enginyer i inventor Heró d'Alexandria. No se sap gaire de la vida d'Heró; s'especula que va viure durant el primer segle d.C. i va escriure diversos tractats òptics, geomètrics i mecànics ([9]). En un d'ells, *Catoptrica*, va estudiar les propietats de reflexió de la llum i l'ús pràctic de miralls. La llei fonamental de la reflexió de la llum diu que *quan un raig de llum és reflectit per una superfície plana, l'angle d'incidència i de reflexió són iguals* i probablement ja era coneguda per Euclides quatre-cents anys abans. L'observació fonamental d'Heró és que la llei de reflexió es podia deduir d'un principi més general: la llum viatja de tal manera que el **temps** del recorregut és **mínim**.

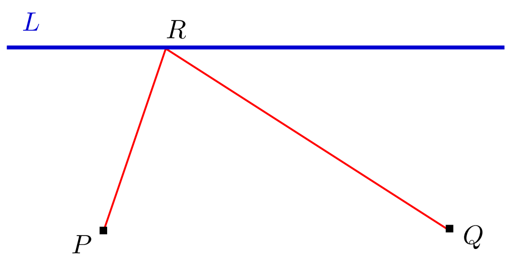

Figura 1

A continuació deduirem la llei de reflexió a partir del Principi de temps mínim seguint l'argument d'Heró. Suposem (fig. 1) que un raig de llum que surt del punt P es reflecteix en una línia L i torna a Q. On ha d'estar situat el punt de contacte R per tal que el camí PRQ sigui òptim d'acord amb el principi de temps mínim? Com que la velocitat de la llum no canvia amb la reflexió, temps mínim equival a distància mínima. Per tant R ha de ser tal que la suma de les distàncies $PR + RQ$ sigui mínima. Podem plantejar el mateix problema matemàtic adaptat a diferents situacions de la "vida real". Per exemple, suposem que som al punt P, casa nostra és el punt Q i la recta L representa un riu. En aquest context, la pregunta és: quin és el camí òptim de tornada a casa si volem fer abans una parada al riu? Una altra interpretació, més lúdica, té a veure amb trajectòries en **billars**. Una bola surt de P, xoca en la recta L (una de les parets de la taula de billar) en un punt R i torna a Q. Com que la bola seguirà el camí més curt, el problema és idèntic al del raig de llum i per tant la llei bàsica del billar és també la igualtat entre els angles d'incidència i de reflexió. Tornarem als billars a la secció 9.

La solució del problema d'Heró es basa en un argument de simetria tan simple com elegant. Sigui Q^* el punt simètric de Q respecte de la recta L (fig. 2). Com que $RQ = RQ^*$, el problema es pot replantejar així: quin és el

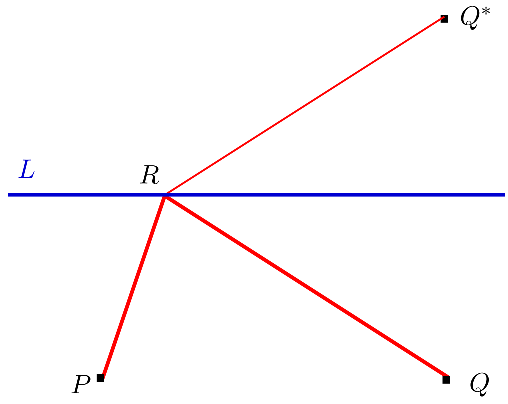

Figura 2

punt R sobre la recta L de manera que la suma de les distàncies $PR + RQ^*$ sigui mínima? Ara és geomètricament obvi que aquesta suma és mínima quan R és el punt d'intersecció del segment PQ^* amb la recta L (fig. 3).

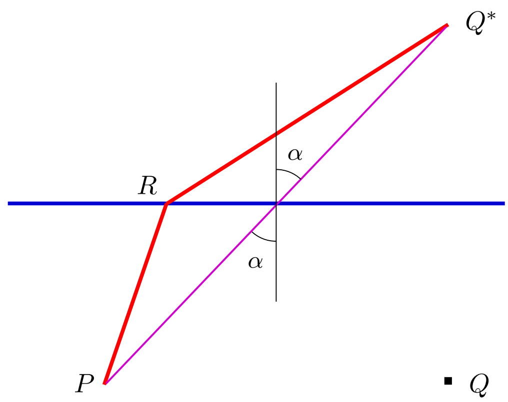

Figura 3

Tornant a la pregunta original, el raonament d'Heró implica no només que els angles d'incidència i de reflexió del camí òptim són iguals (fig. 4) sinó que també proporciona un mètode constructiu. Aquest argument probablement ja era conegut per Arquímedes. Trobarem més aplicacions del problema d'Heró en les seccions següents.

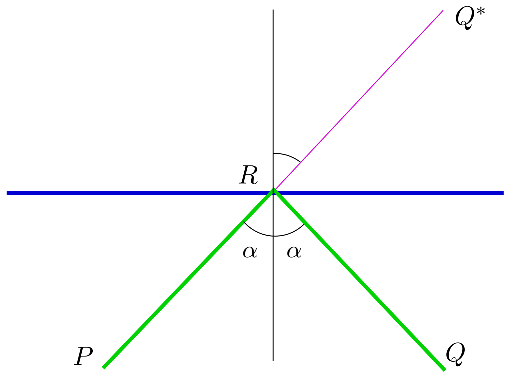

Figura 4

3 La llegenda de la princesa Dido.

Res millor que acudir a *L'Eneida* de Virgili per explicar la llegenda de la princesa Dido. La versió de Virgili diu que Dido, princesa fenícia de la ciutat de Tir, es va veure obligada a fugir-ne quan el seu germà Pigmalió va assassinar el marit de Dido. Aleshores va emprendre una travessia pel Mediterrani que la va portar fins a la ciutat de Cartago, a la costa nord de l'actual Tunísia, on s'hi va voler establir amb la seva gent. Va negociar amb el cap local, Jarbas, qui li va proposar el tracte següent: tot el terreny que pogués tancar amb una pell de brau seria seu. Potser Jarbas no comptava amb l'astúcia de Dido, qui va fer tallar la pell en tires molt primes, per després unir-les i formar una corda tancada que envoltava una figura amb l'àrea màxima possible.

El problema matemàtic al qual es va enfrontar Dido (**Problema isoperimètric**) és el següent: *entre totes les corbes tancades de longitud fixa, quina envolta una àrea màxima?* És legítim pensar que Dido va trobar la solució correcta: **la circumferència**.

Teorema Isoperimètric. *De totes les corbes tancades de longitud fixa, la circumferència és la que envolta més àrea.*[1]

De fet, Dido podria haver tret encara més partit de la situació aprofitant

[1] El Problema Isoperimètric *dual* pregunta per la corba tancada de perímetre mínim entre les que tenen àrea donada. Els dos problemes són equivalents. Considerarem la formulació dual a la secció 8.

la línia de costa, que se suposa recta (fig. 5): amb la corda sense tancar, es forma un arc semicircular els extrems del qual són dos punts de la costa. En aquest cas, el problema matemàtic corresponent –de fet equivalent a l'anterior– és: de totes les corbes de longitud fixa que tenen els extrems sobre una recta donada, quina és la que envolta més àrea? La resposta és un arc semicircular.

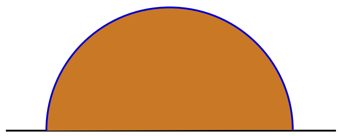

Figura 5

Paral·lelament, L'Eneida relata la història d'Eneas de Troia. Eneas, juntament amb un grup de supervivents de la batalla contra els grecs, es dirigia cap a Itàlia per fundar una nova ciutat. Una tempesta va desviar el vaixell cap a Cartago on Dido els va acollir i, per obra de Venus, es va enamorar d'Eneas. Hermes, enviat per Zeus, va ordenar Eneas que abandonés Dido qui, desesperada, es va suïcidar. Dante va condemnar Dido als inferns i, en clau musical, Purcell va recuperar la història en l'òpera *Dido i Eneas*. La història de Dido va acabar tràgicament i Cartago va desaparèixer fa molt, però el problema de Dido ha esdevingut un dels clàssics de les Matemàtiques i durant segles ha continuat sent una font d'inspiració tant dintre com fora de les Matemàtiques pures.[2]

4 Breu història del problema isoperimètric.

La confusió entre àrea i perímetre estava molt estesa a l'antiguitat. Al llibre 4 de les *Històries*, l'historiador grec Polibius (ca. 200-118 a.C.) en un fragment amb títol *Càlcul de la mida de les ciutats* diu:

> *Molta gent jutja la mida de les ciutats simplement pel seu perímetre. Quan hom diu que Megalopolis fa cinquanta estadis de perímetre i Esparta només quaranta vuit, però que Esparta és dues vegades més grossa que Megalopolis, l'afirmació els sembla increïble... He arribat a fer aquestes observacions perquè no només els homes ordinaris sinó també aquells qui aspiren al poder polític i al comandament dels exèrcits són ignorants d'aquestes coses.*

[2]Al llibre *A mathematician's apology*, G. H. Hardy fa una deliciosa reivindicació del caràcter estètic de les Matemàtiques i, entre d'altres observacions sucoses, deixa anar l'afirmació següent, que certament no contribueix a enfortir els ponts entre Matemàtiques i Literatura: "Arquímedes serà recordat quan Esquilo sigui oblidat, perquè les llengües moren i les idees matemàtiques no".

Dos segles més tard el filòsof Proclus (al primer llibre dels *Elements* d'Euclides) també feia reflexions semblants. Per exemple, la figura 6 mostra dos triangles A i B de la mateixa àrea (tenen la mateixa base i la mateixa alçada) però el perímetre de B és clarament més gran.

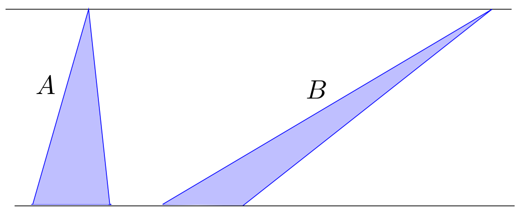

Figura 6

Una observació prèvia és que, un cop assumida l'existència d'una corba tancada que és solució del problema isoperimètric, l'aproximació de la corba per poligonals mostra que podem reduir-nos al cas de polígons (fig. 7).

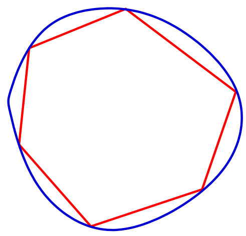

Figura 7

Aquest mètode va ser emprat pels grecs, que ja coneixien la solució del problema isoperimètric, malgrat la confusió entre àrea i perímetre esmentada abans. Possiblement el primer atac seriós al problema isoperimètric va aparèixer al tractat *De les figures isomètriques* del matemàtic grec Zenodoro. Sabem poca cosa de la vida de Zenodoro però es creu que va viure al segle II a.C., poc temps després d'Arquímedes. Les referències als seus treballs ens han arribat pels comentaris de Theon d'Alexandria[3] i de Pappus d'Alexandria. Entre els resultats demostrats per Zenodoro hi ha els següents:

1. L'àrea d'un polígon *regular* de n costats és més gran que l'àrea de qualsevol altre polígon de n costats amb el mateix perímetre.

2. Donats dos polígons regulars del mateix perímetre i costats $m < n$, l'àrea del polígon de n costats és més gran que la del polígon de m costats.

[3]Theon era el pare de la filòsofa i matemàtica Hypatia

3. Un cercle té més àrea que qualsevol polígon regular amb el mateix perímetre.

Dels quals es pot deduir, per arguments d'aproximació, que la solució del problema isoperimètric és la circumferència (que es pot considerar un polígon regular d'infinits costats). Les demostracions de Zenodoro eren incompletes: en el primer resultat assumia que el polígon òptim existeix, afirmació que requereix una justificació. De fet, la qüestió de l'existència de solució al problema isoperimètric no va ser objecte d'atenció seriosa fins a ben entrat el segle XIX. El matemàtic suís Jakob Steiner (1796-1863) va donar cinc "demostracions" del Teorema Isoperimètric ([2]) però tot i que els arguments de Steiner són veritables joies per la seva elegància i simplicitat, un punt restava sense aclarir: en totes les demostracions donava per fet que existia solució (bàsicament, la seva estratègia sempre és partir d'una figura que no és un cercle i millorar la seva àrea). El matemàtic alemany Peter Dirichlet, contemporani de Steiner, li va fer notar que les demostracions estaven incompletes perquè pressuposaven l'existència de solució. Gràcies als esforços de Dirichlet, Weierstrass i Hilbert entre d'altres, les qüestions d'existència es van anar incorporant com una part necessària de les resolucions matemàtiques als problemes de màxims i mínims.

5 El problema isoperimètric per triangles.

Com s'ha comentat a la secció anterior, és suficient resoldre el problema isoperimètric per polígons. En aquesta secció analitzarem el primer teorema de Zenodoro per triangles, cas que ja és prou interessant i conté els principals elements del cas general. Els arguments que s'exposaran a continuació estan basats en la solució del problema d'Heró i en consideracions geomètriques elementals. Vegeu [2, 3, 14] pel cas general i en particular [9] per l'argument original de Zenodoro.

Es tracta de demostrar que, d'entre tots els triangles de perímetre donat, el triangle equilàter és el d'àrea màxima. Prescindirem de la justificació d'existència i, donant per fet que hi ha un triangle òptim, demostrarem que és l'equilàter. Suposem que el triangle PRQ té dos costats diferents, per exemple $PR \neq RQ$ (fig. 8). L'estratègia consisteix en provar que existeix un altre triangle del mateix perímetre que té més àrea.

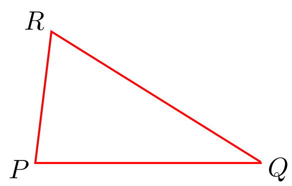

Figura 8

Sigui L la recta paral·lela a PQ que passa per R. Triem un punt S sobre L de manera que el triangle PSQ sigui isòsceles (fig. 9).

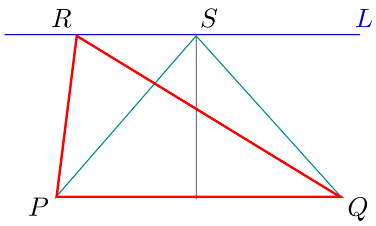

Figura 9

Pel teorema d'Heró discutit a la segona secció, tenim $PR + RQ > PS + SQ$. D'altra banda, les àrees de PRQ i de PSQ són iguals perquè són triangles de la mateixa base i la mateixa alçada. Ara (Fig. 10) apugem el punt S i construïm un altre triangle isòsceles PTQ de forma que $PT + TQ = PR + RQ$. Com que hem augmentat l'alçada, l'àrea de PTQ és més gran que la de PRQ però el perímetre és el mateix.

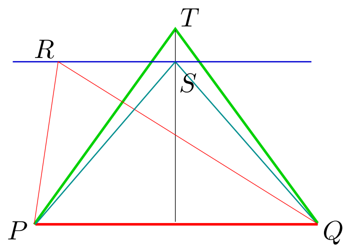

Figura 10

Per tant (fig. 11) la suposició que PRQ té dos costats diferents implica que hi ha un altre triangle (PTQ) que té el mateix perímetre però més àrea. La conclusió és que el triangle de més àrea d'entre tots els que tenen el mateix perímetre ha de ser equilàter.

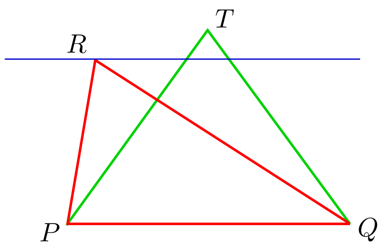

Figura 11

6 La sagacitat de les abelles (I).

Construeixo casa meva segons les lleis d'una arquitectura severa; i el mateix Euclides s'instruiria admirant la geometria dels meus alvèols.
(**Les Mil i una Nits**. *Cant de l'abella.* Nit 934.)

Les abelles i les seves construccions han atret l'atenció de científics, literats i artistes al llarg de la història. Virgili en parla al llibre IV de les *Geòrgiques* i des de Kepler fins a Darwin molts han elogiat les seves habilitats geomètriques. Al voltant de l'any 36 a.C., Marcus Terentius Varro, en el seu llibre d'agricultura ([18]) va escriure sobre la forma hexagonal de les cel·les de les abelles. Els matemàtics de l'època recolzaven la teoria que la forma hexagonal s'explicava a partir de principis d'optimització. L'origen de la qüestió és incert però Varro s'hi va referir molt abans que Pappus d'Alexandria, un dels grans geòmetres de l'antiguitat, inclogués el problema en la seva gran obra, la *Col·lecció*. Pappus, qui va viure a finals del segle III d.C., va escriure un prefaci al llibre V de la *Col·lecció* amb títol *De la sagacitat de les abelles*. Al capítol dedicat a Pappus del llibre *A history of greek mathematics* ([9]) Heath escriu a propòsit de l'estil i el tema del prefaci:

> *És característic dels grans matemàtics grecs que, quan estaven lliures de les restriccions del llenguatge tècnic matemàtic, com per exemple quan tenien l'ocasió d'escriure un prefaci, eren capaços d'escriure en un llenguatge de la més alta qualitat literària, comparable amb el dels filòsofs, historiadors i poetes... El tema és tal que qualsevol escriptor amb gust i imaginació el trobaria atractiu: la intel·ligència pràctica que mostren les abelles en triar la forma hexagonal per les cel·les de les bresques. Pappus no ens decep; el fragment és tan atractiu com el tema...*

A continuació alguns fragments del text original de Pappus que corroboren les paraules de Heath:

> *... primer recol·lecten el sucre de les flors més belles que creixen sobre la terra i construeixen, per a l'emmagatzematge de la mel, cel·les iguals, contigües entre sí, de forma hexagonal. Per força deuen haver pensat que les figures han de ser contigües entre sí, és a dir, han de tenir costats comuns de manera que cap matèria estranya pugui entrar pels intersticis i corrompre així la puresa del seu producte. Només tres figures rectilínies complirien la condició, vull dir figures regulars equilàteres i equiangulars* (triangles equilàters, quadrats i hexàgons regulars). *D'aquestes tres figures les abelles trien, d'acord amb la seva saviesa instintiva, la figura amb més angles perquè imaginen que conté més mel que qualsevol de les altres dues. Les abelles, per tant, coneixen aquest fet que*

els és útil, que l'hexàgon és més gran que el triangle equilàter i el quadrat i contindrà més mel amb la mateixa despesa de material utilitzada en la construcció.

Pappus descriu admirablement per què les abelles trien la configuració hexagonal. Un *tessel·lat* és una partició del pla en polígons disjunts(a excepció dels costats). El tessel·lat es diu *regular* si està fet amb polígons congruents i regulars.

L'explicació de la forma hexagonal depèn dels dos fets següents:

1. Només hi ha tres polígons regulars que tessel·len el pla: triangles equilàters, quadrats i hexàgons regulars (fig. 12)

2. Donats un triangle equilàter, un quadrat i un hexàgon regular del mateix perímetre, l'hexàgon és el que té més àrea.

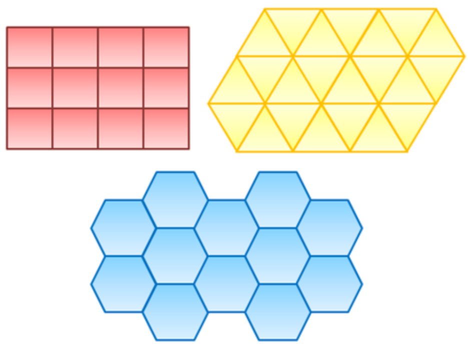

Figura 12

La segona afirmació es dedueix del segon teorema de Zenodoro i confirma que l'estructura hexagonal respon a un principi isoperimètric de mínims. Pel que fa a la primera, probablement ja era coneguda pels pitagòrics. Per exemple, la figura 13 mostra gràficament la impossibilitat de tessel·lar el pla amb pentàgons, heptàgons i octàgons regulars.

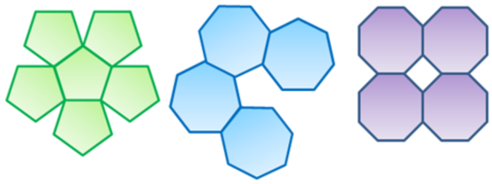

Figura 13

La demostració general és de fet elemental. Suposem que el tessel·lat és per n-polígons regulars i triem un punt que sigui un vèrtex comú d'exactament m polígons dels que formen el tessel·lat. Un càlcul senzill mostra que cada angle intern d'un n- polígon regular és igual a $\frac{\pi(n-2)}{n}$. Per tant s'ha de complir $m\frac{\pi(n-2)}{n} = 2\pi$ o, equivalentment

$$(m-2)(n-2) = 4 \tag{1}$$

L'equació (1) només admet les solucions enteres $(n, m) = (3, 6)$, $(4, 4)$ i $(6, 3)$ que corresponen als casos dels triangles equilàters, quadrats i hexàgons regulars. L'anàlisi anterior també permet considerar la situació on hi ha vèrtexs d'un polígon sobre el costat d'un polígon contigu. En aquest cas, si un punt del costat d'un polígon és a més un vèrtex comú d'altres m polígons tenim: $\pi + m\frac{\pi(n-2)}{n} = 2\pi$ o equivalentment:

$$(m-1)(n-2) = 2$$

que té les solucions enteres $(n, m) = (3, 3)$ i $(4, 2)$. Aquest cas només origina triangles equilàters i quadrats. Sigui com sigui no apareixen nous valors de n.

El fet que el tessel·letat per hexàgons regulars és òptim –des del punt de vista isoperimètric– fins i tot quan es permeten tessel·lats molt generals, formats per regions no necessàriament poligonals (ni tan sols convexes) és part de la *Honeycomb conjecture* o *Conjectura de les cel·les d'abella*. L'origen, com es pot suposar, és molt antic però la demostració, de T. Hales, és força recent ([8]) la qual cosa ens confirma que els nostres avantpassats sovint s'interessaven per problemes gens trivials!

Tornarem als aspectes matemàtics de les cel·les de les abelles des d'un punt de vista tridimensional a la secció 8.

7 La tercera labor d'Hèrcules, el vol d'ocells i altres qüestions pràctiques.

Hèrcules, el més famós dels herois grecs, era fill de Zeus i d'Alcmena. En un atac de bogeria induït per la deessa Hera, Hèrcules va assassinar els seus fills i, com a penitència, es va posar a les ordres d'Eristeus, rei de Micenes, qui li va ordenar realitzar dotze treballs que requerien una força sobrehumana. En un original intent d'acostar Matemàtiques i Mitologia, l'autor del llibre *Mythemathics*([11]) explica les 12 labors d'Hèrcules amb l'ajut d'eines matemàtiques.

Neues Museum. Berlin.

La tercera labor d'Hèrcules consistia en atrapar la cérvola sagrada de Cirenea[4] que segons la llegenda tenia banyes d'or i peülles de bronze. Hèrcules havia estat perseguint-la durant un any sencer i la seva única opció era atrapar-la quan hagués de creuar el riu Ladon, venint del mont Artemisius (punt A a la figura 14) en direcció al bosc d'Arcàdia (punt B a la figura 14).

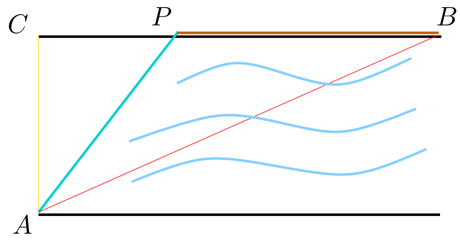

Figura 14

Hèrcules hauria d'esbrinar a quin punt de la riba superior arribaria la cérvola per poder-la atrapar tot sortint del riu, abans que tingués temps d'emprendre la resta del recorregut corrent en terra, on seria molt més difícil d'atrapar. Evidentment hi han moltes trajectòries per arribar des de A fins a B creuant el riu. Per exemple la trajectòria directa AB és certament la més curta però té l'inconvenient que tot el trajecte s'ha de fer a l'aigua, on la velocitat és més petita que sobre terra. D'altre banda si es tria la trajectòria ACB, el trajecte sobre aigua AC és el més curt possible però després CB s'ha de fer sobre terra i la distància total recorreguda $AC + CB$ és més gran que amb qualsevol altra trajectòria arbitrària APB.

I aquí és on entra el problema matemàtic: si es coneixen les velocitats de la cérvola nedant sobre el riu i corrent sobre terra, l'amplada del riu (distància AC) i també la distància CB, quin serà el recorregut òptim APB? Més concretament: quin serà el punt P triat per la cérvola assumint que el **temps total** del recorregut ha de ser **mínim**? Suposem, per exemple que la velocitat a l'aigua és de 5 Km/h, sobre terra és de 8 Km/h, l'amplada del riu és de 100 m. i la distància CB és de 1000 m. Si introduïm com a variable l'angle α que formen els segments AP i AC (fig. 15), el temps total del recorregut APB (en funció d'α) és

$$T(\alpha) = \frac{100}{5\cos\alpha} + \frac{1000 - 100\tan\alpha}{8}$$

Determinar el punt P òptim és equivalent a determinar l'angle α òptim. És un exercici elemental en Càlcul Diferencial comprovar que la funció T, definida a l'interval $[0, \arctan(10)]$, assoleix el seu mínim global quan $\alpha = \arcsin(\frac{5}{8})$ (fig. 16). Un càlcul senzill mostra que en aquest cas la distància

[4] Una muntanya de la península del Peloponès

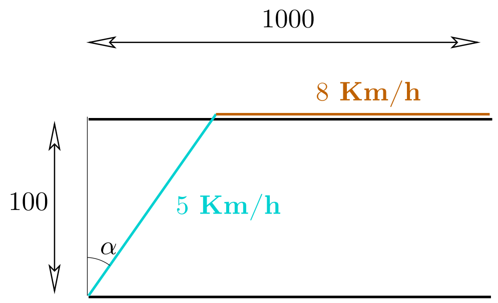

Figura 15

CP és de $\frac{100}{\sqrt{39}}$ m. Per tant Hèrcules hauria d'esperar la cérvola a $\frac{100}{\sqrt{39}}$ m. del punt C de l'altre costat de la riba enfront del mont Artemisius. S'observarà que l'angle òptim només depèn de la raó entre les velocitats en l'aigua i en terra i no pas de les distàncies AC o CB.

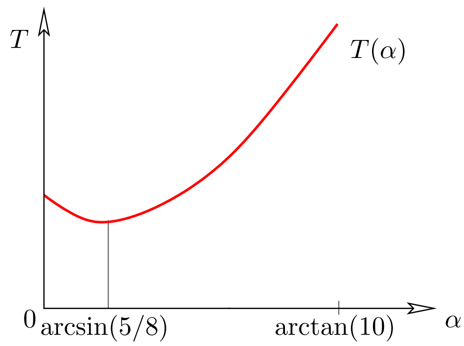

Figura 16

Aquest tipus de problema es presenta sempre que ens proposem determinar el *temps mínim* d'un recorregut en un context on hi ha *diferents mitjans*. Els exemples següents són variacions del mateix problema:

- **Refracció de la llum**. La llei de Snell sobre la refracció de la llum també es pot deduir a partir d'un principi de mínims. Un raig de llum passa d'un mitjà on la velocitat és v_1 a un altre on la velocitat és v_2. La trajectòria del raig és una poligonal formada per dos línies rectes, una en cada mitjà. Si els angles dels rajos amb la normal al punt de canvi són θ_1 i θ_2 (fig. 17) la llei de Snell diu que

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

Es pot deduir la llei de Snell a partir del *Principi de temps mínim* de Fermat. Si un raig de llum surt d'un punt A del primer mitjà, arriba en línia recta fins al punt P on es refracta i després continua en línia recta fins arribar a B, dintre del segon aleshores el temps total del recorregut APB ha de ser mínim. Quan s'interpreta el problema en termes de la funció de temps i s'imposa la condició de mínim, s'obté la llei de Snell (vegeu [12] per la resolució i comentaris històrics del problema).

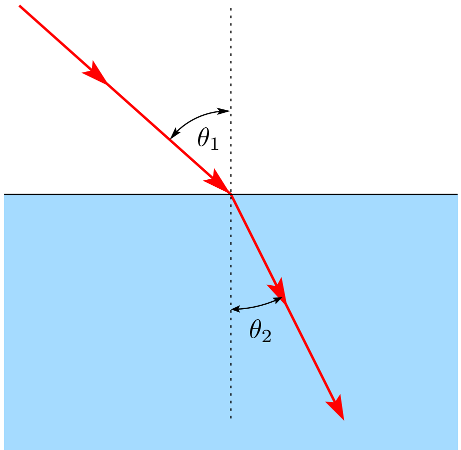

Figura 17

- **Vol d'ocells**. Està comprovat experimentalment que els ocells volen més lent sobre aigua que sobre terra, per tant la determinació de la trajectòria òptima d'un ocell que ha de volar sobre una gran extensió d'aigua origina el mateix tipus de problema que l'exemple d'Hèrcules.

- **Conduccions sota l'aigua**. Una versió pràctica del mateix problema es presenta quan s'ha de portar una conducció elèctrica d'un punt A un altre punt B a l'altre riba d'un riu. El preu per metre de la conducció sota l'aigua és lògicament més car que sobre terra per tant es tracta del mateix tipus de problema, on les velocitats són substituïdes pels preus.

- **Ramificació vascular**. La resistència de la sang quan viatja per un vas sanguini depèn de la secció del vas. Si un vas sanguini principal es ramifica per crear un vas secundari, les seccions varien i per tant les resistències també. Un model simplificat del problema consisteix en determinar l'angle de ramificació que minimitza la resistència total al llarg del recorregut. (vegeu [1], secció 9.7).

8 La sagacitat de les abelles (II).

Abandonant aquella terra vam arribar de seguida a una altra on les abelles i els ocells són matemàtics de tant geni i erudició que donen lliçons científiques de geometria als savis de l'imperi.
(E. A. Poe, **El conte mil i dos de Scherezade.**)

A la secció 6 analitzàvem l'estructura hexagonal de les cel·les de les abelles en clau bidimensional. Però des d'un punt de vista tridimensional, els hexàgons són només les entrades de les cel·les, mentre que l'estudi del fons de les cel·les és posterior, més complex, més interessant i menys conegut. En un principi, es podria pensar que les cel·les són simplement prismes rectes hexagonals amb base oberta i tapa tancada (fig. 18)

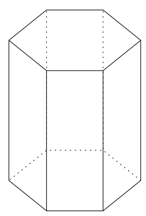

Figura 18

però de fet s'observa que la terminació no és plana sinó que és una mena de piràmide amb tres rombes en forma de diedre (fig. 19).

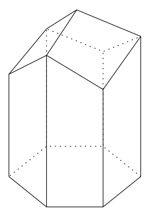

Figura 19

A més, les cel·les encaixen perfectament en un sistema de dues capes: quan tres cel·les es col·loquen juntes en la mateixa orientació deixen un forat on una quarta cel·la col·locada en l'orientació contrària encaixa perfectament (fig. 20). Per tant les cel·les , seguint aquest sistema de doble capa, omplen perfectament l'espai entre dos plans paral·lels sense deixar forats.

Al llibre *On growth and form* ([17]), Thompson ofereix una descripció exhaustiva sobre l'evolució històrica de l'estudi del fons de les cel·les. Aparentment, l'estructura geomètrica dels rombes que formen la tapa de les cel·les ja va ser reconeguda per Kepler, però el seu descobriment va passar

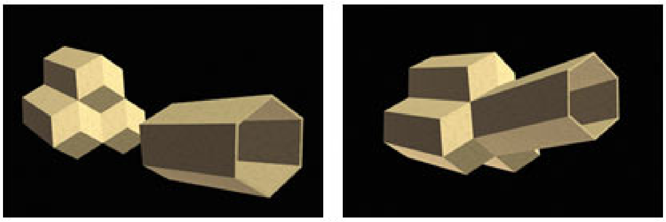

Figura 20

desapercebut fins que l'astrònom Maraldi[5], cap al 1712, va mesurar els angles del romb: $109°28'$ [6] i $70°32'$ i la inclinació de les tapes romboïdals: $35°16'$.

La idea que els principis de màxim i mínim explicarien certs dissenys de la Natura ja circulava entre els ambients científics de l'època. El físic Réaumur va ser possiblement dels primers en afirmar que un principi de mínims podria ser la clau de la qüestió i que, de la mateixa manera que passa amb el tessel·lat hexagonal al pla, els angles observats per Maraldi farien que la cel·la necessités el mínim de superfície per un volum donat. En paraules de Réaumur:

> *Convençut de que les abelles prefereixen el fons piramidal, he sospitat que la raó, o una de les raons, que les havia motivat era l'estalvi de cera; que entre les cel·les de la mateixa capacitat i de fons piramidal, la que podia estar construïda amb menys cera era aquella tal que els rombes tenien dos angles d'aproximadament* $110°$ *i dos d'aproximadament* $70°$.

Anys més tard, Réaumur li va enviar el problema al jove matemàtic suís S. Koenig[7] qui el va resoldre, tot i que per un error numèric va obtenir el valor $109°26'$. El mètode de la prova de Koenig es desconeix però probablement va utilitzar tècniques de Càlcul Infinitesimal. Koenig afirmava que les abelles havien resolt un problema fora de l'àmbit de la geometria clàssica, que requeria els mètodes de Newton i Leibniz. Tanmateix, cap al 1743, el matemàtic escocès Colin McLaurin es va proposar resoldre el problema fent servir *cap geometria més avançada que la que coneixien els antics* i ho va aconseguir. L'argument de MacLaurin (vegeu [17], p. 533) és una mica més llarg però efectivament arriba al resultat de Maraldi utilitzant només geometria elemental.

A continuació veurem una versió 2-dimensional més senzilla del problema que conté els principals ingredients. Per enunciar-la, tornarem a la formulació

[5] Nebot del famós astrònom Cassini

[6] Angle distingit, ara anomenat angle de Maraldi. Apareix al dodecaedre romboïdal i també és l'angle que formen els segments que uneixen el centre d'un tetraedre regular amb dos dels vèrtexs.

[7] Deixeble de Johann Bernouilli

del problema isoperimètric que consisteix en fixar el perímetre i maximitzar l'àrea. Suposem que volem fer obres en una habitació rectangular oberta per un cantó (fig. 21).

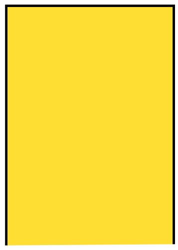

Figura 21

La modificació consistirà en substituir el costat del fons per dos segments simètrics en forma de punxa (fig. 22) amb la condició que mantinguem el perímetre total de l'habitació.

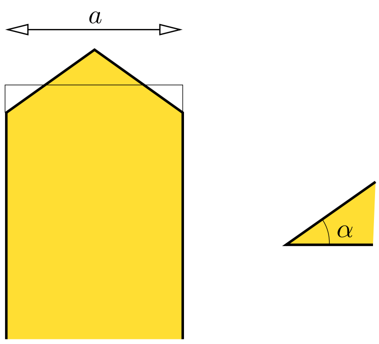

Figura 22

Si introduïm com a variable α l'angle d'inclinació dels dos nous segments respecte de l'horitzontal, ens podem plantejar les preguntes següents: és possible triar angles α de manera que l'àrea de l'habitació nova sigui més gran que l'àrea de l'habitació vella? I si fos així, quin és l'angle òptim? Un càlcul elemental mostra que el guany d'àrea aconseguit amb una modificació d'angle α és :

$$G(\alpha) = \frac{a^2}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\tan\alpha - \frac{1}{\cos\alpha}\right)$$

on a és l'amplada de l'habitació. Un càlcul elemental amb la derivada de G mostra no només que el màxim de G és positiu sinó que s'assoleix quan $\alpha = \frac{\pi}{6}$ (la gràfica de G es veu a la fig. 23).

Per tant si, mantenint el perímetre, volem modificar l'habitació per aconseguir àrea màxima, hauríem de triar un angle d'inclinació de 30°. El problema de les cel·les d'abella no és més que una versió tridimensional, tècnicament

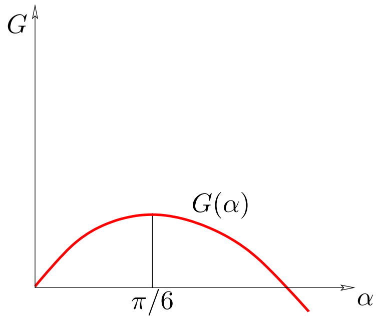

Figura 23

més complicada, d'aquest problema on l'angle d'inclinació òptim resulta ser de $35°16'$ (vegeu [1], [17]). No cal dir que, tot i la dificultat pràctica de mesurar els angles involucrats en les cel·les reals, els valors observats s'acosten força als valors teòrics. En paraules de Fontanelle, secretari de la *Académie Française* durant la primera meitat del segle XVIII, les abelles estaven *utilitzant cegament les més elevades matemàtiques per ordre i guia divina.* D'Arcy Thompson pensava que tenia més sentit suposar que *la regularitat de les obres arquitectòniques de l'abelles obeeix a alguna interacció automàtica de les forces físiques* que no pas admetre que *l'abella busca intencionadament un mètode d'economitzar cera.* Sigui com sigui, aquesta manifestació d'un principi de mínims a la Natura continua provocant-nos fascinació.

Sembla que estem admetent que les abelles han construït les *bresques perfectes*, però això és realment així? Dit d'una altra manera, es pot utilitzar un altre disseny polièdric per al fons de manera que les cel·les omplin l'espai sense deixar forats i que la proporció entre la quantitat de cera de la superfície i la capacitat de la cel·la sigui més avantatjosa? La resposta és que sí. Al 1964, en un article amb el suggestiu títol *What the bees know and what they do not know* ([6]), el matemàtic hongarès Fejes Tóth va trobar un disseny millor, amb un fons format per dos hexàgons i dos rombes en comptes de tres rombes (fig. 24)

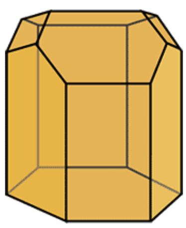

Figura 24

Encara es desconeix si la configuració de Fejes Tóth és la millor possible.

9 El problema de Fagnano i els billars.

A la segona secció introduíem la llei fonamental que regeix la geometria del billar com una aplicació del problema d'Heró: els angles que formen les trajectòries d'entrada i de sortida amb la normal a la paret són iguals. Limitarem aquí la discussió al cas de billars amb forma de polígons convexos.

Hi ha nombroses preguntes interessants sobre billars, algunes de les quals són molt fàcils de formular però molt difícils de resoldre. Una d'elles és l'existència de trajectòries periòdiques. Donat $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, direm que una trajectòria és n-periòdica si surt d'un punt en algun dels costats i torna al punt de sortida després de n xocs. Una trajectòria és periòdica si és n-periòdica per algun $n \geq 2$. Per exemple, qualsevol segment perpendicular simultàniament a dos costats és una trajectòria 2-periòdica. En el cas d'un rectangle és trivial obtenir trajectòries 2-periòdiques i 4-periòdiques: qualsevol trajectòria que connecti perpendicularment dos costats paral·lels és 2-periòdica i la trajectòria que connecta els punts mitjans dels costats és 4-periòdica.

El cas dels triangles ja és prou interessant. Quan el triangle és acutangle, l'existència de trajectòries periòdiques està estretament relacionada amb un dels problemes més fascinants de minimització geomètrica: el problema de *Fagnano*, que deu el nom al matemàtics italians Giulio Carlo Toschi de Fagnano (1682-1766) i el seu fill, Giovanni Francesco Fagnano (1715-97). Donat un triangle acutangle, el problema consisteix en determinar un triangle inscrit de *perímetre mínim* amb un vèrtex en cada costat del triangle donat. Comentem, primer de tot, la connexió entre el problema de Fagnano i els billars. Suposem que DEF és el triangle de perímetre mínim inscrit al triangle acutangle ABC, on $D \in BC$, $E \in AC$ i $F \in AB$. Fixats E i F, la trajectòria EDF és una solució del problema d'Heró amb dades els punts E, F i la recta BC. Per tant els angles d'incidència i de reflexió en D són iguals i EDF compleix el requisit d'una trajectòria de billar. Evidentment el mateix argument aplicat als altres vèrtexs diu que el triangle inscrit DEF és una trajectòria 3-periòdica al billar ABC.

Queda com exercici pel lector comprovar que en el cas de triangles rectangles i obtusangles el mínim dels perímetres dels triangles inscrits és dues vegades l'altura més petita, però no hi ha triangle òptim (degenera en l'altura comptada dues vegades). Pel que fa a les trajectòries periòdiques, la situació és molt més complicada i interessant. Discutirem sobre aquest problema al final de la secció.

La solució del problema de Fagnano és l'anomenat *triangle òrtic*: el triangle que té com a vèrtexs els peus de les tres altures (fig. 25).

Desde la prova original de J. F. Fagnano ([5]), que utilitzava tècniques de Càlcul Diferencial, s'han trobat diverses demostracions del teorema de Fagnano amb sabor més geomètric, entre elles les més famoses són les de Féjer i Schwarz ([3, 10, 12, 15]). La prova que veurem a continuació és la de Féjer

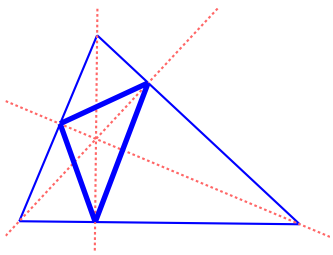

Figura 25

i està basada en el problema d'Heró discutit a la segona secció. Suposem que ABC és un triangle acutangle arbitrari. Arribarem a la conclusió que el triangle òrtic és la solució del problema de Fagnano en dues etapes. Primer, fixem un punt D al costat BC i, de tots els triangles inscrits DEF amb $E \in AC$ i $F \in AB$ volem determinar el de perímetre mínim. La figura següent suggereix la solució

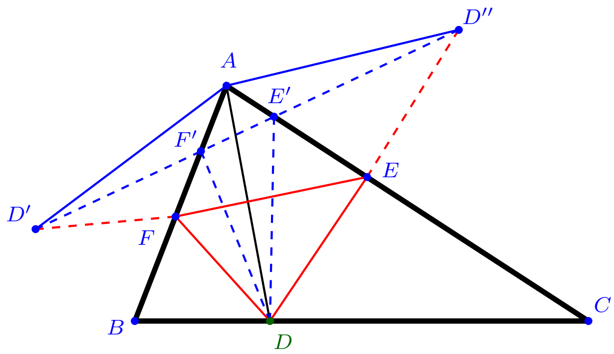

Figura 26

Siguin D', D'' els punts reflectits de D respecte dels costats AB, AC respectivament. Aleshores el perímetre del triangle EDF coincideix amb la longitud de la poligonal $D'FED''$ que és mínima quan $E = E'$, $F = F'$, els punts d'intersecció de la recta $D'D''$ amb els costats AB, AC. Per tant, fixat D, el triangle $DE'F'$ és la solució d'aquesta primera etapa del problema de Fagnano.

La segona etapa consisteix en triar el punt D de manera que el perímetre de $DE'F'$ (o equivalentment la longitud $|D'D''|$) , sigui mínim. Inspeccionant la figura 26 s'observa: i) $|AD'| = |AD''| = |AD|$ i per tant els triangles $D'AD''$ són isòsceles ii) que l'angle al vèrtex A és independent de l'elecció

[7] Les figures 26 i 27 s'han reproduït per cortesia del professor Paris Pamfilos (Universitat de Creta), de la seva web personal `http://www.math.uoc.gr/~pamfilos/eGallery/Gallery.html`, que conté informació sobre molts problemes geomètrics interesants, incloent-hi el problema de Fagnano.

del punt D i coincideix amb 2α, on α és l'angle del triangle original ABC al vèrtex A. Com que $|D'D''| = 2|AD'|\sin\alpha = 2|AD|\sin\alpha$, el millor D és el que minimitza $|AD|$: el peu de l'altura des del punt A (fig 27).

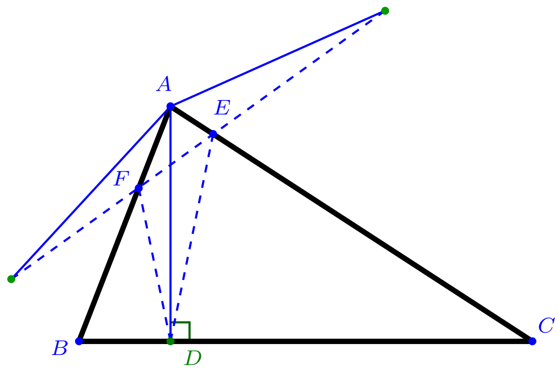

Figura 27

Com que l'elecció del costat BC ha estat arbitrària, el mateix argument donaria que el triangle **òrtic** és la solució al problema de Fagnano i proporciona una trajectòria 3-periòdica en un billar triangular acutangle.

Per triangles rectangles i obtusangles la qüestió de l'existència de trajectòries periòdiques és molt més complicada. Com s'ha comentat abans, la solució del problema de Fagnano és degenerada en aquest cas, d'on es desprén que no hi ha trajectòries 3-periòdiques. Tanmateix, podem plantejar-nos si existeixen altres trajectòries periòdiques. Per triangles rectangles la resposta és positiva (la figura 28 mostra una trajectòria 6-periòdica) però, per sorprenent que sembli, en el cas obtusangle el problema encara està obert: només es coneix l'existència de trajectòries periòdiques per certes classes de triangles obtusangles. Vegeu [16] per informació general sobre la geometria dels billars i, per exemple [7, 9, 4], [13, pag. 440] pel problema de les trajectòries periòdiques i altres qüestions geomètriques interessants relacionades amb billars.

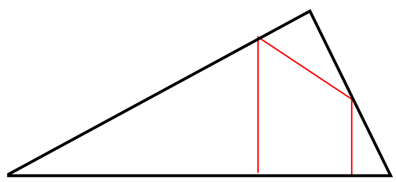

Figura 28

Amb la discussió del problema de Fagnano, on conflueixen els principis de minimització, la geometria elemental i els billars, acabem aquest breu recorregut pels Problemes de Màxims i Mínims, tot senyalant una vegada més la capacitat inesgotable de les Matemàtiques per connectar territoris aparentment independents i posar-hi sentit i perspectiva.

Referències

[1] Batschelet, E. *Matemáticas básicas para biocientíficos.* Springer Verlag. (1975).

[2] Blåsjö, V. *The Isoperimetric Problem.* American Math. Monthly , Vol. 112, 6 (2005), 526-566.

[3] Courant, R., Robins, H. *Qué es la Matemática.* Aguilar. (1979).

[4] De Temple, D., Robertson, J. *A billiard path characterization of regular polygons.* Mathematics Magazine, Vol. 54, 2 (1981), 73-75.

[5] Fagnano, J.F. Acta Erud., (1755; aparegut 1779), 281-303.

[6] Fejes Tóth, L. *What the bees know and what they do not know.* Bull. Amer. Math. Soc. 70 (1964), 468-481.

[7] Gutkin, E. *Two applications of Calculus to triangular billiards.* Vol. 104, 7 (1997), 618-622.

[8] Hales, T. *The honeycomb conjecture.* Discrete Comput. Geom. 25(2001), 1-22.

[9] Heath, T. *A history of greek mathematics.* Dover. (1981).

[10] Hildebrandt, S, Tromba, A. *Matemática y formas óptimas.* Biiblioteca Scientific American. Prensa Científica. (1989).

[11] Huber, M. *Mythematics.* Princeton University Press.(2009).

[12] Nahin, P. J. *When least is best.* Princeton University Press. (2007).

[13] Pickover, C. A. *El Libro de las Matemáticas.* Librero. (2009).

[14] Polya, G. *Mathematics and plausible reasoning.* Princeton University Press. (1954).

[15] Rademacher, H., Toeplitz, O. *The enjoyment of Mathematics.* Princeton University Press. (1994) (Traduït de l'edició alemanya de 1933).

[16] Tabachnikov, S. *Geometry and Billiards.* American mathematical Society. (2005).

[17] Thompson, D. *On growth and form*. Vol. II. Cambridge University Press. (1942).

[18] Varro, M.T. *On Agriculture*. Loeb Classical Library. (1934).

[19] Vorobets, Y. B., Galperin, G.A., Stepin, A.M. *Periodic billiard trajectories in polygons: generating mechanisms*. Russian Math. Surveys 47, 3(1992),5-80.

Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
jgllorente@mat.uab.cat

Publicat el 3 de febrer de 2012