MAT 2
MATerials MATemàtics
Volum 2019, treball no. 1, 35 pp. ISSN: 1887-1097
Publicació electrònica de divulgació del Departament de Matemàtiques
de la Universitat Autònoma de Barcelona
www.mat.uab.cat/matmat

Aplicaciones de las fracciones continuas*

Amparo López Villacampa

Introducción

Partiendo de la expresión de los números irracionales como fracciones simples infinitas, veremos cómo los números reales son aproximables de manera óptima mediante fracciones continuas simples finitas. Explicitemos un poco qué queremos decir con aproximación óptima. Dado un número real α, es natural preguntarse cuál es la fracción $\frac{p}{q}$ con denominador acotado ($\leq s$), para la que el error absoluto

$$\Delta = \left|\alpha - \frac{p}{q}\right|$$

es mínimo. Variantes de esta pregunta han aparecido repetidas veces a lo largo de la historia de las Matemáticas; por ejemplo los griegos que no disponían de escritura posicional para los números, intentaron y consiguieron buenas aproximaciones racionales de π y de $\sqrt{n}$, donde n no es cuadrado perfecto; los problemas del calendario, originados porque el tiempo que tarda la tierra en recorrer su órbita alrededor del sol (año) no es múltiplo del tiempo que emplea en una rotación en torno a su eje

*Este artículo es un extracto, realizado por los editores de la revista, de las notas inacabadas *"Ecuaciones diofánticas y fracciones continuas"* preparadas por A. López (1944–2013).

(día); la construcción de engranajes de ruedas dentadas que giran con distintas velocidades angulares para obtener modelos mecánicos del movimiento planetario (C. Huygens 1629–95). Este último ejemplo pone de manifiesto la importancia de considerar fracciones con denominador acotado, pues en ciertos problemas del mundo real, condiciones económicas y materiales imponen límites al valor del denominador de la fracción aproximante.

Pero la idea de aproximación óptima como aquella que hace mínimo el error absoluto no es la única posible como hace patente la siguiente consideración. Si α es un número real y q un entero positivo, existe un entero p tal que

$$\frac{p}{q} \leq \alpha < \frac{p+1}{q} \implies \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q}$$

es decir cualquier número real α es aproximable mediante una fracción de denominador q con error absoluto $< \frac{1}{q}$ (de hecho $\leq \frac{1}{2\,q}$). Si llamamos error reducido o relativo a

$$\delta = \frac{\Delta}{\frac{1}{q}} = |q\,\alpha - p|,$$

δ es una medida de la razón entre el error absoluto que se produce al aproximar α por una fracción de denominador q y el máximo error posible $\frac{1}{2\,q}$. Por tanto tiene también sentido preguntarse, dado un número real α, cuál es la fracción $\frac{p}{q}$ con denominador acotado ($\leq s$), para la que el error relativo es mínimo.

Consideraremos ambos problemas de aproximación mediante fracciones continuas simples finitas ligadas a la representación del número real como fracción continua simple; su solución como veremos no es coincidente.

En una última sección, aplicaremos estas aproximaciones a los tres problemas del mundo real mencionados anteriormente.

1. Ecuaciones diofánticas lineales y fracciones continuas

Las ecuaciones diofánticas lineales son las ecuaciones del tipo:

$$a\,x + b\,y = c \qquad a, b, c \in \mathbb{Z}.$$

Proposición. *Condición necesaria y suficiente para que exista solución es que c sea múltiplo de $d = \mathrm{mcd}(a,b)$.*

Que la condición es necesaria es evidente. En cuanto a que es suficiente se razona del siguiente modo:

Dividiendo a, b, c por d se obtiene otra ecuación diofántica

$$a_1\, x + b_1\, y = c_1 \quad \text{con } a_1,\ b_1 \text{ primos entre sí}$$

que tiene las mismas soluciones que la primera.

La identidad de Bezout, que se puede obtener a partir del algoritmo de Euclides asegura que existen enteros α, β tales que

$$\alpha\, x + \beta\, y = 1.$$

Por tanto basta multiplicar α y β por c_1 para obtener una solución de la ecuación $a_1\, x + b_1\, y = c_1$.

Método de resolución

Si α_1, β_1 es una solución particular de la ecuación

$$a_1\, x + b_1\, y = c_1 \quad \text{con } a_1,\ b_1 \text{ primos entre sí}$$

su solución general es

$$x = \alpha_1 + \rho\, b_1 \qquad y = \beta_1 - \rho\, a_1 \qquad \rho \in \mathbb{Z}.$$

Vamos a fijarnos ahora en la obtención de la identidad de Bezout.

Sean a, b dos números enteros con b positivo; escribimos los sucesivos pasos del algoritmo de Euclides:

$$\begin{aligned}
a &= c_0\, b + r_0 & \qquad 0 &< r_0 < b \\
b &= c_1\, r_0 + r_1 & 0 &< r_1 < r_0 \\
r_0 &= c_2\, r_1 + r_2 & 0 &< r_2 < r_1 \\
&\ \vdots & &\ \vdots \\
r_{n-2} &= c_n\, r_{n-1} + r_n & 0 &< r_n < r_{n-1} \\
r_{n-1} &= c_{n+1}\, r_n
\end{aligned}$$

Las desigualdades anteriores aseguran que dicho algoritmo es finito. Y es inmediato comprobar que $r_n = \operatorname{mcd}(a, b)$ y que recorriendo las igualdades anteriores de abajo hacia arriba se obtiene r_n, expresado como suma de un múltiplo de a y de un múltiplo de b, es decir la identidad de Bezout para a y b.

Pero esto lo podemos escribir de otra manera:

$$\begin{array}{ll}
\dfrac{a}{b} = c_0 + \dfrac{r_0}{b} = c_0 + \dfrac{1}{\frac{b}{r_0}} & \dfrac{b}{r_0} > 1 \\[2ex]
\dfrac{b}{r_0} = c_1 + \dfrac{r_1}{r_0} = c_1 + \dfrac{1}{\frac{r_0}{r_1}} & \dfrac{r_0}{r_1} > 1 \\[2ex]
\dfrac{r_0}{r_1} = c_2 + \dfrac{r_2}{r_1} = c_2 + \dfrac{1}{\frac{r_1}{r_2}} & \dfrac{r_1}{r_2} > 1 \\
\vdots & \vdots \\
\dfrac{r_{n-2}}{r_{n-1}} = c_n + \dfrac{r_n}{r_{n-1}} = c_n + \dfrac{1}{\frac{r_{n-1}}{r_n}} & \dfrac{r_{n-1}}{r_n} > 1 \\[2ex]
\dfrac{r_{n-1}}{r_n} = c_{n+1} &
\end{array}$$

donde c_i son enteros tales que $c_i \geq 1$, $i = 1, \dots, n$; y $c_{n+1} > 1$.

Estas igualdades se pueden recoger en la fórmula siguiente:

$$\frac{a}{b} = c_0 + \cfrac{1}{c_1 + \cfrac{1}{c_2 + \cfrac{1}{c_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{c_{n+1}}}}}}$$

Una fracción del tipo anterior, en la que c_i son enteros tales que $c_i \geq 1$, $i = 1, \dots, n+1$, se llama una fracción continua simple finita. La notaremos en forma abreviada mediante el símbolo $[c_0; c_1, \dots, c_{n+1}]$.

Acabamos de describir un método para expresar un número racional como fracción continua simple finita, que verifica $c_{n+1} > 1$; y también es evidente que cada fracción continua simple finita define un número racional. A la pregunta, ¿viene dado cada número racional por una única fracción continua simple? responde el siguiente

Teorema. *Si $x = [c_0; c_1, \dots, c_n]$ con $c_n > 1$, entonces las c_i están determinadas por x.*

Si $[c_0; c_1, \dots, c_n] = [d_0; d_1, \dots, d_m]$, con $m \geq n$ se verifica:

$$n = m \quad y \quad d_i = c_i, \;\; i = 0, 1, \dots, n;$$

o bien

$$m = n+1,\ d_i = c_i,\ i = 0,1,\dots,n-1,\ d_n = c_n - 1 \text{ y } d_{n+1} = 1.$$

Demostración. Llamamos $x_i = [c_i; c_{i+1}, \dots, c_n]$, $i = 0,1,\dots,n$. Los números racionales x_i, $i = 1,\dots,n$ son mayores que 1 y por tanto es evidente que

$$x_i = c_i + \frac{1}{x_{i+1}} > c_i \geq 1,\ i = 0,1,\dots,n-1; \quad \text{y} \quad x_n = c_n > 1.$$

Esto implica $c_i \leq x_i < c_i + 1$, $i = 0,1,\dots,n$, es decir $c_i = [x_i]$, $i = 0,1,\dots,n$. Pero entonces los x_i están definidos por recurrencia:

$$x_i = [x_i] + \frac{1}{x_{i+1}} \implies x_{i+1} = \frac{1}{x_i - [x_i]},\ i = 0,\dots,n-1$$

es decir los $c_i = [x_i]$, $i = 0,1,\dots,n$ están determinados por $x = x_0 = [c_0; c_1, \dots, c_n]$.

Es inmediato comprobar que $[d_0; d_1, \dots, d_n, 1] = [d_0; d_1, \dots, d_n + 1]$. Ahora la segunda afirmación del teorema se sigue inmediatamente de lo demostrado. □

En todo lo que sigue llamaremos representación en fracción continua de un número racional γ aquella en que $c_n > 1$.

2. Fracciones continuas finitas

El asignar nombres a las cosas es el primer paso para entenderlas. Por eso empezaré con un poco de nomenclatura. Los números enteros $c_0, c_1, \dots, c_{n+1}$ se llaman los cocientes incompletos de la fracción continua simple finita $[c_0; c_1, \dots, c_{n+1}]$ y las fracciones

$$[c_0] = c_0,\ [c_0; c_1] = c_0 + \frac{1}{c_1},\ [c_0; c_1, c_2] = c_0 + \cfrac{1}{c_1 + \cfrac{1}{c_2}}, \dots, [c_0; c_1, \dots, c_{n+1}]$$

se llaman sus reducidas. Es importante caer en la cuenta de que la fracción reducida $[c_0; c_1, \dots, c_s]$ una vez realizadas las operaciones, es de la forma $\frac{p_s}{q_s}$ donde p_s, q_s son expresiones polinómicas enteras de los cocientes incompletos $c_0, c_1, \dots, c_s$.

Propiedades de las fracciones continuas simples finitas

(1) Se observa que $[c_0; c_1, \ldots, c_s]$ se obtiene a partir de $[c_0; c_1, \ldots, c_{s-1}]$ sustituyendo, en la expresión de esta última, c_{s-1} por $c_{s-1} + \frac{1}{c_s}$, es decir

$$[c_0; c_1, \ldots, c_s] = \left[c_0; c_1, \ldots, c_{s-1} + \frac{1}{c_s}\right]$$

y esto permite encontrar una ley de recurrencia para la obtención de las reducidas.

En efecto, si ponemos $p_{-1} = 1 = q_{-2}$, $q_{-1} = 0 = p_{-2}$ se demuestra por recurrencia:

$$\begin{aligned} p_s &= c_s\, p_{s-1} + p_{s-2} \qquad 0 \leq s \leq n+1 \\ q_s &= c_s\, q_{s-1} + q_{s-2} \qquad 0 \leq s \leq n+1 \end{aligned}$$

ya que para $s = 0$ es evidente que se verifica; y supuesto que se verifica para $r-1$ también lo hace para r pues

$$\begin{aligned} [c_0; c_1, \ldots, c_r] &= \left[c_0; c_1, \ldots, c_{r-1} + \frac{1}{c_r}\right] \\ &= \frac{\left(c_{r-1} + \frac{1}{c_r}\right) p_{r-2}(c_1, \ldots, c_{r-2}) + p_{r-3}(c_1, \ldots, c_{r-3})}{\left(c_{r-1} + \frac{1}{c_r}\right) q_{r-2}(c_1, \ldots, c_{r-2}) + q_{r-3}(c_1, \ldots, c_{r-3})} \\ &= \frac{c_r\,(c_{r-1}\, p_{r-2} + p_{r-3}) + p_{r-2}}{c_r\,(c_{r-1}\, q_{r-2} + q_{r-3}) + q_{r-2}} = \frac{c_r\, p_{r-1} + p_{r-2}}{c_r\, q_{r-1} + q_{r-2}}. \end{aligned}$$

El siguiente esquema es una buena regla mnemotécnica para realizar estos cálculos:

c_s			c_0	c_1	c_2	$\cdots$	c_{n+1}
p_s	0	1	p_0	p_1	p_2	$\cdots$	p_{n+1}
q_s	1	0	q_0	q_1	q_2	$\cdots$	q_{n+1}

Como de un manantial brotan de **(1)** las siguientes propiedades:

(2) Se verifica:

$$1 = q_0 \leq q_1 < q_2 < \cdots < q_{n+1}.$$

Si $c_0 > 0$

$$c_0 = p_0 < p_1 < p_2 < \cdots < p_{n+1}.$$

En efecto, dado que $c_i \geq 1$, $i = 1, \ldots, n+1$; se verifica:

$$q_s = c_s\, q_{s-1} + q_{s-2} \geq q_{s-1} + q_{s-2} > q_{s-1} \quad \text{si} \quad q_{s-2} > 0.$$

Y a partir de aquí y puesto que $q_{-1} = 0$ y $q_0 = 1$, las desigualdades para las q_i se obtienen por inducción.

De la misma manera se obtienen las desigualdades para las p_i, dado que $c_0 \geq 0$.

(3) Si llamamos $h_s = p_s\, q_{s-1} - p_{s-1}\, q_s$, $s = 0, \ldots, n+1$ se verifica: $h_s = (-1)^{s+1}$. En particular q_s y p_s son primos entre sí.

En efecto, el cálculo directo asegura que $h_0 = -1$. Y entonces:

$$h_s = (c_s\, p_{s-1} + p_{s-2})\, q_{s-1} - p_{s-1}\, (c_s\, q_{s-1} + q_{s-2}) = (-1)\, h_{s-1} = (-1)^{s+1}$$

por inducción.

(4) Se verifica:

$$[c_0; c_1, \ldots, c_s] - [c_0; c_1, \ldots, c_{s-1}] = \frac{(-1)^{s+1}}{q_s\, q_{s-1}}.$$

Es consecuencia inmediata de **(3)**; pero es importante observar que entonces **(2)** asegura que el valor absoluto de la diferencia entre las dos reducidas consecutivas $[c_0; c_1, \ldots, c_s]$ y $[c_0; c_1, \ldots, c_{s-1}]$ va disminuyendo conforme aumenta s.

(5) Se verifica:

$$[c_0; c_1, c_2, \ldots, c_s] - [c_0; c_1, \ldots, c_{s-2}] = \frac{(-1)^s\, (q_s - q_{s-2})}{q_{s-1}\, q_s\, q_{s-2}} = \frac{(-1)^s\, c_s}{q_s\, q_{s-2}}$$

y en consecuencia

$$[c_0] < [c_0; c_1, c_2] < \cdots < [c_0; c_1, \ldots, c_{n+1}] < \cdots < [c_0; c_1, c_2, c_3] < [c_0; c_1].$$

En efecto, por **(4)**

$$[c_0; c_1, \ldots, c_s] - [c_0; c_1, \ldots, c_{s-2}] = \frac{(-1)^s (q_s - q_{s-2})}{q_{s-1}\, q_s\, q_{s-2}}$$

y dado que $q_s > q_{s-2}$, el signo de esta diferencia coincide con el de $(-1)^s$.

(6) Si $s > 1$ se verifica:

$$\frac{q_s}{q_{s-1}} = [c_s, c_{s-1}, \ldots, c_1].$$

Si además $c_0 > 0$ también se verifica:

$$\frac{p_s}{p_{s-1}} = [c_s, c_{s-1}, \ldots, c_0].$$

La demostración se hace por recurrencia sobre s. Si $s = 1$ se verifica, pues

$$\frac{q_1}{q_0} = c_1 = [c_1], \qquad \frac{p_1}{p_0} = \frac{c_1\,p_0 + 1}{p_0} = c_1 + \frac{1}{c_0}[c_1, c_0].$$

Supuesto que se verifica para h, vamos a ver que se verifica para $h+1$. En efecto:

$$\begin{aligned}
\frac{q_{h+1}}{q_h} &= \frac{c_{h+1}\,q_h + q_{h-1}}{q_h} = c_{h+1} + \frac{1}{\frac{q_h}{q_{h-1}}} = [c_{h+1}; c_h, \ldots, c_1] \\
\frac{p_{h+1}}{p_h} &= \frac{c_{h+1}\,p_h + p_{h-1}}{p_h} = c_{h+1} + \frac{1}{\frac{p_h}{p_{h-1}}} = [c_{h+1}; c_h, \ldots, c_1, c_0].
\end{aligned}$$

(7) Si $s \geq 1$:

$$\frac{[c_0, c_1, \ldots, c_n]}{[c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}]} = \frac{[c_n, c_{n-1}, \ldots, c_0]}{[c_n, c_{n-1}, \ldots, c_1]}.$$

Por **(6)**

$$\frac{[c_n, c_{n-1}, \ldots, c_0]}{[c_n, c_{n-1}, \ldots, c_1]} = \frac{\frac{p_n}{p_{n-1}}}{\frac{q_n}{q_{n-1}}} = \frac{p_n\,q_{n-1}}{p_{n-1}\,q_n}$$

y

$$\frac{[c_0, c_1, \ldots, c_n]}{[c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}]} = \frac{\frac{p_n}{q_n}}{\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}} = \frac{p_n\,q_{n-1}}{q_n\,p_{n-1}}.$$

La importancia de las propiedades anteriores se pondrá de manifiesto al tratar la aproximación de los números irracionales por fracciones continuas. Ahora nos interesa ver:

Aplicación de las fracciones continuas al cálculo de la identidad de Bezout

Particularizando **(3)** al caso $s = n+1$ se obtiene $h_{n+1} = p_{n+1}\,q_n - p_n\,q_{n+1} = (-1)^{n+2}$, lo que asegura que p_{n+1} y q_{n+1} son primos entre sí. Pero $[c_0; c_1, \ldots, c_{n+1}] = \frac{a}{b} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ lo que permite afirmar que si $r_n = \mathrm{mcd}(a,b)$, entonces $a = r_n\,p_{n+1}$ y $b = r_n\,q_{n+1}$; y por tanto $q_n\,a - p_n\,b = (-1)^n\,r_n$ es la identidad de Bezout para a y b.

Los siguientes esquemas pueden ayudar a recordar el método descrito:

	c_0	c_1	$\cdots$	c_{n-1}	c_n	c_{n+1}
a	b	r_0	$\cdots$	r_{n-2}	r_{n-1}	r_n
r_0	r_1	r_2	$\cdots$	r_n	0	

c_s			c_0	c_1	$\cdots$	c_{n-1}	c_n	c_{n+1}
p_s	0	1	p_0	p_1	$\cdots$	p_{n+1}	p_n	p_{n+1}
q_s	1	0	q_0	q_1	$\cdots$	q_{n-1}	q_n	q_{n+1}

donde $\operatorname{mcd}(a,b) = r_n$ y la identidad de Bezout de a, b es $q_n\, a - p_n\, b = (-1)^n\, r_n$.

Lo anterior se puede aplicar a la resolución de ecuaciones lineales en congruencias; pues resolver $a\, x \equiv b \pmod{n}$, es equivalente a hallar la solución de la ecuación diofántica $a\, x + n\, y = b$.

3. Los números irracionales como fracciones continuas simples infinitas

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $[\alpha]$ su parte entera, es decir el máximo entero menor o igual que α. Definimos: $\alpha_0 = \alpha$, $\alpha_{i+1} = \frac{1}{\alpha_i - [\alpha_1]}$, $i \geq 0$. Si escribimos $c_i = [\alpha_i]$, $i \geq 0$, y consideramos fracciones continuas finitas pero con términos reales (con lo que pierden el calificativo de simples), $[\alpha_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}]$, $\alpha_i \geq 1$ si $i > 0$, se verifica:

a) $\alpha_i = c_i + \frac{1}{\alpha_{i+1}}$, donde $c_i \geq 1$ si $i > 0$.

b) $\alpha = [c_0; c_1, \ldots, c_n, \alpha_{n+1}] = \frac{\alpha_{n+1}\, p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1}\, q_n + q_{n-1}}$ para todo $n \geq 0$. En esta fórmula $\frac{p_i}{q_i} = [c_0; c_1, \ldots, c_i]$.

α_{n+1} se llama el $(n+1)$ cociente completo de α.

En efecto, a) es evidente y b) se demuestra fácilmente por inducción, pues

$$[c_0; c_1, \ldots, c_n, \alpha_{n+1}] = \left[c_0; c_1, \ldots, c_n, c_{n+1} + \frac{1}{\alpha_{n+2}}\right] = [c_0; c_1, \ldots, c_{n+1}, \alpha_{n+2}].$$

Aplicando las propiedades de las fracciones continuas simples finitas, a cada una de las fracciones $[c_0; c_1, \ldots, c_n]$ se obtiene:

$$[c_0] < [c_0; c_1, c_2] < \cdots < \alpha < \cdots < [c_0; c_1, c_2, c_3] < [c_0; c_1].$$

Además la diferencia $[c_0; c_1, \ldots, c_n] - [c_0; c_1, \ldots, c_{n+1}]$, tomando n suficientemente grande, se hace en módulo tan pequeña como se quiera. (Recuérdense las propiedades **(4)** y **(2)** de las fracciones continuas simples finitas).

Esto se traduce en la afirmación: Se tiene el par de sucesiones monótonas convergentes al número real α:

$$[c_0] < [c_0; c_1, c_2] < [c_0; c_1, c_2, c_3, c_4] < \cdots$$
$$[c_0; c_1] > [c_0; c_1, c_2, c_3] > \cdots$$

Dicha afirmación se suele expresar en forma condensada, diciendo que el número real α viene dado por la fracción continua simple infinita $[c_0; c_1, c_2, \ldots]$. La fracción continua simple finita $[c_0; c_1, c_2, \ldots, c_n] = \frac{p_n}{q_n}$ se llama la n-ésima fracción reducida del número α; y de este modo hemos demostrado que α se puede aproximar por sus fracciones reducidas. Por eso dichas fracciones reducidas se llaman también sus fracciones convergentes.

Recíprocamente, se define una fracción continua simple infinita $[c_0; c_1, c_2, c_3, \ldots]$, donde c_i son números enteros tales que $c_i \geq 1$ si $i > 0$, como el número real α dado por la fórmula:

$$[c_0; c_1, c_2, c_3, \ldots] = \alpha = \lim_{n\to\infty} [c_0; c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n] = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n}.$$

La seguridad de que un tal límite existe nos la dan las propiedades **(2)** y **(4)** de las fracciones continuas simples finitas, las cuales también garantizan que

$$[c_0] < [c_0; c_1, c_2] < [c_0; c_1, c_2, c_3, c_4] < \cdots < \alpha < \cdots < [c_0; c_1, c_2, c_3] < [c_0; c_1].$$

Pero además este límite es irracional. Veámoslo.

Sea $\alpha = [c_0; c_1, c_2, c_3, \ldots]$ una fracción continua infinita y sea $[c_0; c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n] = \frac{p_n}{q_n}$ su n-ésima reducida. De nuevo las propiedades **(2)** y **(4)** de las fracciones continuas simples finitas aseguran:

$$0 < \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{q_n\, q_{n+1}} < \frac{1}{{q_n}^2}.$$

En esta situación, si ε es un número real positivo cualquiera, existe un natural r tal que $q_r > \frac{1}{\varepsilon}$ pues la sucesión de las q_n es creciente. Pero entonces:

$$0 < |q_r\, \alpha - p_r| < \frac{1}{q_r} < \varepsilon$$

es decir para cada real positivo ε existen pares de números enteros x, y tales que $0 < |x\,\alpha - y| < \varepsilon$, situación que es imposible si α es racional (si $\alpha = \frac{a}{b}$ donde $b > 0$, y tomamos $\varepsilon < \frac{1}{b}$ es evidente que no existe ningún par de enteros x, y que verifiquen $0 < \left|x\,\frac{a}{b} - y\right| < \varepsilon$).

En lo anterior hemos visto que cada número irracional admite una expresión como fracción continua simple infinita y recíprocamente que cada una de tales fracciones es un número irracional. El teorema siguiente demuestra que cada número irracional admite una única expresión como fracción continua simple infinita, con lo que estas constituyen un buen conjunto de etiquetas de los números irracionales.

Teorema. *Si* $[c_0; c_1, c_2, c_3, \dots] = [b_0; b_1, b_2, b_3, \dots]$ *se verifica:* $c_i = b_i$, $\forall i \geq 0$.

Demostración. Es consecuencia inmediata del lema: Si $\alpha_i = [c_i; c_{i+1}, c_{i+2}, c_{i+3}, \dots]$ se verifica:

1) $$\alpha_i = c_i + \frac{1}{\alpha_{i+1}}, \qquad \forall i \geq 0$$

2) $$c_i = [\alpha_i], \qquad \forall i \geq 0$$

el cual se justifica de este modo:

$$\alpha_i = \lim_{n\to\infty} [c_i; c_{i+1}, \dots, c_n] = \lim_{n\to\infty} \left(c_i + \frac{1}{[c_{i+1}; \dots, c_n]} \right) = c_i + \frac{1}{\alpha_{i+1}}$$

lo que demuestra 1).

2) se sigue de 1) pues $\alpha_{i+1} > 1$ ya que $c_{i+1} > 0$ si $i \geq 0$. En particular el lema afirma que los enteros c_i están determinados por α. □

Hemos descrito cómo desarrollar un número real en fracción continua simple, pero al lector atento no le habrá pasado desapercibido que el método descrito es meramente teórico, pues dado un número ¿cómo manipularlo? ya que en general no operamos con aproximaciones decimales de los mismos; y en tal situación ¿cuándo se puede asegurar que las fracciones reducidas, hasta un determinado lugar, de un número real coinciden con las de una determinada aproximación decimal del mismo? La respuesta nos la da la siguiente

Proposición. *Sean* $\beta < \alpha < \gamma \in \mathbb{R}$. *Sean* $\beta = [b_0; b_1, b_2, \dots]$, $\alpha = [\alpha_0; \alpha_1, \alpha_2, \dots]$ *y* $\gamma = [c_0; c_1, c_2, \dots]$ *sus respectivos desarrollos en fracción continua. Si* $b_i = c_i$, $i = 0, 1, \dots, n$ *entonces* $a_i = b_i = c_i$, $i = 0, 1, \dots, n$.

Demostración. Recordemos que se tienen las relaciones $a_i = [\alpha_i]$ y $\alpha_{i+1} = \frac{1}{\alpha_i - a_i}$ y las equivalentes para β y para γ.

Comprobaremos por recurrencia sobre $i = 0, 1, \dots, n$ que se verifica lo anterior así como que $(-1)^i \beta_i < (-1)^i \alpha_i < (-1)^i \gamma_i$.

Se verifica para $i = 0$ pues las hipótesis aseguran:

$$b_0 = [\beta] \leq a_0 = [\alpha] \leq c_0 = [\gamma] \implies a_0 = b_0 = c_0.$$

Supuesto que se verifica para $i = r < n$, veamos que se verifica para $i = r + 1$.

$$\left.\begin{array}{r} (-1)^r\beta_r < (-1)^r\alpha_r < (-1)^r\gamma_r \\ b_r = a_r = c_r \end{array}\right\}$$
$$\Longrightarrow\ (-1)^{r+1}\beta_{r+1} < (-1)^{r+1}\alpha_{r+1} < (-1)^{r+1}\gamma_{r+1}$$
$$\Longrightarrow\ b_{r+1} = a_{r+1} = c_{r+1} \text{ ya que } b_{r+1} = c_{r+1} \text{ por hipótesis.}$$

□

Unos ejemplos nos ayudarán a encarnar lo anterior.

(1) Primeras reducidas de π. La aproximación decimal de π con 10 cifras decimales exactas es 3'1415926535, con lo que 3'1415926535 $< \pi <$ 3'1415926536. Aplicamos el algoritmo de Euclides para calcular $\text{mcd}(31\,415\,926\,535, 10^{10})$ y $\text{mcd}(31\,415\,926\,536, 10^{10})$. Los primeros pasos de dicho algoritmo son:

	3	7	15	1	292	1
31 415 926 535	10^{10}	1 415 926 535	88 514 255	88 212 710	301 545	161 570
1 415 926 535	88 514 255	88 212 710	301 545	161 570	139 975	

	3	7	15	1	292	1
31 415 926 536	10^{10}	1 415 926 536	88 514 248	88 212 816	301 432	194 672
1 415 926 536	88 514 248	88 212 816	301 432	194 672	106 760	

lo que en ambos casos nos da como primeros cocientes 3, 7, 15, 1, 292, 1. Esto permite asegurar que $\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1 \ldots]$. Si ahora aplicamos nuestro cuadro-regla mnemotécnica para la obtención de reducidas, obtenemos:

c_s			3	7	15	1	292	1
p_s	0	1	3	22	333	355	103 993	104 348
q_s	1	0	1	7	106	113	33 102	33 215

es decir las primeras reducidas de π son

$$\frac{p_0}{q_0} = 3,\ \frac{p_1}{q_1} = \frac{22}{7},\ \frac{p_2}{q_2} = \frac{333}{106},\ \frac{p_3}{q_3} = \frac{355}{113},\ \frac{p_4}{q_4} = \frac{103\,993}{33\,102},\ \frac{p_5}{q_5} = \frac{104\,348}{33\,215}.$$

Por la teoría expuesta sabemos que se verifica:

$$3 < \frac{333}{106} < \frac{103\,993}{33\,102} < \cdots < \pi < \cdots < \frac{104\,348}{33\,215} < \frac{355}{113} < \frac{22}{7}.$$

(2) Desarrollo en función continua simple del número áureo. Sea $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Es inmediato ver que la parte entera de α es 1. De aquí:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \alpha = 1 + \frac{1}{\alpha_1} \implies \alpha_1 = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Por tanto:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = [1; 1, 1, \dots],$$

donde 1 se repite indefinidamente.

(3) Sea $\boldsymbol{\alpha = \sqrt{n^2+1}}$ donde $\boldsymbol{n > 0}$ es un natural. Puesto que $n^2+1 < n^2 + 2\,n + 1$, la parte entera de α es n. De aquí:

$$\sqrt{n^2+1} = n + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{n^2+1} - n}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+1} - n} = \sqrt{n^2+1} + n = 2\,n + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{n^2+1} - n}}$$

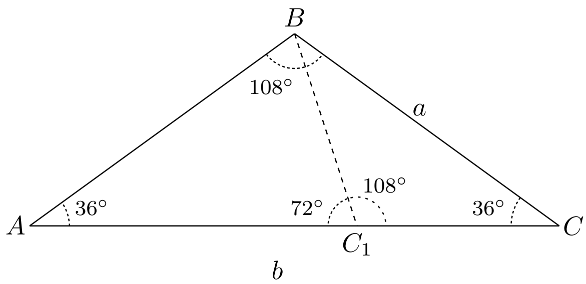
lo que demuestra que el desarrollo en fracción continua simple de $\sqrt{n^2+1}$ es $[n; 2\,n, 2\,n, \dots)$ donde $2\,n$ se repite indefinidamente.

(4) En los ejemplos anteriores hemos calculado el desarrollo en fracción continua simple infinita de algunos irracionales jugando aritméticamente, es decir usando únicamente las reglas de las operaciones elementales; pero los dos siguientes nos permitirán vislumbrar cómo se pueden usar construcciones geométricas para desarrollar en fracción continua simple ciertas razones entre magnitudes (incluso sin conocer a priori su valor).

Consideremos el triángulo isósceles ABC, cuyo ángulo en B es de 108°[1]. Cada uno de sus ángulos iguales vale 36°; su base $b = AC$ es mayor que cada uno de los lados iguales $a = c$ y es menor que $2\,a$. Consideramos el triángulo ABC_1 tal que C_1 está en el segmento AC y $AC_1 = a$. Se tiene:

$$\frac{b}{a} = \frac{AC_1 + C_1C}{a} = 1 + \frac{C_1C}{AC_1} = 1 + \frac{1}{\frac{AC_1}{C_1C}}.$$

[1] N.E.: Nótese que este triángulo es el que forman dos lados consecutivos del pentágono regular i la diagonal correspondiente.



Pero los triángulos ABC y BC_1C son semejantes como muestra el siguiente razonamiento: el triángulo ABC_1 es isósceles y cada uno de sus ángulos iguales vale $\frac{180°-36°}{2} = 72°$; por tanto $\widehat{BC_1C} = 180° - 72° = 108°$ y $\widehat{CBC_1} = 108° - 72° = 36°$.

La semejanza de dichos triángulos permite afirmar:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{BC}{C_1C} = \frac{AC_1}{C_1C}$$

lo que demuestra que $\frac{b}{a} = 1 + \frac{1}{\frac{b}{a}}$ y por tanto

$$\frac{b}{a} = [1; 1, 1, \dots] \quad \text{donde 1 se repite indefinidamente.}$$

En particular, de lo anterior y del ejemplo **(2)** se sigue que la razón entre la base b y el lado a del triángulo ABC es la razón aúrea $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

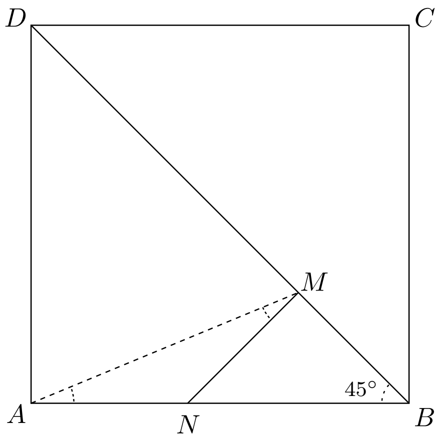
(5) Se cree que ya los pitagóricos conocieron la irracionalidad de $\sqrt{2}$, es decir de la razón entre la diagonal y el lado de un cuadrado (desde luego dicha razón no depende del particular cuadrado que se tome, como se demuestra aplicando los criterios de semejanza de triángulos); e incluso se cuenta que dicho conocimiento decidieron mantenerlo secreto (echaba por tierra su filosofía según la cual el mundo se explicaba por los números —los que hoy llamamos naturales— y las razones entre números) hasta el extremo de que la revelación de dicho secreto costó la vida al pitagórico Hipaso que la hizo. En cualquier caso, la irracionalidad de $\sqrt{2}$ era conocida en época de Platón (428–347 a.C.) pues aparece recogida en su diálogo.

Posiblemente los griegos conocían una demostración geométrica de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ que sigue muy de cerca el razonamiento mediante el que obtendremos el desarrollo en fracción continua simple de la razón $\frac{d}{l}$ entre diagonal y lado de un cuadrado.

En el cuadrado $ABCD$, consideremos sobre su diagonal DB el punto M tal que $DA = DM$; trazamos por M la perpendicular a dicha diagonal y sea N el punto de corte de la mencionada perpendicular con el lado AB.

El triángulo ADM es isósceles por construcción, lo que implica que los ángulos $\widehat{MAN}$ y $\widehat{AMN}$ son iguales y por tanto el triángulo AMN es isósceles con lados iguales $AN = NM$. Por otra parte el triángulo rectángulo NMB es isósceles pues $\widehat{MBA} = 45°$ y así $MN = MB$. Esto permite asegurar que NB y MB son respectivamente la diagonal y el lado de un cuadrado. En estas condiciones:

$$\frac{d}{l} = \frac{DB}{AB} = \frac{DM + MB}{AB} = 1 + \frac{MB}{AB} \implies \frac{d}{l} - 1 = \frac{1}{\frac{AB}{MB}}.$$



Llamemos $x = \frac{d}{l} - 1$; los razonamientos geométricos previos permiten afirmar:

$$\frac{1}{x} = \frac{AB}{MB} = \frac{AN + NB}{MB} = 1 + \frac{NB}{MB} = 1 + \frac{d}{l} = 2 + x \implies x = \frac{1}{2 + x}$$

lo que demuestra que $x = [0; 2, 2, \ldots]$ y por tanto $\frac{d}{l} = [1; 2, 2, \ldots]$, donde 2 se repite indefinidamente.

Lo dicho aquí nos permite entender cómo los griegos, que no disponían de la cifra 0 (la cifra 0 es de origen indo-arábigo y a Europa llegó sólo en la Edad Media y a través de los árabes) y por tanto tampoco de escritura numérica posicional con lo que desconocían nuestras expresiones decimales, pudieron hallar valores aproximados de ciertos irracionales cuadráticos (que para ellos no eran números sino magnitudes, es decir algo generado en el terreno de la geometría y que por tanto manipulaban geométricamente).

4. Aproximación de números reales por racionales de denominador acotado

En esta sección estudiaremos el doble problema de aproximación óptima de números reales enunciado en la introducción.

A nivel terminológico, se recuerda al lector que como expresión en fracción continua simple de un número racional se toma siempre una fracción continua simple finita $[c_0; c_1, \ldots, c_n]$ con $c_n > 1$. Así mismo, para toda fracción $\frac{p}{q}$, supondremos $q > 0$, lo cual es desde luego no restrictivo.

Teorema (Teorema de Lagrange)**.** *Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\frac{p_n}{q_n}$ su n-ésima fracción reducida. Si $p, q \in \mathbb{Z}$ y $1 \leq q < q_{n+1}$ se verifica:*

$$|q_n\, \alpha - p_n| \leq |q\, \alpha - p|.$$

La igualdad se verifica si y sólo si, o bien $p = p_n$ y $q = q_n$ o bien $\alpha = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$, $p = p_{n+1} - p_n$ y $q = q_{n+1} - q_n$.

En particular si α es irracional, la igualdad sólo se verifica si $p = p_n$ y $q = q_n$.

Demostración. Consideremos el sistema lineal:

$$\left.\begin{aligned} p_n\, x + p_{n+1}\, y &= p \\ q_n\, x + q_{n+1}\, y &= q \end{aligned}\right\}. \tag{$*$}$$

Sumando la primera ecuación multiplicada por $-q_{n+1}$ y la segunda multiplicada por p_{n+1}; y sumando la primera ecuación multiplicada por q_n y la segunda multiplicada por $-p_n$ se obtiene el sistema, de variables separadas, equivalente:

$$\left.\begin{aligned} (p_{n+1}\, q_n - p_n\, q_{n+1})\, x &= q\, p_{n+1} - p\, q_{n+1} \\ (p_{n+1}\, q_n - p_n\, q_{n+1})\, y &= p\, q_n - q\, p_n \end{aligned}\right\}.$$

Dado que por la propiedad **(3)** de las fracciones reducidas se verifica: $p_{n+1}\, q_n - p_n\, q_{n+1} = (-1)^{n+2}$, el sistema anterior tiene solución entera única:

$$x_0 = (-1)^n (q\, p_{n+1} - p\, q_{n+1}), \quad y_0 = (-1)^n (p\, q_n - q\, p_n).$$

Las hipótesis del enunciado, imponen restricciones a x_0, y_0:

a) $x_0 \neq 0$, pues $x_0 = 0 \implies p_{n+1}\, q = p\, q_{n+1} \implies q_{n+1} \mid q$ en contra de la hipótesis, que afirma que $q < q_{n+1}$.

b) Si $y_0 = 0$, entonces $p_n\, q = p\, q_n \implies q = \lambda\, q_n$ y $p = \lambda\, p_n$, $\lambda \in \mathbb{N}$ ya que q_n y p_n son primos entre sí. De aquí $|q\,\alpha - p| = \lambda\, |q_n\,\alpha - p_n| \geq |q_n\,\alpha - p_n|$ y la igualdad sólo se verifica si $\lambda = 1$ es decir si $p = p_n$ y $q = q_n$.

c) Si $y_0 \neq 0$, x_0, y_0 tienen signo opuesto pues $q_n\, x_0 = q - q_{n+1}\, y_0$ y $1 \leq q < q_{n+1}$.

Ahora estamos en condiciones de demostrar el teorema, en el caso $y_0 \neq 0$. Las reducidas $\frac{p_n}{q_n}$ y $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ aproximan al número α una por exceso y otra por defecto; por tanto $\alpha\, q_n - p_n$ y $\alpha\, q_{n+1} - p_{n+1}$ tienen signo opuesto; y consecuencia $x_0\,(\alpha\, q_n - p_n)$ e $y_0\,(\alpha\, q_{n+1} - p_{n+1})$ tienen el mismo signo, con lo que el valor absoluto de su suma es la suma de sus valores absolutos:

$$\begin{aligned} |q\,\alpha - p| &= |x_0\,(q_n\,\alpha - p_n) + y_0\,(q_{n+1}\,\alpha - p_{n+1})| \\ &= |x_0|\,|q_n\,\alpha - p_n| + |y_0|\,|q_{n+1}\,\alpha - p_{N+1}| \\ &\geq |q_n\,\alpha - p_n| \text{ pues } |x_0|,\ |y_0| \geq 1. \end{aligned}$$

En la expresión anterior la igualdad se verifica si y sólo si $|q_{n+1}\,\alpha - p_{n+1}| = 0$ y $|x_0| = 1$; la primera de las condiciones nos dice: $\alpha = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$; en cuanto a la segunda es equivalente a $x_0 = \pm 1$.

Pero $x_0 = 1$ implica $y_0 < 0$ y entonces entrando dichos valores en la segunda ecuación del sistema $(*)$ se obtiene: $q = q_n + q_{n+1}\, y_0 \leq 0$ (propiedad **(2)** de las fracciones continuas finitas) lo que lleva a contradicción.

Por tanto $x_0 = -1$ lo que implica $y_0 > 0$, y de aquí entrando dichos valores en la segunda ecuación del sistema $(*)$ se obtiene: $q = -q_n + q_{n+1}\, y_0 \geq q_{n+1}$ si $y_0 > 1$. De aquí la hipótesis hecha permite asegurar que $y_0 = 1$.

En resumen, $|x_0| = 1$ se verifica si y sólo si $x_0 = -1$ e $y_0 = 1$, lo que es equivalente, entrando dichos valores en el sistema $(*)$ a

$$p = p_{n+1} - p_n, \quad q = q_{n+1} - q_n.$$

Si α es irracional y $0 < s \in \mathbb{Z}$, existe un natural n tal que $q_n \leq s < q_{n+1}$ pues la sucesión de denominadores de las fracciones reducidas de α es creciente. □

Tras este resultado que aplicaremos en repetidas ocasiones, el teorema de Lagrange resuelve el problema de aproximación óptima, en el sentido de error relativo mínimo, según enuncia el siguiente corolario evidente.

Corolario 1. *Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $0 < s \in \mathbb{Z}$ ($s < q_m$ si $\alpha = \frac{p_m}{q_m}$). Entre todas las fracciones de denominador $\leq s$, la que da error relativo mínimo es la reducida $\frac{p_n}{q_n}$ tal que $q_n \leq s < q_{n+1}$. (En el caso $\alpha = \frac{p_m}{q_m}$ la fracción $\frac{p_m - p_{m-1}}{q_m - q_{m-1}}$ da el mismo error relativo que la reducida $\frac{p_{m-1}}{q_{m-1}}$, pero se verifica: $q_m - q_{m-1} =$*

$(c_m - 1)\, q_{m-1} + q_{m-2} \geq q_{m-1}$ pues la representación en fracción continua simple elegida para los racionales asegura $c_m > 1$).

Corolario 2 (Caracterización de las fracciones reducidas de un número real)**.** *Sea $\alpha \neq [c_0; 2]$ un número real. $\frac{p}{q}$ es una fracción reducida de α si y sólo si para toda fracción distinta, $\frac{r}{s}$ con $s \leq q$ el error relativo $|q\,\alpha - p|$ es menor que el error relativo $|s\,\alpha - r|$.*

Demostración. Si $\frac{p}{q} = \frac{p_n}{q_n}$ es una reducida de α, el teorema de Lagrange asegura de manera casi inmediata que verifica la condición. En efecto basta ver que si $\alpha = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$, se verifica $q_{n+1} - q_n > q_n$, con lo que se excluye el caso en que hay igualdad de errores relativos. Y dicha verificación es fruto del razonamiento siguiente. La representación en fracción continua simple elegida para los racionales asegura $c_{n+1} > 1$; de aquí se deduce que $q_{n+1} - q_n = (c_{n+1} - 1)\, q_n + q_{n+1} \geq q_n$ y la igualdad sólo puede darse si $q_{n-1} = 0$ y $c_{n+1} = 2$; pero $q_{n-1} = 0 \implies n = 0$ con lo que $\alpha = \frac{p_1}{q_1} = [c_0; 2]$, situación que excluye el enunciado del corolario. Desde luego el caso excluido no es muy interesante.

Recíprocamente sea $\frac{p}{q}$ una fracción que verifica la condición. Si α es irracional, hemos visto que existe un natural n tal que $q_n \leq q < q_{n+1}$; si $\alpha = \frac{p_m}{q_m}$ se verifica: $q < q_m$ pues si $q \geq q_m$ al cumplir $\frac{p}{q}$ la condición, se llegaría a la contradicción:

$$|q\,\alpha - p| < |q_m\,\alpha - p_m| = 0.$$

De esta manera, cualquiera que sea $\alpha \in \mathbb{R}$, existe un natural n tal que $q_n \leq q < q_{n+1}$. Pero entonces el teorema de Lagrange asegura $|q_n\,\alpha - p_n| \leq |q\,\alpha - p|$ y por tanto la fracción $\frac{p}{q}$ verifica la condición sólo si $\frac{p}{q} = \frac{p_n}{q_n}$. □

Observación. El lector caerá en la cuenta de que este corolario da un criterio, desde luego no muy práctico, que permite decidir cuando una fracción es una reducida de un número real. El siguiente teorema consecuencia del de Lagrange, da una condición suficiente pero no necesaria para que una fracción sea una reducida de un número real.

Teorema (Teorema de Legendre)**.** *Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, con $1 \leq q$. Si se verifica $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2\,q^2}$, entonces $\frac{p}{q}$ es una fracción reducida de α.*

Demostración. Si α es irracional, tal como hemos visto, existe un natural n, tal que $q_n \leq q < q_{n+1}$. Si $\alpha = \frac{p_m}{q_m}$, vamos a ver que o bien $\frac{p}{q} = \frac{p_m}{q_m}$, en cuyo caso la fracción $\frac{p}{q}$ es una reducida; o bien $q < q_m$ y que por tanto existe un natural n, tal que $q_n \leq q < q_{n+1}$. En efecto, $\frac{p}{q} \neq \frac{p_m}{q_m} \implies |q\,p_m - p\,q_m| \geq 1$, de lo que se deduce:

$$\frac{1}{2\,q^2} > \left|\frac{p_m}{q_m} - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{q\,q_m} \implies \frac{1}{2\,q} > \frac{1}{q_m} \implies q < \frac{q_m}{2}.$$

Ahora podemos aplicar el teorema de Lagrange a la reducida de denominador q_n tal que $q_n \leq q < q_{n+1}$ y obtener:

$$|q_n\,\alpha - p_n| \leq q\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2\,q}.$$

Si demostramos que la suposición $\frac{p}{q} \neq \frac{p_n}{q_n}$ lleva a contradicción, quedará demostrado el teorema. Y en efecto, $\frac{p}{q} \neq \frac{p_n}{q_n} \implies |q\,p_n - p\,q_n| \geq 1$; de donde:

$$\frac{1}{q\,q_n} \leq \left|\frac{p_n}{q_n} - \frac{p}{q}\right| \leq \left|\frac{p_n}{q_n} - \alpha\right| + \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2\,q\,q_n} + \frac{1}{2\,q^2} = \frac{q + q_n}{2\,q^2\,q_n}$$

lo que da, en contra de ser $q_n \leq q$:

$$1 < \frac{q + q_n}{2\,q} \iff 2\,q < q + q_n \iff q < q_n.$$

□

Observación. El recíproco de este teorema no es cierto, como pone de manifiesto el siguiente contraejemplo. Sea $\alpha = \frac{61}{27}$, cuya expresión en fracción continua es —compruébelo el lector— $[2; 3, 1, 6]$, con lo que sus fracciones reducidas son

$$2 < \frac{9}{4} < \frac{61}{27} < \frac{7}{3}.$$

Tomando la reducida $\frac{7}{3}$, se tiene:

$$\left|\frac{61}{27} - \frac{7}{3}\right| = \frac{2}{27} > \frac{1}{2 \times 3^2}$$

lo que demuestra que dicha reducida no verifica la condición del teorema de Legendre si bien:

$$\left|\frac{61}{27} - \frac{7}{3}\right| < \frac{1}{3^2}.$$

de acuerdo con la propiedad ya vista de las fracciones reducidas,

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}.$$

Acabaremos con algunos comentarios sobre el problema de aproximación óptima en el sentido de la que da error absoluto mínimo. Resolverlo exige afinar la aproximación de un real dada por sus fracciones reducidas, mediante la introducción de ciertas fracciones continuas simples intercaladas entre cada par de reducidas $\frac{p_n}{q_n}$ y $\frac{p_{n+2}}{q_{n+2}}$, es decir entre dos reducidas consecutivas entre las que aproximan por defecto (n par) o entre las que aproximan por exceso (n impar).

Antes de definir esas nuevas fracciones simples una advertencia al lector: para unificar la notación, si $\alpha \in \mathbb{R}$, escribiremos $\alpha = [c_0; c_1, \dots, c_m]$, entendiendo que $m = \infty$ si α es irracional. Exigiremos además que $2 \leq m \leq \infty$; con lo que excluimos los racionales del tipo $[c_0; c_1] = c_0 + \frac{1}{c_1}$, para los que desde luego no hay ningún problema de aproximación.

Definición. Sea $\alpha = [c_0; c_1, \dots, c_m]$ y $\frac{p_n}{q_n} = [c_0; c_1, \dots, c_n]$ su n-ésima reducida. Para cada $m > n \geq 1$, llamaremos fracciones reducidas intercalares de α a las fracciones:

$$\frac{p_{n-1} + i\, p_n}{q_{n-1} + i\, q_n} = [c_0; c_1, \dots, c_n, i], \quad i = 1, \dots, c_{n+1} - 1.$$

Se puede demostrar que la mejor aproximación en valor absoluto se encuentra entre estas fracciones intercalares.

5. Aplicaciones

(1) La aproximación de π dada por Arquímedes. Arquímedes (287–212 a.C.) en su obra "Medida del círculo", breve pues sólo consta de 3 proposiciones, pero auténtica obra maestra por su contenido, a) demostró la fórmula que da el área del círculo; y b) estimó el valor de π mediante la acotación

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}.$$

El lector puede consultar a Dunham, o leer el texto de Arquímedes para enterarse de a); si lo hace seguro que gozará con ello. Vamos aquí a decir algo sobre b). La idea básica de la que parte Arquímedes es la siguiente: la longitud, 2π, de la circunferencia unidad es mayor que el perímetro de cualquier polígono regular inscrito en ella y es menor que el perímetro de cualquier polígono regular circunscrito a dicha circunferencia. Si llamamos ℓ_n a la longitud del lado del polígono regular de n lados inscrito y L_m a la semilongitud del lado del polígono regular de m lados circunscrito, en la notación matemática actual, lo anterior se escribe:

$$n\,\ell_n < 2\,\pi < 2\,m\,L_m \Longleftrightarrow n\frac{\ell_n}{2} < \pi < m\,L_m.$$

Y es también evidente que al crecer el número de lados de los polígonos regulares, inscrito y circunscrito, crece la justeza de la aproximación que dan de π; de forma que en principio, tomando polígonos regulares de un número suficientemente grande de lados, se podrá obtener una aproximación de π tan buena como queramos. El mejor camino para obtener polígonos cuyo lado sea fácil de determinar, es partir de uno con lado conocido, por ejemplo el hexágono, e ir duplicando sucesivamente el número de sus lados. Siguiendo este método, pues no hubo otro hasta la aparición del cálculo diferencial de Newton (1642–1727) y Leibnitz (1646–1716), se obtuvo a principios del siglo XVII una aproximación de π con 35 cifras decimales correctas.

Volvamos a Arquímedes y veamos su razonamiento para obtener una ley de recurrencia para la longitud del lado de un polígono de doble número de lados.

Polígonos circunscritos. Si designamos por A_n, el radio del polígono regular de n lados circunscrito a la circunferencia unidad, se verifica:

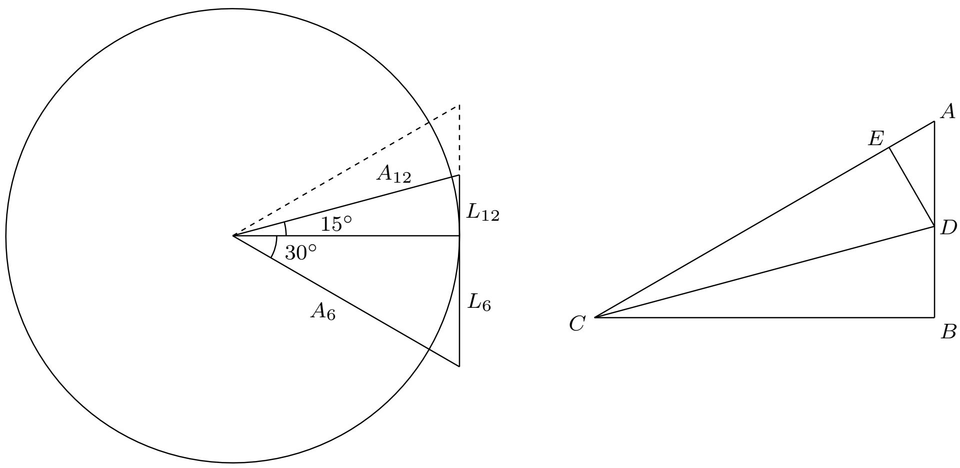
$$\frac{1}{L_6} = \sqrt{3}\,, \qquad \frac{A_6}{L_6} = 2,$$

$$\frac{1}{L_{2n}} = \frac{1}{L_n} + \frac{A_n}{L_n}, \tag{$*$}$$

$$\left(\frac{A_{2n}}{L_{2n}}\right)^2 = \frac{1}{L_{2n}^2} + 1\,.$$

Salvo la igualdad $(*)$, la comprobación, muy sencilla, de las otras se deja al lector. En cuanto a $(*)$, que nos da la ley de recurrencia buscada, Arquímedes la obtiene de la siguiente

Proposición. *En un triángulo rectángulo el producto de las longitudes de sus catetos es igual al producto de la suma de las longitudes de la hipotenusa y de uno de los catetos por la longitud del segmento determinado sobre el otro cateto por el vértice rectangular y el punto de corte de la bisectriz del ángulo opuesto.*



Hexágono circunscrito y duplicación del número de lados.

Demostración. En el triángulo rectángulo ABC, sea D el punto de corte de la bisectriz del ángulo $\widehat{ACB}$ con el cateto opuesto BA. Sea DE la perpendicular desde D a la hipotenusa. Los triángulos rectángulos CDE y CBD son iguales por compartir la hipotenusa y tener iguales, por construcción, los ángulos respectivos; en particular se sigue $ED = DB$.

Los triángulos rectángulos ABC y AED son semejantes por tener iguales los ángulos respectivos; de esto se sigue:

$$\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{ED} = \frac{BC}{DB} = \frac{AC + BC}{AD + DB} = \frac{AC + BC}{AB}$$

lo que demuestra la proposición. □

Polígonos inscritos. En el triángulo rectángulo inscrito en la circunferencia unidad y tal que uno de sus catetos tiene longitud l_n, longitud del lado del polígono regular de n lados inscrito en dicha circunferencia, llamamos b_n a la longitud de su otro cateto. Se verifica:

$$\begin{aligned} \frac{b_6}{\ell_6} &= \sqrt{3}\,, \quad \frac{2}{\ell_6} = 2, \\ \frac{b_{2n}}{\ell_{2n}} &= \frac{2}{\ell_n} + \frac{b_n}{\ell_n}, \qquad (*) \\ \left(\frac{2}{\ell_{2n}}\right) &= \frac{b_{2n}^2}{\ell_{2n}^2} + 1\,. \end{aligned}$$

De nuevo, salvo la igualdad $(*)$, la comprobación de las otras también se deja al lector. En cuanto a $(*)$, que nos da la ley de recurrencia buscada, Arquímedes la obtiene de la siguiente

Proposición. *En la circunferencia de diámetro AC se considera el triángulo rectángulo ABC y se traza la bisectriz CD del ángulo $\widehat{ACB}$. Si E es el otro punto de corte de dicha bisectriz con la circunferencia, se verifica*

$$\frac{CE}{EA} = \frac{AC + CB}{AB}.$$

Demostración. $\widehat{EAD} = \widehat{BCE}$ ya que $EA \perp EC$ y $AD \perp CB$; además por construcción $\widehat{ECA} = \widehat{BCE}$. Esto asegura que los triángulos rectángulos AEC y AED son semejantes y por tanto

$$\frac{AC}{AD} = \frac{CE}{EA}.$$

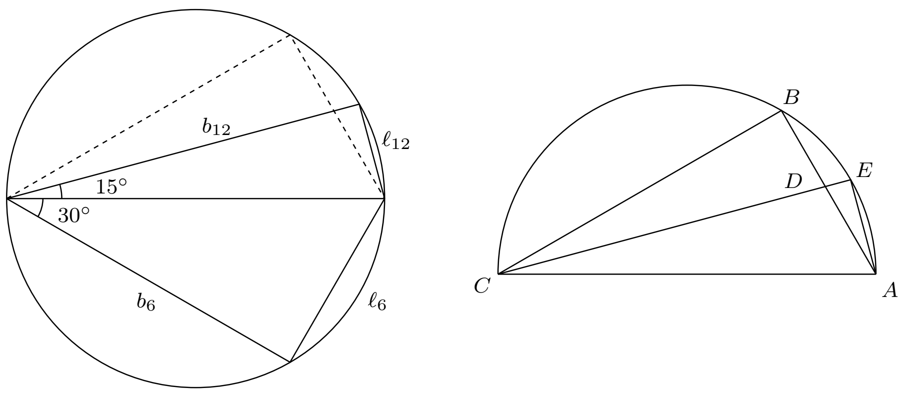
Aplicando la proposición anterior al triángulo rectángulo ABC, se obtiene:

$$\frac{AC + BC}{AB} = \frac{BC}{BD} = \frac{AC}{AB - BD} = \frac{AC}{AD}.$$

de donde se concluye lo que queríamos demostrar

$$\frac{CE}{EA} = \frac{AC + BC}{AB}.$$

□



Hexágono inscrito y duplicación del número de lados.

El razonamiento es impecable, pero usar las recurrencias anteriores para obtener buenas cotas para π exige saber estimar $\sqrt{3}$ y en cada paso de duplicación del número de lados, saber extraer raíces cuadradas y todo ello con suficiente precisión. Y es aquí donde Arquímedes se revela no sólo como un magnífico matemático teórico sino también como un increíble calculista. Empezaré por dar el listado de sus resultados numéricos, para luego comentarlos en conexión con la aproximación mediante fracciones continuas.

Cálculos de Arquímedes para los polígonos circunscritos.

$$\frac{1}{L_6} = \sqrt{3} > \frac{265}{153}, \qquad \frac{A_6}{L_6} = 2,$$

$$\frac{1}{L_{12}} > \frac{571}{153}, \qquad \left(\frac{A_{12}}{L_{12}}\right)^2 > \frac{349\,450}{153^2} \implies \frac{A_{12}}{L_{12}} > \frac{591+\frac{1}{8}}{153},$$

$$\frac{1}{L_{24}} > \frac{1162+\frac{1}{8}}{153}, \qquad \left(\frac{A_{24}}{L_{24}}\right)^2 > \frac{1\,373\,943+\frac{33}{64}}{153^2} \implies \frac{A_{24}}{L_{24}} > \frac{1\,172+\frac{1}{8}}{153},$$

$$\frac{1}{L_{48}} > \frac{2\,334+\frac{1}{4}}{153}, \qquad \left(\frac{A_{48}}{L_{48}}\right)^2 > \frac{5\,472\,132+\frac{1}{16}}{153^2} \implies \frac{A_{48}}{L_{48}} > \frac{2\,339+\frac{1}{4}}{153},$$

$$\frac{1}{L_{96}} > \frac{4\,673+\frac{1}{2}}{153},$$

$$\pi < 96\,L_{96} < \frac{29\,376}{9\,347} < \frac{22}{7}.$$

Cálculos de Arquímedes para los polígonos inscritos.

$$\frac{b_6}{\ell_6} = \sqrt{3} > \frac{1\,351}{780}, \qquad \frac{2}{\ell_6} = 2,$$

$$\frac{b_{12}}{\ell_{12}} < \frac{2\,911}{780}, \qquad \left(\frac{2}{\ell_{12}}\right)^2 < \frac{9\,082\,321}{780^2} \implies \frac{2}{\ell_{12}} < \frac{3\,013+\frac{3}{4}}{780},$$

$$\frac{b_{24}}{\ell_{24}} < \frac{5\,924+\frac{3}{4}}{780} = \frac{1\,823}{240}, \qquad \left(\frac{2}{\ell_{24}}\right)^2 < \frac{3\,380\,929}{780^2} \implies \frac{2}{\ell_{24}} < \frac{1\,838+\frac{9}{11}}{240},$$

$$\frac{b_{48}}{\ell_{48}} < \frac{3\,661+\frac{9}{11}}{240} = \frac{1\,007}{66}, \qquad \left(\frac{2}{\ell_{48}}\right)^2 < \frac{1\,018\,405}{66^2} \implies \frac{2}{\ell_{48}} < \frac{1\,009+\frac{1}{6}}{66},$$

$$\frac{b_{96}}{\ell_{96}} < \frac{2\,016+\frac{1}{6}}{66}, \qquad \left(\frac{2}{\ell_{96}}\right)^2 < \frac{4\,069\,284+\frac{1}{36}}{66^2} \implies \frac{2}{\ell_{96}} < \frac{2\,017+\frac{1}{4}}{66},$$

$$\pi > 96\,\frac{\ell_{96}}{2} > \frac{6\,336}{2\,017+\frac{1}{4}} = \frac{25\,344}{8\,069} > \frac{223}{71}.$$

La primera reacción frente a este listado es la de asombro por la precisión con que Arquímedes, que no disponía de escritura posicional para los números, calcula raíces cuadradas de números muy grandes. Desde luego he de confesar mi total ignorancia sobre qué algoritmo pudo usar para conseguir una tal precisión, fàcilmente comprobable hoy mediante una calculadora.

En cambio, son ciertas las siguientes afirmaciones:

a) $\frac{153}{265}$ es la reducida $\frac{p_8}{q_8}$ de $\sqrt{3}$, de manera que la aproxima por defecto; mientras que $\frac{1\,351}{780}$ es su reducida $\frac{p_{11}}{q_{11}}$ con lo que la aproxima por exceso.

b) $\frac{29\,376}{9\,347} = [3; 7, 667, 2]$ y por tanto su reducida $\frac{p_1}{q_1}$ que la aproxima por defecto es $\frac{22}{7}$.
$\frac{25\,344}{8\,069} = [3; 7, 10, 2, 1, 36]$ y por tanto su reducida $\frac{p_2}{q_2}$ que la aproxima por exceso es $\frac{223}{71}$.

c) Si se hubiera acotado π mediante el polígono de 48 lados, se obtendría:

$$\pi < 48\, L_{48} < \frac{29\,376}{9\,337} = [3; 6, 1, 5, 3, 1, \dots],$$

$$\pi > 48\, \frac{\ell_{48}}{2} > \frac{19\,008}{6\,055} = [3; 7, 5, 2, 9].$$

Por eso parece muy razonable concluir que Arquímedes disponía de un algoritmo para calcular, tanto para los números racionales como para ciertos irracionales como $\sqrt{3}$, las que hoy conocemos como sus fracciones reducidas. Ciertamente la proposición 1 del libro VII de los *Elementos* de Euclides, recoge lo que hoy llamamos algoritmo de Euclides para el cálculo del máximo común divisor de dos números naturales y que, tal como hemos visto, es equivalente al algoritmo para desarrollar en fracción continua simple un número racional. En cuanto a los irracionales, la cosa se aclara si se acepta la hipótesis de Van der Waerden: junto a la tradición de la geometría griega clásica, basada en postulados y axiomas y caracterizada por el rigor de sus demostraciones y de la que los *Elementos* es un ejemplo egregio, existió otra tradición aritmética y geométrica, posiblemente anterior, preocupada sobre todo por la solución de problemas concretos; dentro de esta tradición que podemos llamar calculista, ya los pitagóricos habrían aplicado el "algoritmo de Euclides" a razones irracionales para obtener aproximaciones racionales de los mismas.

Este último "algoritmo de Euclides" aparece recogido en la proposición 2 del libro X de los *Elementos* de Euclides y en nuestro lenguaje diría lo siguiente: Si $a > 0$, $b > 0$ son magnitudes cuya razón es inconmensurable, es decir irracional, se pueden realizar indefinidamente las siguientes divisiones:

$$\begin{array}{rlrl} a &= c_0\,b + r_0 & \qquad 0 < r_0 < b \\ b &= c_1\,r_0 + r_1 & \qquad 0 < r_1 < r_0 \\ r_0 &= c_2\,r_1 + r_2 & \qquad 0 < r_2 < r_1 \\ &\vdots & &\vdots \\ r_{n-2} &= c_n\,r_{n-1} + r_n & \qquad 0 < r_n < r_{n-1} \\ &\vdots & &\vdots \end{array}$$

Desde luego este proceso, a diferencia del caso racional, prosigue indefinidamente, pero equivale a dar un algoritmo para obtener las fracciones reducidas de $\frac{a}{b}$. En la práctica la dificultad está en el cálculo de los sucesivos cocientes; dificultad que desaparece en aquellos casos en que se produce periodicidad (mejor con periodo corto) en la sucesión de cocientes. Sólo tras Lagrange (1736–1813), sabemos que una tal periodicidad se produce si y sólo si $\frac{a}{b}$ es un irracional cuadrático. Pero el desconocimiento de la caracterización de los irracionales, para los que la sucesión de cocientes del anterior algoritmo es periódica, no impide obtener una tal sucesión para determinados casos concretos. Veamos el caso $\frac{\sqrt{3}}{1}$:

$$\begin{array}{rll} \sqrt{3} &= 1 + (\sqrt{3} - 1), & \qquad 0 < \sqrt{3} - 1 < 1, \\ 1 &= (\sqrt{3} - 1) + (2 - \sqrt{3}), & \qquad 0 < 2 - \sqrt{3} - \sqrt{3} - 1, \\ \sqrt{3} - 1 &= 2\,(2 - \sqrt{3}) + (3\sqrt{3} - 5), & \qquad 0 < 3\sqrt{3} - 5 < 2 - \sqrt{3}\,. \end{array}$$

Y ya hemos terminado pues las razones $\frac{2-\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-5}$ y $\frac{1}{\sqrt{3}-1}$ son iguales: de esta manera la sucesión de cocientes es $1; 1, 2, 1, 2, \ldots$ donde el periodo $1, 2$ se repite indefinidamente.

Parece también muy plausible la suposición de que Arquímedes fue duplicando el número de lados de los polígonos, hasta obtener un n para el que las cotas racionales, α y β por él obtenidas para

$$n\,L_n < \alpha \quad \text{y} \quad n\,\frac{\ell_n}{2} > \beta$$

tuvieran la misma reducida primera. Y para ello necesitó llegar a los polígonos de 96 lados; de esta manera consiguió acotar π por exceso mediante su primera reducida y por defecto mediante una reducida intercalar que además aproxima mejor.

(2) El problema del calendario. Aún en nuestra sociedad tan tecnificada, el sol sigue rigiendo el ritmo de nuestras vidas y así las unidades naturales de tiempo son el día o tiempo que emplea la tierra en dar una vuelta en torno a su eje y el año o tiempo que emplea la tierra en completar una revolución en torno del sol. No pretendo dar lecciones de Astronomía pero sí recordar una serie de conceptos clave que nos den una idea aproximada de cómo se miden ambos intervalos temporales. Para un observador terrestre las estrellas se mueven aparentemente como si estuvieran clavadas en la superficie de una esfera rígida con centro en el observador y que gira con movimiento uniforme en torno a una recta que pasa por su centro; el círculo máximo de dicha esfera celeste determinado por el plano perpendicular al eje de giro o eje de los polos se llama el ecuador celeste; sus círculos máximos determinados por los planos que pasan por el eje de los polos se llaman meridianos celestes. Ahora bien el sol no sigue este movimiento sino que su órbita aparente en la esfera celeste, llamada eclíptica, está inclinada unos $23^\circ\,27'$ respecto al ecuador celeste y no es recorrida con velocidad uniforme (pero además dicha inclinación conoce una variación periódica de periodo eso sí, sumamente largo); en ella hay un punto privilegiado que corresponde a la posición del centro del sol el 21 de Marzo cuando dicho centro atraviesa el ecuador celeste: es el llamado punto Aries o equinoccio de Primavera. Hay que añadir que el punto Aries cada año retrasa unos $50''$ su posición en la eclíptica; dicha variación se conoce como precesión de los equinoccios.

Si ahora dejamos de considerar la tierra como un punto para entenderla como una esfera concéntrica con la celeste, un observador terrestre tiene asociado un meridiano celeste, llamado a menudo el meridiano del lugar. Por fín podemos definir los intervalos temporales que nos interesan:

día solar, es el tiempo transcurrido entre dos pasos consecutivos del centro del sol por el meridiano del observador (dicho paso por el meridiano corresponde al mediodía, momento en que el sol alcanza su punto más alto sobre el observador). Pero la inclinación de la eclíptica y el hecho de que el movimiento aparente del sol no sea uniforme, hace que la definición anterior no sea unívoca ya que dos días solares no tiene la misma duración; por eso se toma el llamado día solar medio o tiempo transcurrido entre dos pasos consecutivos por el meridiano del observador del centro de un sol ficticio que recorriera el ecuador celeste con movimiento uniforme completándolo en el mismo tiempo que emplea el sol real en recorrer la eclíptica.

año trópico, es el tiempo que transcurre entre dos pasos consecutivos del sol por el punto Aries.

En la actualidad los astrónomos dan la siguiente relación entre ambas unidades de tiempo: un año trópico es igual a 365 días, 5 h., 48 min, 45'98 seg.

Se hace patente que si se quiere organizar un calendario civil, que no lleve a la larga a una disparidad total entre sus fechas y las estaciones astronómicas, primavera, verano, otoño e invierno, será preciso ir alternando años normales de 365 días con años bisiestos de 366 días. ¿Cómo hallar una ley, suficientemente manejable y por tanto simple, que regule esta alternancia de manera que el error cometido sea aceptable? Resolveremos matemáticamente el problema intercalando algunas consideraciones históricas sobre el calendario vigente.

Reduciendo a días las 5 h., 48 min, 45'98 seg. en que el año trópico excede a 365 días obtenemos la fracción

$$\alpha = \frac{1\,046\,299}{4\,320\,000} = \frac{100 \times (5 \times 60^2 + 48 \times 60 + 45'98)}{24 \times 60^2 \times 100}.$$

Siguiendo los primeros pasos del algoritmo de Euclides obtenemos:

	4	7	1	3	5	8
4 320 000	1 046 299	134 804	102 671	32 133	6 272	737
134 804	102 671	32 133	6 272	737	88	

y aplicando el cuadro, regla mnemotécnica, para la obtención de reducidas

c_s			0	4	7	1	3	5	8
p_s	0	1	0	1	7	8	31	163	1 335
q_s	1	0	1	4	29	33	128	673	5 512

es decir las primeras reducidas de α son:

$$0 < \frac{7}{29} < \frac{31}{128} < \frac{1\,335}{5\,512} < \cdots < \alpha < \cdots < \frac{163}{673} < \frac{8}{33} < \frac{1}{4}.$$

La reducida $\frac{1}{4}$ da una regla muy clara: cada cuatro años hay que intercalar uno bisiesto. Ésta es la ley del calendario juliano, llamado así en honor de Julio César, que lo implantó; si bien dicha ley fue dada por el astrónomo de Alejandría, Sosígenes, llamado a Roma por el citado emperador. Se concretó a partir del origen de la era cristiana en la regla: "los años bisiestos son los que son múltiplos de 4". Pero veamos el orden de magnitud del error que se comete al tomar esta reducida. La duración media del año juliano es de 365 días, 6 h. y por tanto se comete un error por exceso de 11 min, 14'02 seg. Eche cuentas el lector y verá que en 1000 años esto implica un error por exceso de 7 días, 19 h., 13 min., 40 seg., es decir éste es el tiempo solar que se ha comido el calendario juliano en 1 000 años. Todo esto se puso de manifiesto en el Renacimiento y ya veremos qué solución se le dio.

Volvamos nuestra atención a las siguientes reducidas. $\frac{7}{29}$ da como regla: "7 años bisiestos cada 29 años" regla que es difícil de convertir en una ley manejable, pues ¿cómo distribuir los 7 años bisiestos dentro del ciclo de 29 años?. Lo mismo ocurre para la siguiente reducida: "8 años bisiestos cada 33 años"; pero las cosas cambian al pasar a la reducida $\frac{31}{128} = \frac{1}{4} - \frac{1}{128}$. Aquí la ley "31 años bisiestos en 128 años" se pude concretar en una fácil regla: "los años bisiestos son los que son múltiplos de 4 pero no de 128". Para un matemático actual esta sería la solución óptima del problema del calendario, sobre todo porque en él, la duración media del año es de 365 días, 5 h., 45 min., 45 seg. cometiéndose con ello un error por defecto de 0'98 seg. ¡Ni en 3 600 años se consigue un error acumulado de una hora! El lector puede jugar con las siguientes reducidas de α o incluso con reducidas intercalares para convencerse que la solución dada es la óptima.

Ya hemos enunciado que en el inicio de la edad Moderna, se era consciente del error que va acumulando el calendario juliano; por fin el Papa Gregorio XIII en 1582, siguiendo la solución dada por una comisión de astrónomos, promulgó la siguiente reforma:

a) el día siguiente al 4 de Octubre, jueves de 1582 sería el 15 de Octubre, viernes del nuevo calendario. De esta manera se subsanaba el error acumulado por el calendario juliano.

b) en adelante los años bisiestos serían los múltiplos de 4, con la excepción siguiente: los años que terminaran en dos ceros y tales que el número de sus centenas no fuera divisible por 4. Según esta regla, los años 1600 y 2000 serían bisiestos pero no los años 1700, 1800 y 1900.

Esta reforma constituye el llamado calendario gregoriano, vigente en la actualidad en el mundo occidental. En él, hay 97 años bisiestos entre cada 400 años. ¿Qué decir de su exactitud? La duración media del año en el calendario gregoriano es de 365 días, 5 h., 49 min., 12 seg. con lo que se comete un error por exceso de 26'02 seg. por año. Es una precisión muy aceptable, sobre todo habida cuenta de que la comisión de astrónomos de Gregorio XIII, se basaba en los datos aportados por las tablas astronómicas llevadas a cabo en la academia de Toledo por orden del rey Alfonso X el Sabio (1221–1284); en ellas la duración del año era de 365 días, 5 h., 49 min., 16 seg.; por eso creían cometer un error de sólo 4 seg. al año. Pero a la luz de los datos astronómicos actuales y teniendo en cuenta la teoría de aproximación mediante fracciones continuas, cuyo desarrollo total no conocían, pues es de Lagrange, hay que decir lo siguiente: la mejor aproximación racional de $\alpha = \frac{1\,046\,299}{4\,320\,000}$ con denominador menor o igual que 400 es $\frac{31}{128}$; la siguiente mejor aproximación de α viene dada por su reducida intercalar $\frac{101}{417}$, que desde luego no es muy propicia para dar una ley manejable de calendario.

(3) Engranajes. Imaginemos dos ejes o árboles cilíndricos de radios respectivos r_1 y r_2, que están en contacto tangencial a lo largo de una generatriz común. Si al de radio r_1 se le dota de un movimiento rotatorio con velocidad angular constante ω_1, las leyes de la mecánica afirman que se transmite al segundo eje un movimiento rotatorio de sentido contrario y velocidad angular constante ω_2, que viene dada por la fórmula $\omega_1 r_1 = -\omega_2 r_2$. La descripción anterior es meramente teórica pues en la práctica un eje patina sobre el otro. Para evitarlo se fija a cada eje una rueda dentada, de manera que cada diente de una de ellas engrane exactamente con cada diente de la otra; de esta manera si designamos por N_1 y N_2 el número de dientes de las ruedas de radios respectivos R_1 y R_2 se verifica: $N_1 R_2 = N_2 R_1$, es decir

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{-\omega_2}{\omega_1}.$$

Desde luego el perfil de los dientes debe ser de tal forma que engranen perfectamente, sin choque inicial, progresivamente y con deslizamiento mínimo; el conseguir la solución óptima fue obra del matemático Poncelet, ya entrado el s. XIX. No la describiremos pero apuntado queda otro sugestivo problema matemático.

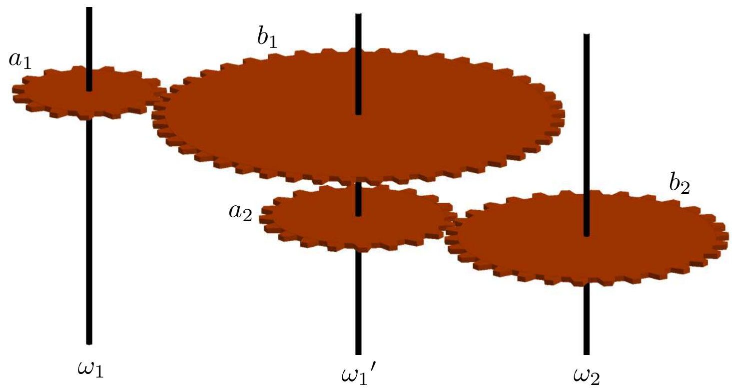
En lo anterior se ha descrito el ejemplo más simple de engranaje de ruedas dentadas; pues en muchos casos interesan no dos sino varias ruedas dentadas unidas entre sí, los llamados trenes de engranajes. Las aplicaciones de éstos son muy variadas, citemos los engranajes de los relojes, los del cambio de marchas y del diferencial de un coche.

¿Qué tienen que ver los engranajes con las fracciones continuas simples? Supongamos que necesitamos un engranaje de ruedas dentadas cuyo tamaño hace imposible que en ninguna de ellas se puedan hacer más de 200 dientes y que la relación entre las velocidades angulares de ambas ruedas sea un número racional α cuyo denominador sea mayor que 200; evidentemente es necesario hallar la mejor aproximación racional de α con denominador menor o igual que 200. Pero si

$$\alpha = \frac{a_1}{b_1} \times \frac{a_2}{b_2} \times \cdots \times \frac{a_r}{b_r}, \qquad 3 \leq a_i, b_i \leq 200,$$

la razón de velocidades α, se puede reproducir exactamente mediante un tren de engranajes formado por $2\,r$ ruedas dentadas, enlazadas de la manera siguiente:

Una rueda dentada con a_1 dientes se engarza con una rueda dentada con b_1 dientes; fijada al eje de giro de esta última, se pone una rueda dentada con a_2 dientes la que a su vez se engarza con otra rueda dentada con b_2 dientes y así se prosigue hasta engarzar una rueda dentada con a_r dientes con otra que tiene b_r dientes.

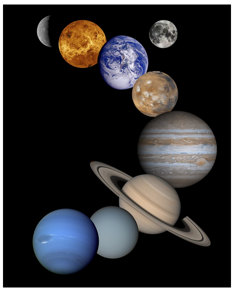


Tren de dos engranajes.

En la figura se representa el caso de cuatro ruedas dentadas cuyo número de dientes son respectivamente a_1, b_1, a_2, b_2 los cuales verifican $\frac{a_1}{b_1} = \frac{1}{3}$ y $\frac{a_2}{b_2} = \frac{2}{3}$. Después de lo dicho el lector observará que la relación entre ω_1' velocidad angular tanto de la rueda con b_1 dientes como de la que tiene a_2 dientes y ω_1 velocidad angular de la rueda con a_1 dientes es $\frac{a_1}{b_1} = \frac{-1}{3}$; así mismo la relación entre la velocidad angular ω_2 de la rueda con b_2 dientes y $\omega_1{}'$ velocidad angular de la rueda con a_2 dientes es $\frac{a_2}{b_2} = \frac{-2}{3}$. De esta manera se obtiene, si designamos por T_1 y T_2, el tiempo que tardan en completar una vuelta las ruedas dentadas a_1 y b_2:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}.$$

Vale la pena caer en la cuenta de que si r, número de fracciones en que descompone α, es impar las ruedas inicial (la de a_1 dientes) y final (la de b_r dientes) girarán en sentido contrario, pero esto tiene fácil arreglo: basta engarzar la rueda dentada final con una idéntica pues este último engranaje invertirá el sentido de rotación.



Vamos aplicar lo anterior a la descripción de cómo construir un mecanismo mecánico que simule el movimiento orbital planetario. Vamos a ser modestos: no tendremos en cuenta los movimientos de rotación de los planetas y éstos describirán órbitas circulares en torno del sol a velocidad constante. Supondremos además que no disponemos de ruedas dentadas con más de 211 dientes.

Lo primero es hacerse con la lista (se encuentra en los libros de astronomía) del

Periodo del movimiento orbital de los planetas

Mercurio	0’24085
Venus	0’61521
La Tierra	1
Marte	1’88089
Júpiter	11’85653
Saturno	29’42352
Urano	83’74741
Neptuno	163’7232
Plutón[2]	248’0208

A continuación daremos el desarrollo en fracción continua y el cuadro de reducidas para la razón entre los periodos de revolución de cada planeta y de la Tierra.

Periodo de revolución de Mercurio/Periodo de revolución de la Tierra

$$\frac{24\,085}{100\,000} = \frac{4817}{20\,000} = [0; 4, 6, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 23].$$

Cuadro de sus reducidas:

c_s			0	4	6	1	1	2	1	1	1	1
p_s	0	1	0	1	6	7	13	33	46	79	125	204
q_s	1	0	1	4	25	29	54	137	191	328	519	847

Si se toma la reducida

$$\frac{79}{328} = \frac{79}{8} \times \frac{1}{41} \text{ el error es menor que } \frac{1}{328 \times 519} = \frac{1}{170\,232}.$$

[2]NE: Cuando se escribían las notas originales Plutón aún se consideraba un planeta.

Si se toma la reducida

$$\frac{125}{519} = \frac{5}{3} \times \frac{25}{173} \text{ el error es menor que } \frac{1}{519 \times 847} = \frac{1}{439\,593}.$$

Periodo de revolución de Venus/Periodo de revolución de la Tierra

$$\frac{61\,521}{100\,000} = [0; 1, 1, 1, 1, 2, 33, 1, 1, 113].$$

Cuadro de sus reducidas:

c_s			0	1	1	1	1	2	33	1	1
p_s	0	1	0	1	1	2	3	8	267	275	542
q_s	1	0	1	1	2	3	5	13	434	447	881

Si se toma la reducida

$$\frac{267}{434} = \frac{3}{7} \times \frac{89}{62} \text{ el error es menor que } \frac{1}{434 \times 447} = \frac{1}{193\,998}.$$

Si se toma la reducida

$$\frac{275}{447} = \frac{55}{149} \times \frac{5}{3} \text{ el error es menor que } \frac{1}{447 \times 881} = \frac{1}{393\,807}.$$

Periodo de revolución de Marte/Periodo de revolución de la Tierra

$$\frac{188\,089}{100\,000} = [1; 1, 7, 2, 1, 1, 8, 2, 32, 4].$$

Cuadro de sus reducidas:

c_s			1	1	7	2	1	1	8	2	32
p_s	0	1	1	2	15	32	47	79	679	1437	46 663
q_s	1	0	1	1	8	17	25	42	361	764	24 809

Si se toma la reducida

$$\frac{679}{361} = \frac{97}{19} \times \frac{19}{7} \text{ el error es menor que } \frac{1}{361 \times 764} = \frac{1}{275\,804}.$$

La próxima reducida $\frac{1437}{764}$ no es adecuada pues $1437 = 3 \times 479$ es la descomposición en factores primos.

Periodo de revolución de Júpiter/Periodo de revolución de la Tierra

$$\frac{1\,185\,653}{100\,000} = [11; 1, 5, 1, 32, 2, 3, 1, 7, 6].$$

Cuadro de sus reducidas:

c_s			11	1	5	1	32	2	3	1	7
p_s	0	1	11	12	71	83	2727	5537	19 338	24 875	193 463
q_s	1	0	1	1	6	7	230	467	1631	2098	16 317

Si se toma la reducida

$$\frac{2727}{230} = \frac{101}{115} \times \frac{9}{2} \text{ el error es menor que } \frac{1}{230 \times 467} = \frac{1}{107\,410}.$$

La próxima reducida $\frac{5537}{467}$ no es adecuada pues 467 es primo.

Periodo de revolución de Saturno/Periodo de revolución de la Tierra

$$\frac{2\,942\,352}{100\,000} = \frac{183\,897}{6250} = [29; 2, 2, 1, 3, 3, 14, 2, 2].$$

Cuadro de sus reducidas:

c_s			29	2	2	1	3	3	14	2
p_s	0	1	29	59	147	206	765	2501	35 779	74 059
q_s	1	0	1	2	5	7	26	85	1216	2517

Si se toma la reducida

$$\frac{2501}{85} = \frac{61}{17} \times \frac{41}{5} \text{ el error es menor que } \frac{1}{85 \times 1216} = \frac{1}{103\,360}.$$

Periodo de revolución de Urano/Periodo de revolución de la Tierra

$$\frac{8\,374\,741}{100\,000} = [83; 1, 2, 1, 23, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 6, 2, 3].$$

Cuadro de sus primeras reducidas:

c_s			83	1	2	1	23	2	1	1	1	1	1
p_s	0	1	83	84	251	335	7956	16 247	24 203	40 450	64 653	105 103	169 756
q_s	1	0	1	1	3	4	95	194	289	483	772	1255	2027

Si se toma la reducida

$$\frac{16\,247}{194} = \frac{211}{97} \times \frac{11 \times 7}{2} \text{ el error es menor que } \frac{1}{194 \times 289} = \frac{1}{56\,066}.$$

Periodo de revolución de Neptuno/Periodo de revolución de la Tierra

$$\frac{1\,637\,232}{10\,000} = \frac{102\,327}{625} = [163; 1, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 5].$$

Cuadro de sus reducidas:

c_s			163	1	2	1	1	1	1	2	1	1
p_s	0	1	163	164	491	655	1 146	1 801	2 947	7 695	10 642	18 337
q_s	1	0	1	1	3	4	7	11	18	47	65	112

Si se toma la reducida

$$\frac{7\,695}{47} = \frac{5 \times 3^4 \times 19}{47} = \frac{135}{47} \times \frac{171}{3} \quad \text{el error es menor que} \quad \frac{1}{47 \times 65} = \frac{1}{3\,055}.$$

Y las siguientes reducidas no son adecuadas.

Periodo de revolución de Plutón/Periodo de revolución de la Tierra

$$\frac{2\,480\,208}{10\,000} = \frac{155\,013}{625} = [248; 48, 13].$$

Cuadro de sus reducidas:

c_s			248	48	13
p_s	0	1	248	11 905	155 013
q_s	1	0	1	48	625

En este caso no hay reducidas adecuadas.

Professora del Dpt. de Matemàtiques de la UAB
des de l'any 1972 fins el 2004

Publicat el 20 de juny de 2019