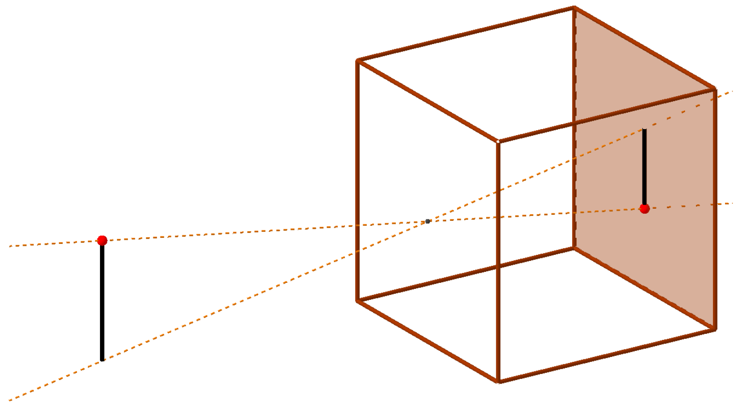
MAT^2
MATerials MATemàtics
Volum 2021, treball no. 3, 17 pp. ISSN: 1887-1097
Publicació electrònica de divulgació del Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona
www.mat.uab.cat/web/matmat

Des d'on s'ha fet?

Gregori Guasp

L'origen d'aquestes notes és el projecte de recreació històrica prevista per al juny de 2021 i organitzada per Fotoconnexió i la Societat Catalana d'Història de la Ciència i de la Tècnica (Institut d'Estudis Catalans) que consisteix a reproduir, amb els mitjans tècnics de l'època, algunes de les imatges de *l'Àlbum Pintoresch Monumental de Catalunya* (https://ddd.uab.cat/record/59933) obtingudes el 1878 per una *expedició* de *l'Associació Catalanista d'Excursions Científiques* (en particular, la que apareix per sobre d'aquest paràgraf). De forma bastant casual s'em va proposar participar en les conferències prèvies a la sortida de camp per tal d'explicar alguna tècnica matemàtica útil per a descobrir, o com a mínim aproximar, des d'on s'ha fet una fotografia, ja que a l'àlbum mencionat només es descriu el lloc que s'ha retratat però no es donen els detalls tècnics de la fotografia. Com que no soc cap expert en visió per computador ni en fotografia és probable que les consideracions que vindran a continuació siguin massa simples per a un tractament *professional* del problema, però crec que són prou interessants per servir com a punt de partida d'un tractament més complet i seriós i alhora suficientment simples per tal de mostrar a un públic molt ampli com funcionen les matemàtiques quan s'apliquen a situacions reals.

El model de partida per entendre i tractar les imatges obtingudes amb una càmera fotogràfica és el de la cambra fosca. Es considera que els rajos de llum que provenen del *món* convergeixen en un punt i impressionen un material sensible com en l'esquema següent:



Tots els processos posteriors de reproducció se suposa que només representen canvis d'escala o *homotècies* d'aquesta impressió. Tot i la simplicitat del model, no és immediat recuperar la informació de l'objecte retratat a partir només de la que s'en desprèn de la imatge impresa ja que les transformacions associades a una *projeccció* no conserven, en general, les proporcions entre els elements que intervenen i gairebé l'única característica que es preserva és *l'alineament* (línies rectes al món es mantenen com a línies rectes a la fotografia). Sense tenir informació addicional sobre la distància focal o característiques tècniques semblants resulta pràcticament impossible establir com de lluny estava el motiu de la càmera en el moment de fer la toma. Plantejat en aquests termes, conèixer des d'on s'ha fet una fotografia queda emmarcat com una qüestió de Geometria Projectiva i es pot veure un plantejament en aquest context, molt bonic, a l'article *Armoniosas relaciones (y razones no menos armoniosas) entre el mapa y el territorio* de Ian Steward al Investigación y Ciencia del maig de 1990 (nº 164) on s'utilitzen propietats de les còniques relacionades amb la raó doble.

Dit això, el fet d'estar intentant reproduir una imatge antiga, feta amb una càmera que, pel seu pes, s'ha de muntar sobre un trípode i que gairebé segur estarà *nivellada* (el pla sobre el que es projecta la imatge és perpendicular al nivell horitzontal) permet restringir-se a una situació en la que les *característiques verticals* del terreny també seran verticals a la imatge i aquest fet simplifica bastant la situació.

En particular, això permet utilitzar el mètode, que s'utilitza en la navegació costera, de les *enfilacions* (jo ho vaig aprendre quan el meu pare m'explicava com localitzar la pesquera quan se surt a pescar). Dit breument, es tracta simplement de constatar que, si un determinat accident de la costa (un far, un edifici, un accident geogràfic,...) queda just per sobre d'un altre, podem deduir que ens trobem sobre la recta que uneix aquests dos punts i, per tant, amb dues d'aquestes enfilacions tenim la nostra situació determinada (dues rectes tenen un únic punt en comú). Noteu que l'observació del paràgraf anterior diu que les enfilacions es mantenen quan es fa una fotografia i, per tant, amb un mapa de la regió on s'ha capturat la imatge i un parell d'enfilacions ja s'ha localitzat el lloc des d'on s'ha fet.

Per tal de comprovar fins a quin punt pot ser útil aquesta forma de treballar, veieu a continuació un exemple de *petit format*. Partim de la fotografia d'una habitació de treball qualsevol com la següent:

Les columnes de la llibreria i les cantonades de la taula són característiques molt fàcils de controlar i, de fet, no costa gaire establir algunes enfilacions (aproximades) evidents:

1. Una columna de la llibreria queda un pel a la dreta del tub/portallapis que hi ha a una de les cantonades de la taula sense arribar a la frontissa

que té la taula per desplegar-la.

2. L'altra cantonada de la taula està alineada amb l'extrem del taulell que arriba a la llibreria.

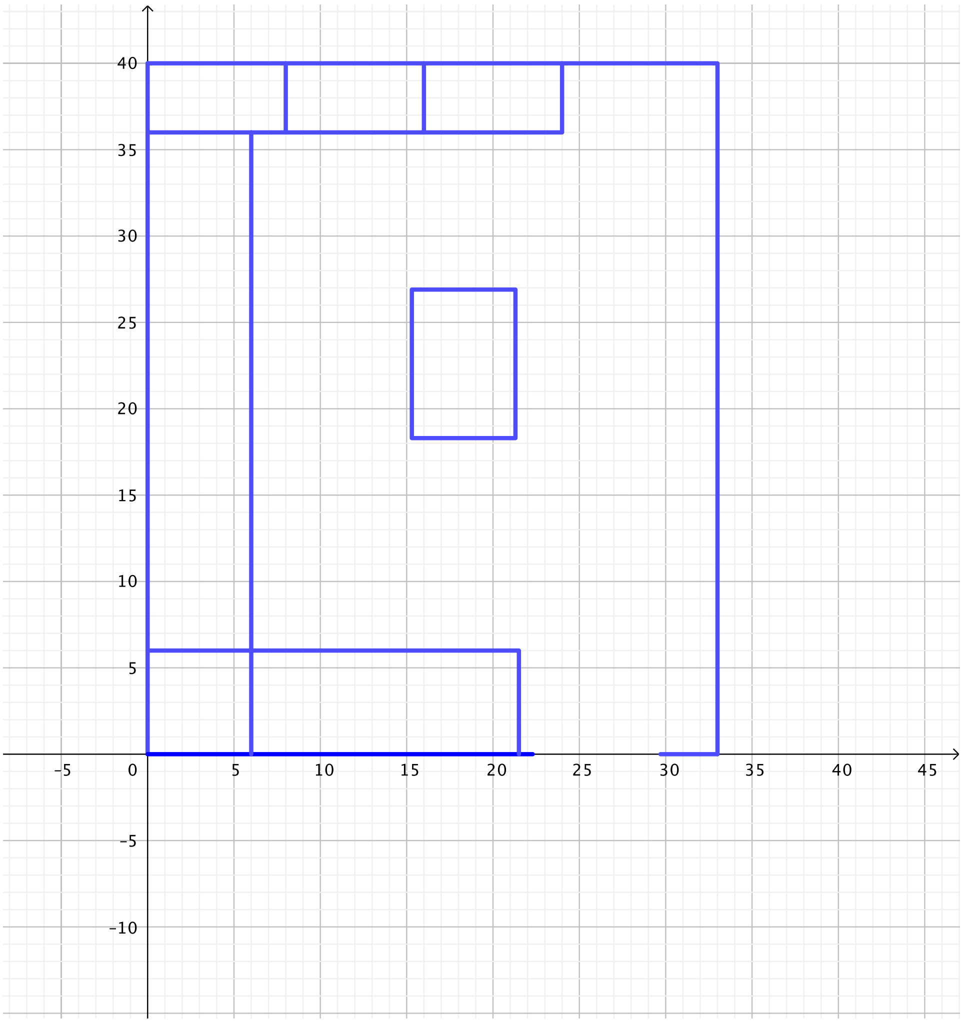
En la imatge següent s'han marcat aquestes dues característiques amb línies verticals vermelles:

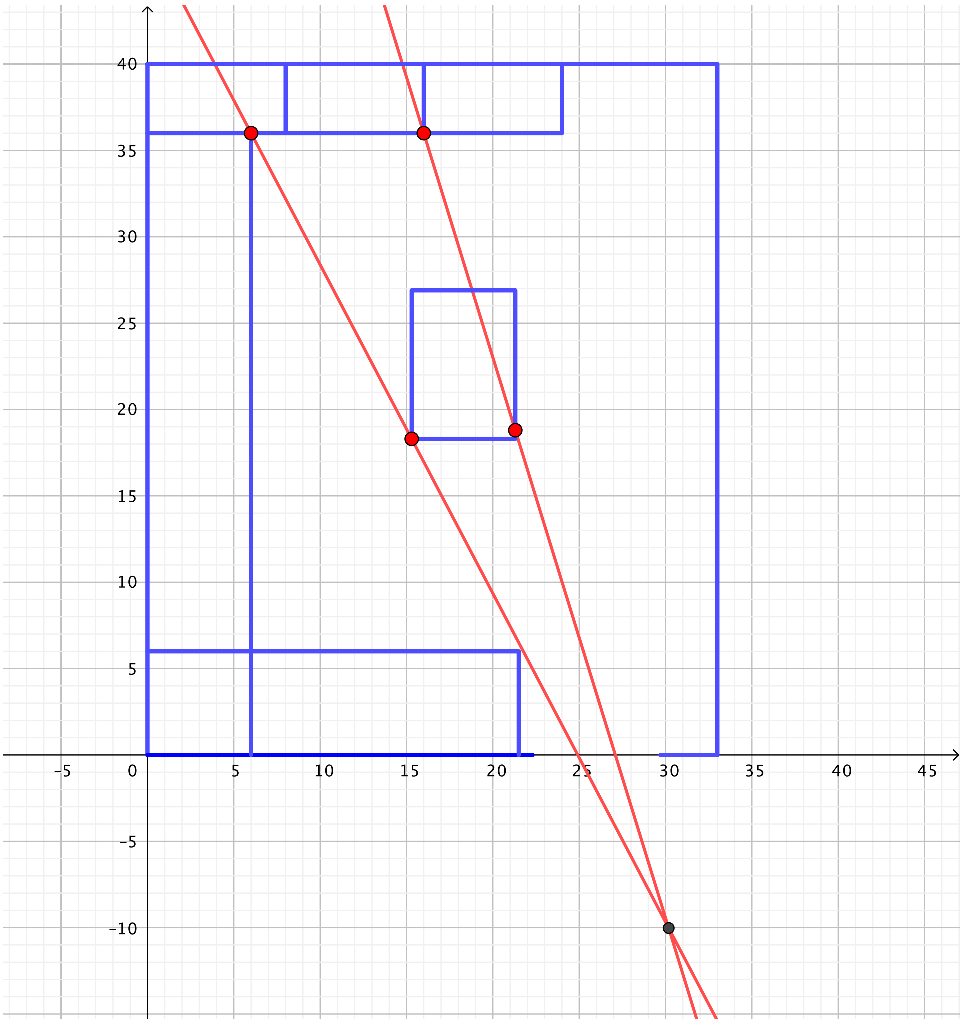
Per tal d'obtenir el *focus* de la fotografia només caldrà tenir un plànol de l'habitació i marcar-hi les rectes que corresponen a les enfilacions que s'han seleccionat. Prenent les mides no és difícil dibuixar (a escala) un esquema[1] com el de la pàgina 5.

Les línies que es dedueixen de les enfilacions que s'han triat són les que apareixen a l'esquema de la pàgina 6. I el punt d'intersecció és el que té coordenades $(30.18, -10.2)$ (en el sistema de referència que s'ha establert). Això vol dir que la ubicació que es volia determinar està situada aproximadament un metre fora de l'habitació i cap a la part dreta, tal i com es mira la imatge, de l'obertura de la porta[2].

[1] L'esquema i els càlculs corresponents estan fets amb GeoGebra.

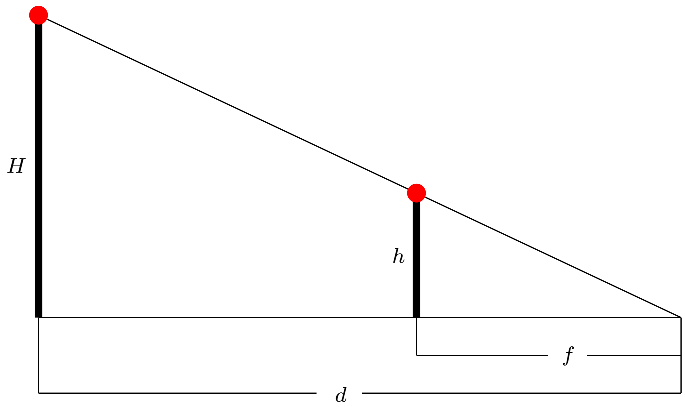
[2] Puc prometre que aquesta estimació es correspon a la realitat amb força precisió. Encara que, si us fixeu, el punt real ha de ser un xic més endavant i cap a l'esquerra ja que des de tan enrere no es podria veure la pared de la dreta.


40
35
30
25
20
15
10
5
0
-5
-10
-5
5
10
15
20
25
30
35
40
45


40
35
30
25
20
15
10
5
0
-5
-10
5
10
15
20
25
30
35
40
45

Però, què passa si no hi ha prou enfilacions? En la fotografia de la primera pàgina no hi apareixen prou accidents com per establir alineaments clars i, per tant, aquesta forma de *geolocalització* serà difícil d'aplicar. En qualsevol cas, encara hi ha uns quants recursos matemàtics gens complicats que es poden utilitzar. Les propietats bàsiques dels triangles semblants diuen que la projecció h, d'una alçada H situada a una distància d del focus, sobre un pla separat una distància f d'aquest mateix focus compliran la condició de proporcionalitat

$$\frac{H}{h} = \frac{d}{f}$$



D'entrada aquesta propietat no és massa útil per a determinar a quina distància d del focus es troba una certa característica si no es coneix prèviament quina és la distància entre el pla de projecció i el centre des d'on es projecta f, encara que es pugui conèixer H (d'un mapa, per exemple) i es pugui mesurar h (perquè és el que hi ha a la fotografia). Ara bé, si es poden localitzar sobre la mateixa imatge dues característiques que es projectaran sobre el mateix pla hi haurà dues condicions de proporcionalitat de la forma

$$\frac{H_1}{h_1} = \frac{d_1}{f}, \quad \frac{H_2}{h_2} = \frac{d_2}{f},$$

en les que el paràmetre f és el mateix. En aquest cas es pot aïllar f i s'obté

$$\frac{d_1\, h_1}{H_1} = f = \frac{d_2\, h_2}{H_2}$$

d'on es pot arribar a la fórmula

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{H_1}{H_2} \times \frac{h_2}{h_1}\,.$$

Aleshores, coneixent les proporcions entre les dues característiques en la realitat (H_1/H_2) i en la imatge (h_2/h_1) es coneix automàticament la proporció entre les distàncies del focus a cada un dels punts identificats. L'avantatge d'aquesta aproximació és que, donats dos punts $A_1 = (a_1, b_1)$ i $A_2 = (a_2, b_2)$ del pla, el lloc geomètric dels punts (x, y) tals, que la proporció entre les distàncies a A_1 i A_2 és una certa constant $k(= d_1/d_2)$ vindrà determinat per una equació de la forma

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = k^2 \left((x - a_2)^2 + (y - b_2)^2\right) .$$

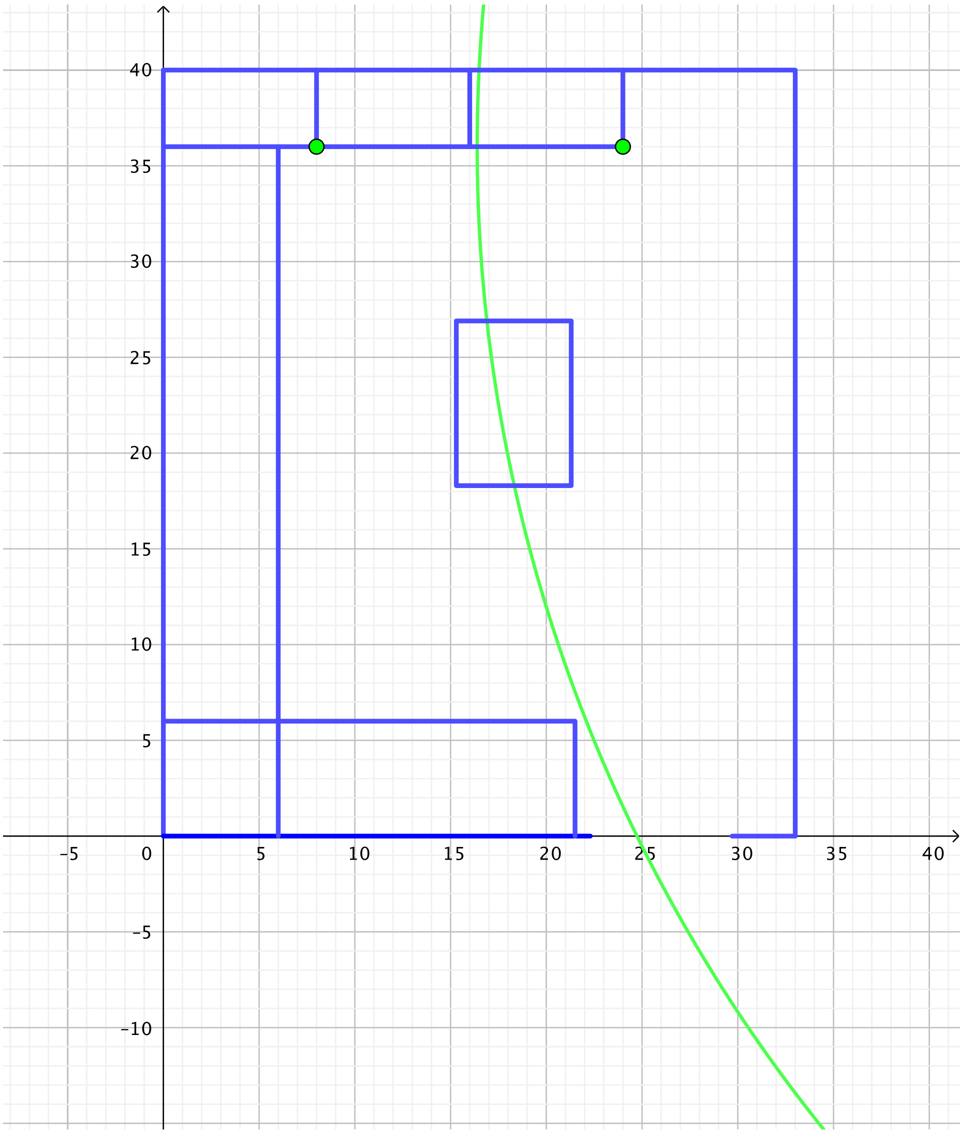
I aquesta equació correspon clarament a una circumferència (amb centre i radi no gaire difícils de calcular en termes de a_1, b_1, a_2, b_2 i k) o a la mediatriu del segment A_1A_2 si resulta que $k = 1$.

Si es poden localitzar dos parells d'alçades per a les que s'apliqui aquest criteri de la raó entre distàncies s'haurà localitzat l'origen de la fotografia com un dels dos punts d'intersecció d'un parell de circumferències, del quals serà fàcil, normalment, descartar-ne un i quedar-se amb el que queda.

A l'exemple de laboratori de la pàgina 3 es poden utilitzar en primer lloc, per exemple, les columnes de la llibreria (de 240 cm d'alçada totes dues, és clar) marcades a la imatge següent per a les quals el coeficient k que resulta[3] és 1.10256 .

Aquesta elecció dels punts característics de la fotografia restringirà el punt des d'on s'ha fet a la circumferència de l'esquema de la pàgina 9.

[3]Com que les dues columnes són de la mateixa alçada, el quocient H_1/H_2 és 1 i només cal mesurar les alçades a la fotografia. Com que el que s'ha d'utilitzar és la proporció h_2/h_1 entre les dues mesures, el resultat és independent de l'ampliació de la imatge i podeu fer vosaltres mateixos la comprovació del resultat.

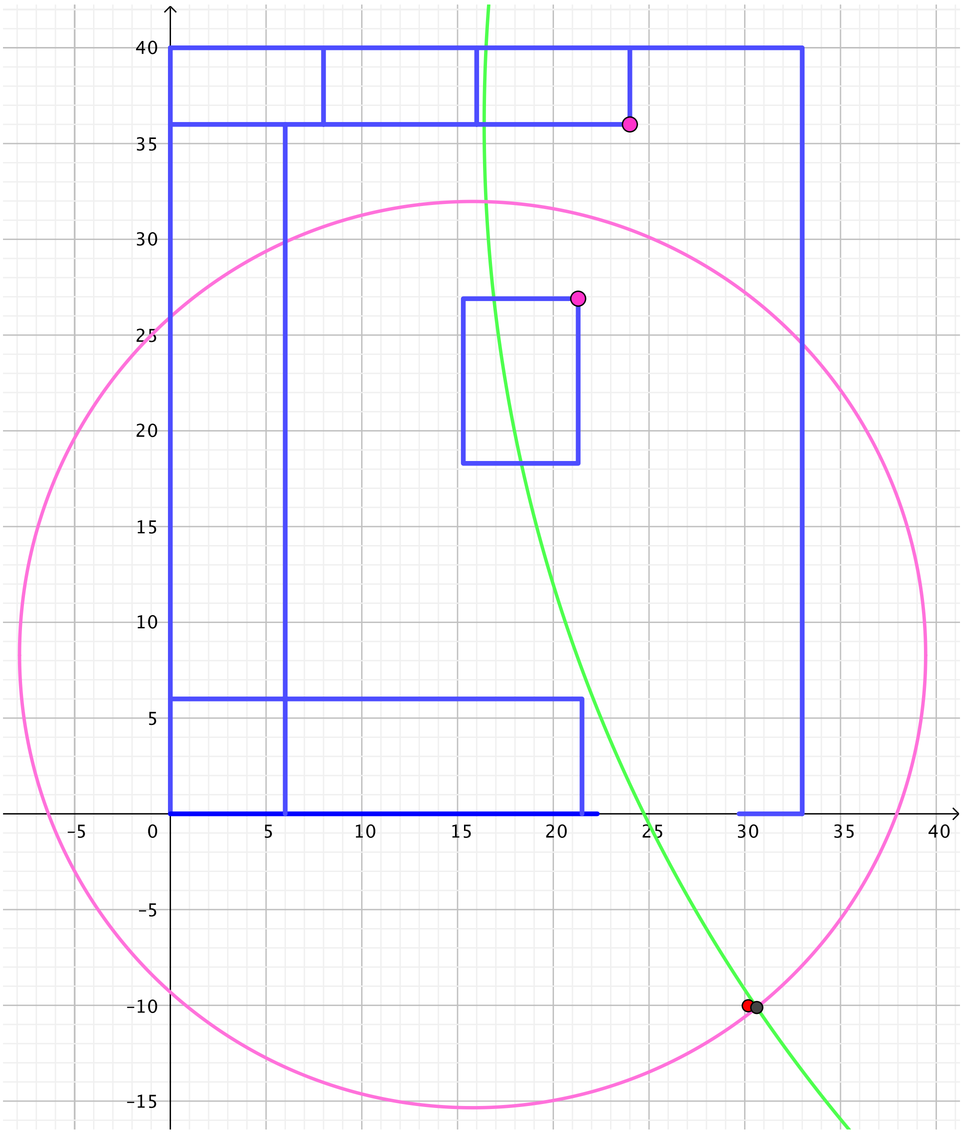

40
35
30
25
20
15
10
5
0
-5
-10
-5
5
10
15
20
25
30
35
40

Per tal de tenir una localització concreta caldrà triar un altre parell d'alçades que donaran una segona circumferència on col·locar el punt de vista de la càmera. Aquest segon parell pot ser el format per la columna de la llibreria de la dreta del tot (així s'aprofita una part de les mesures que ja s'han fet) i la cantonada de la taula del centre de l'habitació que es veuen a la figura següent

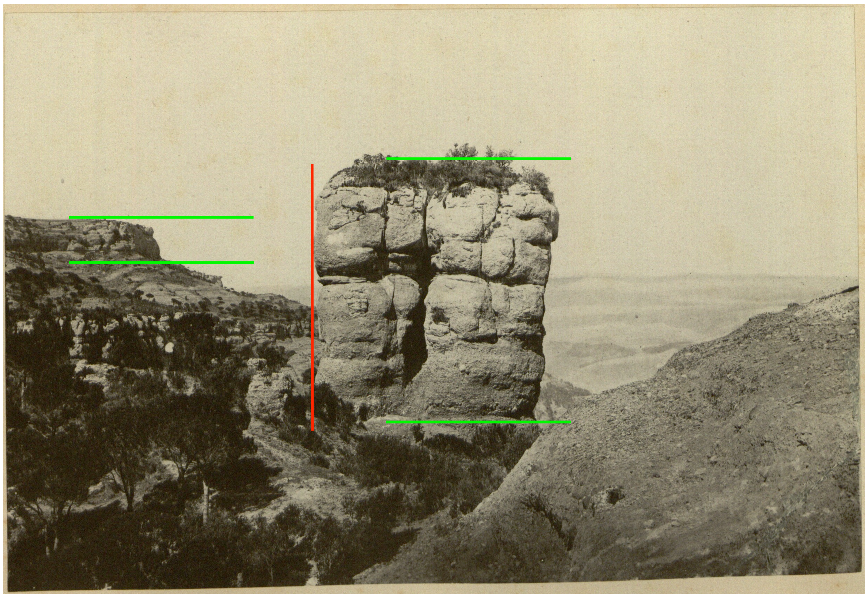
Tenint en compte que la taula fa 75 cm d'alçada, que la llibreria en fa 240 i les mesures que es poden fer sobre la foto surt, en aquest cas, una constant k que val 1.2205 i la segona circumferència que delimita les posicions possibles és la de la pàgina 11.

Tal i com es pot veure, hi ha un dels dos punts de tall de les circumferències que es pot descartar de forma immediata (queda entre la taula i la llibreria i és clar que la fotografia s'ha fet des d'un punt on es veuen els dos mobles un davant de l'altre) i l'altre punt té coordenades $(30.63, -10.11)$ i és el que aquest mètode proposa com a solució. Tenint en compte l'escala que s'ha utilitzat per establir les coordenades, aquest punt està a una distància d'uns 4.5 cm del que s'obtenia amb les enfilacions que, recordeu, era el punt $(30.18, -10.2)$ i que surt també a la imatge d'aquest segon càlcul.[4]

[4]La imatge conté un enllaç a l'adreça https://www.geogebra.org/m/anscxsry on es pot comprovar (el que coneixen com funciona GeoGebra) com s'han fet els càlculs.


40
35
30
25
20
15
10
5
0
-5
-10
-15
-5
5
10
15
20
25
30
35
40

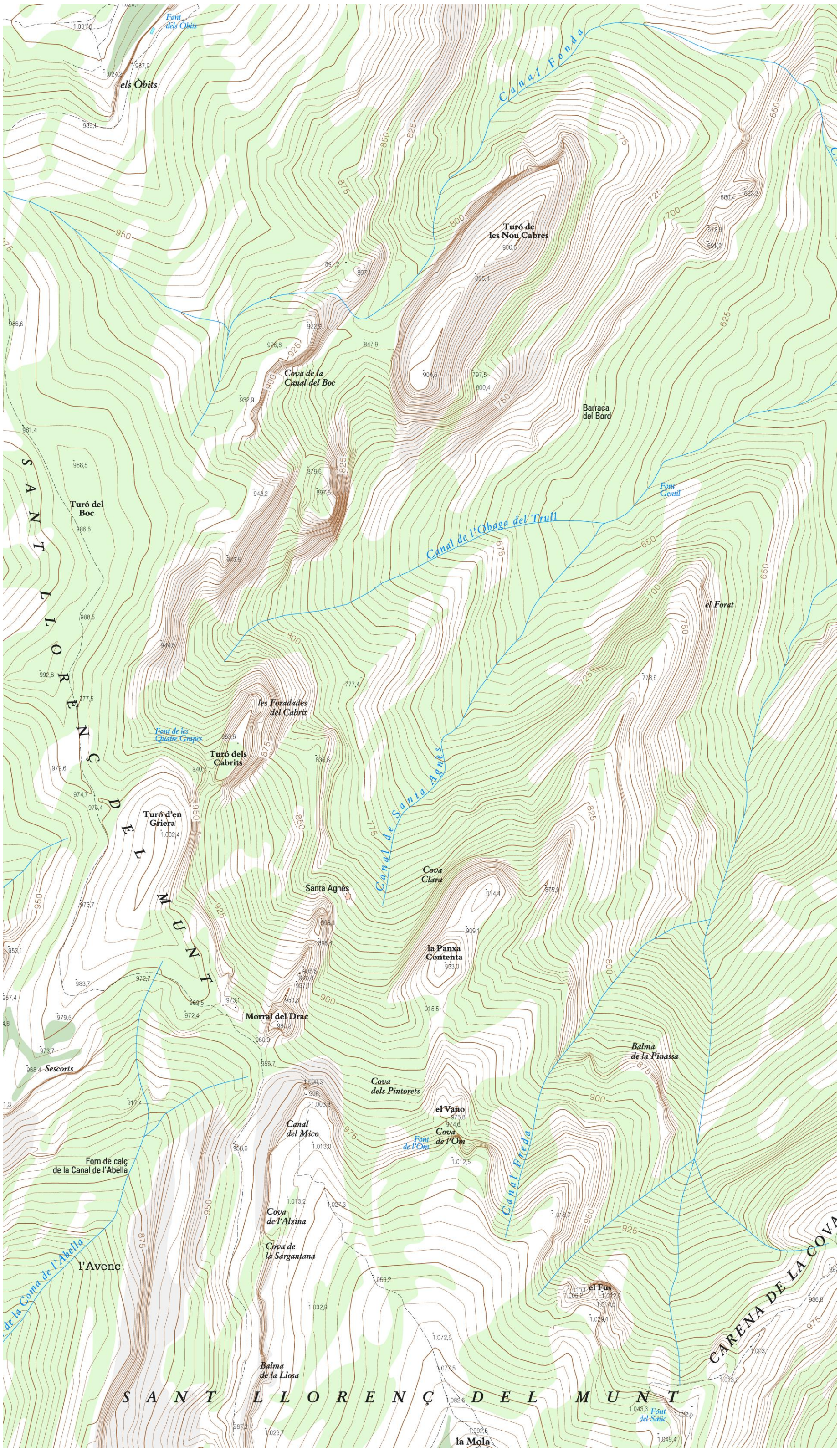
Vist que en l'experiment s'obtenen resultats raonables, es pot mirar d'aplicar aquests raonaments a la fotografia de la portada. Noteu que la situació és una mica més complicada que en el cas de l'habitació perquè no és fàcil localitzar, fora de la penya del Morral de Drac i del perfil de la zona que es coneix com Els Òbits (que són els temes principals de la foto), altres accidents amb els quals determinar enfilacions o proporcions entre alçades. Per tal d'obtenir resultats en aquest cas no he vist altra solució que combinar les dues tècniques: utilitzar les proporcions entre la penya del Morral i Els Òbits i deduir una enfilació (aproximada) entre la banda esquerra de la roca i el final del desnivell que s'aprecia al fons com a continuació del cingle d'Els Òbits.



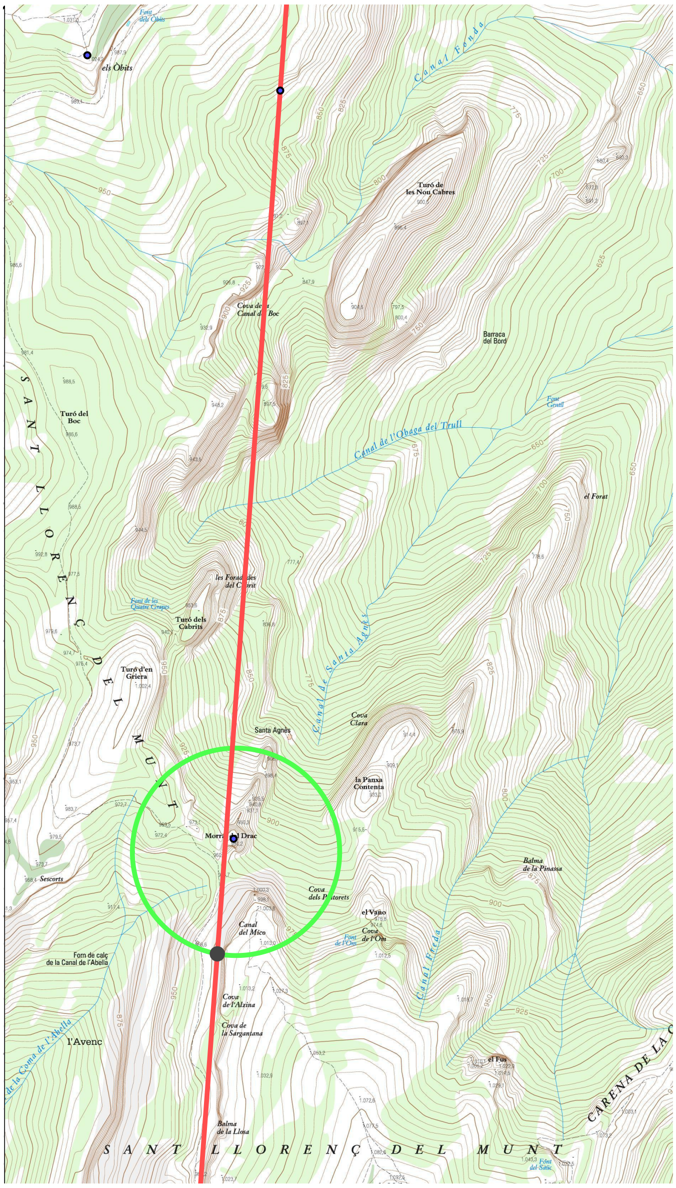
Amb aquestes dades s'obté una localització del punt de vista com una de les interseccions entre una circumferència (obtinguda a través de les proporcions) i una recta (determinada per l'enfilació). Com que les rectes i les circumferències també tenen, en general, dos punts d'intersecció caldrà, com abans, decidir quin dels dos s'ha de descartar però això no és un inconvenient massa greu tal i com ja s'ha vist.

Naturalment, sense un mapa de la zona on localitzar els punts que serveixen de referència no es pot continuar. L'Institut Cartogràfic i Geològic de Catalunya proporciona una aplicació (`http://www.icc.cat/appdownloads/`) a la xarxa des de la que es pot descarregar, en format `jpg` (i altres) la part seleccionada del mapa. La zona entre el pic de St. Llorenç del Munt i Els Òbits, on està situat el Morral de Drac, correspon a la imatge de la pàgina següent i és sobre la que he fet tots els càlculs.

Llegint la informació del mapa es pot estimar que el desnivell corresponent al penya-segat d'Els Òbits és d'uns 37 m. Per un altre costat, l'entrada


els Òbits
Font dels Òbits
Canal Fonda
Turó de les Nou Cabres
Cova de la Canal del Boc
Barraca del Bord
Font Gerard
Canal de l'Obaga del Trull
Turó del Boc
el Forat
les Foradades del Cabrit
Font de les Quatre Grapes
Turó dels Cabrits
Turó d'en Griera
Canal de Santa Agnès
Cova Clara
Santa Agnès
la Panxa Contenta
Morral del Drac
Balma de la Pinassa
Sescorts
Cova dels Pintorets
el Vaño
Cova de l'Om
Font de l'Om
Canal del Mico
Canal Freda
Forn de calç de la Canal de l'Abella
Cova de l'Alzina
Cova de la Sargantana
l'Avenc
de la Coma de l'Abella
el Fus
CARENA DE LA COVA
Balma de la Llosa
SANT LLORENÇ DEL MUNT
Font del Saüc
la Mola

a la Viquipèdia explica que el Morral del Drac està *format per dos grans blocs d'uns 32 m d'alçada.* Si es combina aquesta informació amb la que apareix a la fotografia, el paràmetre k que determina la circumferència on ha d'estar el punt de vista de la foto val 0.128. Per un altre costat, es pot *dibuixar* sobre el mapa la recta determinada per l'enfilació que es vol tenir en compte. D'aquesta forma s'obtindrà la situació de la imatge següent[5]

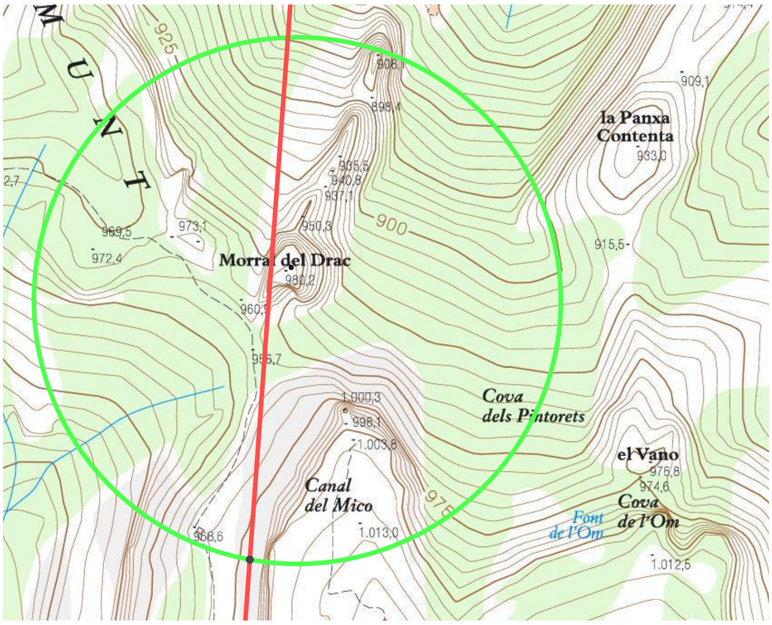


Aquí està clar que el punt que s'ha marcat és la solució del problema ja que

[5]Un altre cop, tots els càlculs s'han fet important el mapa en un full de treball de GeoGebra, marcant els punts de referència i afegint les dades corresponents a les mesures que s'han realitzat. La imatge conté l'enllaç `https://www.geogebra.org/m/ubxnnxsw`.

l'altra opció és del tot impossible.

Si s'amplia la imatge per posar de manifest on és el punt que s'ha calculat es té



I això permet tornar al mapa del ICGC per veure que les coordenades del punt que s'ha obtingut seran aproximadament 2.0148°E, 41.6443°N. Aquesta localització difereix en unes poques desenes de metres de la que correspon a la fotografia que vaig fer en la meva *expedició*, prèvia a qualsevol càlcul matemàtic, a la recerca del punt des d'on es va obtenir la imatge del 1878.

També es poden comparar les dues fotografies, una al costat de l'altra, encara que quedi clar que l'enquadrament no és exactament el mateix en els dos casos.

Epíleg

Com sempre que s'apliquen les matemàtiques a situacions reals, cal tenir molt present tota l'estona que els càlculs que es van fent, tot i admetre solucions tan exactes com es vulgui, sempre tenen un cert grau d'indeterminació que prové del fet que, necessàriament, s'està treballant amb models o aproximacions de la realitat. En aquests exemples que hem estat veient és obvi que totes les mesures que es prenen són, essencialment, aproximades. Ni tindrem alineaments perfectes, ni tindrem manera d'obtenir de forma tan precisa com es vulgui la majoria dels mesurament que s'han de fer. I en tot cas, hi ha una aproximació des de l'origen: com tots els aficionats a la fotografia saben, ni els objectius es comporten com l'obertura de la càmera fosca, ni les distàncies entre el centre de projecció i el pla de la fotografia són sempre les mateixes (com més separat del centre de la fotografia és un punt, més gran és la distància f). Els càlculs donen solucions raonables si la distància focal no és massa curta ja que, en aquesta situació, les distorsions esfèriques de l'objectiu no són significatives i les diferències entre els valors de f estan controlades.

Per un altre costat, en tot aquest muntatge apareix una altra qüestió òbvia (i típica): com s'ha de tractar el problema si es tenen més condicions de les necessàries? En general, si es poden localitzar tres, o més, enfilacions o proporcions entre alçades, i tenint en compte el caràcter aproximat de totes les restriccions, les equacions que apareixeran donaran, dos a dos, punts d'intersecció diferents o, dit d'una altra manera, el sistema d'equacions que apareixerà serà, gairebé segur, incompatible. Naturalment, si el mètode és suficientment bo, el que diu l'anterior no és que tenir més informació sigui un problema sinó que, si es van afegint observacions, s'aniran obtenint aproximacions del punt que s'està intentant localitzar que permetran afinar el resultat. Per tant, un mètode seriós el que farà serà substituir el pas d'obtenir la solució d'un sistema d'equacions pel d'obtenir el punt que està *més a* *prop* de ser una solució d'un sistema *sobre-determinat* (amb més equacions que incògnites). Aleshores, en comptes de tenir un problema amb tantes equacions com incògnites (un sistema lineal 2×2 quan s'utilitzen enfilacions o quadràtic quan s'utilitzen circumferències) es té un problema *d'optimització* (bastant fàcil quan intervenen només equacions lineals, però força més delicat quan apareixen equacions de grau superior) que no cal entrar ara a comentar ja que, potser, ens aniríem massa lluny.

Profesor jubilat,
Univ. Autònoma de Barcelona
gguaspb@gmail.com

Publicat el 23 de juny de 2021