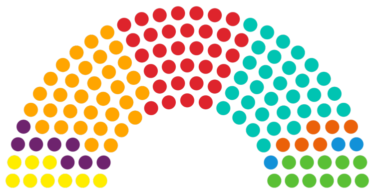
MAT^2

MATerials MATemàtics
Volum 2023, treball no. 1, 14 pp. ISSN: 1887-1097
Publicació electrònica de divulgació del Departament de Matemàtiques
de la Universitat Autònoma de Barcelona
www.mat.uab.cat/web/matmat

Desproporcions electorals. Com quantificar-les i analitzar les seves causes

Xavier Mora i Maria Reig



Molts col·lectius socials confien les seves decisions a un òrgan format per un conjunt més reduït de persones. En una situació d'aquest tipus sorgeix la pregunta de si l'òrgan en qüestió representa més o menys bé a tot el col·lectiu. Idealment, es tractaria que totes les opinions hi fossin presents en les mateixes proporcions que existeixen a tot el col·lectiu. Des de finals del segle XIX, molts països utilitzen procediments electorals que intenten acostar-se a aquest ideal. Tanmateix, sovint contenen elements que no hi ajuden gens, com ara una divisió en moltes circumscripcions de mida petita o bé llindars especials que cal assolir per a poder rebre un escó.

Davant d'això, és natural mirar de quantificar si un resultat electoral és més o menys desproporcionat i utilitzar aquesta quantificació per a analitzar com hi contribueixen les diferents causes de desproporció. Com veurem, la quantificació es pot aconseguir mitjançant diverses fórmules diferents. Tanmateix, a l'hora d'avaluar empíricament les diferents causes de desproporció aquestes diferents fórmules estan essencialment d'acord entre elles.

A continuació suposarem que hi ha un escenari de partits que permet classificar tant els candidats —pel partit a què pertanyen— com els electors —pel partit a què voten—. Noti's que aquest escenari exclou el cas de llistes obertes, que requereix un tractament més elaborat. En relació amb això, usarem la següent notació, on l'índex i descriu els diferents partits:

v	nombre total de vots vàlids a favor d'algun partit
v_i	nombre de vots vàlids favorables al partit i
n	nombre d'escons de l'òrgan de representació
n_i	nombre d'escons obtinguts pel partit i
v_0	nombre de vots en blanc

El nombre de vots en blanc v_0 intervindrà només en l'anomenada condició de llindar tal com s'aplica tant a Espanya com a Catalunya: només participen en el repartiment els partits i que assoleixen una determinada fracció dels vots vàlids; més concretament, els que compleixen $v_i \geq \alpha\,(v + v_0)$ amb $\alpha = 3\%$.

1 El punt de vista de Mirabeau

El 1789, en l'escenari previ a la Revolució Francesa, Honoré Gabriel Riquetti, comte de Mirabeau, explicava el concepte de representació proporcional per comparació amb la cartografia. D'un bon mapa esperem que les mesures sobre el paper —longituds i àrees— siguin proporcionals a les mesures reals sobre el terreny. Similarment, un òrgan de representació hauria de ser una mena d'imatge a escala de tot el col·lectiu. Més concretament, si en tot el col·lectiu una certa opinió està present en una certa proporció, llavors en l'òrgan de representació també hi hauria d'estar present en la mateixa proporció.

> Mirabeau havia tingut com a professor de matemàtiques a Joseph Louis Lagrange, que havia estudiat a fons el tema de la cartografia. En comú amb l'elecció d'un òrgan de representació, en cartografia també passa que la proporcionalitat exacta és impossible (vegi's per exemple [1]). Les raons són molt diferents: en un cas el problema és la curvatura de la superfície terrestre, en l'altre cas és la restricció que imposem als nombres n_i de ser enters (la qual cosa fa que la proporcionalitat exacta només sigui possible amb uns nombres de vots extremadament excepcionals). Però el que volem aconseguir és bastant el mateix: que les distorsions siguin com més petites millor.

Així doncs, la proporcionalitat exacta es compliria si l'abundància relativa de cada opinió i en el parlament fos la mateixa que en tota la societat, és a dir si es complís la igualtat

$$\frac{n_i}{n} = \frac{v_i}{v}, \quad \forall i. \tag{1}$$

La manca de proporcionalitat, és a dir, l'incompliment d'aquestes igualtats, es pot posar de manifest gràficament mitjançant els respectius gràfics de pastís de vots i d'escons. Per exemple, la figura 1 mostra aquests gràfics en el cas de les Eleccions al Parlament de Catalunya de 2021 [13]. Els diferents colors representen els diferents partits o coalicions (la identitat dels quals no especifiquem però es pot esbrinar si cal, ja que usem el color habitual de la imatge corporativa de cada partit). El color gris representa el conjunt de tots els partits que no obtenen cap escó. Si hi hagués proporcionalitat entre vots i escons, llavors els dos gràfics serien exactament el mateix.

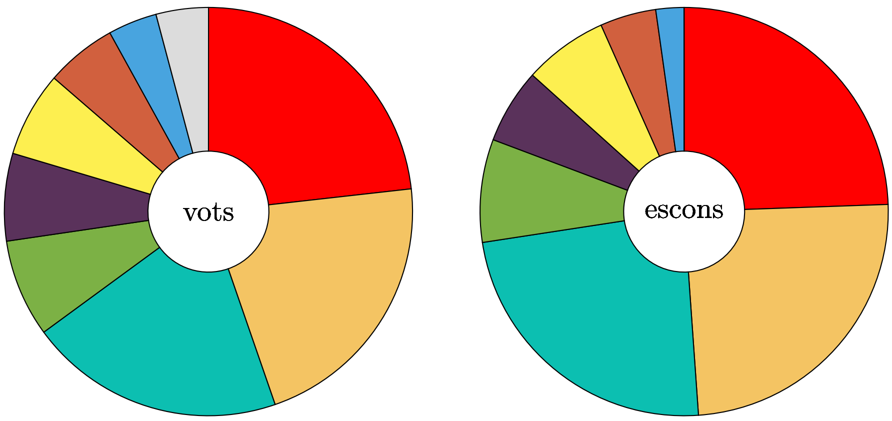


Figura 1: Distribucions de vots i escons entre partits en les Eleccions al Parlament de Catalunya de 2021

La figura 2 mostra el mateix tipus de gràfics en el cas de les eleccions espanyoles de novembre de 2019 al Congrés dels Diputats [16, 17]. En aquest cas hem començat per agrupar com un sol partit o coalició les diferents versions locals segons la circumscripció (com ara PSOE i PSC). Aquest agrupament serà especialment rellevant més endavant, quan considerem un escenari de circumscripció única, ja que llavors suposarem que aquestes diferents versions locals es presentarien juntes.

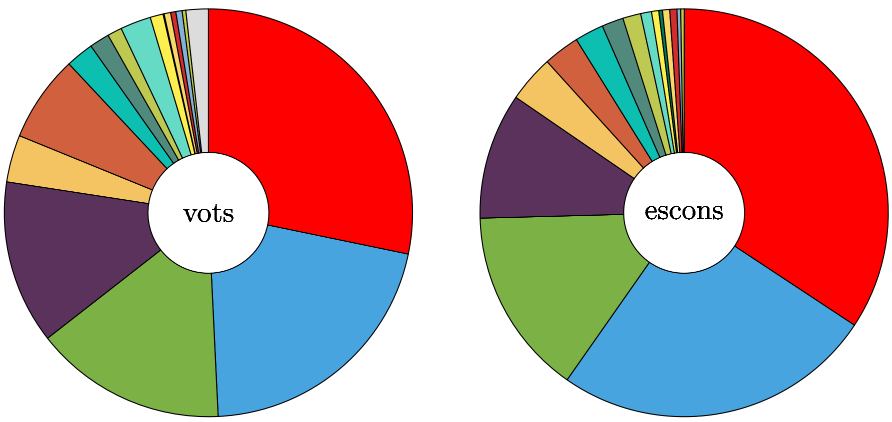


Figura 2: Distribucions de vots i escons entre partits en les eleccions espanyoles de novembre de 2019 al Congrés dels Diputats

Les formacions que en les Eleccions Generals espanyoles del novembre de 2019 van presentar diferents versions locals segons la circumscripció les hem agrupat com segueix: PSOE: Partido Socialista Obrero Español + Partit dels Socialistes de Catalunya; PP: Partido Popular + Foro (Astúries); UP: Unidas Podemos + En Comú Podem (Catalunya) + En Común (Galícia); MP:

Más País + Equo + Més Compromís (País Valencià) + Chunta Aragonesista (Aragó); ERC: Esquerra Republicana de Catalunya + Més Esquerra (Balears) + Esquerra Republicana del País Valencià.

És de notar que els resultats oficials de les Eleccions al Parlament de Catalunya de 2021 contenen un error en el cens d'electors: Segons el document [15], que detalla els vots des de l'estranger, el "censo de electores residentes ausentes que viven en el extranjero" (CERA) és de 255.164 electors, que sumats als 5.113.739 electors del "censo de electores residentes" (CER), dona un total de 5.368.903 electors. En canvi, els resultats oficials [13] donen un cens total és de 5.624.067 electors, que és el resultat de sumar una segona vegada els 255.164 electors CERA. Aquest error no té més conseqüència que alterar lleugerament el percentatge de participació (en lloc del 51.29 % que diu [14], el valor correcte és 56.41 %). En principi, també podria haver tingut conseqüències a l'hora d'aplicar la condició d'assolir el 3 % del cens (de la circumscripció que s'estigui considerant en cada moment) però a la pràctica no ha estat així.

Tant la figura 1 com la 2 mostren diferències prou visibles entre la distribució dels vots i el repartiment dels escons. Per tant, en els dos casos hi ha una desviació respecte a la proporcionalitat exacta. Però quin dels dos casos és més greu? Com podem quantificar aquesta manca de proporcionalitat i resumir-la en un nombre?

Una manera molt natural de fer-ho consisteix en considerar les diferències $(n_i/n) - (v_i/v)$ per a tots els partits i, i combinar-les de la mateixa manera que quan mesurem la magnitud d'un vector. Més concretament, podem considerar la fórmula següent (que escrivim de dues maneres equivalents):

$$A = \left[\sum_i \left(\frac{n_i}{n} - \frac{v_i}{v} \right)^2 \right]^{(1/2)} = \left[\sum_i \left(\frac{v_i}{v} \right)^2 \left(\frac{n_i\, v}{n\, v_i} - 1 \right)^2 \right]^{(1/2)} . \qquad (2)$$

Aquesta manera de mesurar les desproporcions electorals ja va ser considerada el 1910 per Louis Zivy († Auschwitz, 1943) professor de física i química, llavors a l'institut de Douai (vegi's [11, p. 537, nota 1]). En lloc de la fórmula precedent, Zivy no prenia l'arrel quadrada i el sumatori el multiplicava per n^2, però aquestes diferències no són essencials, sinó solament una qüestió de normalització. Posteriorment la mateixa idea va ser proposada per Michael Gallagher el 1991 [3], amb l'única diferència respecte a (2) que Gallagher divideix per 2 abans de prendre l'arrel quadrada. L'anomenat "índex de Gallagher" és doncs $\mathrm{Ga} = A/\sqrt{2}$.

La raó de ser d'aquesta petita variació és que així s'aconsegueix un índex que està sempre entre 0 i 1, la qual acotació s'obté fàcilment en desevolupar els quadrats de dintre del sumatori de (2). De tota manera, segons el context, nosaltres encara considerarem l'índex A definit per (2).

En els exemples de més amunt, els valors que s'obtenen per a l'índex de Gallagher són respectivament $\mathrm{Ga} = 4.74\%$ en el cas de les Eleccions al

Parlament de Catalunya de 2021 i Ga $=$ 6.60% en el cas de les eleccions espanyoles de novembre de 2019 al Congrés dels Diputats. Segons aquest índex, doncs, les darreres eleccions catalanes haurien estat més proporcionals que les darreres eleccions espanyoles.

Aquests valors han estat calculats amb els mateixos criteris d'agrupació de partits que hem usat en les figures 1 i 2: En primer lloc hem agrupat com un sol partit o coalició les diferents versions locals segons la circumscripció (la qual cosa només afecta al cas d'Espanya). I en segon lloc hem agrupat tots els partits que no obtenen cap escó. No costa gaire de veure que el resultat varia en funció de si es fan o no tals agrupacions (ja que $(x+y)^2 \neq x^2+y^2$).

2 El punt de vista de la igualtat de drets entre electors

En el fons, la proporcionalitat electoral és una qüestió d'igualtat de drets entre els diferents electors. Perquè les igualtats (1) són equivalents a les següents:

$$\frac{n_i}{v_i} = \frac{n}{v}, \quad \forall i. \tag{3}$$

I també a les següents:

$$\frac{n_i}{v_i} = \frac{n_j}{v_j}, \quad \forall i, j. \tag{4}$$

El quocient n_i/v_i correspon a repartir els n_i escons obtinguts pel partit i entre els v_i electors que l'han votat. Per tant, es pot dir que mesura la quantitat de representació obtinguda per cadascun d'aquests electors. I les igualtats (3) i (4) estan dient que tots els electors obtenen la mateixa quantitat de representació, independentment de si han votat un o altre partit.

Des d'aquest punt de vista, doncs, correspon quantificar la desproporció mitjançant una mesura de la desigualtat entre les quantitats de representació obtingudes pels diferents electors, és a dir, entre els quocients n_i/v_i *considerats cadascun d'ells v_i vegades*.

La desigualtat entre una col·lecció de nombres s'anomena en estadística dispersió. Una manera molt habitual de mesurar-la és la desviació típica. Tanmateix, en lloc de la desviació típica pròpiament dita, a continuació considerarem l'anomenada desviació típica relativa, que és la desviació típica dividida per la mitjana. En el cas que estem considerant, la mitjana és $\left(\sum_i v_i(n_i/v_i)\right)/v = n/v$, de manera que la desviació típica relativa pren la forma següent:

$$B = \frac{v}{n}\left[\sum_i \frac{v_i}{v}\left(\frac{n_i}{v_i} - \frac{n}{v}\right)^2\right]^{1/2} = \left[\sum_i \frac{v_i}{v}\left(\frac{n_i\, v}{n\, v_i} - 1\right)^2\right]^{1/2}. \tag{5}$$

Si en la primera expressió ometéssim el coeficient v/n que apareix a la seva esquerra, llavors tindríem la desviació típica pròpiament dita. Però el coeficient v/n és molt convenient, perquè llavors l'índex de desproporció B té la propietat següent: si multipliquem totes les n_i per un mateix factor (i per tant també multipliquem per aquest factor la seva suma n), llavors B manté el mateix valor. I similarment si multipliquem totes les v_i per un mateix factor.

Aquestes propietats són necessàries per a poder comparar adequadament eleccions de països diferents, com farem més avall, ja que els valors de n i de v poden variar molt d'un país a un altre.

Noti's que l'índex A de Zivy i Gallagher també compleix aquesta propietat d'invariància davant de canvis d'escala, com també serà el cas de la resta d'índexos de desproporció que introduirem més avall.

En els exemples de més amunt, els valors que s'obtenen són respectivament $B = 25.18\%$ en el cas de les Eleccions al Parlament de Catalunya de 2021 i $B = 29.98\%$ en el cas de les eleccions espanyoles de novembre de 2019 al Congrés dels Diputats. Així doncs, aquest índex també considera les darreres eleccions catalanes més proporcionals que les darreres eleccions espanyoles.

Com es pot veure, les segones expressions de les fórmules (2) i (5) són molt similars. L'únic que canvia és el coeficient de dintre del sumatori, que en el primer cas és $(v_i/v)^2$ i en el segon és v_i/v. Com que $(v_i/v)^2 < v_i/v$, sempre es compleix que $A < B$, i per tant $\mathrm{Ga} < B/\sqrt{2}$.

També és de notar que l'índex B és insensible a si s'agrupen o no els partits sense escons. En efecte, estem parlant dels partits que tenen $n_i = 0$, en el qual cas els termes corresponents del sumatori de la segona expressió de (5) es redueixen a v_i/v, de manera que aquest sumatori no fa altra cosa que sumar els vots d'aquests partits, tal com correspon pel fet d'estar-los agrupant.

Aquesta propietat s'adiu molt al punt de vista de la igualtat de drets entre electors, ja que correspon a comptar per igual tots els que no han obtingut cap representació, independentment de si han votat per un o altre partit.

3 Repartiments òptims

Si decidim mesurar la desproporció mitjançant un índex determinat, llavors és natural fer-se la pregunta següent: Donats uns nombres de vots v_i i el nombre total d'escons n, quins són els nombres enters n_i que minimitzen l'índex en qüestió sota la condició de sumar n?

El 1910 André Sainte-Laguë, llavors professor de matemàtiques a l'institut de Douai (company de Zivy) va donar resposta a aquesta pregunta en el cas de l'índex B [11, §3]. Concretament, va demostrar que *el repartiment d'escons que minimitza B s'obté mitjançant la que ara coneixem com a regla de Sainte-Laguë*: es calculen els quocients v_i/k, on $k = 1, 3, 5, 7, \ldots$, i se n'identifiquen els n valors més grans; n_i és llavors el nombre de quocients que han entrat del partit i. La demostració, que es basa en la identitat $m^2 = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2m - 1)$, es recull també a [5, §5.3].

En el mateix article, Sainte-Laguë inclou també un altre argument, que atribueix a Zivy, que mostra que *en el cas de l'índex A el repartiment òptim és el que s'obté mitjançant la coneguda regla de les restes majors*: cada partit rep inicialment tants escons com diu la part entera de $n\,v_i/v$; si el total d'escons assignats d'aquesta manera no arriba a n, llavors els escons pendents s'assignen als partits amb els valors més grans de les parts fraccionàries de $n\,v_i/v$ [11, §5, p. 537–538].

Davant d'aquest tipus de resultats, és natural preguntar-se si la regla de D'Hondt correspon a minimitzar alguna mesura de desproporció. Recordi's que aquesta regla consisteix a calcular els quocients v_i/k, on $k = 1, 2, 3, 4, \ldots$ identificant-ne els n valors més grans i prendre com a n_i el nombre de quocients que han entrat del partit i. Doncs bé, aquesta regla també equival a minimitzar una mesura de desproporció. Tal com va demostrar Léon Rouyer el 1901 [10], correspon a minimitzar la quantitat

$$C \;=\; \max_i \left(\frac{n_i\,v}{n\,v_i}\right) - 1. \tag{6}$$

Noti's que el cas de proporcionalitat exacta (3) implica $C = 0$. D'altra banda, com que n/v és la mitjana dels quocients n_i/v_i amb els pesos v_i, si no es compleix (3) llavors algun dels quocients n_i/v_i serà més gran que n/v, de manera que llavors tindrem $C > 0$. Per tant $C = 0$ es compleix si i només si hi ha proporcionalitat exacta. I un valor molt gran de C vol dir que hi ha algun partit i per al qual n_i/v_i és molt gran en comparació amb n/v. Per tant, l'índex C també es pot considerar com una mesura de desproporció.

Dit això, aquest índex només reflecteix el quocient n_i/v_i més gran; els altres poden desviar-se més o menys de la mitjana n/v sense que això quedi reflectit en el valor de C. A conseqüència d'això, el valor de C pot ser poc representatiu de tot el conjunt de partits. En aquest sentit són preferibles els índexos A i B que hem vist més amunt, o bé l'index D que introduïm a l'apartat següent.

Així doncs, tenim diverses regles que minimitzen la desproporció en algun o altre sentit. Tanmateix, cal ser conscient que si el territori està dividit en diverses circumscripcions, llavors, encara que fem un repartiment òptim en cadascuna d'elles la seva suma pot diferir molt del repartiment òptim global.

4 Altres índexs de desproporció

La desviació típica no és l'única manera possible de mesurar la dispersió d'una col·lecció de nombres. Fa un moment hem vist com a alternativa l'índex C, que es fixa només en la màxima desviació positiva respecte a la mitjana.

Una altra possibilitat és sumar els valors absoluts de totes les desviacions respecte a la mitjana, sense elevar-les al quadrat. Aquest índex de dispersió s'anomena desviació absoluta respecte la mitjana. De manera anàloga a com hem fet a (5), també tindrem en compte que el valor n_i/v_i es dona amb una freqüència v_i/v i el resultat el dividirem per la mitjana n/v. Això porta a l'expressió que apareix tot seguit en primer lloc:

$$D = \frac{1}{n}\sum_i v_i \left|\frac{n_i}{v_i} - \frac{n}{v}\right| = \sum_i \left|\frac{n_i}{n} - \frac{v_i}{v}\right| = \frac{1}{v}\sum_i n_i \left|\frac{v_i}{n_i} - \frac{v}{n}\right|. \tag{7}$$

Aquest índex va ser considerat el 1919 per Georg Pólya, que va notar que també és optimitzat per la regla de les restes majors [6, p. 359 i 362] (vegi's també [3]). Posteriorment va ser proposat per Douglas Rae (1967) [8] i per John Loosemore i Victor Hanby (1971) [4], amb l'única diferència que aquests autors divideixen el resultat respectivament pel nombre de partits i per 2. L'anomenat índex de Loosemore-Hanby és doncs $\mathrm{LH} = D/2$.

De l'expressió central de (7) i el fet que les diferències $(n_i/n) - (v_i/v)$ sumen zero se'n dedueix fàcilment que $D/2$ és la suma d'aquestes diferències per als partits i que resulten afavorits, és a dir, que obtenen $n_i/n > v_i/v$ (i també és la suma de les desviacions contràries $(v_i/v) - (n_i/n)$ per als desafavorits, és a dir, que obtenen $n_i/n < v_i/v$). D'altra banda, també es comprova fàcilment que $\mathrm{LH} = D/2$ està sempre entre 0 i 1. El seu complement $1 - \mathrm{LH}$ va ser proposat per Richard Rose (1984) com a índex de proporcionalitat [9].

En els exemples que hem donat abans, surt $\mathrm{LH} = 8.06\%$ en el cas de les Eleccions al Parlament de Catalunya de 2021 i $\mathrm{LH} = 11.38\%$ en el cas de les eleccions espanyoles de novembre de 2019 al Congrés dels Diputats. Una vegada més, les darreres eleccions catalanes apareixen com més proporcionals que les darreres eleccions espanyoles.

Com en altres casos, a (7) hem donat diverses expressions equivalents. Tanmateix, en aquest cas això és especialment interessant, ja que les tres expressions que donem corresponen a tres punts de vista en principi molt diferents. La primera expressió correspon al punt de vista dels electors, ja que considera els nombres n_i/v_i repetits cadascun d'ells v_i vegades. Similarment, la tercera expressió correspon al punt de vista dels elegits, ja que considera els nombres v_i/n_i repetits cadascun d'ells n_i vegades. Aquests nombres es poden interpretar com la quantitat d'electors que són representats per cada diputat del partit i. I l'expressió central correspon al punt de vista de Mirabeau que hem introduït a l'apartat §1. D'aquest punt de vista en podem dir també el punt de vista dels partits, ja que cada i es considera una sola vegada.

El fet que aquí coincideixin els tres punts de vista és una peculiaritat bastant exclusiva de la desviació absoluta respecte la mitjana (vegi's [6, §4]). Amb la desviació típica ja hem vist que el punt de vista dels electors —índex B— no coincideix pas amb el punt de vista dels partits —índex A—. I el punt de vista dels elegits també condueix a una regla diferent, identificada per Sainte-Laguë a [11, §5, p. 535–537] i introduïda independentment poc després, el 1911, per Joseph A. Hill (vegi's [7, §16.8]).

En relació amb això, cal tenir en compte que els que tenen dret a un tractament igual no són els partits ni els diputats, sinó els electors. Per tant, en principi correspon adoptar el punt de vista dels electors. És a dir, mesurar la desigualtat dels quocients n_i/v_i repetits cadascun d'ells v_i vegades. Dels índexs que hem vist fins aquí n'hi ha tres que són d'aquest tipus, a saber, la desviació típica relativa B, la desviació màxima (respecte a la mitjana) C i la desviació absoluta (també respecte a la mitjana) D.

En comú amb B, i a diferència de A, els índexs C i D també són insensibles a si s'agrupen o no els partits que no reben escons, la qual propietat es comprova sense dificultat.

Els índexs que hem presentat fins aquí no esgoten pas totes les possibilitats, ja que encara hi ha altres maneres de mesurar la desigualtat d'una col·lecció de nombres, com ara l'anomenat coeficient de Gini, molt utilitzat per a mesurar la desigualtat en la distribució de la riquesa, o un altre índex que està relacionat amb el concepte d'entropia de la teoria de la informació. Tanmateix, per a examinar empíricament la importància relativa de les diferents causes de desproporció ens bastaran els índexs B i $\mathrm{LH} = D/2$. L'índex A el deixem de banda perquè el seu valor depèn de si s'agrupen o no els partits que no reben escons. I també deixem de banda l'índex C, perquè, tal com hem comentat més amunt, no és prou representatiu del conjunt de tots els partits.

5 Avaluació empírica de les causes de desproporció

En aquesta secció utilitzem els índexs B i $\mathrm{LH} = D/2$ per a avaluar empíricament la importància relativa de les diferents causes de desproporció. Més concretament, prenem els exemples introduïts més amunt i considerem l'efecte de la divisió en circumscripcions (*DC*), de la condició de llindar (*Ll*) i de la regla de repartiment enter (*Rgl*; DH indica la regla de D'Hondt, SL indica la de Sainte-Laguë). D'altra banda, també examinem el valor que prenen aquests índexs en altres països, concretament els Països Baixos, Alemanya i el Regne Unit.

Com hem fet fins ara, agrupem com un sol partit o coalició les diferents versions locals segons la circumscripció (en particular, en el cas d'Alemanya agrupem la CDU junt amb la CSU). En els escenaris de circumscripció única estem suposant que aquestes diferents versions locals es presentarien juntes. A més d'això, en segon lloc agruparíem tots els partits que no obtenen cap escó; tal com hem dit més amunt, però, els índexs concrets que estem considerant no canvien amb aquesta segona agrupació. Els resultats es mostren en les taules 1–3.

	DC	*Ll*	*Rgl*	*B*	LH
a	sí	sí	DH	25.18 %	8.06 %
b	no	sí	DH	21.09 %	4.66 %
c	sí	no	DH	19.87 %	6.58 %
d	no	no	DH	12.98 %	2.88 %
e	sí	sí	SL	15.05 %	3.44 %
f	no	sí	SL	20.97 %	4.40 %
g	sí	no	SL	14.32 %	3.16 %
h	no	no	SL	11.08 %	1.70 %

Taula 1: Eleccions al Parlament de Catalunya 2021

	DC	*Ll*	*Rgl*	*B*	LH
a	sí	sí	DH	29.98 %	11.38 %
b	no	sí	DH	36.89 %	11.96 %
c	sí	no	DH	29.98 %	11.38 %
d	no	no	DH	11.34 %	2.28 %
e	sí	sí	SL	21.07 %	6.16 %
f	no	sí	SL	36.87 %	11.96 %
g	sí	no	SL	21.07 %	6.16 %
h	no	no	SL	9.96 %	1.09 %

Taula 2: Eleccions espanyoles al Congrés dels Diputats, nov 2019

País	*B*	LH
Països Baixos 2021	16.07 %	3.76 %
Catalunya 2021	25.18 %	8.06 %
Alemanya 2021	30.73 %	8.62 %
Espanya nov 2019	29.98 %	11.38 %
Regne Unit 2019	47.02 %	17.22 %

Taula 3: Comparació de diferents països

5.1 En la taula 1 es pot apreciar que *els dos índexs B i LH no apunten sempre en la mateixa direcció.* Així, segons l'índex B l'escenari `c` (com l'actual però sense la condició de llindar) seria més proporcional que l'escenari `b` (com l'actual però amb circumscripció única); en canvi, segons l'index LH `b` seria més proporcional que `c`. Això no és d'estranyar, ja que no deixen de ser índexs diferents. *Tanmateix,* també es pot apreciar que *en general solen estar d'acord.*

5.2 A la taula 2 crida l'atenció el fet que no hi hagi variació entre els escenaris `a` i `c` ni entre `e` i `g`. Això es deu a què no hi ha cap partit que deixi d'assolir escons a causa del requisit de superar el llindar del 3 %, de manera que si ometem aquest requisit els resultats són exactament els mateixos. *El requisit d'assolir el llindar només pot jugar un paper en circumscripcions prou grans.* Això ho podem argumentar com segueix: com que estem considerant regles de proporcionalitat aproximada, una fracció determinada dels vots —com ara el 3%— equival aproximadament a la mateixa fracció dels escons, la qual cosa no es traduirà en un escó a no ser que el nombre total d'escons (de la circumscripció) sigui prou gran. Aquesta idea general es pot convertir en acotacions més precises que depenen de si estem considerant la regla de D'Hondt o la de Sainte-Laguë (vegi's, per exemple, [5, §3.3]).

En relació amb això, a la taula 1 sí que hi ha variació entre els escenaris `a` i `c` i entre `e` i `g`. Aquesta variació té lloc a la circumscripció de Barcelona, que té 85 escons, de manera que un 3 % correspon aproximadament a uns 2 o 3 escons.

5.3 Una altra cosa que crida l'atenció en la taula 2 és el fet que l'escenari `b` de circumscripció única (tot mantenint el requisit de llindar) resulta menys proporcional que l'escenari `a` de l'actual divisió en 52 circumscripcions (i similarment, en el cas de la regla de Sainte-Laguë, l'escenari `f` resulta pitjor que `e`). Això es deu a l'existència de partits d'àmbit local, és a dir que només es presenten i obtenen vots en unes poques circumscripcions, de manera que el requisit de llindar el compleixen en alguna d'aquestes circumscripcions però no a nivell global.

En el cas de Catalunya (taula 1) amb la regla de Sainte-Laguë, l'escenari `f` també resulta menys proporcional que `e` (i que `g`). També en aquest cas es deu a un partit (PDeCAT) que no compleix el requisit de llindar a nivell global, però sí a nivell local en alguna circumscripció.

En qualsevol cas, es constata que *la circumscripció única no millora la proporcionalitat si no se suprimeix també el requisit de llindar.*

5.4 Pel que fa a l'efecte de la regla de repartiment enter, veiem que en les taules 1 i 2 *la regla de Sainte-Laguë hi obté sempre millor qualificació que la de D'Hondt.* L'única excepció és el cas d'Espanya amb circumscripció única i condició de llindar, en què les dues regles —taula 2, escenaris b i f— donen el mateix valor de LH, tot i que els repartiments són diferents. (En aquest cas el repartiment de Sainte-Laguë coincideix amb el de les restes majors i minimitza l'índex LH si es prescindeix dels vots a partits que no compleixen la condició de llindar; aquest índex val llavors 0.61%, mentre que en el cas de D'Hondt val 0.93%.)

El fet que la regla de Sainte-Laguë doni millors valors de B no és cap sorpresa, ja que, segons hem esmentat més amunt, aquesta regla correspon precisament a minimitzar el valor de B. Tanmateix, en aquests exemples la regla de Sainte-Laguë també és més proporcional o igual que la de D'Hondt des del punt de vista de l'índex LH, la qual cosa no està pas assegurada a priori.

5.5 Quina de les dues modificacions següents respecte al sistema vigent milloraria més la proporcionalitat? d: circumscripció única sense condició de llindar, tot mantenint la regla de D'Hondt? o bé e: adopció de la regla de Sainte-Laguë, tot mantenint la divisió en circumscripcions i la condició de llindar? Com es pot apreciar en les taules 1 i 2, d'aquestes dues modificacions la més profitosa seria clarament l'opció d.

Certament, el millor seria combinar aquestes dues modificacions (escenari h). Tanmateix, si ens fessin escollir entre una o l'altra, llavors *surt més a compte eliminar la divisió en circumscripcions i la condició de llindar que adoptar la regla de Sainte-Laguë en lloc de la de D'Hondt.*

En relació amb això, es pot observar que en els dos escenaris de circumscripció única sense condició de llindar, és a dir, tant d (regla de D'Hondt) com h (regla de Sainte-Laguë), les eleccions al Congrés de Diputats espanyol obtenen millor puntuació que les del Parlament català. La raó d'això és simplement que el primer té molts més escons que el segon, la qual cosa sempre permet més proporcionalitat. Així, per exemple, en l'escenari d de la taula 1 si en lloc de 135 escons, que són els que té el Parlament de Catalunya, en repartim 350, com té el Congrés dels Diputats, llavors els índexs B i LH prenen respectivament els valors 10.34 % i 1.55 %, similars i de fet millors que els de l'escenari d de la taula 2.

5.6 Quant a la comparació entre països, el país que resulta més proporcional són els Països Baixos, la qual cosa demostra clarament que *la regla de D'Hondt és perfectament compatible amb una bona proporcionalitat.* Aquest bon resultat dels Països Baixos es deu al fet que no divideixen el país en diferents circumscripcions ni tampoc apliquen cap requisit de llindar.

En el cas d'Alemanya el resultat és pitjor del que es podria esperar, ja que en principi els escons totals de cada partit es determinen mitjançant la regla de Sainte-Laguë aplicada a nivell global; tanmateix, cal tenir en compte que abans apliquen una condició de llindar del 5 % (i que la llei que es va aplicar el 2021 permetia certes desviacions respecte el repartiment global de Sainte-Laguë per tal d'evitar que la cambra resulti massa gran). Òbviament, els valors de B i LH són millors si es prescindeix dels vots a partits que no assoleixen el llindar (concretament, llavors surt $B = 0.99\,\%$ i $\mathrm{LH} = 0.43\,\%$). Tanmateix, si realment interessa la proporcionalitat, llavors cal tenir en compte tots els electors que han emès un vot vàlid per algun partit.

Finalment, en el cas del Regne Unit no és gens estrany que resulti poc proporcional, ja que utilitza un sistema majoritari.

5.7 Possiblement algun lector trobi a faltar que diguem com queden repartits els escons en cadascun dels escenaris de les taules 1 i 2. Tanmateix, aquesta informació (per si sola) no és la que importa per a valorar si un mètode és més o menys just que un altre. Perquè la justícia no va de si tal o qual partit obté més o menys escons, sinó dels quocients entre escons i vots —que es poden interpretar com la quantitat de representació que obtenen els respectius electors— i de si aquests quocients s'assemblen més o menys entre tots els electors, que és el que mesuren els índexs B i LH, cadascun a la seva manera.

Aquest article és el resultat d'una estada de pràctiques que la Maria Reig va fer al Departament de Matemàtiques el juliol de 2021.

Referències

[1] Maite Fabregat, 2017. *Conformal Cartographic Representations.* Treball de Fi de Grau. Univ. Barcelona, Fac. Matemàtiques i Informàtica.

[2] David M. Farrell, 2011. *Electoral Systems. A Comparative Introduction*, 2a edició. Palgrave Macmillan.

[3] Michael Gallagher, 1991. Proportionality, disproportionality and electoral systems. *Electoral Studies*, 10: 33–51.

[4] John Loosemore, Victor J. Hanby, 1971. The thoretical limits of maximum distortion: some analytic expressions for electoral systems. *British Journal of Political Science*, 1: 467–477.

[5] Xavier Mora, 2013. La regla de Jefferson - D'Hondt i les seves alternatives. *Materials Matemàtics*, 2013, n. 4.

[6] Georg Pólya, 1919. Sur la représentation proportionelle en matière électorale. *L'Enseignement Mathématique*, 20: 355–379.

[7] Friedirich Pukelsheim, 2017. *Proportional Representation*, 2a edició. Springer.

[8] Douglas W. Rae, 1967. *The Political Consequences of Electoral Laws.* Yale Univ. Press.

[9] Richard Rose, 1984. Electoral systems: A question of degree or of principle? *Choosing an Electoral System: Issues and Alternatives* (ed. A. Lijphart, B. Grofman; New York: Praeger) p. 73–81.

[10] Léon Rouyer, 1901. *Théorie mathématique de la représentation proportionnelle*. Ligue pour la Représentation Proportionnelle, manuscript, 12p.

[11] André Sainte Laguë, 1910. La représentation proportionelle et la méthode des moindres carrés. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure* (3) 27: 529–542.

Les referències que segueixen inclouen les fonts de dades.

[12] Alemanya: Bundestagswahl 2021. Ergebnisse.

[13] Catalunya: Eleccions al Parlament, febrer 2021. Resultats oficials.

[14] Catalunya: Eleccions al Parlament, febrer 2021. Resultats oficials (web).

[15] Catalunya: Eleccions al Parlament, febrer 2021. Resultats oficials del vot a l'estranger.

[16] Espanya: Eleccions Generals, novembre 2019. Resultats oficials.

[17] Espanya: Eleccions Generals, novembre 2019. Resultats oficials. Errata.

[18] Països Baixos: Kiesraad. Verkiezingen. Tweede Kamer 17 maart 2021.

[19] Regne Unit: UK Parliament. General Election 2019: full results and analysis.

Xavier Mora
Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
Xavier.Mora@uab.cat

Maria Reig
Grau de Matemàtiques (2018–2022)
Universitat Autònoma de Barcelona
MariaReigPerez@gmail.com

Publicat el 1 de març de 2023