MAT²
**MATerials MATemàtics**
Volum 2024, treball no. 2, 21 pp. ISSN: 1887-1097
Publicació electrònica de divulgació del Departament de Matemàtiques
de la Universitat Autònoma de Barcelona
www.mat.uab.cat/web/matmat

# No hi ha matemàtiques sense geometria*

**Gregori Guasp**

Arquimedes pensatiu
Domenico Fetti (segle XVII)

Sens dubte, un dels conceptes més reeixits de les matemàtiques és el de *pas al límit* la formalització del qual dona pas a les matemàtiques modernes. Tot i la *modernitat* de la versió refinada del concepte de límit, la idea bàsica de les aproximacions successives amb un grau de precisió tant gran com es vulgui, com en la majoria de conceptes fonamentals, està present en les matemàtiques des d'èpoques molt antigues. Aquestes pàgines mostren com algunes de les construccions clàssiques de la geometria ja contenen una part de les idees que permeten anar més enllà de les magnituds determinades per la regla i el compàs. És en aquest sentit que el títol vol expressar que no es poden entendre les matemàtiques actuals sense tenir en compte els problemes de la geometria clàssica, i les solucions obtingudes, com a primer model de l'estructura del món que ens envolta.

Abans de començar, dir que aquestes pàgines s'han escrit tenint sobre la taula un exemplar (que va ser del meu avi) de l'edició de 1898 dels *Éléments de Géométrie* d'Eugène Rouché i Ch. de Comberousse [2], un text dels *famosos* a finals del XIX i principis del XX.

Com que no queda bé una introducció sense explicar què vindrà a continuació, unes ratlles dedicades a fer una mica de resum d'aquest escrit. Si seguiu llegint, veureu que les dues primeres seccions estan dedicades a la circumferència i el cercle amb l'aparició estel·lar d'un dels números més famosos com és $\pi$ i la deducció de les fórmules per al perímetre i l'àrea com límits d'aproximacions al cercle per polígons (desviant-nos un moment per veure

*Aquest treball és una revisió de la xerrada de l'autor a la VII Jornada "Les matemàtiques entre la secundària i la universitat", El món és geomètric: El paper de la geometria a l'ensenyament, organitzada per l'ICE de la Univ. Autònoma de Barcelona l'abril de 2016.

com es poden calcular bones aproximacions d'aquest número fent càlculs on només intervenen mitjanes entre quantitats conegudes). En els dos casos no hi ha cap consideració prèvia a fer més enllà del Teorema de Pitàgores o del fet que l'àrea d'un triangle és la meitat del producte de la base per l'alçada (o, dit d'una altra manera, la meitat de l'àrea del paral·lelogram que té la mateixa base i alçada) juntament amb la condició que la suma dels angles d'un triangle és equivalent a dos angles rectes.

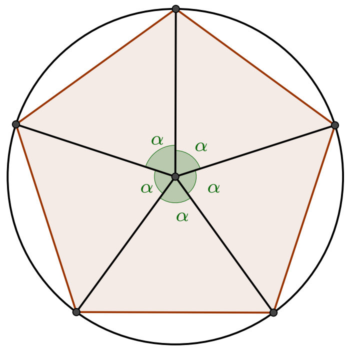
El tercer capítol de la història és una mica més complicat ja que es tracta de determinar l'àrea d'un segment de paràbola (dit d'una altra manera, l'àrea limitada per una paràbola i una de les seves cordes) seguint, essencialment, la construcció que ja va fer Arquimedes i que es pot considerar com la precursora de les integrals. Veurem com, sense utilitzar cap tecnologia especialment sofisticada, es poden demostrar les propietats essencials d'una paràbola, entre aquestes potser la més remarcable sigui el fet de poder considerar el punts d'aquesta corba com els que tenen una *altura* respecte una qualsevol de les seves tangents que creix quadràticament respecte la distància del seu peu al punt de tangència. Com és natural, haurem començat pensant que una paràbola és el lloc dels punts que equidistant d'una certa recta directriu i un punt fix o focus. Enmig de tot això apareixeran propietats de les tangents a una paràbola que sovint es pensa que no es poden establir sense utilitzar el càlcul diferencial com és, per exemple, la constatació del *pendent* d'una recta tangent en funció de la distància del punt de tangència al vèrtex de la paràbola.

El resultat final que obtingué Arquimedes és que l'àrea d'un segment de paràbola és igual a quatre terços de l'àrea del triangle determinat per la corda corresponent i el punt de la corba més allunyat. A aquest resultat s'hi arriba obtenint aproximacions per defecte i per excés que difereixen entre si tan poc com es vulgui si s'arriba prou lluny en el procés. A més, aquesta aproximació té la forma que avui dia en diem *sèrie geomètrica* i el límit que s'obté és la *suma (infinita)* de la sèrie.

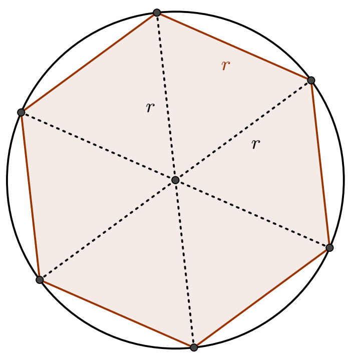
## 1 El perímetre del cercle

La primera etapa d'aquesta història la podem posar, sens dubte, en el mecanisme per a l'obtenció de la longitud de la circumferència d'un cercle en funció del seu radi (o, si es prefereix, del seu diàmetre). La forma d'obtenir aquesta mesura com el producte d'una constant universal pel valor del diàmetre (o dos cops el radi) parteix de la constatació inicial del fet que aquesta longitud es podrà aproximar, tant com es vulgui, triant el valor corresponent a un polígon regular, inscrit en el cercle, amb el nombre de costats prou gran.

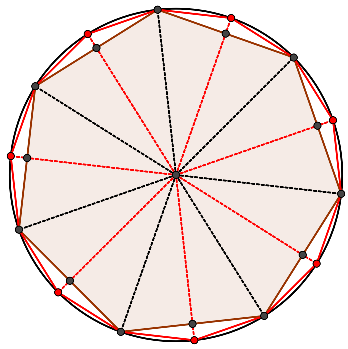
Dit això, queda clar que el primer punt clau, per assegurar la validesa de l'argument, consistirà a veure que és possible inscriure, en un cercle, polígons regulars amb un nombre de costats arbitràriament gran. Noteu que inscriure un polígon regular de $n$ costats en un cercle serà equivalent a dividir en $n$ parts iguals la seva circumferència o, equivalentment, obtenir un angle $\alpha$ tal que $n$ cops $\alpha$ doni una volta completa.




Si aquesta construcció és compatible amb les nostres hipòtesis (per exemple, si es dona per fet que el angles es poden mesurar assignant un valor numèric real a cada angle i suposant que aquesta relació és reversible, de forma que a cada quantitat numèrica li correspon un angle) no cal fer més comentaris. Però si som una mica més estrictes amb el tipus de construccions admissibles (per exemple si estem suposant, com el grecs antics, que qualsevol construcció que es vulgui fer s'ha de poder realitzar amb regle i compàs) potser hi ha valors de $n$ per als quals no sabrem *fabricar* el polígon corresponent. En qualsevol cas, el que és segur és que, com a mínim, es pot inscriure en qualsevol circumferència un hexàgon regular ja que el seu costat ha de ser igual al radi, donat que en dividir per 6 una volta completa s'obté l'angle del triangle equilàter i aquesta construcció és admissible en el context *clàssic*.




Un cop obtingut l'hexàgon (o qualsevol altre polígon regular), es pot anar duplicant el nombre de costats del polígon inscrit afegint els vèrtexs de la circumferència determinats pels radis que són mediatriu de cada un dels costats, tal i com es pot veure en l'esquema següent.

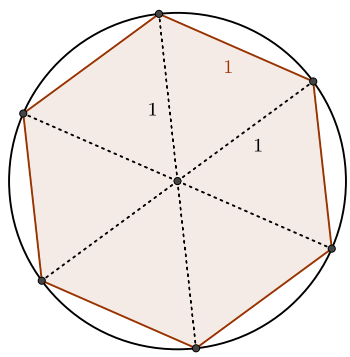


Cal remarcar que també es poden obtenir aproximacions per excés de $\pi$ fent construccions equivalents amb els polígons circumscrits al cercle i que els càlculs corresponents són del tot anàlegs als que trobareu en aquest escrit. Si es tenen en compte aquestes aproximacions s'obté un parell de successions que aproximen per sobre i per sota el valor d'aquesta constant.

## 1.1 El *càlcul* de $\pi$

Aquesta forma d'obtenir la fórmula del perímetre d'un cercle té una conseqüència que, en un principi, podria semblar inesperada. El procés dona un algoritme per a poder determinar, numèricament, una aproximació prou bona del valor de $\pi$ sense haver de prendre mides sobre cap objecte físic.

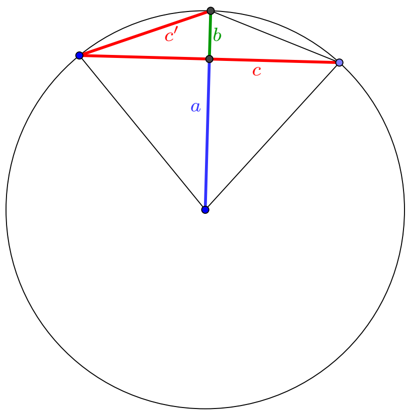
Si en una primera aproximació es considera el perímetre d'un hexàgon inscrit en la circumferència de radi 1 (diàmetre 2), el valor d'aquesta longitud serà 6 (cada costat de l'hexàgon és igual al radi) i, per tant, s'obtindrà una primera estimació $\pi \sim 3$.




A partir d'aquesta primera estimació, el valor es va refinant duplicant el nombre de costats del polígon inscrit, en un procés iteratiu que es pot repetir tants cops com es vulgui. En aquest procés, cada cop que es duplica el nombre de costats, el nou costat $c'$ del polígon es pot obtenir a partir del valor anterior per la fórmula[1]

$$c' = \sqrt{2 - \sqrt{4 - c^2}} = \frac{c}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - c^2}}}$$

Fet que es pot comprovar observant l'esquema següent.




i utilitzant les relacions

$$\begin{aligned} b &= 1 - a \\ (c')^2 &= (c/2)^2 + b^2 \\ 1 &= (c/2)^2 + a^2 \end{aligned}$$

que se'n desprenen. Caldrà tenir en compte que cada un dels radis que s'afegeixin en el procés de duplicació és mediatriu del costat original $c$, es pot considerar dividit en dues parts $a$ i $b$ (per això $a + b = 1$), i observar els triangles rectangles que apareixen (T. de Pitàgores).

Noteu que, per a poder realitzar els càlculs, caldrà tenir també un bon mètode per calcular/aproximar arrels quadrades. En abstracte, l'arrel quadrada és una de les operacions possibles en les construccions de regle i compàs, però els resultats d'aquestes operacions donen mesures irracionals i, per tant, no es poden donar de forma exacta amb fraccions. Tot i aquest inconvenient, és ben conegut des de molt antic[2] que, un cop es coneix una certa

[1]Per fer càlculs, sol ser millor la segona expressió ja que acumula menys error d'arrodoniment.

[2]Aquesta forma de calcular, coneguda com *mètode babilònic*, apareix en els treballs d'Heró d'Alexandria (10–75 dC) i és la mateixa que s'obté quan s'aplica el *mètode de Newton* (aproximació per les tangents) a la funció $f(x) = x^2 - a$. El mètode general va millorant l'aproximació d'una solució de l'equació $f(x) = 0$ aplicant la fórmula $x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ que, en el cas d'una arrel quadrada, és

$$x - \frac{x^2 - a}{2\,x} = \frac{x + \frac{a}{x}}{2}.$$

aproximació $x$ de l'arrel quadrada d'un nombre $a$ ($x \sim \sqrt{a}$ ), aquesta estimació es pot millorar de forma substancial *prenent el valor de la mitjana entre* $x$ *i* $a/x$ *o, posat com a fórmula, calculant* $\left(x + \frac{a}{x}\right)/2$ (ja que obtenir $\sqrt{a}$ és equivalent a obtenir un valor $x$ per al que $x = (a/x)$). I en aquest mètode les úniques operacions que apareixen són sumes i divisions. Això vol dir que fins i tot a ma, proveïts d'un bon raig de paciència, podem anar calculant aproximacions de $\pi$.

Si es vol estalviar una mica de temps, o sou aficionats a les *calculadores*, el codi següent (que podeu adaptar al vostre llenguatge de programació favorit)

```
def aprxsqr(x,n):
    ax=1
    for i in [1..n]:
        ax=(ax+x/ax)/2
    return ax
```

permet aproximar arrels quadrades i es pot utilitzar en la seqüència d'instruccions següent

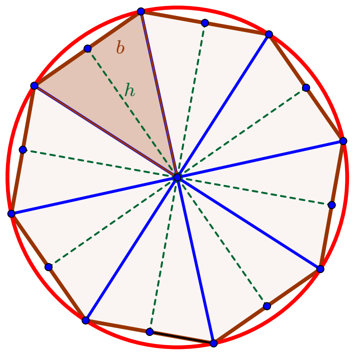
```
ncsts=6
lngcsts=1.
smperim=ncsts*lngcsts/2
print('Costats','Longitut','Aprox')
print(ncsts, lngcsts, smperim)
for i in [1..4]:
    ncsts=2*ncsts
    lngcsts=lngcsts/(aprxsqr(2+aprxsqr(4-lngcsts^2,4),4))
    smperim=ncsts*lngcsts/2
    print(ncsts, lngcsts.n(digits=5), smperim.n(digits=5))
```

per veure com l'aproximació de $\pi$ que surt, considerant el perímetre del polígon regular de 96 costats inscrit en el cercle de radi 1, és 3.1410 . L'enllaç que hi ha en aquest text accedeix a una pàgina on podeu veure els resultats que s'obtenen aplicant aquest algoritme.

Si voleu veure més detalls d'aquest mètode d'aproximació de $\pi$ i d'altres que apareixen utilitzant diferents punts de vista podeu consultar [1, §3.2] i les referències que conté.

## 2 L'àrea d'un cercle

Si es vol mesurar l'àrea del cercle, es pot aplicar el mateix esquema d'aproximació per polígons regulars. En aquest cas, quan es pensen els polígons regulars descompostos en triangles iguals amb el vèrtex al centre i només tenint en compte que l'àrea d'un triangle és la meitat del producte de la base per l'altura, resulta del tot clar que la suma d'aquestes àrees té com a valor límit la meitat del perímetre (valor límit del perímetre del polígon inscrit i també igual a la suma de les *bases* del triangles de la descomposició) pel radi (valor límit de l'altura dels triangles) i, per tant, l'àrea és el producte de $\pi$ pel quadrat del radi. Dit això, l'esquema següent




hauria de mostrar de forma clara els elements que intervenen i ser suficient per acabar de justificar la validesa de la fórmula

$$\text{Àrea} = \pi \times \text{radi}^2$$

ja que l'altura $h$ de tots els triangles que formen cada polígon és sempre la mateixa i, si es va fent créixer el nombre de costats de forma indefinida, tendeix al radi de la circumferència, mentre que la suma de totes les bases $b$ tendeix al perímetre i, per tant, la suma d'àrees

$$\sum \frac{1}{2} \times b \times h = \frac{1}{2} \times h \times \sum b$$

tendirà a

$$\frac{1}{2} \times \text{radi} \times \text{perímetre} = \frac{1}{2} \times \text{radi} \times (2 \times \pi \times \text{radi}) = \pi \times \text{radi}^2$$

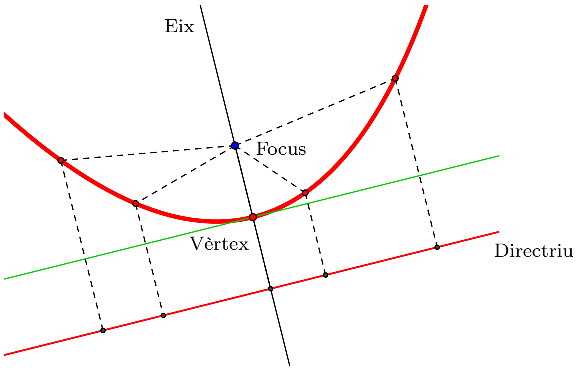
No cal dir que consideracions un xic més sofisticades i, un altre cop, passos al límit d'aproximacions en aquest cas per poliedres convenients en comptes de polígons (piràmides i troncs de piràmides que passen a cons i troncs de cons) donaran les fórmules ben conegudes per a la superfície i el volum de les esferes:

$$\text{Superfície} = 4 \times \pi \times \text{radi}^2, \quad \text{Volum} = \frac{1}{3} \times \text{Superfície} \times \text{radi} = \frac{4\,\pi}{3}\text{radi}^3$$

## 3 La paràbola

Per tal que tinguin sentit molts dels comentaris que venen a continuació, cal que quedi clar a què ens referirem, d'entrada, quan parlem d'una paràbola. La definició que prendrem serà la següent:

*Una paràbola és el lloc geomètric dels punts que equidisten d'un punt (el focus) i una recta que no el conté (la directriu) donats.*




La recta perpendicular a la directriu que passa pel focus (denominada *l'eix* de la paràbola) conté un únic punt de la paràbola, que equidista del focus i del seu peu sobre la directriu, designat com el *vèrtex* de la paràbola. El vèrtex és el punt de la paràbola més pròxim a la directriu (no pot haver més punts de la paràbola en la banda paral·lela a la directriu que passa pel vèrtex ja que tots aquests punts són més a prop de la directriu que del focus). Cal notar també que la paràbola és simètrica respecte el seu eix, ja que dos punts simètrics respecte aquesta recta són a la mateixa distància del focus i també a la mateixa distància de la directriu (per un costat l'eix, que conté el focus, és la seva mediatriu i per l'altra estan sobre una paral·lela, per tant equidistant, a la directriu).

Amb aquesta definició, i només amb una mica de Teorema de Pitàgores, n'hi ha prou per obtenir la propietat bàsica de la paràbola que, de forma ràpida, es pot enunciar dient que *l'altura* dels seus punts és proporcional al quadrat de la distància a l'eix (que és com es podria començar a introduir analíticament). Precisant una mica més, es té:

**Propietat 1.** *Si, per a cada punt $P$ d'una paràbola, es designa per $y$ la distància d'aquest punt fins a la perpendicular a l'eix que passa pel vèrtex (o, si es vol dir així, la paral·lela a la directriu) i per $x$ la distància fins a l'eix (segons l'esquema de la figura 1), es complirà*

$$2\,p\,y = x^2\,,$$

*on $p$ és la distància del focus a la directriu.*

Si ens centrem en una configuració com la de la figura 1 en la que el valor de $y$ és més gran que la distància ($p/2$) entre el focus $F$ i el vèrtex $V$, la comprovació d'aquest fet consistirà, únicament, a observar l'esquema de la figura 2.

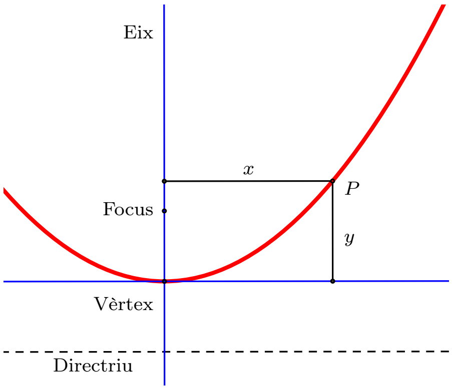



Figura 1

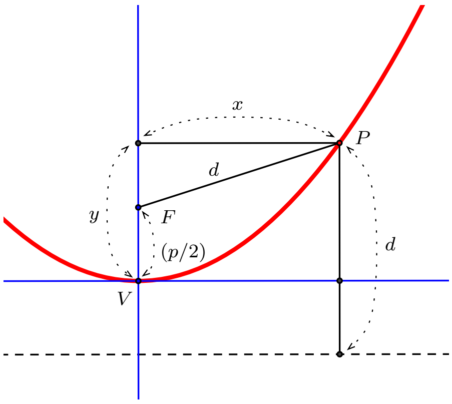



Figura 2

En aquesta figura queda clar que, per un costat, la distància $d$ del focus al punt $P$ complirà, pel Teorema de Pitàgores,

$$d^2 = x^2 + (y - p/2)^2$$

però, com que $d$ també és la distància de $P$ a la directriu i ve donada per $y + (p/2)$, es verificarà

$$(y + p/2)^2 = d^2 = x^2 + (y - p/2)^2$$

d'on apareix

$$y^2 + p\,y + (p/2)^2 = x^2 + y^2 - p\,y + (p/2)^2$$

que és equivalent a *l'equació de la paràbola*

$$2\,p\,y = x^2$$

(Quan el punt $P$ està *per sota* del focus no hi ha cap diferència, ja que el valor del catet corresponent del triangle rectangle és $(p/2) - y$ en comptes de $y - (p/2)$ i això no afecta als quadrats).

Cal observar que el recíproc d'aquesta propietat també és cert i que sobre qualsevol recta paral·lela a l'eix (o, equivalentment, perpendicular a la directriu) a distància $x$ hi ha un únic punt de la paràbola que consisteix en el punt que està a una distància $y$ de la perpendicular a l'eix pel vèrtex complint $2\,p\,y = x^2$.

## 3.1 Les tangents a una paràbola

Un altre grup d'ingredients fonamentals entre les propietats de la paràbola és el de la construcció i propietats de les rectes tangents que, més endavant, faran un paper semblant al de la perpendicular a l'eix pel vèrtex (i, que com hem vist abans, fa el paper de l'eix d'abscisses en l'enfoc analític del problema). En realitat, es podria dir que aquesta part i la següent són la *part tècnica* del raonament final ja que estableixen les propietats en les que es basa tot el desenvolupament de l'última secció. Per tant, es podria considerar com un apèndix i deixar la seva lectura pel final de tot, un cop s'ha vist què es busca amb cada una d'aquestes propietats.

Encara que la definició usual de tangent com la posició límit de rectes secants és aplicable en aquesta situació, és més pràctic pensar que, per a donar una tangent, es busca una recta que toqui en un únic punt la corba i que tingui tots els punts *exteriors*[3] i s'obté el mateix resultat (no és suficient demanar que toqui en un únic punt, ja que les paral·leles a l'eix també tenen un únic punt en comú amb la paràbola però no es poden considerar tangents). En qualsevol cas, es pot veure en un tractat clàssic com el de Rouché i Comberousse [2, nº 736] d'on surt aquesta equivalència.

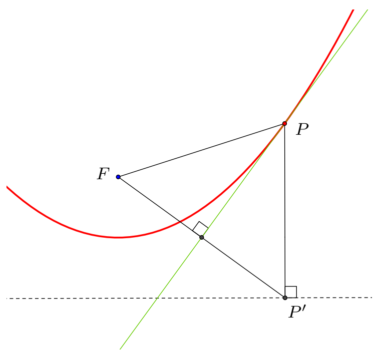



Figura 3

Construir, aleshores, una tangent en un punt $P$ donat d'una paràbola (en el sentit que s'explica en el paràgraf anterior) és força evident. N'hi haurà prou en baixar una perpendicular des de $P$ fins a la directriu, prendre el peu $P'$ d'aquesta perpendicular i, finalment, considerar la mediatriu del focus $F$ i aquest punt $P'$ com es veu en l'esquema de la figura 3. (Si $P$ és el vèrtex de la paràbola tot es redueix a prendre la perpendicular a l'eix en aquest punt).

[3] Un punt és *interior* si és més a prop del focus que de la directriu i *exterior* si és més a prop de la directriu que del focus.

Ha de resultar clar que qualsevol altre punt $Q$ de la recta que s'acaba de construir estarà a una distància del focus que és més gran que la distància que té amb la directriu ja que, per la construcció $FQ$ i $QP'$ són iguals (mediatriu) mentre que $QQ'$ (si $Q'$ és el peu de la perpendicular des de $Q$ a la directriu) és menor que $QP'$ (hipotenusa d'un triangle rectangle enfront d'un catet) com es veu en la figura 4 (no hi ha diferències essencials en el raonament que depenguin de la posició de $Q$ respecte $P$ en la tangent).

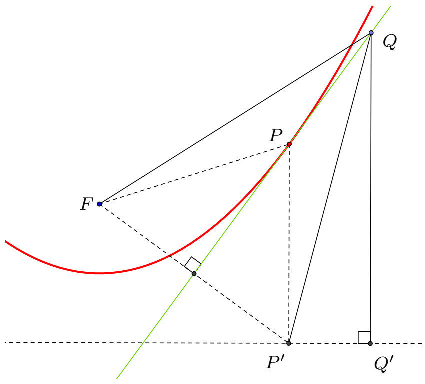



Figura 4

Per una altra banda, aquesta mateixa construcció és equivalent a considerar com tangent la bisectriu de l'angle $FPP'$ (la bisectriu en el vèrtex d'un triangle isòsceles i la mediatriu de la base són la mateixa recta). I això posa de manifest, sense haver de rumiar massa, com un mirall amb un perfil parabòlic fa que tots els rajos de llum que arriben paral·lelament a l'eix es concentren en el focus.

Sembla ser, tot i que no se sap si és cert del tot, que Arquimedes va utilitzar durant el setge de Siracusa (213–212 aC) aquesta propietat per concentrar la llum del Sol sobre les naus romanes i així incendiar-les. En l'actualitat existeixen projectes que utilitzen l'energia del Sol concentrada amb miralls parabòlics per fer experiments sobre el comportament de materials a altíssimes temperatures, com el forn solar d'Odeillo, o per generar electricitat *neta* i és el principi bàsic de funcionament dels telescopis *reflectors* o dels grans radiotelescopis.

Aquesta forma de construir les tangents permet comprovar la propietat següent de forma ràpida i elemental.

**Propietat 2.** *Donada una recta qualsevol, hi ha un punt de paràbola on la tangent és paral·lela a aquesta recta (excepte en el cas que la recta considerada* *sigui paral·lela a l'eix, que ja s'ha comentat que en aquests casos no hi ha tangents).*

Per tal d'obtenir una d'aquestes tangents, caldrà prendre la perpendicular a la recta donada des del focus $F$, la intersecció $P'$ d'aquesta recta amb la directriu, aixecar una perpendicular a la directriu en $P'$ fins a un punt $P$ de la paràbola i traçar, aleshores, la tangent en aquest punt. Aquesta construcció es pot apreciar a la figura 5 i no cal fer més comentaris per tal de veure que s'obté el resultat desitjat.

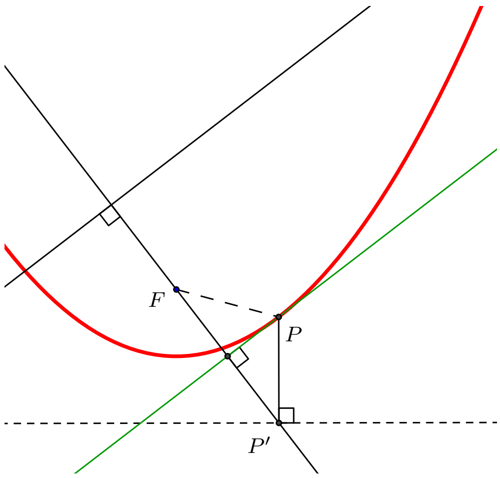



Figura 5

Per acabar aquesta secció, dedicada a les propietats de les tangents, veurem el que es podria enunciar en el llenguatge modern de les derivades dient que el *pendent* de la recta tangent al gràfic de la funció quadràtica en un punt és igual a dos cops l'abscissa del punt. Per tal de poder enunciar la propietat en el context que estem treballant, direm que l'abscissa $x$ és la distància a l'eix i l'ordenada $y$ és la distància a la perpendicular a l'eix pel vèrtex (que, recordeu, també és una tangent). Aleshores es té:

**Propietat 3.** *Donat un punt $P$ de la paràbola, siguin $P_1$ la projecció de $P$ sobre l'eix i $P_2$ la intersecció de la recta tangent a la paràbola en $P$ amb l'eix. Aleshores, el vèrtex $V$ és el punt mig de $P_1P_2$.*

*Això es pot llegir com: al mateix temps que la recta tangent en $P$* avança *una distància $x$* (horitzontal), pujarà (o baixarà) *una distància* vertical *igual a $2\,y$.*

Per tal de fer la comprovació d'aquest fet caldrà donar un cop d'ull als elements que apareixen en l'esquema de la figura 6 ($F'$ és el punt d'intersecció de la directriu i l'eix, simètric del focus respecte el vèrtex. Les posicions de

$P$ per sobre el focus o per sota el focus no han de canviar en res essencial les consideracions que venen a continuació). Aleshores:

• Per construcció de la tangent, els angles $FPP_2$ i $P_2PP'$ són iguals, les rectes $PP_2$ i $FP'$ són perpendiculars i $M$ és el punt mig de $FP'$.

• Respecte el triangle $F'P'F$, la recta $VM$ passa pel punt mig dels costats $FF'$ ($V$) i $FP'$ ($M$). Per tant, ha de ser paral·lela a la base $F'P'$ (que coincideix amb la directriu) i, per tant, $M$ està sobre la perpendicular a l'eix pel vèrtex (tal i com s'observa en la figura).

• El paral·lelisme entre $P_1P_2$ i $PP'$ permet afirmar que l'angle $PP_2P_1$ (que també es podria retolar com $PP_2F$) és igual a l'angle $P_2PP'$ i, per tant, a l'angle $FPP_2$. Aleshores, el triangle $P_2FP$ és isòsceles sobre la base $P_2P$, amb vèrtex $F$, i els costats $FP$ i $FP_2$ són iguals.

• Com que $FP'$ ($FM$) és perpendicular a la base del triangle $P_2FP$, $M$ també és el punt mig de $P_2P$ (i el quadrilàter $FPP'P_2$ serà un paral·lelogram).

• La recta $VM$, paral·lela a la base $P_1P$ del triangle $P_1PP_2$, passa pel punt mig $M$ del costat $PP_2$. Per tant, $V$ és el punt mig de l'altre costat $P_1P_2$ i això és el que es volia comprovar.

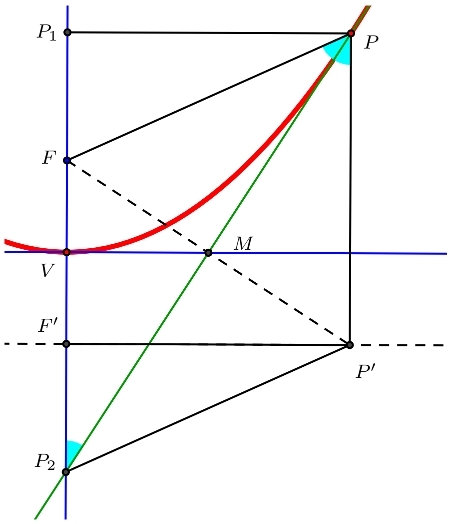



Figura 6

## 3.2 Determinació de la paràbola respecte una de les seves tangents

La propietat 1 estableix que, respecte la tangent en el vèrtex, l'alçada d'un punt de la paràbola és proporcional a la distància a l'eix. El fet remarcable que veurem a continuació és que es pot fer la mateixa afirmació respecte *qualsevol* tangent.

Per tal d'enunciar amb precisió aquesta propietat, considerem una paràbola amb distància del focus a la directriu igual a $p$, un punt $P$ sobre aquesta paràbola i la tangent corresponent. Si $x_0$ és la distància de $P$ a l'eix i $y_0$ l'alçada de $P$ per sobre el vèrtex, la propietat 1 diu que es compleix $2\,p\,y_0 = (x_0)^2$. Considerant, per a qualsevol altre punt $Q$ de la mateixa paràbola, els mateixos paràmetres $x$ (distància a l'eix) i $y$ (alçada sobre el vèrtex) es complirà igualment $2\,p\,y = x^2$

Aleshores tenim:

**Propietat 4.** *Donats $P$ i $Q$ com abans, designem per $x'$ la distància entre $P$ i el punt d'intersecció de la tangent en $P$ amb la paral·lela a l'eix (perpendicular a la directriu) que passa per $Q$, designem per $y'$ la distància d'aquest punt a $Q$ (*l'alçada *de $Q$ respecte la tangent en $P$) tal i com es veu en la figura 7.*

*Es compleix*

$$2\,p'\,y' = \left(x'\right)^2$$

*(on $p'$ és una constant independent de $Q$, associada, de fet, a la posició de $P$).*

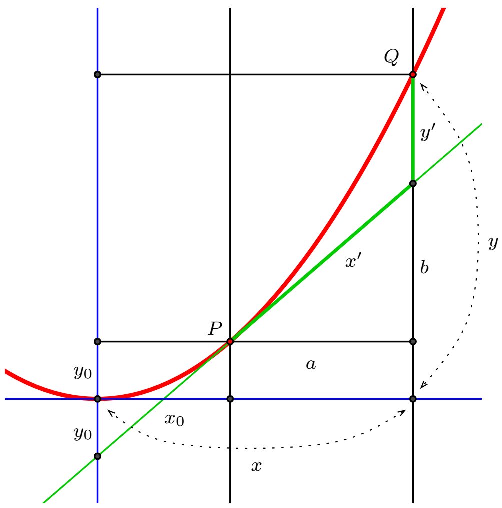



Figura 7

Per tal d'obtenir aquesta relació, designem per $a$ i $b$ els catets del triangle rectangle format per la tangent en $P$ (hipotenusa), la paral·lela a l'eix per $Q$ ($b$) i la paral·lela a la directriu per $P$ ($a$). Noteu que la hipotenusa d'aquest triangle és $x'$ i que, a més, serà semblant al triangle de catets $x_0$ i $2\,y_0$ format a partir de l'eix, la tangent en $P$ i la perpendicular a l'eix per aquest punt (el valor $2\,y_0$ és el que apareix a la propietat 3).

Si tenim en compte que $y = y' + b + y_0$ i calculem el valor de $2\,p\,y'$ en termes d'aquests paràmetres tindrem

$$2\,p\,y' = 2\,p\,y - 2\,p\,b - 2\,p\,y_0$$

(pensant $2\,p\,y = x^2$, $2\,p\,y_0 = (x_0)^2$ i $x = x_0 + a$)

$$\begin{aligned} &= (x_0 + a)^2 - 2\,p\,b - (x_0)^2 \\ &= (x_0)^2 + 2\,x_0\,a + a^2 - 2\,p\,b - (x_0)^2 \\ &= 2\,x_0\,a + a^2 - 2\,p\,b \end{aligned}$$

(però $b/a = 2\,y_0/x_0$, $b = 2\,y_0\,a/x_0 = a\,x_0/p$ i, per tant, $2\,p\,b = 2\,a\,x_0$)

$$= a^2$$

(els triangles rectangles de catets $a$, $b$ i el de catets $x_0$, $2\,y_0$ són semblants, així que $a/x' = x_0/(\text{hipotenusa})$ i, prenent quadrats, $a^2 = \dfrac{x_0}{(x_0)^2 + 4\,(y_0)^2}\,(x')^2)$

$$= k\,\left(x'\right)^2 \text{ , on } k \text{ és un valor que només depèn de } P.$$

En resum, s'arriba a una expressió de la forma

$$2\,p'\,y' = \left(x'\right)^2$$

amb un paràmetre $p'$ que només depèn del punt $P$.

## 4 Àrea d'un segment de paràbola

La línia recta entre dos punts qualssevol d'una paràbola és la *corda* determinada per aquests dos punts. Un *segment* de paràbola és la regió delimitada per la paràbola i una de les seves cordes.

Qualsevol segment (o corda) de paràbola té associat un *vèrtex*, definit com el punt de la paràbola on la tangent és paral·lela a la corda corresponent[4]. Un fet fonamental per a les construccions que venen tot seguit, que es desprèn de forma immediata de la propietat 4, és que la paral·lela a l'eix pel vèrtex d'un segment passa pel punt mig de la seva corda i, per tant, es podria haver definit vèrtex d'un segment com el punt de la paral·lela a l'eix pel punt mig de la corda que també és de la paràbola. Per tal de justificar aquesta afirmació, l'únic que cal tenir en compte és que si $P$ i $Q$ són els extrems d'una corda, $V$ el vèrtex i $P'$, $Q'$ són, respectivament, les projeccions, paral·leles a l'eix, de $P$ i $Q$ sobre la tangent en $V$, aleshores, el quadrilàter $PQQ'P'$ és un paral·lelogram i els costats oposats $PP'$ i $QQ'$ són iguals (figura 8).

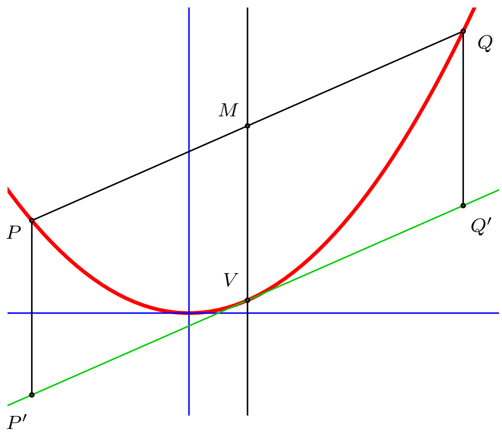



Figura 8

Si les *alçades* de $P$ i $Q$ sobre la tangent en $V$ són iguals les distàncies de $P'$ i $Q'$ al punt de tangència $V$ també ho hauran de ser, $V$ serà el punt mig de $P'Q'$ i, per paral·lelisme, $M$ el de $PQ$.

L'objectiu final d'aquesta secció és donar la mesura d'un segment qualsevol de paràbola. Per tal d'aconseguir-ho, veurem com fabricar un mètode recursiu d'aproximacions successives que mostrarà un únic valor possible per a l'àrea del segment. Prenem, doncs, una corda $PQ$, considerem el seu vèrtex $V$, i considerem com primera aproximació (per defecte) l'àrea del triangle $PQV$ dient-li $\mathcal{A}_0$. Notem que l'àrea del segment mai podrà ser superior a la del paral·lelogram $PQP'Q'$ i que aquest quadrilàter és el doble del triangle anterior (això hauria de quedar clar donant un cop d'ull a la figura 9, observant que el triangle té la mateixa base i altura que el paral·lelogram) i repetir el procés de forma indefinida.

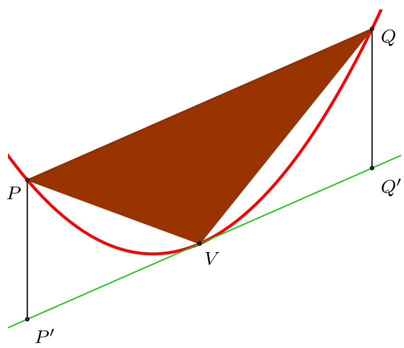



Figura 9

[4]No és massa difícil comprovar que el vèrtex d'un segment de paràbola és el punt de l'arc de paràbola corresponent que és més lluny de la corda.

Aquestes consideracions donen una estimació de l'àrea entre $\mathcal{A}_0$ i $2\,\mathcal{A}_0$ que no seria cap meravella si no es pogués refinar l'aproximació inicial afegint l'àrea dels triangles (i, en el càlcul per excés, els paral·lelograms) equivalents determinats pels segments de paràbola $PV$ i $VQ$ (figura 10).

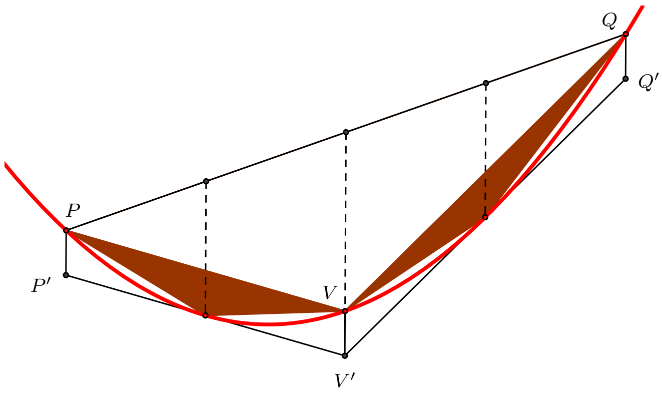



Figura 10

Per tal de veure quina és l'àrea dels *triangles petits*, designem per $M$ el punt mig de $PQ$, $M_1$ el de $PM$, $M_2$ el de $MQ$, $M_1'$ el de $PV$ i $M_2'$ el de $VQ$. A més, siguin $V_1$ i $V_2$ els vèrtexs dels segments $PV$ i $VQ$ respectivament (figura 11). (Hauria de ser ben clar que $M_1$, $M_1'$ i $V_1$, $M$, $V$ i $V'$, $M_2$, $M_2'$ i $V_2$, són ternes de punts alineats sobre rectes paral·leles a l'eix de la paràbola).

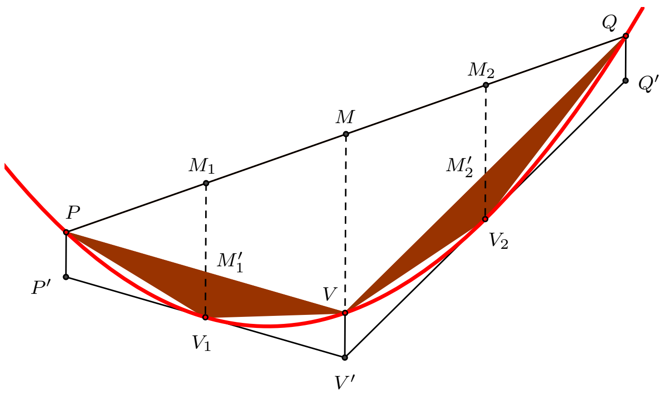



Figura 11

Notem ara que la recta $MV$ divideix el triangle $PQV$ en dos triangles equivalents (tenen bases iguals, sobre la mateixa recta, comparteixen el tercer vèrtex i, per tant, es pot dir que tenen la mateixa base i la mateixa altura). D'aquí que es pugui dir que aquests dos triangles tenen àrea igual a $\frac{1}{2}\mathcal{A}_0$.

L'àrea es torna a dividir per 2 quan es consideren els triangles $PM_1V$ o $QM_2V$ (figura 12), ja que cada un d'ells té la base igual a la meitat d'un dels dos triangles anteriors (totes sobre la mateixa recta) i comparteixen el tercer vèrtex tots ells ($V$). Aquests dos triangles tenen, cada un d'ells, una àrea igual a $\frac{1}{4}\mathcal{A}_0$.

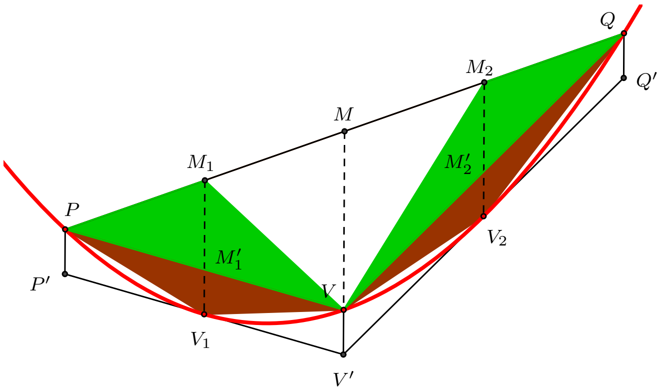



Figura 12

Finalment, tenint en compte que els punts de la paràbola es van separant d'una qualsevol de les seves tangents proporcionalment al quadrat del recorregut de les seves projeccions sobre aquesta tangent (propietat 4), i mirant com seran les *alçades* respecte la tangent en $V$, l'alçada de $V_2$ serà una quarta part de l'alçada de $Q$, mentre que l'alçada de $M_2'$ serà la meitat (en el cas de les rectes l'alçada és directament proporcional al recorregut). Així doncs $M_2M_2'$ és el doble de $M_2'V_2$ i això dona com a conseqüència que els dos triangles que s'afegeixen per refinar l'estimació de l'àrea del segment de paràbola tenen cada un d'ells una àrea equivalent a $\frac{1}{8}\mathcal{A}_0$ (i els paral·lelograms que donen l'estimació superior el doble).

En resum, i tenint en compte que s'afegeix un triangle petit per banda, s'ha obtingut que l'àrea del segment de paràbola serà, com a mínim,

$$\mathcal{A}_0 + \frac{1}{4}\mathcal{A}_0$$

i, com a molt,

$$\mathcal{A}_0 + \frac{2}{4}\mathcal{A}_0.$$

Aquest procés de refinament es pot repetir tants cops com es vulgui i donarà estimacions, per defecte, de la forma

$$\mathcal{A}_0 + \frac{1}{4}\mathcal{A}_0 + \frac{1}{16}\mathcal{A}_0 + \cdots + \frac{1}{4^{n-1}}\mathcal{A}_0 + \frac{1}{4^n}\mathcal{A}_0$$

i per excés de la forma

$$\mathcal{A}_0 + \frac{1}{4}\mathcal{A}_0 + \frac{1}{16}\mathcal{A}_0 + \cdots + \frac{1}{4^{n-1}}\mathcal{A}_0 + \frac{2}{4^n}\mathcal{A}_0$$

ja que en cada estadi afegim el doble de triangles amb àrees que són equivalents a un vuitè de les àrees dels triangles de l'estadi anterior.

Un cop d'ull a la figura 13 hauria de ser suficient per veure que l'únic valor encaixat entre totes aquestes estimacions és

$$\frac{4}{3}\mathcal{A}_0$$

ja que la successió de quadrats que seguixen la diagonal cobreix un terç de l'àrea del quadrat inicial i es correspon, doncs, amb la suma

$$\frac{1}{4}\mathcal{A}_0 + \frac{1}{16}\mathcal{A}_0 + \frac{1}{64}\mathcal{A}_0 + \cdots$$

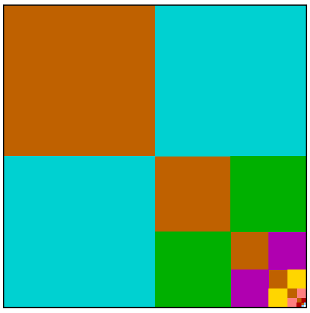


Figura 13

Si no queda clar amb un dibuix (o creieu que el raonament no és prou rigorós, tot i que sí que ho és), sempre s'està a temps d'utilitzar l'àlgebra per a calcular explícitament les sumes $S_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{4^n}$ veient que són

$$S_n = \frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{4^{n+1}}\right)$$

després de fer servir el *truc* de considerar

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) S_n = 1 - \frac{1}{4^{n+1}}\,.$$

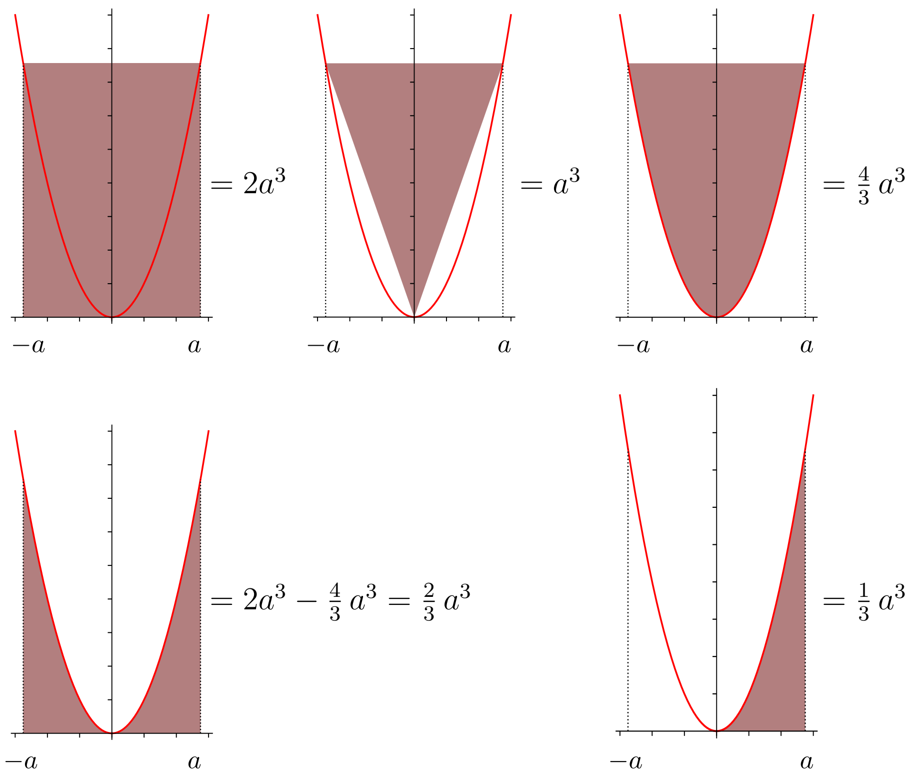
D'aquesta forma és força evident que la *suma infinita* $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots$ val, efectivament, $\frac{4}{3}$ (però a mi no hem sembla tan bonic de fer).

### I les integrals què?

Naturalment, aquest resultat és totalment coherent amb el càlcul de l'àrea sota una corba que s'explica en els cursos de càlcul infinitessimal i surt de la integral

$$\int_0^a x^2\,dx = \frac{a^3}{3}\,.$$

No haurien de quedar dubtes donant un cop d'ull a la seqüència següent




Tot just per acabar, els resultats d'Arquimedes són la contribució al càlcul d'àrees i volums més important abans de les de Kepler (1571–1630) i Cavalieri (1598–1647) tot just abans del desenvolupament del càlcul diferencial i integral dut a terme per Leibnitz (1646–1716) i Newton (1642–1727).

## Referències


[1] A. Gasull. *Integració de funcions racionals i* $\pi$. Materials Matemàtics, nº 2, vol. 2018. (http://mat.uab.cat/web/matmat/v2018n02/)

[2] E. Rouché, Ch. de Comberousse. *Élements de Géométrie*. Gauthier-Villars et fils, Paris, 1898 (sisena edició).


Profesor jubilat,
Univ. Autònoma de Barcelona
gguaspb@gmail.com

*Publicat el 22 de març de 2024*