Las categorías existenciales de Lusin

Andrés Chaves Beltrán

Departamento de Matemáticas y Estadística Universidad de Nariño, Colombia

Luis Cornelio Recalde Caicedo

Departamento de Matemáticas de la Universidad del Valle. Colombia

Reception date / Fecha de recepción: 31-03-2009
Acceptation date / Fecha de aceptación: 06-05-2009

Resumen

Los matemáticos de la escuela francesa, establecida entre finales del siglo XIX y los inicios del XX, no fueron indiferentes a las discusiones filosóficas respecto al problema de existencia en matemáticas. Los integrantes de esta escuela, encabezada por Borel, Baire y Lebesgue, se pronunciaron en contra del uso del axioma de elección en matemáticas. En este artículo se presentan algunos apartes de esta discusión en el marco de la jerarquía de funciones establecidas por Baire y su correlación con las categorías existenciales establecidas por el matemático ruso Nicolás Lusin.

Palabras clave: Clases de Baire, Axioma de elección, epistemología de las matemáticas, existencia en matemáticas.

Abstract. *Existential categories of Lusin*

Mathematicians of the French school, settled down between the end of XIX and the beginnings of XX century, were not indifferent to the philosophical discussions about the problem of existence in mathematics. The members of this school, led by Borel, Baire and Lebesgue, spoke against the use of the axiom of choice in mathematics. This article presents some sections of this discussion within the hierarchy of functions established by Baire and its correlation with the existential categories set by the Russian mathematician Nicolas Lusin.

Key words and phrases: Classes of Baire, axiom of choice, epistemology of mathematics, existence in mathematics.

Introducción

Aunque en principio, la comunidad matemática presentó resistencia a la teoría de conjuntos infinitos de Cantor, fue adoptada por los analistas franceses interesados en la teoría de funciones, especialmente por Baire, Borel y Lebesgue. Sin embargo, a pesar de que los tres utilizaron la inducción y recursión trasfinita, no se adhieren a la filosofía de Cantor sobre la legitimidad matemática del infinito actual, especialmente luego de la demostración del teorema del buen ordenamiento establecida por Zermelo en 1905, según el cual todo conjunto puede ser bien ordenado, a condición de aceptar la existencia de una función de elección. Ellos adoptaron una posición filosófica cercana al intuicionismo; por eso se les reconoce como semi-intuicionistas.

El uso del axioma de elección causó una gran controversia entre defensores y detractores. Tal es el caso de la polémica entre Borel, Baire y Lebesgue con Hadamard.[1] Nos interesa en este artículo correlacionar esta discusión con el problema de la caracterización de las funciones discontinuas, específicamente con la conjetura de que la jerarquía de funciones, establecida por Baire en su tesis doctoral (Baire 1999), no es meramente nominal. Al respecto, Baire no logra un avance sustancial. El problema es retomado por Lebesgue, quien en (Lebesgue 1905) presenta una demostración de la existencia de funciones en cada una de las clases de Baire. Sin embargo, los rusos Souslin y Lusin descubrieron un error en la demostración.

En un período de más de quince años, Lusin escribe cinco artículos en torno al problema de la existencia de las clases de Baire: (Lusin 1914), (Lusin 1917), (Lusin 1921), (Lusin 1927a) y (Lusin 1927b), tratando de resolver el error de la demostración de Lebesgue. Lusin resume sus resultados en *Les ensembles analytiques et leurs applications* (Lusin 1930), cuyo prefacio es escrito por Lebesgue. En esta obra, Lusin no solo establece los aspectos técnicos de la demostración, sino que instaura los elementos filosóficos que soportan sus desarrollos. Para Lusin no basta con establecer un teorema de existencia, sino que es necesario aclarar sobre el tipo de existencia que se intenta probar. En este sentido identifica cuatro tipos de categorías existenciales (Lusin 1930, p.55).

1. La existencia constructiva, la cual se tiene cuando se exhibe un proceso general que permite dilucidar casos particulares. Por ejemplo, la existencia de funciones discontinuas que se obtienen como límite de una sucesión de funciones continuas, queda determinada por un teorema establecido por Baire, según el cual estas funciones son aquellas que son puntualmente discontinuas con respecto a todo conjunto perfecto. Tal es el caso de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2, \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

1 Ver (Moore 1982), (Baire, Borel y Lebesgue 1905) y (Recalde 2004), entre otros.

Desde sus primeros artículos, Baire establece una diferencia tajante entre la existencia nominal y la existencia constructiva. La existencia nominal se da cuando se definen los objetos a través de procesos iterativos respaldados por un nombre. La existencia constructiva se da cuando estos procesos iterativos son respaldados por teoremas que permiten demostrar que se pueden diferenciar los distintos niveles dados en lo nominal.

Baire y Lusin aceptan este tipo de existencia; de hecho, éste último, en su libro de 1930 exhibe conjuntos de las clases 1, 2, 3 y 4, a manera de estado del arte.

2. Existencia en el sentido de la totalidad de los ordinales de segunda clase. Es el tipo de existencia del cual se apoya Lebesgue en su memoria de 1905 *Sur les functions représentables analytiquement*, para exhibir una función que esté por fuera de las clases de Baire.

3. Existencia en el sentido de Zermelo. Es la que se obtiene por la aceptación de una función de elección. Los objetos matemáticos no son dados individualmente o por procesos recursivos aplicados a los ordinales de la primera y segunda clase, sino como pertenecientes a un universo constituido en un solo acto. Aunque la mayoría de matemáticos de inicios del siglo XX, acogían el principio de Zermelo, no ocurría así con quienes trabajaban con la teoría de la medida, pues su aceptación daba cabida a los conjuntos no medibles: un tipo de conjuntos que contrariaban la intuición geométrica.

   Borel, Baire, Lebesgue y Lusin son detractores de las pruebas que utilicen este argumento para demostrar existencia. Se puede decir que la posición filosófica de éstos se centra en la negación de este principio que acoge resultados muy utilizados en las distintas ramas de las matemáticas.

4. Existencia a partir de la aplicación del método de la diagonal de Cantor. Se utiliza para demostrar la existencia de funciones que no pertenecen a un determinado dominio; por este método se demuestra que el conjunto de funciones de un intervalo tiene una potencia mayor que la potencia del intervalo (potencia del continuo).

Este último tipo de existencia es aceptado y utilizado por Lusin, para probar la validez de la conjetura de Baire, y para construir una clase de conjuntos mucho más amplia que los borelianos (que son equivalentes a las funciones de Baire).

En este artículo nos proponemos presentar la manera en que Lusin demuestra la existencia de funciones en cada una de las clases de Baire y analizar sus procedimientos teóricos a la luz de sus concepciones filosóficas.

La conjetura de Baire

La teoría de funciones, como rama de las matemáticas, empieza a perfilarse entre finales del siglo XIX e inicios del XX, a través de las investigaciones de Borel, Baire y Lebesgue. Históricamente podemos reconocer *la conjetura de Baire* como el problema que sirvió de catalizador en el surgimiento de la teoría de funciones.

La *conjetura de Baire* surge a partir de la clasificación de funciones que René Baire plantea en su tesis doctoral de 1899, *Sur les Fonctions de variables reélles*. Baire, basado en la convergencia de series de funciones, incorpora una nueva jerarquía, mucho más amplia que la de sus antecesores Euler, Cauchy, Hankel y otros. Esta clasificación que toma como referencia las funciones $f:[0,1]\to R$, se define de la siguiente manera.

C_0: Clase 0, constituida por las funciones continuas.

C_1: Clase 1, conformada por las funciones que no pertenecen a C_0 y que se pueden ver como límite de sucesiones de funciones pertenecientes a C_0.

C_2: Clase 2, conformada por las funciones que no pertenecen a C_0 ni a C_1 y que se pueden ver como límite de sucesiones de funciones pertenecientes a C_1.

$\vdots$

C_n: Clase n, conformada por las funciones que no pertenecen a C_{n-1} ni a alguna de las clases anteriores y que se pueden ver como límite de una sucesión de funciones de clase C_{n-1}.

$\vdots$

Baire define las clases de funciones de orden trasfinito: si $\{f_n\}_n$ es una sucesión de funciones tal que para todo n, existe i tal que $f_n \in C_i$; además, $\{f_n\}_n$ converge puntualmente a f, donde $f_n \notin C_i$ para todo i, entonces se tiene que $f \in C_w$, donde w es el primer ordinal trasfinito de la teoría cantoriana. De forma similar se definen C_w, C_{w+1}, C_{w+2},… C_{2w} …

Baire se propuso demostrar que esta clasificación no era meramente nominal, es decir, que cada una de estas clases es no vacía, lo que se llamará en adelante *Conjetura de Baire*.

En un principio, Baire había caracterizado las funciones de C_1 a través del siguiente resultado:

T1: Sea $f:[0,1]\to R$ una función discontinua. f es el límite de una serie de funciones continuas,[2] si y sólo si es puntualmente discontinua respecto a todo conjunto perfecto.[3]

2 Es decir, que pertenece a C_1.

3 $f: I \subseteq R \to R$, es puntualmente discontinua, si para todo $(a,b)\subset I$, existe $c\in(a,b)$ tal

Tal como se hizo con las funciones de C_1, Baire intenta caracterizar las funciones de C_2, para ello enuncia:

T2: Sea $f:[0,1]\to R \notin C_0 \cup C_1$. $f \in C_2$ si y sólo si es puntualmente discontinua sobre cada conjunto perfecto, omitiendo un conjunto de primera categoría[4] respecto al conjunto perfecto.

Baire demostró completamente **T1**, mientras que de **T2** sólo demostró la condición suficiente. Sin embargo, conjeturó que se cumplía el recíproco y que la condición era similar para las clases superiores.

Baire construyó funciones de las primeras clases. De C_0 se puede exhibir cualquier función continua. De C_1 se puede exhibir la función

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\operatorname{sen} nx}{n}$$

que corresponde a $f(x)=\frac{x}{2}$, para $x\in(-p,p)$ y $f(p)=0$.
Ampliando el dominio, la función es periódica, de periodo $2p$, y discontinua en los puntos n/p, con $n\in Z$.
Se puede notar que esta función no es de la clase C_0 y que es el límite de una serie de funciones de C_0.
Como ejemplo de una función perteneciente a C_2 está la característica de los irracionales,

$$f(x)=\begin{cases}1, \text{si } x\in I\\ 2, \text{si } x\notin I\end{cases}$$

Obsérvese que f no es puntualmente discontinua, ya que es discontinua en todos los puntos de su dominio, por lo tanto, no pertenece a C_1. Resta probar que f se puede ver como la suma de funciones puntualmente discontinuas.

Para todo $n\in N$, definamos $f_n:[0,1]\to R$, tal que

que f es continua en c. $P\subseteq R$ es perfecto, si $P=P'$, donde P' es el conjunto de puntos de acumulación de P, o derivado de P de acuerdo a la definición dada por Cantor.

4 $E\subset R$ es de *primera categoría* si existe una sucesión $\{E_n\}$ de conjuntos diseminados (conjuntos que no son densos en ninguna parte), tal que para todo $x\in E$, existe n tal que $x\in E_n$. En otro caso, se dice que E es de *segunda categoría*.

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, \text{ si } x = \dfrac{p}{q} \in Q, \text{ con } (p,q) = 1 \text{ y } q \leq n \\ 0, \text{ en caso contrario} \end{cases}$$

Es decir,

$$f_1(x) = \begin{cases} 1, \text{ si } x \in \{0,1\} \\ 0, \text{ en caso contrario} \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 1, \text{ si } x \in \left\{0,1,\dfrac{1}{2}\right\} \\ 0, \text{ en caso contrario} \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} 1, \text{ si } x \in \left\{0,1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right\} \\ 0, \text{ en caso contrario} \end{cases}$$

$$\vdots$$

Se tiene que

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$$

En términos de series de funciones, la sucesión $\{f_n\}$ se puede ver como una sucesión de sumas parciales, donde: $g_1 \equiv f_1$, $g_2 \equiv f_2 - f_1$, $g_3 \equiv f_3 - f_2, \ldots, g_n \equiv f_n - f_{n-1}, \ldots$ de esa forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$$

Donde cada g_n es puntualmente discontinua, por lo tanto, $f \in C_2$.

Baire perseguía caracterizar funciones de cada una de las clases. Para ello intentó, sin éxito, una generalización de **T1** y **T2**.

En 1905 el matemático francés Henri Lebesgue aborda la conjetura de Baire. Tomando como base las funciones representables analíticamente, que son las que tienen como elementos primigenios los polinomios, demuestra la equipotencia entre esta clase de funciones y las funciones que se dejan clasificar en la jerarquía de Baire. Al mismo tiempo, prueba la equipotencia de las funciones pertenecientes a las clases de Baire con los conjuntos borelianos o B-medibles y con las funciones B-medibles.\footnote{ Una función $f:[0,1]\to R$ es B medible si para cualquier par de números reales a y $b\in[0,1]$ con $a<b$, se tiene que el conjunto $f^{-1}[a,b]$ es B medible.

Lebesgue da una prueba de la validez de la conjetura de Baire, y a su vez construye de forma explícita una función que escapa a las clases de Baire. Sin embargo, en 1914, el matemático ruso Y. Souslin detecta un error en el siguiente enunciado de Lebesgue:

Teorema: sea un conjunto E de puntos $(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)$ dado, se llama *proyección de este conjunto sobre la variedad* $x_{+1}=x_{i+2}=\ldots x_n=0$ al conjunto e de todos los sistemas de valores asociados $(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_i)$. Yo voy a demostrar que, si E *es B medible, su proyección también lo es* (Lebesgue 1905, p. 191).

Lebesgue está planteando que *imagen continua de un boreliano es boreliano*, lo cual no es correcto. La detección de este error dejaba abierto nuevamente el problema de la conjetura de Baire y originó, en la escuela rusa del análisis, la cual es presidida por Nicolás Lusin, la incorporación de la teoría de conjuntos analíticos, la cual dimensiona y expande notoriamente las surgientes teorías de conjuntos y de funciones.

Lusin y la conjetura de Baire

En *Les ensembles analytiques* (Lusin 1930), Lusin demuestra la validez de la conjetura de Baire, a partir de los desarrollos de la teoría cantoriana de conjuntos. Para ello interpreta la clasificación de funciones de Baire en términos de jerarquía de conjuntos denominada por él como las *Clases de Baire -De La Vallée Poussin*.

La clase inicial, representada por K_0, está conformada por los subconjuntos de I (los números irracionales) que se pueden ver como uniones de conjuntos de la forma $(a,b)\cap I$ o $(a,\infty)\cap I$ o $(\infty,a)\cap I$ con a y $b\in Q$ (números racionales).

La clasificación conjuntista corresponde a la siguiente jerarquía[5]:

$$K_0,K_1,K_2,\ldots,K_n,\ldots,K_w,\ldots,K_a,\ldots\ |\Omega$$

5 Cada clase K_α está formada por subconjuntos del dominio fundamental I.

Donde se dice que $H \in K_a$ si no pertenece a alguna de las clases precedentes y H se puede representar como el límite de conjuntos de las clases anteriores.

Al Lusin aceptar esta clasificación de conjuntos, asume la segunda categoría existencial presentada, es decir la aceptación de los ordinales hasta de segunda clase, ya que los subíndices que maneja esta jerarquía abarca sólo estos ordinales sin llegar a asumir el primer ordinal de la tercera clase representado como Ω.

Esta segunda categoría de existencia es usada fuertemente por Lusin al momento de hacer construcciones por recursión trasfinita. Tal es el caso de los teoremas:

Teorema. Sea $E \in K_a$ bidimensional. Sea $A = E \cap \{(x_0, y) / y \in I\}$ entonces la clase de A es menor o igual que a , asumiendo A como un conjunto unidimensional.

Teorema. Existen elementos universales de todas las clases excepto de K_o .

La cuarta categoría existencial, denominada *método de la diagonal de Cantor*, es usada por Lusin al final de la demostración al definir el conjunto $h = \{(x,x) \in I^2 / (x,x) \notin E\}$, el cual es necesario para demostrar que la proyección de h sobre el eje OX no se puede ver como la intersección de E con una recta vertical $t = t_0$.

Esta cuarta categoría la usa Lusin para una clase nueva de conjuntos llamados *los conjuntos proyectivos*. Normalmente en análisis, esta categoría o método de demostración es usado para exhibir conjuntos que no pertenecen a un universo o clase determinada. Hereda su nombre de la famosa demostración de Cantor con la cual se prueba que el conjunto de los números reales no es numerable. Es una categoría existencial propia la teoría de funciones, la topología y el análisis funcional.

La primera categoría existencial, como se ha planteado en el apartado anterior, la usa Lusin al exhibir, de forma general, conjuntos de las primeras cinco clases. Cabe decir que la primera categoría existencial es usada en todas las ramas de las matemáticas, la exhibición de un objeto como prueba de existencia no admite discusión ontológica, y de hecho sería la forma ideal de demostración en cualquier campo de las matemáticas.

La segunda categoría existencial, en la cual se acepta únicamente la existencia de los ordinales de la segunda clase es propia de la teoría de funciones. En el análisis clásico no se necesita pues sus desarrollos no exigen una teoría de ordinales trasfinitos.

La tercera categoría existencial, referente a la aceptación del axioma de elección, es en la de mayor controversia en matemáticas debido a que no utiliza método recursivos, sino que incorpora conjuntos a través de una función de elección, la cual debe asumirse como dada. El problema es que en diversos campos de las matemáticas, se obtiene resultados que aplican distintas versiones o aplicaciones de este axioma.

De hecho, Lusin al mostrar una función que escapa de la clasificación de Baire, demostración retomada de Lebesgue, acoge una versión débil del axioma de elección, al asumir que todo conjunto se puede poner en correspondencia biunívoca con un ordinal.

Conclusiones

Al final de su libro *Conjuntos Analíticos*, Lusin se declara partidario de una filosofía empirista para las matemáticas. Esta discusión había sido planteada, de manera general, por Borel, Baire y Lebesgue. Se trataba de incorporar un medio que permitiera caracterizar el tipo de objetos y métodos que no dieran lugar a contradicciones. Por ejemplo Borel, plantea que los razonamientos realizados sobre objetos no definidos son en sí mismos inconsistentes. Una buena definición es aquella que se basa en las intuiciones básicas de número entero y continuo geométrico (Borel 1898a, p. 92).

Según Borel, la generación de sucesiones indefinidas tiene sentido si sigue el modelo de los números enteros, cuyo proceso de formación sucesiva corresponde a un acto de razonamiento propio de los humanos. Todo aquello que no se pueda interpretar bajo esta consideración queda por fuera de las matemáticas; tal es el caso de los ordinales trasfinitos de la clase II, por cuanto no hay un proceso de formación que dé cuenta de la totalidad de ellos (Borel 1898a, p. 235).

Según Borel, son conjuntos bien definidos aquellos obtenidos por uniones finitas o numerables y diferencias de intervalos. Corresponden actualmente a los borelianos o conjuntos B-medibles, los cuales se clasifican según la jerarquía establecida por Baire, como lo anotamos en el apartado anterior de este artículo.

Para caracterizar los conjuntos B-medibles, Borel utiliza recursión trasfinita: se supone que la propiedad se cumple hasta un paso determinado y, con base a esto, se demuestra que la propiedad se cumple para el siguiente nuevo paso (Borel 1898a, p.235). Según Borel esta manera de demostrar propiedades constituye un proceso dialéctico de formación que no da lugar a una totalidad, sino que produce un proceso potencialmente infinito.

Jean Cavaillés observa que pueden emerger propiedades no inductivas, en el seno mismo de la teoría de borelianos, como la presentada por Hausdorff y Alexandroff, según la cual todo conjunto B-medible, no numerable, contiene un subconjunto perfecto (Cavaillés 1938). Para solucionar este problema, Lusin introduce la noción de B-medible a través de las funciones regulares, constituyendo el conjunto de los borealianos como un cuerpo cerrado. Para ello es necesario considerar una categoría existencial diferente a la aceptada por Borel, como el mismo Lusin lo resalta en *Los Conjuntos Analíticos*.

Si se admiten todos los conjuntos B medibles es necesario admitir los conjuntos proyectivos como lo remarca con razón H. Lebesgue. Entonces si se quiere delimitar el análisis matemático al estudio de seres bien acabados y las relaciones mutuas bien determinadas, es necesario entonces retornar al punto de vista empirista, sacrificar algunos conjuntos B medibles y también algunos irracionales (Lusin 1930, p.323).

Esto significa que para solucionar el problema planteado se presenta una disyuntiva: se sacrifica una parte importante del análisis clásico o se permite la entrada de objetos que atentan contra los principios existenciales intuicionistas. El problema se torna más complicado con la demostración de los teoremas de existencia pura en los cuales se hace uso del axioma de elección (Zermelo 1904)[6].

La demostración del teorema según el cual todo conjuntopuede ser bien ordenado, desarrollada por Zermelo en 1904 (segunda versión en 1908), despertó la crítica de Borel, Baire y Lebesgue. Esta controversia se encuentra consignada en el documento \textit{Cinco cartas acerca de la teoría de conjuntos} retomada en varias instacias. \footnote{\cite{BBL05}}

Lebesgue tampoco aceptó las demostraciones de existencia pura; considera que sólo es posible demostrar la existencia de un objeto previamente definido.

Un objeto se define o se da cuando se ha pronunciado un número finito de palabras que se aplican a este objeto, es decir cuando se ha nombrado una propiedad característica del objeto (Lebesgue 1905, p.205).

Es este el sentido de la función definida por Lebesgue que escapa a la jerarquía de Baire y es la dirección en la cual define una teoría de la medida que rebasa los requerimientos existenciales de Borel; para ello se basa en la aceptación de los trasfinitos de clase II como una totalidad y del método de la diagonal[7]. Esa concepción de existencia lo lleva a rechazar los conjuntos no medibles (en el sentido de Lebesgue) como el ejemplo propuesto por Giuseppe Vitali en 1905:

> ¡En cuanto a la cuestión de la existencia de conjuntos no medibles, apenas si ha ganado progreso después de la edición de este libro. Sin embargo, esta existencia es cierta para aquellos que admiten un cierto modo de razonamiento basado en el llamado axioma de Zermelo. Por este razonamiento, se llega en efecto a esta conclusión: existen conjuntos no medibles; pero esta afirmación no debería ser considerada como contradictoria si se llega a mostrar que jamás ningún hombre podrá nombrar un conjunto no medible! [8]

Lusin no acoge la versión más fuerte del axioma de elección. Para él, los conjuntos obtenidos a través de este axioma, no definen objetos completamente acabados, sino que se trata de virtualidades, sin existencia en sí. Este es el caso de los conjuntos proyectivos,

6 Para mayor claridad al respecto ver (Moore 1982).

7 La noción de medida en el sentido de Lebesgue es una extensión de la medida de Borel. Como dice el mismo Borel: "estos son los conjuntos (los Lebesgue medibles) que se obtienen adjuntando a un conjunto bien definido (boreliano de medida no nula) una porción arbitraria de un conjunto bien definido de medida nula" (Borel 1898b, p. 241).

8 Tomado de (Pier 1996).

incorporados por Lusin en el capítulo cinco de *Los Conjuntos Analíticos*. Para Lusin, el problema de existencia en matemáticas, carece de salidas absolutas y se dirime en la actividad matemática misma. Por ejemplo, en el caso de los conjuntos proyectivos Lusin plantea dos posibilidades:

> O Bien los estudios posteriores conducirán un día a las relaciones precisas entre conjuntos proyectivos, de modo que se tengan la solución completa los problemas relativos a la medida, categoría, potencia de estos conjuntos. A partir de este momento, los conjuntos proyectivos habrán conquistado la ciudadanía matemática, al mismo nivel que los problemas más clásicos de los conjuntos B medibles.
>
> O bien los problemas indicados sobre conjuntos proyectivos se quedarán sin solución aumentando la cantidad de problemas nuevos tan naturales como inabordables. De ese caso es claro que habrá que reformar nuestras ideas sobre el continuo aritmético (Lusin 1930, p.324).

Actualmente la teoría descriptiva de conjuntos es una de las ramas más productivas de la teoría de conjuntos con aplicaciones a la topología, la lógica matemática (teoría de la recursividad), la combinatoria, el análisis funcional y la teoría de grupos. Entre los muchas publicaciones podemos citar: (Sierpinski 1950), (Sion 1961) y (Stone 1962).

Bibliografía

ARBOLEDA, L., RECALDE, L. (2005). "El concepto de semicontinuidad de Baire". *Matemáticas: Enseñanza Universitaria*, vol XIII, pp.63-82.

BAIRE, R. (1899). "Sur les Fonctions de variables reélles". *Annali di matem.pura ed appl.*, (3), 3(1899), pp. 1-123. Œuvres Scientifiques, Gauthier-Villars. París, 1990, pp. 49-173.

BAIRE, R. (1905) "Leçons les fonctions discontinues".Gauthier-Villars. París, nouveau tirage, 1930.

BAIRE, R., BOREL, E., et al. (1905). "Cinq lettres sur la théorie des ensembles". *Bulletin de la Société Mathématique de France.*, (33), p.p 261-273.

BOREL, E. (1898a). *Leçons sur la théorie des fonctions*. Gauthier-Villars. París.

BOREL, E. (1898b). *Méthodes et problèmes de la théorie de fonctions*. Guathier-Villars. París (Edición de 1992).

CAUCHY, A. (1821). *Cours d'analyse de l'école Royale Polytechnique*, Imprimérie Royale, París. Traducción al español: *Curso de Análisis*, Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM, México, 1994.

CAVAILLÈS, J. (1938). *Méthode axiomatique et formalisme*. Hermann, París. Tradución al Español: *Método Axiomático y Formalismo*. Servicios. Editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM, México, 1992.

CHAVES, A. (2006) *Las Clases de Baire en el surgimiento de los conjuntos analíticos*. Tesis de Maestría. Cali:Universidad del Valle.

DUMMETT, M. (1998). “La existencia de los objetos matemáticos.” *Teorema*. Vol. XVII/2, Valencia, pp. 5-24. Tomado de http://sammelpunkt.philo.at:8080/1269/1/DUMMETT.pdf,. Traducción al español realizada por Gustavo Fernández Díez-Picazo.

GARDIES J. (2001). *Qu'est-ce que et pourquoi l'analyse?* Essai de d_e_nition. Librairie philosophique J. Vrin, París.

JECH, T. (2003). *Set theory*. The third millennium. Springer Verlag, Inc. Edition revised and expanded. Berlin, Heidelberg, New York.

JECH, T. y HRBACEK, K. (1999). *Introduction to set theory*. Marcel Dekker, Inc, New York. Tercera Edición.

KELDYCH, L. (1940). “Démostration directe du théorème sur l'appartenance d'un élément canonique E_a à la classe a et exemples arithmétiques d'ensembles mesurables B de classes supérieures”. Comptes Rendus (Doklady) de l'académie des Sciences de l'URSS. Volumen XXVIII, 8.

KUNUGI, K. (1935). La theory des esembles analytiques et les espaces abstraites. *J. Fac. Sci*. Hokkaido Univ., Ser. I, Math. 4 , pp. 1-40.

LEBESGUE, H. (1905). “Sur les functions représentables analytiquement”. *J. de Math. Pures et Appl*., sér. 6, 1, 1905, pp.139-216.

LUSIN, N. (1914). “Sur un problème de M. Baire.” *Acad. Sci. Paris*. 158, pp. 1258-1261.

LUSIN, N. (1917). “Sur la classification de M. Baire”. *C.R. Acad. Sci.* París. 164, pp. 91-94.

LUSIN, N. (1921). “Sur l'existence d'un ensemble non dénombrable qui est de première catégorie dans tout ensemble parfait”. *Fund. Math.*, pp 155-157.

LUSIN, N. (1927a). “Remarques sur esembles projectifs”. *C.R. Acad. Sci. París*. 185, pp. 835-837.

LUSIN, N. (1927b). “Sur les esembles analytiques”. *Fund. Math*. 10, pp. 1-95.

LUSIN, N. (1930). *Les ensembles analytiques et leurs applications*. Primera edición, París 1930. Segunda edición Chelsea Publishing Company, New York, 1972.

MOORE, G. (1982). *Zermelo's Axiom of Choice*. Springer-Verlag, New York.

MOSCHOVAQUIS, Y. *Descriptive Set Theory*. Stud. Logic Foundations Math. 100, North Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1980.

PIER, J. (1996). *Histoire de l'integration*. Masson, París.

RECALDE, L. (2004). *La teoría de funciones de Baire: La constitución de lo discontinuo como objeto matemático*. Instituto de Educación y Pedagogía. Universidad del Valle.

SIERPINSKI, W. *Les ensembles projectifs et analytiques*. Ghautier- Villars, Paris, 1950.

SION, M. (1961). “Continuous images of Borel sets.” *Proc. Am. Math. Soc*., 12, pp. 385-391.

STONE, A. (1962). *Non-separable Borel sets*. Rozprawy Matematyczne, Warszawa.