

REFERENCIAS

- 1 - P. A. TIPLER. "Física" Segunda Edición. Ed. Reverte. Barcelona 1985
- 2 - R. M. EISBERG y L. S. LERNER. "Física: Fundamentos y Aplicaciones"
Mc. Graw-Hill 1980
- 3 - R. RESNICK y D. HALLIDAY. "Física". Compañía Ed. Continental 1970
- 4 - G. HOLTON "Introducción a los conceptos y Teorías de las físicas Físicas"
Ed. Reverte, Barcelona 1976
- 5 - R. P. FEYNMAN "Lectures on Physics" Addison-Wesley 1963
- 6 - "BERKELEY Physics Course" Ed. Reverte, Barcelona 1968
- 7 - H. C. VAN NESS "Understanding Thermodynamics" Mc Graw-Hill, 1969.

SATELITES

PLANETA	SATELITE	DESCUBRIDOR Y AÑO	DISTANCIA AL PLANETA (EN R _p)	PERIODO DE REVOLUCION SIEMPRE		EXCENTRICIDAD ORBITA	INCLINACION ORBITA SATELITE RESPECTO PLANO ECUADOR PLANETA	DIAMETRO EN KM
				d	h	m		
LA TIERRA	LA LUNA	-	60.3	27	7	43	28° 35' a 18° 19'	3476
MARTE	FOBOS	HALL	2.8	0	7	39	1° 18'	15
	DEIMOS	HALL	7.0	1	6	18	1° 46'	8
JUPITER	XV ADRASTEA	VOYAGER 2	1.8	0	7	9	0° 0'	40
	XVI METIS	VOYAGER 1	1.9	0	7	50	0° 0'	35
	V AMALTEA	BARNARD	2.5	0	11	57	0° 27.3'	240
	XIV THEBE	VOYAGER 1	3.1	0	16	11	-	80
	I IO	GALILEO	5.9	1	18	28	0° 1.6'	3630
	II EUROPA	GALILEO	9.4	3	13	14	0° 28.1'	3138
	III GANIMEDES	GALILEO	15.0	7	3	43	0° 11.0'	5262
	IV CALISTO	GALILEO	26.4	16	16	32	0° 15.2'	4800
	XIII LEDA	KOWAL	156.	240			0° 26.7'	5
	VI HIMALIA	PERRINE	161.	251.			0° 27.6'	170
SATURNIO	X LISITEA	NICHOLSON	165	260			0° 29.0'	20
	VII ELARA	PERRINE	165	260			0° 24.8'	50
	XII ANANKÉ	NICHOLSON	291	610			2° 27'	10
	XI CARMÉ	NICHOLSON	315	692			2° 44'	25
	VIII PASÍFUE	MELOTE	330	739			2° 25'	50
	IX SINOPE	NICHOLSON	338	758			6° 33'	22

SATURNO	XV ATLAS	VOYAGER 2	1980	2.2	0	14	26	0.002	0°	18'	90
	XII PROMETEO (S21)	VOYAGER 2	1980	2.3	0	14	43	0.004	0°	0'	160
	XVII PANDORA (S26)	VOYAGER 2	1980	2.3	0	15	6	0.004	0°	6'	30
	X URANO	DOLLFUS	1966	2.5	0	16	33	0.009	0°	18'	220
	XI EPIMETEO	DOLLFUS	1966	2.5	0	16	41	0.007	0°	6'	140
	I MIMAS	HERSCHEL	1789	3.4	0	22	37	0.020	10°	34'	400
	II ENCELADO	WERSCHEL	1789	3.9	1	8	53	0.004	0°	44'	500
	III TETIS	CASSINI	1684	4.9	1	21	18	0.000	10°	56'	1050
	XIII TELESTO	VOYAGER 1	1980	4.9	1	21	19	-	-	-	30
	XIV CALIPSO	VOYAGER 1	1980	4.9	1	21	19	-	-	-	26
	IV DIONE	CASSINI	1684	6.3	2	17	41	0.002	0°	0'	1100
	XII DIONE B (S6)	LAQUEZ	1980	6.3	2	17	41	0.005	0°	12'	1120
	V REA	CASSINI	1672	8.8	4	12	25	0.001	0°	20.5'	1600
	VI TITAN	HUYGENS	1655	20.5	15	22	41	0.029	0°	18.3'	5200
	VII HIPERION	BOND	1848	24.8	21	6	38	0.104	0°	24'	400
	VIII JAPETO	CASSINI	1671	59.7	79	7	56	0.028	14°	4.2'	1450
	IX FÉBE	PICKERING	1898	216.8	550	10	35	0.163	150°	-	300
URANO	4486 U7	SMITH-VOYAGER	1986	1.9	0	7	55	-	-	-	20
	1486 U8	SMITH-VOYAGER	1986	2.0	0	8	55	-	-	-	25
	1486 U9	SMITH-VOYAGER	1986	2.3	0	10	23	-	-	-	50
	1486 U3	SMITH-VOYAGER	1986	2.4	0	11	8	-	-	-	40
	1486 U6	SMITH-VOYAGER	1986	2.4	0	11	23	-	-	-	30

I 486 U 2	SMITH-VOYAGER 1986	2.5	0	11	58	-	-	30
I 486 U 1	SMITH-VOYAGER 1986	2.6	0	12	19	-	-	30
I 486 U 4	SMITH-VOYAGER 1986	2.7	0	13	25	-	-	40
I 486 U 5	SMITH-VOYAGER 1986	2.9	0	14	56	-	-	30
I 485 U 1	HANSEN-VOYAGER 1985	3.4	-	-	-	-	-	150
V MIRANDA	KUIPER 1948	5.2	1	9	56	-	30° 24'	300
I ARIEL	LASSELL 1851	7.3	2	12	29	0.007	0° 0'	800
II UMARIEL	LASSELL 1851	10.2	4	3	28	0.008	0° 0'	500
III TITANIA	HERSCHEL 1787	16.8	8	16	56	0.02	0° 0'	1000
IV OBERON	HERSCHEL 1787	22.4	13	11	07	0.01	0° 0'	900
NEPTUNUS	LASSELL 1846	14.2	5	21	3	0.01	160°	5500
II NEREIDA	KUIPER 1949	217	359	21	10	0.75	27° 36'	300
PLUTON	CHRISTY 1978	11.7	6	7	12	-	95°	1200

UNIDADES

Micra

$$1 \mu m \equiv 10^{-4} cm$$

Åmström

$$1 \text{ Å} \equiv 10^{-8} cm$$

Fermi

$$1 fm \equiv 10^{-13} cm$$

Metro

$$1 m \equiv 10^2 cm$$

Barril

$$1 barril \equiv 10^{-24} cm^2$$

Newton ($\equiv Kg m s^{-2}$)

$$1 N \equiv 10^5 dina \equiv 10^5 g cm s^{-2}$$

Joule ($\equiv Kg m^2 s^{-2}$)

$$1 J \equiv 10^7 erg \equiv 10^7 g cm^2 s^{-2}$$

Electron-volt

$$\begin{aligned} 1 eV &\equiv 1.60217733(49) \times 10^{-12} erg \\ &\equiv 1.78266270(54) \times 10^{-38} g c^2 \end{aligned}$$

Unidad atómica de masa

$$\begin{aligned} 1 a.m.u. &\equiv 931.49433(63) MeV/c^2 \\ &\equiv 1.6605402(10) \times 10^{-24} g \end{aligned}$$

Caloría

$$1 cal \equiv 4.184 \times 10^7 erg$$

Watt

$$1 W \equiv 10^7 erg s^{-1} = 10^7 g cm^2 s^{-3}$$

Bar

$$1 bar \equiv 10^6 dina cm^{-2} = 10^6 g cm^{-1} s^{-2}$$

Atmosfera

$$1 atm \equiv 1.01325 \times 10^6 dina cm^{-2}$$

Mercurio al milímetro

$$1 mm Hg \equiv (1/760) atm.$$

Hertz

$$1 Hz \equiv 1 s^{-1}$$

$$Sea \quad A \equiv 2.99792458$$

Coulombio

$$1 C \equiv A \times 10^9 \text{ ues carga} = A \times 10^9 g^{1/2} cm^{3/2} s^{-1}$$

Ampere ($\equiv Coulombio/s$)

$$\begin{aligned} 1 A &\equiv A \times 10^9 \text{ ues intensidad} \\ &\equiv A \times 10^9 g^{1/2} cm^{3/2} s^{-2} \end{aligned}$$

35/003

Volt ($\equiv$ Joule / Coulomb)

$$1 V \equiv \frac{1}{A \times 100} \text{ u.e.s. potential} = \frac{1}{A \times 100} g^{1/2} \text{ cm}^{1/2} s^{-1}$$

Ohm ($\equiv$ Volt / Ampere)

$$1 \Omega = \frac{1}{A^2 \times 10^{11}} \text{ u.e.s. resistance} = \frac{1}{A^2 \times 10^{11}} \text{ cm}^{-1} s$$

Farad ($\equiv$ Coulomb / Volt)

$$1 F = A^2 \times 10^{11} \text{ cm}$$

Tesla

$$1 T = 10^4 \text{ gauss} = 10^4 g^{1/2} \text{ cm}^{-1/2} s^{-1}$$

Weber ($\equiv$ Tesla m^2)

$$1 W = 10^8 \text{ gauss cm}^2 = 10^8 g^{1/2} \text{ cm}^{3/2} s^{-1}$$

Henry ($\equiv$ Weber / Ampere)

$$1 H = \frac{1}{A \times 10} s$$

I - ¿QUE ES LA FISICA?

Leyes físicas. Limitaciones a su validez. Cómo medir distancias.
¿Qué es la luz?

II - CALCULO DE ERRORES

Definición de probabilidad y de densidad de probabilidad. Distribución binomial: media, varianza y desviación standard. Distribución gaussiana. Medidas. Propagación de errores

III - VECTORES.

Definición. Módulo de un vector. Producto escalar y producto vectorial. Vector y vector axial. Derivada. Tensors.

IV - CINEMATICA

Velocidad. Movimiento uniforme. Caracter relativo de la velocidad. Aceleración. Movimiento circular uniforme. Movimiento circular no uniforme.

V - LEYES DE NEWTON

Introducción. Leyes de Newton. ¿Qué es el espacio? Masa inerte y masa pesante. Sistemas inerciales. Sistemas no inerciales. Fuerza centrífuga. ¿Es la aceleración absoluta? Oscilador armónico. Trayectorias de proyectiles

VI - LEYES DE CONSERVACION.

Conservación del momento. Impulso. Trabajo. Fuerzas conservativas: Potencial. Conservación de la energía. Pendulo simple. Teorema del virial. Representaciones gráficas.

VII - POTENCIALES CENTRALES

Separación del movimiento del centro de masas. Sistemas de dos partículas. Movimiento relativo. Ley de áreas. Descripción cualitativa del movimiento

35/003

em un potencial $1/r$. Resultados cuántitativos. Planetas.

VIII - SISTEMAS DE REFERENCIA EN ROTACION

Introducción. Fuerza centrífuga y de Coriolis. Ejemplos

IX - CUERPOS RIGIDOS

Momentos de Inercia: propiedades. Ejemplos. Separación del movimiento del centro de masas. Ecuaciones del movimiento. Peonza simétrica libre.

X - CARGAS ELECTRICAS: CAMPO ELECTRICO

Ley de Coulomb. Potencial electrostático. Campo eléctrico. Monopolos magnéticos. Flujo de un campo eléctrico. Teorema de Gauss: aplicaciones. Energía potencial electrostática

XI - CONDENSADORES

Definición. Ejemplos. Energía almacenada en un condensador. Dieléctricos

XII - CORRIENTES

Corrientes eléctricas. Conservación de la carga eléctrica. Resistencia. ¿Por qué? Los cuerpos aislantes y conductores? Ley de Ohm. Asociación de resistencias. Ley de Joule

XIII - CAMPO MAGNETICO

Fuerza de Lorentz. Fuerza sobre un elemento de corriente. Ley de Biot-Savart: Ejemplos. Ley de Ampère. Experimentos de Faraday. Ley de Lenz. Inductancia. Energía almacenada en una bobina

XIV - CORRIENTES ALTERNAS

Ecuación fundamental. Impedancia y Reactancia. Fenómenos de resonancia. Potencia: factor de potencia.

XV - ECUACIONES DE MAXWELL

Justificación. Potenciales electromagnéticos. Invariancia gauge.

XVI - RELATIVIDAD

Revisión. Transformaciones de Lorentz. Ley de suma de velocidades. Simultaneidad. Contracción de longitudes y dilatación de tiempos. Fuerzas.

XVII - PRIMER PRINCIPIO DE LA TERMODINÁMICA

Introducción. Ley cero. Energía interna: primer principio. Procesos quasi-estáticos. Ley de Joule. Calores específicos. Transformaciones isotermas y adiabáticas de gases perfectos.

XVIII - SEGUNDO PRINCIPIO DE LA TERMODINÁMICA

Enunciados de Kelvin-Planck y de Clausius: su equivalencia. Procesos reversibles e irreversibles. Máquina de Carnot. Ciclo de Carnot. Entropía. Segundo principio. Prueba general de la existencia de la entropía.

XIX - MECÁNICA ESTADÍSTICA

Introducción. Asambleas. Energía interna y entropía. Función de partición. Gases perfectos. Ley de Maxwell.

XX - ONDAS

Introducción. Tipos de ondas. Ondas planas. Interferencia. Paquetes de ondas. Polarización. Efecto Doppler. Experimento de Young. Interferencias en láminas delgadas. Propagación de ondas. Principio de Huygens. Difracción. Rayos. Leyes de la óptica geométrica. Fenómenos de polarización de la luz.

XXI - INTRODUCCIÓN A LA MECÁNICA CUÁNTICA

El cuento negro. Efecto fotoeléctrico. Efecto Compton. Luz, ¿onda o corpúsculo? Estructura atómica. Experimento de Franck-Hertz. Reglas de cuantificación. Ondas de materia. Ecuación de Schrödinger. Partícula en un pozo unidimensional. Espectros atómicos.

35/003

XXII - NÚCLEOS

Introducción. Fórmula semi-empírica de masas. Fisión y Fusión. Modelo de capas. Desintegraciones α , β y γ .

XXIII - PARTÍCULAS Y FUERZAS FUNDAMENTALES

Leptones. Quarks. Gravitación. Electromagnetismo. Interacciones fuertes. Interacciones débiles. Futuro.

XXIV - HISTORIA DEL UNIVERSO

Recesión de las galaxias. El Big Bang. Evolución posterior.

CONSTANTES FÍSICAS

Velocidad de la luz

$$c \approx 2.997\ 924\ 58 \times 10^{10} \text{ cm s}^{-1}$$

Constante de Planck reducida

$$\hbar \equiv \frac{h}{2\pi} = 1.054\ 572\ 66(63) \times 10^{-27} \text{ erg s}$$

$$= 6.582\ 122\ 0(20) \times 10^{-22} \text{ MeV s}$$

Constante de conversión

$$\hbar c = 197.327\ 053(60) \text{ MeV fm}$$

Carga del electrón

$$|e| = 4.803\ 206\ 8(15) \times 10^{-10} \text{ esu}$$

$$= 1.602\ 177\ 33(49) \times 10^{-19} \text{ C}$$

Constante de estructura fina

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{\hbar c} = 1/137.035\ 989\ 5(61)$$

Masa del electrón

$$m_e = 9.109\ 389\ 7(54) \times 10^{-28} \text{ g}$$

$$= 0.510\ 999\ 06(15) \text{ MeV}/c^2$$

Masa del protón

$$m_p = 1.672\ 623\ 1(10) \times 10^{-24} \text{ g}$$

$$= 938.272\ 31(28) \text{ MeV}/c^2$$

Masa del neutrón

$$m_n = 1.674\ 928\ 6(10) \times 10^{-24} \text{ g}$$

$$= 939.565\ 63(28) \text{ MeV}/c^2$$

Radio clásico del electrón

$$r_e \equiv \frac{e^2}{m_e c^2} = 2.817\ 940\ 92(38) \text{ fm}$$

Longitud de onda Compton electrón

$$\lambda_e \equiv \frac{\hbar}{m_e c} = 3.861\ 593\ 23(35) \times 10^{-11} \text{ cm}$$

Radio Bohr

$$a_{\infty} \equiv \frac{\hbar}{m_e \alpha c} = 0.529\ 177\ 249(24) \times 10^{-8} \text{ cm}$$

Rydberg, energía

$$R_{\infty} = \frac{1}{2} m_e (\alpha c)^2 = 13.605\ 698\ 1(41) \text{ eV}$$

Sección eficaz Thomson

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_e^2 = 6.652\ 461\ 6(18) \times 10^{-25} \text{ cm}^2$$

Magnetón de Bohr

$$\mu_B = \frac{e \hbar}{2 m_e c} = 5.788\ 382\ 63(52) \times 10^{-15} \text{ MeV gauss}^{-1}$$

Magnetón nuclear

$$\mu_N = \frac{e \hbar}{2 m_p c} = 3.826\ 085\ 6(22) \times 10^{-18} \text{ MeV gauss}^{-1}$$

35/003

Constante gravitacional

$$G = 6.672 \ 59 \ (85) \times 10^{-8} \text{ g}^{-1} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-2}$$

Constante de estructura fina grav.

$$\alpha_g \equiv \frac{G m_p^2}{\hbar c} = 5.904 \ 64 \ (75) \times 10^{-39}$$

Longitud de Planck

$$l_p \equiv \left(\frac{\hbar G}{c^3} \right)^{1/2} = 1.616 \ 05 \ (10) \times 10^{-33} \text{ cm}$$

Tiempo de Planck

$$t_p \equiv \left(\frac{\hbar G}{c^5} \right)^{1/2} = 5.390 \ 56 \ (34) \times 10^{-44} \text{ s}$$

Masa de Planck

$$m_p \equiv \left(\frac{\hbar c}{G} \right)^{1/2} = 2.176 \ 71 \ (14) \times 10^{-5} \text{ g}$$

$$= 1.221 \ 044 \ (79) \times 10^{22} \text{ MeV}/c^2$$

Número de Avogadro

$$N_A = 6.022 \ 136 \ 7 \ (36) \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

Constante de Boltzmann

$$k_B = 1.380 \ 658 \ (12) \times 10^{-16} \text{ erg K}^{-1}$$

$$= 8.617 \ 385 \ (73) \times 10^{-5} \text{ eV K}^{-1}$$

$$= 1 \text{ eV} / 11604.448 \ (98)$$

Volumen molar de un gas en

condiciones standard

$$V_M = 2.241 \ 410 \ (19) \times 10^4 \text{ cm}^3 \text{ mol}^{-1}$$

Constante de Stefan-Boltzmann

$$\sigma \equiv \frac{\pi^2 k_B^4}{60 \hbar^3 c^2} = 5.670 \ 51 \ (19) \times 10^{-5} \text{ erg s}^{-1} \text{ cm}^{-2} \text{ K}^{-4}$$

Radio de Schwarzschild

$$R_S = \frac{2GM}{c^2} = 1.484 \ 85 \ (19) \left(\frac{M}{10^{28} \text{ g}} \right) \text{ cm}$$

Constante de Fermi

$$G_F = 1.026 \ 84 \ (2) \times 10^{-5} \frac{\hbar^3}{m_p^2 c}$$

$$= 1.435 \ 893 \ (33) \times 10^{-49} \text{ g cm}^5 \text{ s}^{-2}$$

Aceleración de la gravedad standard

$$g_n \equiv 9.806 \ 65 \text{ m s}^{-2}$$

CANTIDADES DE INTERÉS EN ASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA

Unidad astronómica $1 \text{ u.a.} = 1.495\ 979 \times 10^{13} \text{ cm}$

Parsec $1 \text{ pc} = 3.085\ 678 \times 10^{18} \text{ cm}$

Año tropical $1 \text{ año} = 3.155\ 693 \times 10^7 \text{ s}$

Año luz $1 \text{ a.l.} = 9.460\ 528 \times 10^{17} \text{ cm} =$
 $= (1 / 3.261\ 633) \text{ pc.}$

Constante de Hubble $H_0 = 100\ h_0 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \quad (0.4 \leq h_0 \leq 1.0)$
 $= 3.241\ h_0 \times 10^{18} \text{ s}^{-1}$
 $= h_0 / (9.778 \times 10^9 \text{ años})$

Densidad crítica del Universo $\rho_{\text{oc}} \equiv \frac{3 H_0^2}{8 \pi G} = 1.879\ h_0^2 \times 10^{-29} \text{ g cm}^{-3}$

Densidad del Universo $\rho_0 \equiv \Omega_0 \rho_{\text{oc}} \quad 0.05 \leq \Omega_0 \leq 4.$

Masa del Sol $M_{\odot} = 1.989\ (2) \times 10^{33} \text{ g}$

Radio del Sol $R_{\odot} = 6.659\ 9\ (7) \times 10^{10} \text{ cm}$

Luminosidad del Sol $L_{\odot} = 3.826\ (8) \times 10^{33} \text{ erg s}^{-1}$

Radio ecuatorial terrestre $R_E = 6.378\ 20 \times 10^8 \text{ cm}$

Radio polar terrestre $R_p = 6.356\ 72 \times 10^8 \text{ cm}$

Masa de la Luna $M_L = 7.363 \times 10^{25} \text{ g}$

Período de rotación (mes sideral) $T_L = 2.360 \times 10^6 \text{ s}$

Radio de la Luna $R_L = 1.738 \times 10^8 \text{ cm}$

Distancia Tierra-Luna (media) $d = 3.844 \times 10^{10} \text{ cm}$

PLANETA	MASSA em gramas	RADIO equatorial em cm	SEMI-EJE MAYOR em a.u.	EXCENTRICIDAD	PERIODO em años	INCLINACIÓN ECLIPTICA	ACHATAMIENTO
MERCURIO ♀	3.302×10^{26}	2.439×10^8	0.387	0.206	0.241	$7^\circ 0' 18''$	0
VENUS ♀	4.869×10^{27}	6.051×10^8	0.723	0.007	0.615	$3^\circ 23' 41''$	0
TIERRA ♂	5.965×10^{27}	6.378×10^8	1.	0.017	1.000	$0^\circ 0' 0''$	1/297
MARTE ♂	6.419×10^{26}	3.394×10^8	1.524	0.093	1.88	$1^\circ 50' 59''$	1/192
JUPITER ♀	1.899×10^{30}	7.140×10^9	5.203	0.048	11.86	$1^\circ 18' 16''$	1/115
SATURNO ♀	5.685×10^{29}	6.000×10^9	4.539	0.056	29.46	$2^\circ 29' 07''$	1/110
URANO ♀	8.697×10^{28}	2.540×10^9	4.9182	0.047	84.01	$0^\circ 46' 22''$	1/114
NEPTUNO ♀	1.030×10^{29}	2.475×10^9	30.058	0.009	164.8	$1^\circ 46' 05''$	1/45
PLUTON ♀	6.6×10^{26}	1.400×10^8	39.439	0.250	247.7	$17^\circ 08' 53''$	-

ALGUNOS DATOS SOBRE PARTICULAS

Bosones de gauge

PARTICULA	SPIN - PARIDAD	MASA en MeV/c ²	VIDA MEDIA $\Gamma \approx \hbar/\tau$	MODOS DE DESINTEGRACION OBSERVADOS
γ	1 ⁻	$< 3 \times 10^{-33}$	ESTABLE	
$W^{\pm}$	1	$(81.8 \pm 1.5) \times 10^3$	$\Gamma < 6.5 \text{ GeV}$	$e^{\pm} \bar{\nu}_e, \mu^{\pm} \bar{\nu}_{\mu}$
Z^0	1	$(92.6 \pm 1.7) \times 10^3$	$\Gamma < 4.6 \text{ GeV}$	$e^+e^-, \mu^+\mu^-$

Leptones

PARTICULA	SPIN	MASA en MeV/c ²	VIDA MEDIA en segundos	MODOS DE DESINTEGRACION MAS USUALES
ν_e	1/2	$< 1 \times 10^{-5}$	$> 3 \times 10^8 \frac{m_{\nu_e} c^2}{\text{MeV}}$	
e^-	1/2	0.5110034 (14)	$> 2 \times 10^{22}$ años	
ν_{μ}	1/2	< 0.25	$> 1.1 \times 10^5 \frac{m_{\nu_{\mu}} c^2}{\text{MeV}}$	
μ^-	1/2	105.65916 (30)	$2.19703 (4) \times 10^{-6}$	$e^- + \bar{\nu}_e + \nu_{\mu}$
ν_{τ}	1/2	< 70		
τ^-	1/2	1784.2 ± 3.2	$(3.3 \pm 0.4) \times 10^{-13}$	$\mu^- + \bar{\nu}_{\mu} + \nu_{\tau} \quad 17.6 \%$ $e^- + \bar{\nu}_e + \nu_{\tau} \quad 17.4 \%$ $\pi^- + \nu_{\tau} \quad 10.1 \%$ $\rho^- + \nu_{\tau} \quad 21.8 \%$

35/003

Mesones

PARTÍCULA	SPIN PARIDAD	MASSA em MeV/c ²	VIDA MÉDIA em segundos	MODOS DE DESINTEGRAÇÃO MAS USUALES	COMPOSIÇÃO EM QUARKS
π^+	0^-	139.5685 (10)	$2.6030(23) \times 10^{-8}$	$\mu^+ \nu_\mu$	$u \bar{d}$
π^0	0^-	134.9642 (38)	$0.87(4) \times 10^{-16}$	$\gamma \gamma$ 98.8 %	$\frac{1}{\sqrt{2}} (u \bar{u} - d \bar{d})$
η	0^-	548.8 (6)	$\Gamma = (1.05 \pm 0.15) \text{ KeV}$	$\gamma \gamma$ 38.9 % $\pi^0 \pi^0 \pi^0$ 31.9 % $\pi^+ \pi^- \pi^0$ 23.7 %	$\frac{1}{\sqrt{6}} (u \bar{u} + d \bar{d} - 2 s \bar{s})$
K^+	0^-	493.667 (14)	$1.2371(26) \times 10^{-8}$	$\mu^+ \nu_\mu$ 63.5 % $\pi^+ \pi^0$ 21.2 %	$u \bar{s}$
K^0	0^-	497.72 (7)	Las partículas que se desintegran son combinaciones lineales de K^0 y $\bar{K}^0$		$d \bar{s}$
D^+	0^-	1869.3 (6)	$(9.2^{+1.3}_{-1.0}) \times 10^{-13}$	múltiples	$c \bar{d}$
D^0	0^-	1864.6 (6)	$(4.3^{+0.5}_{-0.4}) \times 10^{-13}$	múltiples	$c \bar{u}$
D_s^+	0^-	1970.5 (2.5)	$(2.8^{+1.6}_{-0.7}) \times 10^{-13}$	múltiples	$c \bar{s}$
B^+	0^-	5271.2 (3.0)	$(14.2 \pm 2.7) \times 10^{-13}$	múltiples	$u \bar{b}$
B^0	0^-	5275.2 (2.8)	Valor conjunto de B^0, B^+		$d \bar{b}$

Bariónes

PARTÍCULA	SPIN PARIDAD	MAJA en MeV/c ²	VIDA MEDIA en segundos	MODOS DE DESINTEGRACIÓN MAS USUALES	COMPOSICIÓN EN QUARKS
p	$\frac{1}{2}^+$	938.2796 (27)	$> 10^{31}$ años		uud
n	$\frac{1}{2}^+$	939.5731 (27)	898 ± 16	$p e^- \bar{\nu}_e$ 100%	ddu
Λ	$\frac{1}{2}^+$	1115.60 (5)	$2.632 (20) \times 10^{-10}$	$p \pi^-$ 64.2% $n \pi^0$ 35.8%	uds
Σ^+	$\frac{1}{2}^+$	1189.37 (6)	$0.800 (4) \times 10^{-10}$	$p \pi^0$ 51.6% $n \pi^+$ 48.4%	uus
Σ^0	$\frac{1}{2}^+$	1192.46 (8)	$(5.8 \pm 1.3) \times 10^{-20}$	$\Lambda \gamma$ 100%	uds
Σ^-	$\frac{1}{2}^+$	1197.34 (5)	$1.482 (11) \times 10^{-10}$	$n \pi^-$ 100%	dds
Ξ^0	$\frac{1}{2}^+$	1314.9 (6)	$2.90 (10) \times 10^{-10}$	$\Lambda \pi^0$ 100%	uss
Ξ^-	$\frac{1}{2}^+$	1321.32 (13)	$1.642 (15) \times 10^{-10}$	$\Lambda \pi^-$ 100%	dss
Ω^-	$\frac{3}{2}^+$	1672.45 (29)	$0.882 (13) \times 10^{-10}$	ΛK^- 67.8% $\Xi^0 \pi^-$ 23.6% $\Xi^- \pi^0$ 8.6%	sss
Λ_c^+	$\frac{1}{2}^+$	2281.2 (3.0)	$(2.3^{+0.8}_{-0.5}) \times 10^{-13}$	múltiples	udc

Se han mencionado todos los mesones y bariónes que están bien establecidos y que o son estables o se desintegran vía las interacciones débiles o electromagnéticas. Hay muchos mas que se desintegran vía las interacciones fuertes y que se suelen llamar resonancias.

I - ¿QUÉ ES LA FÍSICA?

¿Qué es la Física? Los libros no acostumbran a contestar esta pregunta. La Enciclopedia Larousse: "Ciencia que tiene por objeto el estudio de las propiedades de los cuerpos y de las leyes que tienden a modificar su estado y su movimiento, sin alterar su naturaleza". ¿Que significa sin alterar su naturaleza? Definición muy poco afortunada. Muy difícil o imposible de dar una definición concisa.

Inicio de la Física moderna: No se puede dar una fecha. Si me forzaran a ello daría el año 1687 en que aparece "Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica" de Isaac Newton. Es, probablemente, la obra más famosa de toda la historia de la Física y en muchos sentidos corresponde al inicio de la Física tal como la entendemos hoy. En el libro tercero es de destacar un importante pasaje sobre "las reglas de razonamiento en filosofía". Estas reglas son la quintaesencia de los cinco siglos anteriores de metodología científica. Están dirigidas a guiar a los científicos en la construcción de hipótesis y a este fin son útiles aún hoy día. De cuatro reglas y solo quiero citar, y en forma libre, la primera: "La naturaleza es simple, por esto no debemos introducir más hipótesis que las necesarias para explicar los fenómenos observados".

Sistematización: No nos debemos asustar pues todo el movimiento acausado en estos 300 últimos años se puede, en gran parte, condensar, esto es hallar leyes que sistematizen todos estos movimientos. Se puede pensar que esto va a ser muy fácil y que basta dar las leyes fundamentales de la naturaleza. Esto no es cierto por varias razones.

- i) Aún no conocemos todas las leyes fundamentales. Esto es bueno pues de lo contrario la Física sería muy aburrida.
- ii) El enunciado de las leyes que hoy consideramos fundamentales implica ideas muy poco familiares y exigen un aparato matemático relativamente complicado. No es posible darlas sin más y necesitamos avanzar lentamente para dar el significado preciso de los conceptos que van apareciendo.
- iii) Sucede frecuentemente que aún cuando creamos conocer las leyes fundamentales para un determinado tipo de fenómenos, no es fácil opti-

35/003

cantas a los casos concretos. Queremos p.ej. que todos los fenómenos de la química, el estado sólido y la biología puedan explicarse mediante las interacciones electromagnéticas y la mecánica cuántica, pero la explicación de un fenómeno concreto puede ser extraordinariamente difícil. Todas estas ramas de la ciencia son activamente investigadas en el presente.

Experiencia: Toda la ciencia moderna está basada en "la prueba de todo conocimiento es la experiencia". El experimento es la única prueba de la verdad científica. ¿Cuál es la fuente de todo conocimiento? ¿De dónde salen las leyes que queremos comprobar? Los experimentos ayudan a crear las leyes, en el sentido que nos suministran indicios. Sin embargo, también se necesita imaginación para crear a partir de estos indicios las grandes generalizaciones, intuir las maravillosas y simples leyes subyacentes y entonces experimentar de nuevo para comprobar si se ha acertado. Albert Einstein: "Sabemos que la ciencia no puede ser fruto sólo del empirismo, y que en las construcciones de la ciencia es necesario usar la libre inventiva, que sólo a posteriori puede ser confrontada con la experiencia para ver su utilidad".

El credo del científico fue expresado por Albert Einstein: "Dios es sutil, pero no malicioso", esto es que "la Naturaleza oculta sus secretos por su excelencia, pero nunca mediante trucos".

Creatividad científica [A.B. Migdal Contemp. Phys. 20, 121 (1979)]: "La fuerza motriz de la creatividad científica no debe ser el deseo de hacer una revolución científica; ni deben todos los esfuerzos dedicarse a obtener un éxito, sino que se debe estar motivado por el amor al saber, por una capacidad de asombrarse y por el gozo de cada pequeño éxito y, sobre todo, por el sentimiento de belleza de la ciencia. Es importante desarrollar una conciencia impecable y a aprender a reducir el problema más complejo a una pregunta simple y clara; encontrar una salida a muchas contradicciones psicológicas; guiarse por la intuición, pero no creer ciegamente en ella; ser consciente de las dificultades, pero ser capaz temporalmente de desmar la atención de ellas; creer en un resultado, pero al mismo tiempo buscar pacientemente la forma de refutarlo; encontrar un

estilo propio de trabajo, pero es capaz de cambiarlo, con la experiencia y con la aparición de grandes descubrimientos. Resumiendo, uno debe intentar entenderlo todo."

Teoría y experiencia: Richard P. Feynman: "El proceso es tan complicado que entre los físicos hay una división de trabajo: Hay físicos teóricos que imaginan, deducen e intuyen nuevas leyes, pero no hacen experimentos. Hay físicos experimentales que experimentan, imaginan, deducen e intuyen". Ambos deben recordar "En el arte, así como también en la ciencia, se debe saber lo que se puede no tener en cuenta" (I. Ya. Pomyenanchuk).

Ojo con los grandes descubrimientos: Los esfuerzos dedicados exclusivamente a hacer una gran revolución del pensamiento científico frecuentemente conducen a un desastre. Todos estos falsos descubrimientos tienen, en general, estas cosas en común [A. B. Migdal]

- i) No contestan una única pregunta, sino que intentan contestar todas las preguntas actuales
- ii) El autor no tiene ninguna especialización en este campo
- iii) Nunca cita la literatura científica contemporánea, en general, porque el autor la desconoce
- iv) Los autores de tales "descubrimientos" siempre dicen que su trabajo es el fruto de largos años de investigaciones y esto se ve inmediatamente que es falso
- v) El autor nunca ha publicado antes pequeños trabajos.

Leyes: Hemos hablado de leyes y queremos hacer notar que toda ley es únicamente una aproximación a la verdad o a toda la verdad por lo que sabemos. En realidad todo lo que sabemos es únicamente alguna clase de aproximación, porque sabemos "que no conocemos aún todas las leyes". En general, las leyes tienen un marco de aplicación que debemos definir cuidadosamente. Veamos algunos ejemplos

Ejemplo 1 - De resultados de múltiples experiencias se deduce "la masa es una constante característica de un cuerpo". ¿Cómo se llega a esta ley? Consideremos para simplificar un movimiento unidimensional. Si a un cuerpo se le aplican unas fuerzas F , F' , F'' , ... entonces adquiere, respectivamente,

35/003

unas aceleraciones $a, a', a'' \dots$ y se cumple

$$\frac{F}{a} = \frac{F'}{a'} = \frac{F''}{a''} = \dots = m \quad (1)$$

Esta constante de proporcionalidad se llama masa inerte o simplemente masa y escribimos $F = ma$, que es la expresión matemática de la segunda ley de Newton. Formas equivalentes de esta ley son

$$F = ma = m \frac{d^2 x}{dt^2} = m \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} (mv) = \frac{d}{dt} p \quad (2)$$

donde $p = mv$ es el momento de la partícula considerada. La mejor forma es la última. En 1905, A. Einstein formuló la teoría de la relatividad y en ella se deduce que

$$F = \frac{d}{dt} \left(\frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = \frac{d}{dt} p, \quad p = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (3)$$

$$c = 2.99792458 (1.2) \times 10^{10} \text{ m s}^{-1}$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío.

- i) La ecuación (3) es sólo válida para $v \ll c$, pero en la teoría de la relatividad todo cuerpo con masa tiene siempre $v \ll c$.
- ii) La ecuación (3) coincide con (2) si $v \ll c$.
- iii) Una forma equivalente de escribir (3) es

$$F = \frac{mv}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \frac{dv}{dt} \quad (4)$$

iv) Si $v \ll c$ las correcciones relativistas son pequeñas

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots \quad (5)$$

y (4) es

$$F = m \left(1 + \frac{3}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{15}{8} \frac{v^4}{c^4} + \frac{35}{16} \frac{v^6}{c^6} + \dots \right) \frac{dv}{dt} \quad (6)$$

Ejemplo 2.- En Física clásica se habla continuamente de trayectorias de partículas. Según la Mecánica Clásica conociendo la posición y la velocidad de una partícula en el instante t y conociendo las fuerzas que actúan sobre ella sabemos calcular la trayectoria en todos los tiempos posteriores, suponiendo las fuerzas suficientemente bien comportadas. La Mecánica Cuántica

nos dice que es imposible medir simultáneamente y con toda la precisión que se desee la posición y el momento de una partícula. Para un movimiento unidimensional

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{1}{2} \hbar \quad (\text{Principio de indeterminación de Heisenberg}) \quad (1)$$

$$\hbar \equiv \frac{h}{2\pi}, \quad [\hbar] = \text{ML}^2\text{T}^{-1}, \quad h \equiv \text{Constante de Planck}$$

$$\hbar = 1.0545887(57) \times 10^{-27} \text{ erg s}, \quad 1 \text{ erg} = 1 \text{ g cm}^2 \text{ s}^{-2}$$

ΔA es, aproximadamente el error en la medida de A .

Este principio se deduce hoy día de los principios fundamentales de la Mecánica Cuántica

i) Loche

$$m = 10^3 \text{ Kg} = 10^6 \text{ g}, \quad v = (90.5 \pm 1) \text{ km/h} = (2513.9 \pm 2.8) \text{ cm s}^{-1}$$

$$\Delta v = 2.8 \text{ cm s}^{-1} \Rightarrow \Delta p = 2.8 \times 10^6 \text{ g cm s}^{-1}$$

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{2\Delta p} \Rightarrow \Delta x \geq 1.9 \times 10^{-34} \text{ cm}$$

A efectos prácticos no importa

ii) Átomo

En un átomo de hidrógeno, la Mecánica Cuántica nos dice que la distancia media del electrón al núcleo es, en el estado fundamental, del orden de $0.8 \text{ Å} = 8 \times 10^{-9} \text{ cm}$. y su velocidad media del orden de $2.2 \times 10^8 \text{ cm s}^{-1}$. Para poder determinar las trayectorias deberíamos poder medir posiciones y velocidades con precisión menor que estas cantidades. Imaginemos $\Delta x = 1 \times 10^{-10} \text{ cm}$

$$\Delta p \geq \frac{\hbar}{2\Delta x} = 5.27 \times 10^{-18} \text{ g cm s}^{-1}. \quad m_e = 9.109534(47) \times 10^{-28} \text{ gr}$$

$$\Delta v \geq 5.79 \times 10^9 \text{ cm s}^{-1}$$

y por tanto el concepto de trayectoria pierde su validez.

Consecuencia: Conceptos muy usados en mecánica clásica pueden tener un ámbito de aplicación limitado. Vemos que aparecen problemas cuando las velocidades son comparables a las de la luz y en el micromundo. Para otros casos la mecánica Newtoniana es muy útil.

35/003

¿Por qué hay un principio de indeterminación? Porque es imposible medir sin perturbar el sistema. En el macrocosmos las perturbaciones causadas en el proceso de medición se pueden, en general, despreciar, pero esto no es así en el microcosmos. Veamos, por ejemplo, como medir longitudes.

Metro: Se define como la distancia que recorre la luz en el vacío en un tiempo de $(1/2.997\,924\,58 \times 10^8) \text{ s}$.

$$1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m}, \quad 1 \text{ Å} = 10^{-8} \text{ cm}, \quad 1 \text{ fm} = 10^{-13} \text{ cm} \quad (2)$$

Medida de longitudes pequeñas. Es fácil dividir 1 m en 1000 partes iguales y con la ayuda de un buen microscopio dividir 1 mm en 1000 partes iguales y así obtenemos una unidad $10^{-3} 10^{-3} \text{ m} = 10^{-6} \text{ m} = 10^4 \text{ Å} \equiv 1 \mu$. Sin embargo no se puede ir mucho más allá con microscopios normales pues para la luz visible

$$(\text{violeta}) \approx 4000 \text{ Å} \leq \lambda \leq 7500 \text{ Å} \approx (\text{rojo}) \quad (3)$$

Con luz de longitud de onda λ no se pueden medir detalles que tengan un tamaño mucho menor que λ : Una ola en el mar rompe con objetos cuyo tamaño sea del orden de su longitud de onda y al ver la perturbación producida en la ola "remos" el objeto. De forma análoga con la luz visible se ven solo objetos cuyo tamaño sea del orden de λ .

¿Que es la luz? Isaac Newton fue el preconizador de una teoría corpuscular de la luz: un chorro de partículas emanaban de una fuente luminosa y cuando entraban en el ojo producían la sensación de visión. Christian Huygens y R. Hooke defendieron, ya en pleno siglo XVII, una teoría ondulatoria. Se impusieron las ideas de Newton, él cual rechazó la teoría ondulatoria debido a la propagación de la luz en línea recta, de observación común. El resurgir de la teoría ondulatoria tiene lugar a principios del siglo XIX gracias a los trabajos de Thomas Young, Augustin Fresnel, etc. sobre interferencia, difracción y polarización de la luz. De acuerdo con esta teoría un rayo de luz monocromático viene totalmente caracterizado dando su intensidad, estado de polarización y longitud de onda. Su periodo T y su frecuencia ν vienen determinadas en términos de su longitud de onda λ por las ecuaciones

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{c}{\lambda} \quad (4)$$

En 1873, James Clerk Maxwell publicó su celebre "A Treatise on Electricity

and Magnetism" en el que unificaba la electricidad y el magnetismo y en el que sugería que la luz no es más que ondas electromagnéticas. Esta hipótesis fue plenamente confirmada por Heinrich Rudolf Hertz, en 1887. Una de las mayores ironías en la historia de la Física es que en estas experiencias de Hertz que confirmaban la teoría ondulatoria de la luz de Maxwell se observó por primera vez el efecto fotoeléctrico. Este efecto corresponde al hecho de que cuando una placa metálica se ilumina con radiación electromagnética, el metal emite electrones. Su explicación es imposible mediante la teoría ondulatoria y Albert Einstein, en 1905, probó que debía adoptarse un modelo corpuscular de la luz. Costó mucho aceptar esta idea; fueron las experiencias de Arthur Holly Compton, en 1924, las que permitieron establecer, sin ningún género de dudas, de que un rayo luminoso está formado por unas partículas llamadas fotones.

Dualidad onda - corpúsculo: Un rayo de luz no es más que un haz de fotones. En ciertos tipos de experiencias aparece el carácter ondulatorio y en otros el carácter corpuscular. El fotón es una partícula, que creemos elemental, es decir sin estructura con

$$m_\gamma = 0 \quad (< 5.4 \times 10^{-60} \text{ g}), \quad q_\gamma = 0 \quad (1)$$

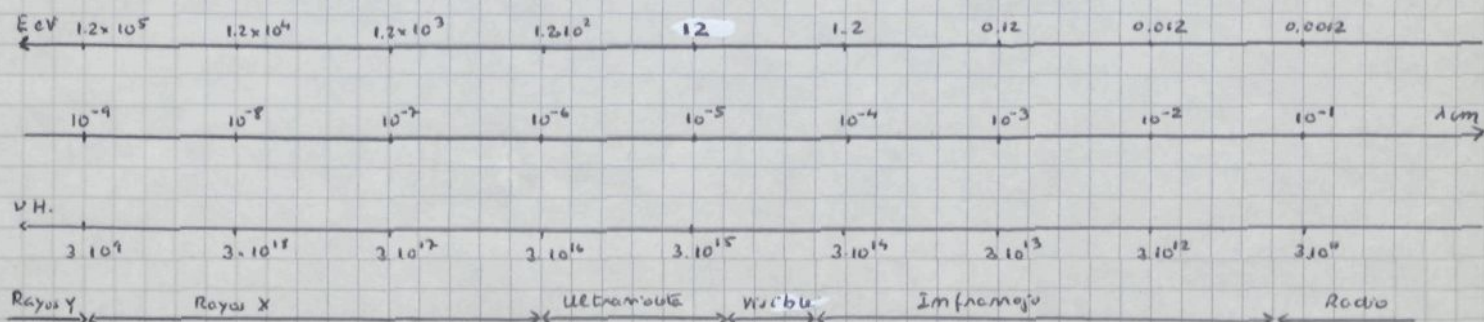
donde q es la carga. La luz monocromática es una luz de longitud de onda λ bien definida y sus fotones tienen todos ellos la misma energía E

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{h}{E/c} = \frac{h}{|\vec{p}|}, \quad E = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 \vec{p}^2} = c |\vec{p}| \quad (2)$$

$$1 \text{ eV} = 1.6021892(46) \times 10^{-12} \text{ erg}$$

$$hc = 1.9732858(51) \times 10^{-5} \text{ eV cm.}$$

$$\lambda = \frac{1.2398520(32) \times 10^{-4} \text{ cm}}{(E/\text{eV})}$$



$$\text{Violeta} \quad \lambda \approx 4 \times 10^{-5} \text{ cm} \quad E \approx 3.1 \text{ eV}$$

$$\text{Rojo} \quad \lambda \approx 7.5 \times 10^{-5} \text{ cm} \quad E \approx 1.7 \text{ eV}$$

} Transiciones atómicas externas

35/003

Rayos X : $\lambda \approx 10 \text{ \AA}$ $E \approx 1.2 \times 10^3 \text{ eV}$

Transiciones atómicas internas

Rayos γ : $\lambda \approx 2 \times 10^{-10} \text{ cm}$ $E \approx 0.6 \times 10^6 \text{ eV}$

Transiciones nucleares

Ondas de radio $\lambda \approx 10^2 \text{ cm}$ $E \approx 1.2 \times 10^{-6} \text{ eV}$ Antenas

Nota: La intensidad de un rayo de luz es proporcional al número de fotones del mismo y su polarización está relacionado con la helicidad del fotón.

Medida de longitudes:

i) Al mirar un coche usamos luz visible con energías típicas de 2 eV por fotón. Un fotón de este tipo que incide sobre el coche y sea reflejado produce un cambio de su momento del orden de $2p \approx 2E/c \approx 2 \times 10^{-22} \text{ g cm s}^{-1}$. El número de fotones que llegan del sol es del orden de $2 \times 10^{17} \text{ fotones cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ a la superficie de la Tierra. Si la superficie del coche iluminada fuera de 4 m^2 , el cambio de momento sería, como mucho, $1.6 \text{ (g cm s}^{-1})/\text{s}$. Si su masa es de 1000 kg esto le produce una aceleración del orden de $1.6 \times 10^{-6} \text{ g m s}^{-2}$.

ii) En un átomo para medir detalles del orden de $5 \times 10^{-9} \text{ cm}$ necesitamos fotones del orden de $\lambda \approx 5 \times 10^{-9} \text{ cm} \Rightarrow E \approx 2 \times 10^4 \text{ eV}$ y estos penetran totalmente el átomo pues la energía de ligadura de los electrones externos es de unos pocos electronvoltos.

Rayos X: $0.1 \text{ \AA} \leq \lambda \leq 800 \text{ \AA} \Leftrightarrow 0.1 \text{ MeV} \leq E \leq 20 \text{ eV}$

De la forma en que los rayos X son difractados por una red cristalina de dimensiones conocidas se puede determinar λ y al hacerlos incidir después sobre una red de estructura desconocida podemos determinar su tamaño.

Dualidad onda-corpusculo. En 1923, Louis de Broglie postuló que cualquier móvil con momento $\vec{p}$ va acompañado de una onda, imposible de separar de su movimiento, y con longitud de onda dada por

$$\lambda = \frac{h}{|\vec{p}|}$$

(3)

$$E = \sqrt{p^2 c^4 + c^2 \vec{p}^2} = mc^2 \left[1 + \frac{\vec{p}^2}{m^2 c^2} \right]^{1/2} = mc^2 + \frac{1}{2m} \vec{p}^2 - \frac{1}{8m^3 c^2} (\vec{p}^2)^2 + \dots$$

$$c|\vec{p}| = \sqrt{E^2 - m^2 c^4}$$

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{E^2 - m^2 c^4}}$$

En 1927, C. Davisson y L.H. Germer confirmaron, brillantemente, la predicción de De Broglie al difractar electrones de 54 eV sobre un cristal de níquel. Obtenieron una figura de difracción que correspondía a $\lambda = 1.65 \text{ \AA}$, frente a $\lambda = 1.67 \text{ \AA}$, deducido de la ecuación anterior.

Electrones: $m_e = 9.109534(47) \times 10^{-28} \text{ g}$

$m_e c^2 = 0.5110034(14) \text{ MeV}$

$$\lambda \approx \frac{1.24 \times 10^{-10} \text{ cm}}{[E^2 - 0.511^2]^{1/2}}, \quad E \text{ en MeV} \quad (1)$$

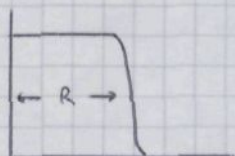
$E = 100 \text{ MeV}$

$\lambda = 12.4 \text{ fm}$

$E = 1 \text{ GeV}$

$\lambda = 1.24 \text{ fm}$

Mediante electrones de unos pocos GeV se han hecho estudios detallados de la estructura nuclear y se encuentra que la distribución de masa en el núcleo es

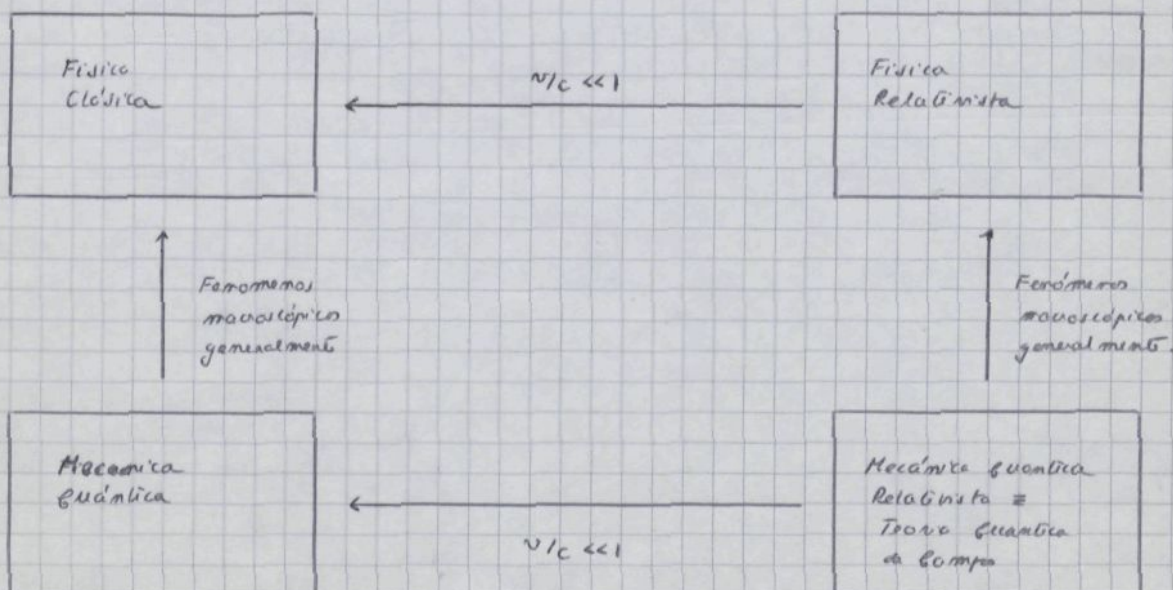


$R \approx 1.2 A^{1/3} \text{ fm}$

(2)

Se sabe también gracias a estudios análogos que el electrón, a diferencia del protón y el neutrón, es una partícula elemental: No tiene estructura o esta es menor que $2 \times 10^{-16} \text{ cm}$.

Esquema



Solución: ¿Por qué no empezamos por la teoría cuántica de campos? No por dos razones

i) No la conocemos bien

ii) Demasiada complejidad matemática y conceptualmente para introducirla de golpe.

35/003

¿Que hacer? ¿Debemos enseñar las "correctas" pero poco familiares leyes con ideas ex-
trañas y conceptualmente difíciles? ¿Debemos empezar por leyes simples, tales como las de
la mecánica clásica, que son únicamente aproximadas pero no requieren ideas tan com-
plicas y con un instrumental matemático mas simple? Lo primero puede parecer más
exótico, más manoseado y más divertido, pero lo segundo es más sencillo y es
un primer paso necesario para poder entender despues plenamente las teorías más com-
plicas.

Precaución: Es necesario saber matemáticas pero recuerden que para un físico con un
medio y nunca un fin.

II. - CALCULO DE ERRORES

Probabilidad: Supongamos que repetimos una determinada prueba N veces, y que sólo puede dar como resultados $A_1, A_2, \dots, A_m$. Supongamos que el resultado A_i aparezca $N(A_i)$ veces, entonces se define la probabilidad de este resultado como

$$p(A_i) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N(A_i)}{N} \quad (1)$$

Al decir que repetimos la observación significa volver a hacerla en circunstancias totalmente equivalentes para nuestros propósitos

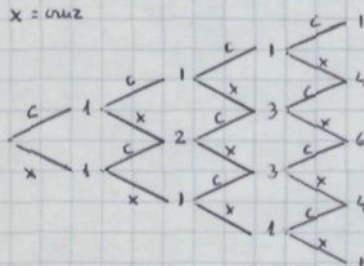
Propiedades: i) $0 \leq p(A_i) \leq 1$ (2)

ii) $\sum_{i=1}^m p(A_i) = 1$ (3)

Moneda: Si es monetal $p(\text{cara}) = p(\text{cruz}) = 1/2$

¿Qué probabilidad existe de que en N lanzamientos aparezcan k caras?

c = cara
x = cruz



Aparecen k caras: $\binom{N}{k} = \frac{N!}{k! (N-k)!}$

Posibles sucesos de resultados: 2^N

Probabilidad de que N lanzamientos aparezcan k caras

$$P(N, k) = \frac{1}{2^N} \frac{N!}{k! (N-k)!} \quad (4)$$

Dos resultados: En un juego que tenga dos resultados G y P , sea p la probabilidad de G y $q \equiv 1-p$ la de P , entonces, una extensión al razonamiento anterior, da para la probabilidad de que al hacer N lanzamientos obtenemos k veces el resultado G es

$$P(N, k) = \frac{N!}{k! (N-k)!} p^k (1-p)^{N-k} \quad (\text{Probabilidad binomial o de Bernoulli}) \quad (5)$$

Media: $\mu \equiv \langle k \rangle \equiv \sum_{k=0}^N k P(N, k) = \sum_{k=0}^N k \frac{N!}{k! (N-k)!} p^k (1-p)^{N-k} = \left. \frac{d}{d\lambda} \right|_{\lambda=1} =$

$$= \sum_{k=0}^N \frac{(N+1)!}{(k+1)! (N-k)!} (k+1) p^{k+1} (1-p)^{N-k} = (N+1) p \sum_{k=0}^N \frac{N!}{k! (N-k)!} p^k (1-p)^{N-k} = (N+1) p$$

$$\mu \equiv \langle k \rangle = Np \quad (6)$$

35/003

Varianza: $\sigma^2 \equiv \langle (k-\mu)^2 \rangle \equiv \sum_{k=0}^N (k-\mu)^2 P(N, k) = \sum_{k=0}^N (k^2 - 2\mu k + \mu^2) P(N, k) \Rightarrow$

$$\sigma^2 = \langle (k-\mu)^2 \rangle = \langle k^2 \rangle - \mu^2 \quad (7)$$

$$\langle k^2 \rangle = \sum_{k=0}^N k^2 \frac{N!}{k! (N-k)!} p^k (1-p)^{N-k} = \sum_{k=0}^N \frac{(M+1)!}{(k+1)! (M-k)!} (k+1)^2 p^{k+1} (1-p)^{M-k} =$$

$$= p(M+1) \sum_{k=0}^M (k+1) \frac{M!}{k! (M-k)!} p^k (1-p)^{M-k} = p(M+1) (Mp+1) \Rightarrow$$

$$\sigma^2 = \langle (k-\mu)^2 \rangle = \langle k^2 \rangle - \mu^2 = Np(1-p) \quad (8)$$

Desviación standard

$$\sigma \equiv \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{Np(1-p)} \quad (9)$$

Ejemplo: Moneda $p = 1/2$. Sea $N = 100$ entonces $\mu = 50$, $\sigma = 5$

$$P(100, 50) = \frac{100!}{50! 50!} \frac{1}{2^{100}} = 0.079589 \quad \text{Es el valor de } k \text{ que aparece con máxima probabilidad}$$

$$\ln m! = \left(m + \frac{1}{2}\right) \ln(m+1) - (m+1) + \frac{1}{2} \ln 2\pi + \frac{1}{12(m+1)} - \frac{1}{360(m+1)^3} + \frac{1}{1260(m+1)^5} - \frac{1}{1680(m+1)^7} + \dots \quad (\text{Fórmula de Stirling})$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=50-5}^{50+5} P(100, k) &= P(100, 50) + 2[P(100, 49) + \dots + P(100, 45)] = \\ &= 0.079589 + 2 \times [0.078029 + 0.073527 + \\ &+ 0.066590 + 0.057958 + 0.048476] = \\ &= 0.7287 \end{aligned}$$

Los valores en $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ aparecen un tanto por ciento muy elevado de las veces que efectuamos la moneda.

Distribución de probabilidad. Consideremos una experiencia cuyo resultado posible sea cualquier número real. Entonces la probabilidad de que el resultado de el valor x es nula. Sin embargo tiene sentido preguntarse que probabilidad hay de que el resultado de la medida este en $[x - \Delta x/2, x + \Delta x/2]$. Sea esta probabilidad $P(x, \Delta x)$. Entonces se define la densidad de probabilidad como

$$p(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x, \Delta x)}{\Delta x} \quad (10)$$

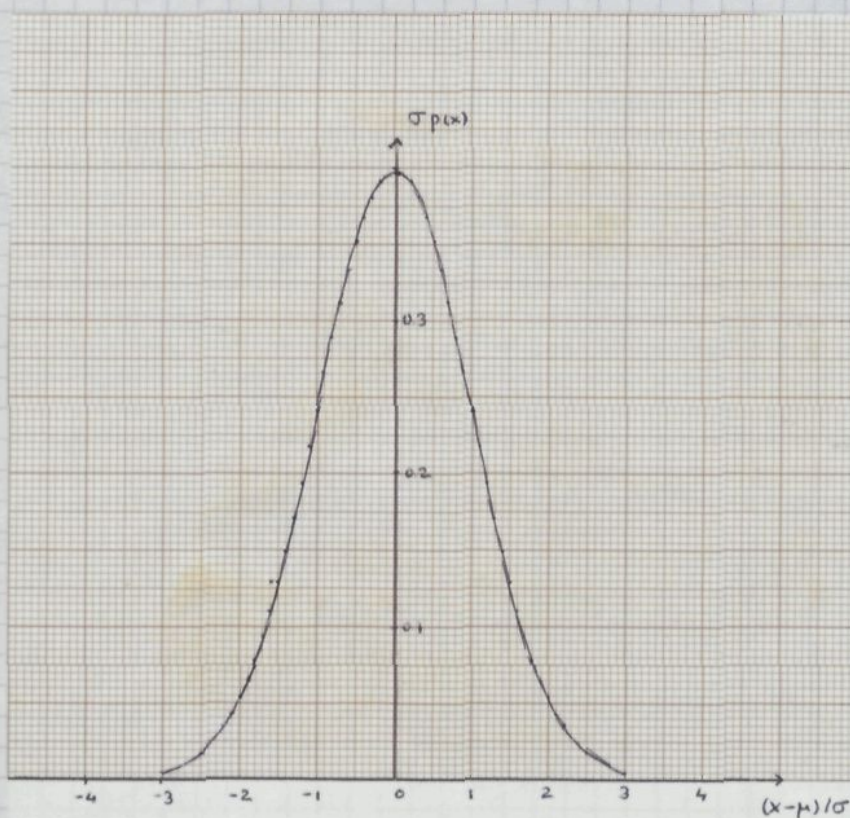
$$i) \quad p(x) \geq 0, \quad [p(x)] = x^{-1} \quad (1)$$

ii) $p(x) \Delta x$ es la probabilidad de que la medida esté en $[x - \Delta x/2, x + \Delta x/2]$ para Δx suficientemente pequeño

$$iii) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, p(x) = 1 \quad (2)$$

Distribución gaussiana: Es muy frecuente en Física que las medidas de una variable continua tiendan a distribuirse de acuerdo con una distribución de probabilidad gaussiana o normal

$$p(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2}, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad \sigma > 0 \quad (3)$$



$$\sigma p(\mu) = (2\pi)^{-1/2} =$$

$$= 0.398942280$$

$$\sigma p(\mu \pm \sigma) = (2\pi)^{-1/2} e^{-1/2} =$$

$$= 0.241970725$$

$$i) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, p(x) = 1 \quad (4)$$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, p(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2}$$

$$= \left| y = \frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma} \right| = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \, e^{-y^2} = 1$$

$$ii) \quad \langle x \rangle = \mu, \quad \langle (x-\mu)^2 \rangle = \sigma^2$$

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, x \, p(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, x \, e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \, (\mu + \sqrt{2}\sigma y) e^{-y^2} = \mu \quad (5)$$

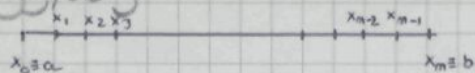
$$\langle (x-\mu)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, (x-\mu)^2 \, p(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, (x-\mu)^2 \, e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dy \, y^2 e^{-y^2} = \sigma^2 \quad (6)$$

$$\text{Hemos usado } \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, x^m e^{-x^2} = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \quad (7)$$

$$\text{Integrales: } I \equiv \int_a^b dx \, f(x)$$

Una forma de calcular numéricamente esta integral es mediante el método de Simpson

35/003



$$x_k = x_0 + k h$$

m: par

$$\int_a^b dx f(x) = \frac{1}{3} h \left\{ f(x_0) + f(x_m) + 4 [f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{m-1})] + 2 [f(x_2) + f(x_4) + \dots + f(x_{m-2})] \right\} \quad (1)$$

Ejemplo 1 : $I \equiv \int_0^{\pi/2} dx \sin x = 1$

$$m=2 \quad I_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{4} \left\{ \sin 0 + \sin \frac{\pi}{2} + 4 \sin \frac{\pi}{4} \right\} = \frac{\pi}{12} [1 + 2\sqrt{2}] = 1.002279878$$

$$m=4 \quad I_4 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{8} \left\{ \sin 0 + \sin \frac{\pi}{2} + 4 \left[\sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{3\pi}{4} \right] + 2 \sin \frac{\pi}{2} \right\} =$$

$$= 1.000134515$$

$$I_8 = 1.0000008296$$

$$I_{16} = 1.0000000517$$

$$I_{32} = 1.000000032$$

$$I_{64} = 1.00000002$$

Ejemplo 2 $I \equiv \int_0^{\infty} dx x^2 e^{-x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{4} = 0.443113463$

$$I = \int_0^N dx x^2 e^{-x^2} + \int_N^{\infty} dx x^2 e^{-x^2} \approx \int_0^N dx x^2 e^{-x^2} \quad \text{para } N \text{ grande : } N \gg 1.$$

$$\int_N^{\infty} dx x^2 e^{-x^2} \leq \int_N^{\infty} dx x^1 e^{-Nx} = \left\{ -\frac{1}{N} x^2 e^{-Nx} - \frac{1}{N^2} 2x e^{-Nx} + \frac{2}{N^3} e^{-Nx} \right\}_N^{\infty} =$$

$$= N \left(1 + \frac{2}{N^2} + \frac{2}{N^4} \right) e^{-N^2}$$

Basta pues tomar $N=5$ para obtener una precisión mejor de 1×10^{-10} .

$$m=2 \quad I_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{2} \left\{ 0e^0 + 25e^{-25} + 4 [6.25e^{-6.25}] \right\} = 0.040217795$$

El resultado es muy malo pues no coincide totalmente el pico

$$I_4 = 0.5559357443, \quad I_8 = 0.4493204013$$

$$I_{16} = 0.4431134628, \quad I_{32} = 0.4431134627$$

Calculo de $P[\mu - m\sigma, \mu + m\sigma]$

$$P[\mu - m\sigma, \mu + m\sigma] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mu - m\sigma}^{\mu + m\sigma} dx e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2} = \left| \frac{(x - \mu)/\sqrt{2}\sigma = y}{\sqrt{2}\sigma} \right|$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{m/\sqrt{2}} dx e^{-x^2}$$

(2)

De aquí y mediante métodos numéricos

$$P[\mu - \sigma, \mu + \sigma] = 0.683$$

$$P[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma] = 0.954$$

(1)

$$P[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma] = 0.997$$

Medidas: En el laboratorio cuando se quiere medir una cantidad se hacen N mediciones de la misma y se obtienen los valores $x_1, x_2, \dots, x_N$. Existe un teorema debido a Liapunov que afirma: Cuando sobre un experimento diseñado para medir una magnitud x influye un número muy grande de factores independientes, cada uno de los cuales por separado tiene una influencia muy pequeña sobre el resultado final, entonces la distribución de resultados de la medición de x en un número muy elevado de repeticiones del experimento se acerca a una distribución Gaussiana. Se demuestra que la mejor estimación de μ es la media aritmética

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (\text{media aritmética}) \quad (2)$$

mientras que la mejor estimación de σ es

$$s = \left[\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \right]^{1/2} \quad (\text{desviación standard}) \quad (3)$$

Se puede dar como resultado de la medición $\bar{x} \pm s$ y esto representa que la probabilidad de que la medida este en $[\bar{x} - s, \bar{x} + s]$ es un 68% aproximadamente.

Volvamos sobre este punto.

Propagación de errores: Se desea determinar x que es una función conocida $x = f(u, v)$ de dos variables u y v que son las que se miden directamente.

i) Aunque no es siempre cierta se suele suponer $\bar{x} = f(\bar{u}, \bar{v})$.

ii) Sea $x_i = f(u_i, v_i)$ entonces

$$\begin{aligned} s_x^2 &= \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N [f(u_i, v_i) - f(\bar{u}, \bar{v})]^2 \\ &= \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N [f(\bar{u} + (u_i - \bar{u}), \bar{v} + (v_i - \bar{v})) - f(\bar{u}, \bar{v})]^2 = (\text{Si la dispersión de medidas es pequeña}) \\ &= \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)_{u=\bar{u}, v=\bar{v}} (u_i - \bar{u}) + \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right)_{u=\bar{u}, v=\bar{v}} (v_i - \bar{v}) \right\}^2 \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)_{u=\bar{u}, v=\bar{v}}^2 \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (u_i - \bar{u})^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right)_{u=\bar{u}, v=\bar{v}}^2 \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (v_i - \bar{v})^2 \\ &\quad + 2 \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)_{u=\bar{u}, v=\bar{v}} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right)_{u=\bar{u}, v=\bar{v}} \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v}) \end{aligned}$$

35/003

Si las medidas no están correlacionadas y N es grande se espera que el último término sea nulo y por tanto

$$S_x^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)_{\substack{u=\bar{u} \\ v=\bar{v}}}^2 S_u^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right)_{\substack{u=\bar{u} \\ v=\bar{v}}}^2 S_v^2 \quad (4)$$

que es la fórmula fundamental de propagación de errores. Se ha supuesto que u , v y x tienen distribuciones gaussianas, que las dispersiones de las medidas de u y v son pequeñas y que $\bar{x} = f(\bar{u}, \bar{v})$.

Casos de interés

- i) $x = au + bv$ $S_x^2 = a^2 S_u^2 + b^2 S_v^2$
- ii) $x = a u v$ $S_x^2 = a^2 v^2 S_u^2 + a^2 u^2 S_v^2 \Rightarrow \frac{S_x^2}{\bar{x}^2} = \frac{S_u^2}{\bar{u}^2} + \frac{S_v^2}{\bar{v}^2}$ (5)
- iii) $x = a u / v$ $S_x^2 = a^2 \frac{1}{\bar{v}^2} S_u^2 + a^2 \frac{\bar{u}^2}{\bar{v}^4} S_v^2 \Rightarrow \frac{S_x^2}{\bar{x}^2} = \frac{S_u^2}{\bar{u}^2} + \frac{S_v^2}{\bar{v}^2}$
- iv) $x = a (u/v)^m$ $S_x^2 = m^2 a^2 \frac{\bar{u}^{2m-2}}{\bar{v}^{2m}} S_u^2 + m^2 a^2 \frac{\bar{u}^{2m}}{\bar{v}^{2m+2}} S_v^2 \Rightarrow \frac{S_x^2}{\bar{x}^2} = m^2 \left(\frac{S_u^2}{\bar{u}^2} + \frac{S_v^2}{\bar{v}^2} \right)$

Ejemplo: Un péndulo tiene una longitud $L = (1.00 \pm 0.01) \text{ m}$ y la aceleración de la gravedad es $g = (9.81 \pm 0.02) \text{ m s}^{-2}$. ¿Cuál es el periodo?

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}, \quad \bar{T} = 2.006067 \text{ s.}$$

$$\frac{S_L^2}{\bar{L}^2} = 10^{-4}, \quad \frac{S_g^2}{\bar{g}^2} = 4.156 \times 10^{-6}, \quad \frac{S_T^2}{\bar{T}^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{S_L^2}{\bar{L}^2} + \frac{S_g^2}{\bar{g}^2} \right) = 2.6039 \times 10^{-5}$$

$$S_T = 0.010 \text{ s.} \quad T = (2.006 \pm 0.010) \text{ s.}$$

Medidas: Volvamos al problema de las N medidas con valores $x_1, \dots, x_N$, media aritmética $\bar{x}$ y desviación standard S . Attribuyamos a cada medida x_i la desviación standard $S_i = S$, entonces de acuerdo con la propagación de errores

$$S_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N S_i^2 \Rightarrow S_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{N}} S$$

Como resultado de la medida se suele dar $(\bar{x} \pm S/\sqrt{N})$.

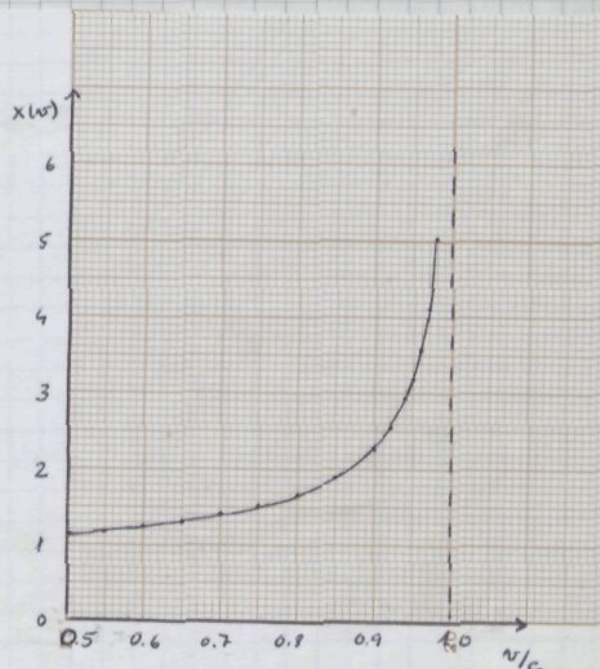
1 - En mecánica clásica y en mecánica relativista el momento de una partícula en movimiento unidimensional se define, respectivamente, como

$$p_{cl} \equiv m v \quad , \quad p_{rel} \equiv \frac{m v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Representar p_{rel}/p_{cl} para distintos valores de v .

$$x \equiv p_{rel}/p_{cl} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

v/c	$x(v)$	v/c	$x(v)$
0.1	1.0050	0.8	1.6667
0.2	1.0206	0.9	2.2942
0.3	1.0483	0.92	2.5516
0.4	1.0911	0.94	2.9311
0.5	1.1547	0.96	3.5714
0.6	1.2500	0.98	5.0252
0.7	1.4003		



$$v \ll c \quad x(v) = 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \dots$$

2 - Si un cuerpo se mueve a 300 Km/h calcular $(p_{rel} - p_{cl})/p_{rel}$.

$$\Delta = (p_{rel} - p_{cl})/p_{rel} = 1 - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} = \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{v}{c}\right)^4 + \dots$$

$$\frac{v}{c} = 2.7797 \times 10^{-7} \quad \Rightarrow \quad \Delta = 3.86 \times 10^{-14}$$

3 - Se determina la posición de un automóvil de masa $m = 10^3$ Kg con una precisión $\Delta x = 0.01$ mm. ¿Cuál es la mínima indeterminación con la que se puede medir su velocidad.

$$\begin{aligned} (\Delta v)_{\min} &= \frac{h}{2m \Delta x} = \frac{1.0546 \times 10^{-27} \text{ g cm}^2 \text{ s}^{-1}}{2 \times 10^6 \text{ g} \times 1 \times 10^{-3} \text{ cm}} = 5.27 \times 10^{-31} \text{ cm s}^{-1} = \\ &= 1.40 \times 10^{-32} \text{ Km/h.} \end{aligned}$$

35/003

4 - La trayectoria de una partícula en movimiento unidimensional es

$$x(t) = \left(\frac{m^2 c^4}{a^2} + c^2 t^2 \right)^{1/2}$$

donde m es la masa de la partícula y $a > 0$ una constante. ¿Cuál es la fuerza que actúa sobre la misma? Usar dinámica relativista

$$x(t) = \left(\frac{m^2 c^4}{a^2} + c^2 t^2 \right)^{1/2} \Rightarrow v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{c^2 t}{\left(\frac{m^2 c^4}{a^2} + c^2 t^2 \right)^{1/2}}$$

$$\frac{m v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m \frac{c^2 t}{\left(\frac{m^2 c^4}{a^2} + c^2 t^2 \right)^{1/2}} = \frac{\left(\frac{m^2 c^4}{a^2} + c^2 t^2 \right)^{1/2}}{\frac{m c^2}{a}} = a t$$

$$F = \frac{d}{dt} \left(\frac{m v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = \frac{d}{dt} a t = a$$

Es la trayectoria de una partícula sometida a fuerza constante. Para $t \ll \frac{mc}{a}$

$$x(t) = \frac{m c^2}{a} \left(1 + \frac{a^2 t^2}{m^2 c^2} \right)^{1/2} = \frac{m c^2}{a} + \frac{1}{2} \frac{a}{m} t^2 - \frac{1}{8} \frac{a^3}{m^3 c^2} t^4 + \dots$$

$$v(t) = \frac{a}{m} t \left(1 + \frac{a^2 t^2}{m^2 c^2} \right)^{-1/2} = \frac{a}{m} t + \frac{1}{2} \frac{a^3}{m^3 c^2} t^3 + \dots$$

Los dos primeros términos de $x(t)$ y el primero de $v(t)$ corresponden al movimiento clásico

5 - Estudiar la longitud de onda de la onda asociada con el neutrón para distintas velocidades de esta partícula ($m_n c^2 = 939.5731 (27) \text{ MeV}$)

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m v} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{1/2} = \frac{2\pi \hbar c}{(m c^2)} \frac{1}{(v/c)} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{1/2}$$

$$m c^2 = 939.5731 (27) \text{ MeV}, \quad \hbar c = 197.328 58 (51) \text{ MeV fm}$$

$$\lambda = 1.3196 \text{ fm} \frac{1}{v/c} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{1/2}$$

$$v/c \ll 1 \quad \lambda \approx 3.955 \times 10^{-3} \text{ nm} \frac{1}{v} \quad \text{con } v \text{ en } \text{m s}^{-1}$$

6 - En el acelerador SPS del CERN se aceleran protones hasta una energía de $E = 500 \text{ GeV}$ ¿Cuál es su velocidad?

$$E = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \Rightarrow \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{m c^2}{E} \Rightarrow \frac{v}{c} = \left[1 - \left(\frac{m c^2}{E} \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$m_p c^2 = 938.2796 (27) \text{ MeV}$$

$$\frac{v}{c} = 0.999998239$$

7 - En el Universo existe una radiación de fondo altamente isotrópica cuya temperatura es $T = 2.7 \text{ K}$. Los fotones que la constituyen tienen distintos longitudes de onda, pero los que abundan más son aquellos para los que

$$\lambda T = 0.2898 \text{ cm K} \quad (\text{Ley de desplazamiento de Wien})$$

Determinar la longitud de onda, frecuencia y energía de estos fotones

$$\lambda = 0.1073 \text{ cm}, \quad \nu = \frac{c}{\lambda} = 2.7931 \times 10^{11} \text{ Hz}$$

$$E = h\nu = 2\pi\hbar\nu = 1.8508 \times 10^{-15} \text{ erg} = 1.1551 \times 10^{-3} \text{ eV}$$

8 - Calcular cuánto tarda un rayo de luz en atravesar una distancia igual a
i) Tamaño de un núcleo; ii) Tamaño de un átomo; iii) Altura de un hombre;
iv) Distancia Tierra-Luna; v) Distancia Tierra-Sol.

$$i) d = 10^{-13} \text{ cm} \quad t = 3 \times 10^{-24} \text{ s}$$

$$ii) d = 10^{-8} \text{ cm} \quad t = 3 \times 10^{-19} \text{ s}$$

$$iii) d = 1.8 \times 10^2 \text{ cm} \quad t = 6 \times 10^{-9} \text{ s}$$

$$iv) d = 4 \times 10^5 \text{ km} \quad t = 1.3 \text{ s}$$

$$v) d = 1.5 \times 10^8 \text{ km} \quad t = 8.3 \text{ min.}$$

9 - Una emisora de FM funciona a 100 MHz de frecuencia y tiene una potencia de 1 kW . i) ¿Qué energía tienen los fotones emitidos? ii) ¿Cuántos fotones se emiten cada segundo?

$$\nu = 10^8 \text{ s}^{-1} \quad E = 2\pi\hbar\nu = 2\pi \times 1.054588(57) \times 10^{-27} \text{ erg s} \times 10^8 \text{ s}^{-1}$$

$$E = 6.63 \times 10^{-19} \text{ erg}$$

$$1 \text{ kW} = 1000 \text{ julio/s} = 10^{10} \text{ erg s}^{-1}$$

$$N_f = \frac{1 \text{ kW}}{E} \Rightarrow N_f = 1.51 \times 10^{28} \text{ fotones/s}$$

10 - Los niveles más internos de un átomo con muchos electrones pueden ser descritos aproximadamente mediante la expresión

$$E_n = -\frac{1}{2} \mu (ac)^2 (Z-b)^2 \frac{1}{n^2}$$

35/003

donde b es una constante debida al apantallamiento. Entonces en las transiciones entre dos niveles dados

$$\sqrt{\nu} = K (Z - b) \quad (\text{Ley de Mosely})$$

donde K y b son constantes fijas. Para una determinada transición (α, K, L_B) se encuentra para el Ca , Sc , Ti :

$$\lambda_{\text{Ca}} = 3.36166 \text{ \AA} \quad , \quad \lambda_{\text{Sc}} = 3.0342 \text{ \AA} \quad , \quad \lambda_{\text{Ti}} = 2.75216$$

Sabiendo que $Z_{\text{Ca}} = 20$, $Z_{\text{Sc}} = 21$ y $Z_{\text{Ti}} = 22$ comprobamos la validez de la ley

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \quad , \quad \sqrt{\nu} = \sqrt{\frac{c}{\lambda}} \quad Z \equiv Z_{\text{Ca}}$$

$$\sqrt{\nu_{\text{Ca}}} = 0.944351 \times 10^9 \text{ Hz} = K (Z - b)$$

$$\sqrt{\nu_{\text{Sc}}} = 0.99400 \times 10^9 \text{ Hz} = K (Z + 1 - b)$$

$$\sqrt{\nu_{\text{Ti}}} = 1.043695 \times 10^9 \text{ Hz} = K (Z + 2 - b)$$

$$K = \sqrt{\nu_{\text{Sc}}} - \sqrt{\nu_{\text{Ca}}} = \sqrt{\nu_{\text{Ti}}} - \sqrt{\nu_{\text{Sc}}}$$

de los dos $K = 0.049649 \times 10^9 \text{ Hz}$, $K = 0.049695 \times 10^9 \text{ Hz}$ en buen acuerdo con la ley. Tomemos, para minimizar errores,

$$K = \frac{1}{2} (\sqrt{\nu_{\text{Ti}}} - \sqrt{\nu_{\text{Ca}}}) = 0.049672 \times 10^9 \text{ Hz}$$

Entonces

$$b = Z - \frac{1}{K} \sqrt{\nu_{\text{Ca}}} = 0.988263$$

Entonces

$$\sqrt{\nu_{\text{Sc}}} = 0.99403 \times 10^9 \text{ Hz}$$

$$\sqrt{\nu_{\text{Ti}}} = 1.043706 \times 10^9 \text{ Hz}$$

en muy buen acuerdo con los valores experimentales.

11. Sabiendo que el oro tiene $A = 196.9665$ y densidad $\rho = 1.93 \times 10^4 \text{ Kg/m}^3$, estimar el tamaño de un átomo de Au.

La masa de un átomo de oro es aproximadamente $m_{\text{Au}} = 196.9665 \text{ u.a.m.}$

$m = 3.271 \times 10^{-22} \text{ g}$. Un cm^3 de oro pesa 19.3 g y contiene $N = 5.900 \times 10^{23}$

átomos. Si los átomos tienen radio R y están empaquetados $\frac{4}{3} \pi R^3 N = 1 \text{ cm}^3$

de donde $R \approx 1.59 \text{ \AA}$

12. ¿Cómo debe variar la presión P de un gas con el número de moléculas n por unidad de volumen? ¿Cómo debe variar la $\langle v^2 \rangle^{1/2}$?

Si el gas es perfecto $PV = Nk_B T \Rightarrow P \propto n$.

$$E \propto k_B T \Rightarrow \langle v^2 \rangle^{1/2} \propto n^{1/2}$$

13. En el Paleozoico cayó una tempestad y una de las gotas de agua se evaporó. ¿Cuántas moléculas de esta gota hay en un vaso de agua que tú coges del grifo de su casa?

Sea r el radio de la gota. Su masa es $M_G = \frac{4}{3} \pi \rho r^3$.

Una molécula de agua tiene una masa $M_{H_2O} = 18 m_p$, $m_p =$ masa del protón.

El número de moléculas de la gota es $N_G = \frac{2}{27} \pi \rho r^3 \frac{1}{m_p}$

La masa del agua puede estimarse: El mar cubre las $3/4$ de la superficie terrestre. Supongamos que la cubre toda con la espesor h , entonces su masa es $M_T = 4\pi R^2 h \rho$ donde R es el radio de la Tierra. Sea V la capacidad del vaso. Entonces el número de moléculas originales en el vaso es

$$n = N_G \frac{V}{4\pi R^2 h} \approx \frac{1}{54} \rho r^3 \frac{1}{m_p} \frac{V}{R^2 h}$$

$$\rho = 1 \text{ g cm}^{-3} \quad r = 0.5 \text{ cm} \quad m_p \approx 1.7 \times 10^{-24} \text{ g} \quad V = 200 \text{ cm}^3 \quad h = 10^5 \text{ cm} \quad R = 6.4 \times 10^8 \text{ cm}$$

$$n \approx 7 \text{ moléculas}$$

14. Para luz de $\lambda = 5500 \text{ Å}$ el umbral de detección del ojo humano es de unos 10^2 fotones/s. ¿Cuál es la potencia correspondiente?

$$E = \frac{2\pi h c}{\lambda} \quad \text{y por tanto cada uno de estos fotones tiene } E = 2.25 \text{ eV y}$$

por tanto la potencia pedida es

$$P = 10^2 E \text{ s}^{-1} = 225 \text{ eV/s} = 3.6 \times 10^{-17} \text{ W}$$

15. Si la atracción entre el protón y electrón en el átomo de hidrógeno fuera puramente gravitacional 1) ¿Cuál sería el equivalente del radio de Bohr? 2) ¿Qué energía tendría el estado fundamental?

35/003

Se debe sustituir $-\frac{e^2}{r} \rightarrow -\frac{G M_p M_e}{r}$

$$\alpha \rightarrow \frac{G M_p M_e}{\hbar c} = 4.51 \times 10^{-40} \alpha$$

Entonces

$$a_e = a_{\text{Bohr}} \frac{1}{4.51 \times 10^{-40}} = 1.20 \times 10^{31} \text{ um} = 1.27 \times 10^{43} \text{ a.l.}$$

$$E_e = E_{\text{Bohr}} [4.51 \times 10^{-40}]^2 = -2.65 \times 10^{-78} \text{ eV.}$$

16. Un átomo de hidrógeno excitado en el nivel $n=2$ pasa al nivel fundamental $n=1$ emitiendo un fotón. Suponiendo inicialmente en reposo el átomo: 1) Calcule la longitud de onda del fotón emitido; 2) ¿Con qué velocidad retrocede el átomo?

Como la energía de excitación $\Delta E = E_2 - E_1 = \frac{3}{8} \mu (\alpha c)^2 \ll M_H c^2$ siendo μ la masa reducida del electron y M_H la masa del átomo de hidrógeno en el estado fundamental, podemos tratar no relativísticamente el retroceso de éste. Si v es la velocidad de retroceso, la conservación de energía - momento exige que

$$\Delta E = h\omega + \frac{1}{2} M_H v^2, \quad \frac{h}{\lambda} = M_H v, \quad \lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$$

de donde

$$\Delta E = hc \frac{1}{\lambda} + \frac{h^2}{2M_H} \frac{1}{\lambda^2}, \quad \Delta E \lambda^2 - hc\lambda - \frac{h^2}{2M_H} = 0$$

$$\lambda = \frac{1}{2\Delta E} \left[hc \pm \sqrt{h^2 c^2 + \frac{4 h^2 \Delta E}{2M_H}} \right]$$

$$\lambda = \frac{hc}{2\Delta E} \left\{ 1 + \sqrt{1 + \frac{2\Delta E}{M_H c^2}} \right\} \approx \frac{hc}{\Delta E} \left\{ 1 + \frac{\Delta E}{2M_H c^2} \right\}$$

$$\lambda = 1215.6844 \text{ (Å)} [1 + 5.4 \times 10^{-9}] \text{ Å}$$

La velocidad de retroceso del átomo es $v = h / M_H \lambda$

$$v = 3.26 \text{ m s}^{-1}$$

1 - ¿Cuántos números de 4 cifras pueden formarse con los dígitos 0, 1, 2, ..., 9, si: i) los números pueden repitirse; ii) los números no pueden repitirse; iii) la última cifra debe ser uno y los números no pueden repitirse.

i) $10^4 - 10^3 = 9000$; $9 \times 10 \times 10 \times 10 = 9000$

ii) $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$

iii) $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$

2 - ¿Cuál es la probabilidad de que al tirar 900 veces un dado salga 120 veces el 3?

$$P(900, 120) = \frac{900!}{120! 780!} \left(\frac{1}{6}\right)^{120} \left(\frac{5}{6}\right)^{780}$$

$\ln 900! = 5226.575516$

$\ln 120! = 457.8123880$

$\ln P(900, 120) = -7.056774$

$\ln 780! = 4418.497951$

$$P(900, 120) = 8.6155 \times 10^{-4}$$

3 - Hallar la probabilidad de que una familia de cuatro hijos tenga: i) al menos un niño; ii) al menos un niño y una niña. Suponer que la probabilidad de nacimiento de un niño es $1/2$.

i) $\frac{1}{2^4} \binom{4}{1} + \frac{1}{2^4} \binom{4}{2} + \frac{1}{2^4} \binom{4}{3} + \frac{1}{2^4} \binom{4}{4} = \frac{15}{16} = 0.9375$

ii) $\frac{1}{2^4} \binom{4}{1} + \frac{1}{2^4} \binom{4}{2} + \frac{1}{2^4} \binom{4}{3} = \frac{14}{16} = \frac{7}{8} = 0.875$

4 - La probabilidad de que la suma de los puntos obtenidos al tirar dos dados sea N es

$$P(N) = \begin{cases} (N-1)/36 & 2 \leq N \leq 7 \\ (13-N)/36 & 7 < N \leq 12 \end{cases}$$

Calcular la media y la varianza de esta distribución

$$\begin{aligned} \mu = \langle N \rangle &= \sum_{N=2}^{12} N P(N) = 2 \frac{1}{36} + 3 \frac{2}{36} + 4 \frac{3}{36} + 5 \frac{4}{36} + 6 \frac{5}{36} + 7 \frac{6}{36} + 8 \frac{5}{36} + 9 \frac{4}{36} + 10 \frac{3}{36} + \\ &+ 11 \frac{2}{36} + 12 \frac{1}{36} = \frac{252}{36} = 7 \end{aligned}$$

35/003

$$\langle N^2 \rangle = \frac{1974}{36} = \frac{329}{6}, \quad \sigma^2 = \frac{329}{6} - 49 \Rightarrow \sigma^2 = \frac{35}{6}$$

$$\mu = 7, \quad \sigma^2 = \frac{35}{6}, \quad \sigma = \sqrt{\frac{35}{6}}$$

5 - De un total de 5 matemáticos y 7 físicos se forma un comité de 2 matemáticos y 3 físicos. ¿De cuántas formas puede constituirse si: i) puede pertenecer a él cualquier matemático y cualquier físico; ii) un físico determinado debe pertenecer al comité; iii) dos matemáticos determinados no pueden pertenecer al comité?

$$i) 5 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 4200$$

$$ii) 5 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 5 = 600$$

$$iii) 3 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1260$$

6 - Usando la regla de Simpson estimar

$$I = \int_0^1 dx \ln(1+x)$$

$$I = \int_0^1 dx \ln(1+x) = \left\{ (1+x) \ln(1+x) - (1+x) \right\}_0^1 = 2 \ln 2 - 1 \Rightarrow$$

$$I = 2 \ln 2 - 1 = 0.386294361$$

$$I_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} [\ln 1 + \ln 2 + 4 \ln 1.5] = 0.385834602$$

$$I_4 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \{ \ln 1 + \ln 2 + 4 [\ln 1.25 + \ln 1.75] + 2 \ln 1.5 \} = 0.386259563$$

$$I_8 = 0.386292044, \quad I_{16} = 0.386294214$$

$$I_{32} = 0.386294352, \quad I_{64} = 0.386294361$$

7 - Calcular mediante la regla de Simpson

$$I = \int_0^{\pi/2} dx \sin^2 x$$

El valor exacto es

$$I = \frac{\pi}{2} = 1.570796327$$

$$I = 2 \int_0^{\pi/2} dx \sin^2 x$$

$$I_2 = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{4} \left\{ \sin^2 0 + \sin^2 \frac{\pi}{2} + 4 \sin^2 \frac{\pi}{4} \right\} = \frac{\pi}{2} \{ 0 + 1 + 2 \} = \frac{\pi}{2}$$

$$I_4 = I_6 = \dots = \frac{\pi}{2}$$

8.- Para los gases las velocidades de las moléculas están distribuidas de acuerdo con la ley

$$P(v) = C v^2 e^{-mv^2/2k_B T}, \quad v \in [0, \infty)$$

donde m es la masa de una molécula, k_B la constante de Boltzmann, T la temperatura absoluta y C una constante de normalización. Determinar la velocidad cuadrática media $\langle v^2 \rangle$ y el valor medio de la energía cinética.

$$\int_0^\infty dv P(v) = 1, \quad C \int_0^\infty dv v^2 e^{-\alpha v^2} = 1 \quad \alpha \equiv \frac{m}{2k_B T}$$

$$\int_0^\infty dx x^n e^{-\lambda x^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{\lambda^{(n+1)/2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \quad C \frac{1}{2} \frac{1}{\alpha^{3/2}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = 1 \Rightarrow C = \frac{4\alpha^{3/2}}{\sqrt{\pi}}$$

$$\langle v^2 \rangle = \int_0^\infty dv v^2 P(v) = C \int_0^\infty dv v^4 e^{-\alpha v^2} = \frac{4\alpha^{3/2}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2} \frac{1}{\alpha^{5/2}} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2\alpha}$$

$$\langle v^2 \rangle = 3 \frac{k_B T}{m}$$

$$\langle K \rangle = \left\langle \frac{1}{2} m v^2 \right\rangle = \frac{3}{2} k_B T$$

9.- La densidad de probabilidad de que una partícula esté a una distancia r del origen es de la forma

$$P(r) = C r^2 e^{-r/a}, \quad a > 0 \quad r \in [0, \infty)$$

Hallar i) el valor de la constante C ii) El radio medio $\langle r \rangle$ iii) La varianza iv) La probabilidad de hallar la partícula en $[\langle r \rangle - \langle r \rangle/2, \langle r \rangle + \langle r \rangle/2]$.

$$1 = C \int_0^\infty dr r^2 e^{-r/a} = C a^3 \int_0^\infty dx x^2 e^{-x} = C a^3 \int_0^\infty (-x^2 - 2x - 2) e^{-x} dx = 2 C a^3$$

$$P(r) = \frac{1}{2a^3} r^2 e^{-r/a}$$

$$\text{Nota: } \int_0^\infty dx x^n e^{-x/a} = a^{n+1} n!$$

$$\langle r \rangle = \int_0^\infty dr r P(r) = \frac{1}{2a^3} \int_0^\infty dr r^3 e^{-r/a} = \frac{a}{2} \int_0^\infty dx x^3 e^{-x/a}$$

$$= \frac{a}{2} \int_0^\infty (-x^3 - 3x^2 - 6x - 6) e^{-x} dx = \frac{a}{2} 6 = 3a \Rightarrow \langle r \rangle = 3a, \quad \langle r^2 \rangle = 12a^2, \quad \sigma = 2a$$

$$P[\langle r \rangle/2, 3\langle r \rangle/2] = \frac{1}{2a^3} \int_{3a/2}^{9a/2} dr r^2 e^{-r/a} = \frac{1}{2} \int_{3/2}^{9/2} dx x^2 e^{-x} = \frac{1}{2} \int_{3/2}^{9/2} (-x^2 - 2x - 2) e^{-x} dx =$$

35/003

$$= \frac{1}{2} \left\{ -\frac{125}{4} e^{-9/2} + \frac{29}{4} e^{-3/2} \right\} = 0.635264.$$

10. Se han medido el radio R y la altura H de un cilindro y se han obtenido los siguientes resultados

R/cm	1.00	1.10	1.05	0.95	0.85	1.05	1.15
H/cm	2.01	2.02	2.00	1.97	1.99	2.02	2.00

Dar los valores de R , H y del volumen del cilindro

$$\bar{R} = 1.021429 \text{ cm}$$

$$S_R = 0.0994 \text{ cm}$$

$$R = (1.021 \pm 0.038) \text{ cm}$$

$$\bar{H} = 2.001429 \text{ cm}$$

$$S_H = 0.01773 \text{ cm}$$

$$H = (2.0014 \pm 0.0067) \text{ cm}$$

$$V = \pi R^2 H$$

$$\bar{V} = 655.4434 \text{ cm}^3$$

$$\frac{S_V^2}{\bar{V}^2} = 4 \frac{S_R^2}{\bar{R}^2} + \frac{S_H^2}{\bar{H}^2}$$

$$S_V = 48$$

$$V = (655 \pm 48) \text{ cm}^3$$

11. El radio de un anillo metálico es de $R = 25.1 \pm 0.1 \text{ mm}$ y su masa M es unos cinco gramos; ¿con qué aproximación debe realizarse la pesada del anillo para que el error no influya en la determinación del momento de inercia $I = MR^2$, y cuál será el error cometido en la determinación de I ?

$$\frac{\Delta I}{\bar{I}} = \left\{ \frac{(\Delta M)^2}{\bar{M}^2} + 4 \frac{(\Delta R)^2}{\bar{R}^2} \right\}^{1/2}$$

$$4 \frac{(\Delta R)^2}{\bar{R}^2} = 6.3491 \times 10^{-5}$$

$$\Rightarrow \frac{(\Delta M)^2}{\bar{M}^2} < 0.1 \times 10^{-5}$$

$$\frac{\Delta M}{\bar{M}} < 1 \times 10^{-3}$$

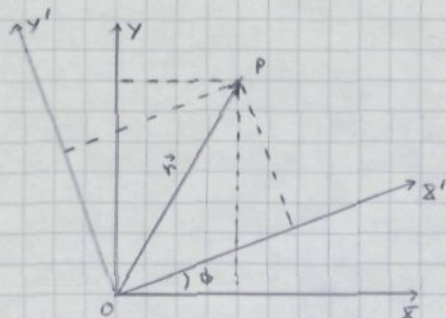
$$\Delta M < 0.005 \text{ g}$$

$$\frac{\Delta I}{\bar{I}} = 0.0080$$

$$\frac{\Delta I}{\bar{I}} = 0.8\%$$

III - VECTORES

Espacio Euclideo bidimensional Consideremos un sistema ortogonal de coordenadas OXY .



Un punto P queda determinado únicamente por un par ordenado (x, y) que son las llamadas coordenadas de P en el sistema de referencia dado. Giremos el sistema de referencia un ángulo ϕ . En el nuevo sistema de referencia $OX'Y'$ las coordenadas de P son

$$x' = x \cos \phi + y \sin \phi$$

(4)

$$y' = -x \sin \phi + y \cos \phi$$

Si hiciéramos nuevos giros del sistema de referencia obtendríamos para las coordenadas de P los valores (x'', y'') , (x''', y''') ... todos ellos calculables a partir de (x, y) mediante ecuaciones análogas a (4). Intentaremos un símbolo $\vec{r}$, que llamaremos vector posición de P , que nos caracteriza la posición de P referida a cualquier sistema de coordenadas de centro en O . Los dos números que describen $\vec{r}$ en un sistema de referencia dado son las llamadas coordenadas de P en dicho sistema de referencia o los componentes de $\vec{r}$.

Espacio Euclideo tridimensional: En el caso tridimensional para fijar un sistema de referencia ortogonal con relación a otro es necesario dar tres ángulos (α, β, γ) y la generalización de (4) es

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 R_{ij}(\alpha, \beta, \gamma) x_j, \quad i=1, 2, 3$$

(2)

o equivalentemente

$$x' = R(\alpha, \beta, \gamma) x$$

(3)

donde x y x' son matrices columna de componentes x_i y x'_i respectivamente y $R(\alpha, \beta, \gamma)$ una matriz cuadrada de elementos $R_{ij}(\alpha, \beta, \gamma)$. Las propiedades de $R(\alpha, \beta, \gamma)$ son

$$i) \quad R(\alpha, \beta, \gamma) = R^*(\alpha, \beta, \gamma) \Leftrightarrow R_{ij}(\alpha, \beta, \gamma) = R_{ji}^*(\alpha, \beta, \gamma)$$

(4)

lo cual garantiza que si x_i son reales también lo son x'_i .

$$ii) \quad R(\alpha, \beta, \gamma) R^T(\alpha, \beta, \gamma) = R^T(\alpha, \beta, \gamma) R(\alpha, \beta, \gamma) = I \Leftrightarrow$$

(5)

$$\sum_{j=1}^3 R_{ij}(\alpha, \beta, \gamma) R_{kj}(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{j=1}^3 R_{ji}(\alpha, \beta, \gamma) R_{jk}(\alpha, \beta, \gamma) = \delta_{ik}$$

donde I es la matriz unidad de elementos

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

(delta de Kronecker)

(6)

35/003

La distancia de P al origen es $d^2 = x^T x$ y en las notaciones $d^2 = x'^T x'$.

$$x'^T x' = x^T R^T(\alpha, \beta, \gamma) R(\alpha, \beta, \gamma) x \Leftrightarrow R^T(\alpha, \beta, \gamma) R(\alpha, \beta, \gamma) = I$$

iii) De $R^T(\alpha, \beta, \gamma) R(\alpha, \beta, \gamma) = I$ se deduce que $(\det R(\alpha, \beta, \gamma))^2 = 1$ y por tanto $\det R(\alpha, \beta, \gamma) = \pm 1$. La condición de rotaciones puras es

$$\det R(\alpha, \beta, \gamma) = +1 \quad (7)$$

Así quedan eliminadas transformaciones tales como $x'_i = -x_i$ que no son rotaciones.

Vector $\vec{A}$: Dado un sistema ortogonal de coordenadas y las cantidades $(A_x, A_y, A_z) \equiv (A_1, A_2, A_3)$ se dice que éstas son las componentes de un vector $\vec{A}$ si en todo nuevo sistema de referencia ortogonal obtenido del anterior mediante una rotación las componentes de $\vec{A}$, (A'_1, A'_2, A'_3) están relacionadas con las anteriores mediante las mismas ecuaciones que ligan (x', y', z') con (x, y, z) . Los conjuntos de números (A_1, A_2, A_3) , $(A'_1, A'_2, A'_3), \dots$ se indican por $\vec{A}$.

Ventajas: Todas las leyes de la física se formulan en lenguaje vectorial

- La formulación de una ley física mediante un lenguaje vectorial es independiente del sistema de ejes elegido. La notación vectorial ofrece una terminología en la que los enunciados tienen un significado sin necesidad de introducir un sistema de coordenadas. Esperamos que las leyes fundamentales no dependan de la orientación del sistema de referencia elegido, es decir creemos en la isotropía del espacio.
- La notación vectorial es muy concisa. Muchas leyes tienen formas sencillas y claras en esta notación que se desfiguram cuando se escriben referidas a un sistema particular de coordenadas.
- Para formular las leyes físicas además de los vectores ~~es~~ necesario introducir cantidades escalares, el valor de las cuales no cambia al girar el sistema de coordenadas. En ocasiones es necesario introducir tensores y spinores que son cantidades que bajo rotaciones se transforman de formas más complicadas.

Módulo de un vector: A todo vector $\vec{A}$ se le puede asociar un número positivo llamado módulo de dicho vector y que se representa por $|\vec{A}|$, que es un escalar, y que se puede calcular como

$$|\vec{A}| = \left[\sum_{i=1}^3 A_i^2 \right]^{1/2} \quad (8)$$

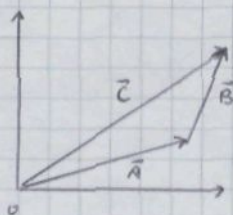
Veamos que es un escalar

$$\sum_{i=1}^3 A'_i A'_i = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 R_{ij} R_{ik} A_j A_k = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \delta_{jk} A_j A_k = \sum_{j=1}^3 A_j A_j \quad \text{Q.E.D.}$$

Igualdad: $\vec{A} = \vec{B}$ significa que $A_i = B_i, \forall i$. Evidentemente la definición es independiente del sistema de coordenadas pues $A_i = B_i, \forall i \Rightarrow A'_i = B'_i, \forall i$.

Suma: $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$. Veamos que $\vec{C}$ es un vector

$$C'_i = A'_i + B'_i = \sum_{j=1}^3 R_{ij} (A_j + B_j) = \sum_{j=1}^3 R_{ij} C_j \quad \text{Q.E.D.}$$



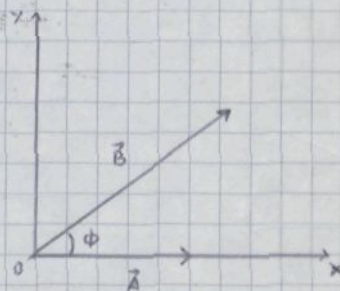
Producto de un escalar por un vector: $\alpha \vec{A} = (\alpha A_1, \alpha A_2, \alpha A_3)$. Es un nuevo vector.

Producto escalar de dos vectores: $\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_{i=1}^3 A_i B_i$

i) Es un escalar

$$ii) \vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

iii) Para calcular $\vec{A} \cdot \vec{B}$ se puede elegir un sistema de coordenadas en el que OX esté en la dirección de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ esté en el plano OXY



$$\vec{A} = (|\vec{A}|, 0, 0), \quad \vec{B} = (|\vec{B}| \cos \phi, |\vec{B}| \sin \phi, 0)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \phi \quad (1)$$

$$ii) \vec{A} \perp \vec{B} \Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = 0.$$

Producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$: Es un vector $\vec{C} \equiv \vec{A} \times \vec{B}$ de componentes

$$C_1 = A_2 B_3 - A_3 B_2, \quad C_2 = A_3 B_1 - A_1 B_3, \quad C_3 = A_1 B_2 - A_2 B_1 \quad (2)$$

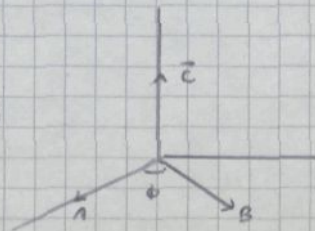
i) Es un vector

$$ii) \vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

$$iii) \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

iv) Como antes $\vec{A} = (|\vec{A}|, 0, 0)$ $\vec{B} = (|\vec{B}| \cos \phi, |\vec{B}| \sin \phi, 0)$

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = (0, 0, |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \phi)$$



Regla del tornillo

35/003

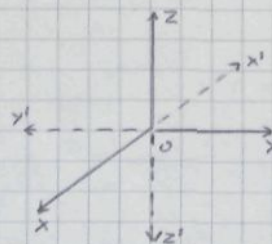
$$1) \vec{A} \times \vec{B} = 0 \Leftrightarrow \vec{A} \parallel \vec{B}$$

Paridad. La operación de paridad corresponde a un cambio de sentido de todos los

$$\text{ejes } \vec{P} = (x, y, z) \Rightarrow \vec{P} = (-x, -y, -z)$$

Equivale a una rotación de ángulo π alrededor del eje

OY y una imagen especular en el plano OXZ.



Vector: Se dice que $\vec{A}$ es un vector si sus componentes

$$\text{se transforman como tales bajo rotaciones y } (A_1, A_2, A_3) \xrightarrow{P} (-A_1, -A_2, -A_3)$$

Vector Axial: Se dice que $\vec{A}$ es un vector axial si sus componentes se transforman

$$\text{como las de un vector bajo rotaciones y } (A_1, A_2, A_3) \xrightarrow{P} (A_1, A_2, A_3)$$

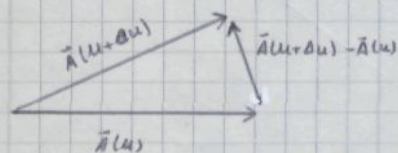
Nota: Si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son vectores $\vec{A} \times \vec{B}$ es un vector axial.

Nota: Si $\vec{A}$ es un vector y $\vec{B}$ es un vector axial y hay una ley física de la

forma $\vec{A} + \vec{B} = 0$, Entonces los fenómenos descritos por esta ley y sus imágenes especulares serían distinguibles.

Derivada: Consideremos un vector que depende de un parámetro u , $\vec{A}(u) = (A_i(u))$. Su

derivada con respecto a u se define como



$$\frac{d\vec{A}(u)}{du} = \lim_{du \rightarrow 0} \frac{\vec{A}(u+du) - \vec{A}(u)}{du} = \left(\frac{dA_i(u)}{du} \right) \quad (3)$$

Si u cambia entonces el extremo de $\vec{A}(u)$ describe una trayectoria y $d\vec{A}(u)/du$ está según la tangente a la trayectoria en el sentido de avance de la misma. Nota que si $|\vec{A}|$ no depende de u entonces

$$\frac{d|\vec{A}|^2}{du} = 0 \Rightarrow \frac{d}{du} \vec{A}(u) \cdot \vec{A}(u) = 0 \Rightarrow \vec{A}(u) \cdot \frac{d\vec{A}(u)}{du} = 0 \quad (4)$$

(A_i, B_j) - Sean $\vec{A}$ y $\vec{B}$ dos vectores. Consideremos las nuevas cantidades A_i, B_j que bajo rotaciones se transforman como

$$(A'_i, B'_j) = \sum_{k=1}^3 \sum_{e=1}^3 R_{ik} R_{je} (A_k, B_e) \quad (5)$$

Tensor de segundo orden. - Las nuevas cantidades $\{T_{ij}\}$ que bajo las rotaciones se transforman como

$$T'_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{e=1}^3 R_{ik} R_{je} T_{kj} \quad (6)$$

se dice que son las componentes de un tensor de segundo orden.

Propiedades:

i) Tensor nulo : $T_{ij} \equiv 0$. Evidentemente $T'_{ij} \equiv 0$

ii) Tensor simétrico : $T_{ij} = T_{ji}$. Evidentemente $T'_{ij} = T'_{ji}$

iii) Tensor antisimétrico : $T_{ij} = -T_{ji} \Rightarrow T_{ii} = 0 \forall i$. Evidentemente $T'_{ij} = -T'_{ji}$

iv) $\sum_{i=1}^3 T_{ii} \equiv \text{Tr}(T)$ es un escalar

$$\sum_{i=1}^3 T'_{ii} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 R_{ij} R_{ik} T_{jk} = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \delta_{jk} T_{jk} = \sum_{j=1}^3 T_{jj}$$

v) Si T_{ij} es un tensor y A_i es un vector entonces $\sum_{j=1}^3 T_{ij} A_j \equiv B_i$ es un vector.

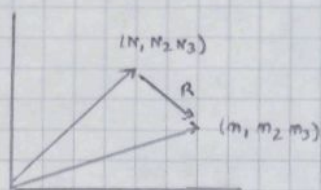
Demostándolo.

1.- Consideremos un conjunto de partículas que en el instante t se hallan distribuidas formando una red cúbica y por tanto sus coordenadas son

$$\vec{r}(m_1, m_2, m_3; t) \equiv a(t) [m_1 \vec{i} + m_2 \vec{j} + m_3 \vec{k}]$$

donde m_i son números enteros. Demostren que el observador en el origen verá que, en un instante dado, todas ellas se alejan con velocidad proporcional a la distancia. ¿Qué distribución de velocidades verá un observador cualquiera situado sobre una partícula en un instante dado?

Consideremos la partícula caracterizada por (m_1, m_2, m_3) . Su posición con relación a un observador situado en la partícula (N_1, N_2, N_3) es



$$\vec{R}(t) \equiv a(t) [(N_1 - m_1) \vec{i} + (N_2 - m_2) \vec{j} + (N_3 - m_3) \vec{k}]$$

Su velocidad es

$$\vec{V}(t) = \dot{a}(t) [(N_1 - m_1) \vec{i} + (N_2 - m_2) \vec{j} + (N_3 - m_3) \vec{k}]$$

$$|\vec{V}(t)| = |\dot{a}(t)| [(N_1 - m_1)^2 + (N_2 - m_2)^2 + (N_3 - m_3)^2]^{1/2}$$

$$|\vec{R}(t)| = |a(t)| [(N_1 - m_1)^2 + (N_2 - m_2)^2 + (N_3 - m_3)^2]^{1/2}$$

$$|\vec{V}(t)| = \frac{|\dot{a}(t)|}{|a(t)|} |\vec{R}(t)|$$

Vemos que cualquier observador, en un instante dado, ve las partículas alejándose ($\dot{a}(t) > 0$) o acercándose ($\dot{a}(t) < 0$) con una velocidad proporcional a la distancia.

2.- En un instante $t=0$ se produce una explosión en el origen de coordenadas y salen de él dos partículas con velocidades $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$, respectivamente. Para $t > 0$ las partículas se mueven libremente. i) Calcular en cada instante la distancia entre ambas. ii) Calcular la velocidad relativa y demostrar que ésta es, en todo instante, proporcional a su distancia.

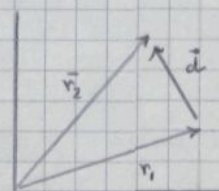
Las trayectorias son $\vec{r}_1 = \vec{v}_1 t$ y $\vec{r}_2 = \vec{v}_2 t$

La distancia relativa $\vec{d} = (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) t$

$$|\vec{d}| = |\vec{v}_2 - \vec{v}_1| t$$

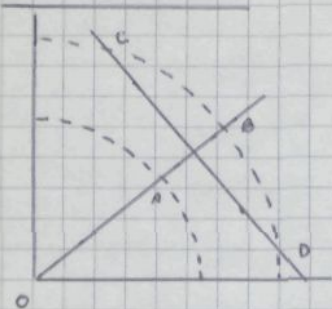
La velocidad relativa $\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ $\Rightarrow |\vec{v}| = |\vec{v}_2 - \vec{v}_1|$

$$|\vec{v}| = \frac{1}{t} |\vec{d}|, \quad t > 0$$



35/003

3 - Demuestran que un fluido distribuido isotrópicamente debe ser homogéneo



La isotropía implica que para cualquier observador todas las direcciones del espacio deben ser equivalentes. Sea un observador O que consideraremos el origen de coordenadas. Para él la isotropía significa que la densidad debe ser de la forma $\rho(r)$, $r \equiv |\vec{r}|$.

En principio $\rho(r_A) \neq \rho(r_B)$. Sin embargo para cualquier observador sobre la línea CD equidistante de A y de B la isotropía implica que $\rho(r_A) = \rho(r_B)$ y al ser A y B arbitrarios, la densidad debe ser constante.

4 - Calcular la matriz de rotación de un ángulo de 60° alrededor del eje Oz en sentido positivo i cómo se transforma el vector $\vec{A} \equiv (3, -2, -1)$?

$$R = \begin{vmatrix} \cos 60^\circ & \sin 60^\circ & 0 \\ -\sin 60^\circ & \cos 60^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{A} = \left(\frac{3}{2} - \sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2} - 1, -1 \right)$$

5 - Sea Ox_1, x_2, x_3 el sistema de referencia dextrógiro original. Definamos tres rotaciones de la siguiente forma

- Una rotación positiva de ángulo α ($0 \leq \alpha < 2\pi$) alrededor del eje Ox_3 . Sea $O\xi_1, \xi_2, \xi_3$ la terna transformada de la Ox_1, x_2, x_3 bajo esta rotación.
- Una rotación positiva de ángulo β ($0 \leq \beta \leq \pi$) alrededor del eje $O\xi_2$. Sea $O\eta_1, \eta_2, \eta_3$ la nueva terna.
- Una rotación positiva de ángulo γ ($0 \leq \gamma < 2\pi$) alrededor del eje $O\eta_3$. Sea Ox'_1, x'_2, x'_3 la terna final.

Estas tres rotaciones, definidas por los ángulos (α, β, γ) (llamados ángulos de Euler), permiten pasar de cualquier terna original Ox_1, x_2, x_3 a la Ox'_1, x'_2, x'_3 . Hallar la matriz $R(\alpha, \beta, \gamma)$ correspondiente a la rotación activa caracterizada por estos ángulos.

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{vmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{vmatrix} \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma & \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma & -\sin \beta \cos \gamma \\ -\cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \gamma & -\sin \alpha \cos \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & \sin \beta \sin \gamma \\ \cos \alpha \sin \beta & \sin \alpha \sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix}$$

6.- Sean los vectores unitarios

$$\hat{i}' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right), \quad \hat{j}' = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right), \quad \hat{k}' = (0, 0, 1)$$

Determinen los componentes del vector $\vec{A}$ en esta nueva terna si en la terna original sus componentes son $\vec{A} = (2, -1, 3)$.

$$i) \vec{A} = A'_x \hat{i}' + A'_y \hat{j}' + A'_z \hat{k}' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} A'_x - \frac{1}{2} A'_y \right) \hat{i} + \left(\frac{1}{2} A'_x + \frac{\sqrt{3}}{2} A'_y \right) \hat{j} + A'_z \hat{k}$$

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{3} A'_x - A'_y &= 4 \\ A'_x + \sqrt{3} A'_y &= -2 \\ A'_z &= 3 \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} A'_x &= \sqrt{3} - \frac{1}{2}, & A'_y &= -1 - \frac{1}{2} \sqrt{3}, & A'_z &= 3 \end{aligned}$$

$$\vec{A} = \left(\sqrt{3} - \frac{1}{2} \right) \hat{i}' + \left(-1 - \frac{1}{2} \sqrt{3} \right) \hat{j}' + 3 \hat{k}'$$

$$ii) \hat{i} \cdot \hat{i}' = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \alpha \equiv \text{ángulo entre } \hat{i} \text{ e } \hat{i}' \quad \alpha = \pi/6$$

$$R = \begin{vmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad RA = \begin{vmatrix} \sqrt{3} - 1/2 \\ -1 - \sqrt{3}/2 \\ 3 \end{vmatrix}$$

7.- Demostrar que la delta de Kronecker es un tensor invariante

$$\delta'_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 R_{ik} R_{jl} \delta_{kl} = \sum_{k=1}^3 R_{ik} R_{jk} = \delta_{ij}$$

8.- Considerar el tensor de Levi-Civita ϵ_{ijk} definido como

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} &= +1, & \text{si } (i, j, k) \text{ son una permutación par de } (1, 2, 3) \\ \epsilon_{ijk} &= -1, & \text{" " " " " impar " " } \\ \epsilon_{ijk} &= 0, & \text{en los otros casos} \end{aligned}$$

Sean A_{ij} los elementos de una matriz tres por tres. Ver que

$$\det A = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k}$$

Probar que ϵ_{ijk} es un tensor invariante

35/003

La primera parte se comprueba inmediatamente. Además de

$$\epsilon'_{ijk} = \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 R_{ie} R_{jm} R_{kn} \epsilon_{emmn}$$

se deduce la segunda

9.- Comprobar que

$$(\vec{A} \times \vec{B})_i = \sum_{e=1}^3 \sum_{j=1}^3 \epsilon_{iej} A_e B_j$$

$$\sum_{i=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{ij'k'} = \delta_{jj'} \delta_{kk'} - \delta_{jk'} \delta_{kj'}$$

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{ij'k'} = 2 \delta_{kk'}$$

Usando estos resultados probar que

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C}$$

$$[\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})]_i = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} A_j (\vec{B} \times \vec{C})_k = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{e=1}^3 \sum_{m=1}^3 \epsilon_{ijk} A_j \epsilon_{kem} B_e C_m =$$

$$= \sum_{j=1}^3 \sum_{e=1}^3 \sum_{m=1}^3 \left(\sum_{k=1}^3 \epsilon_{kij} \epsilon_{kem} \right) A_j B_e C_m = \sum_{j=1}^3 \sum_{e=1}^3 \sum_{m=1}^3 (\delta_{ie} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{je}) A_j B_e C_m =$$

$$= B_i \sum_{j=1}^3 A_j C_j - C_i \sum_{j=1}^3 A_j B_j = B_i (\vec{A} \cdot \vec{C}) - C_i (\vec{A} \cdot \vec{B})$$

10.- Las componentes de $\vec{P}$ son $\vec{P} = (\cos t, \sin t, 2t)$. Determinar $d\vec{P}(t)/dt$ y estudiar si $\vec{P}$ y $d\vec{P}(t)/dt$ son ortogonales

$$\frac{d\vec{P}(t)}{dt} = (-\sin t, \cos t, 2)$$

$$\vec{P}(t) \cdot \frac{d\vec{P}(t)}{dt} = 4t$$

11.- Calcular $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \phi)$ y aplicar el resultado a $\phi = 3x^2 y z^3$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \phi) = \Delta \phi$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 6yz^3$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 18x^2 y z$$

$$\Delta \phi = 6yz(z^2 + 3x^2)$$

12.- Calcular $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})$ y aplicarlo a $\vec{A} = e^x \hat{i} + ax y \hat{j} + bz^3 \hat{k}$.

$$[\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})]_i = \epsilon_{ijk} \nabla_j (\nabla \times \vec{A})_k = \epsilon_{ijk} \nabla_j \epsilon_{kmn} \nabla_n A_m = \epsilon_{ijk} \epsilon_{kmn} \nabla_i \nabla_n A_m =$$

$$= (\delta_{ie} \delta_{jm} - \delta_{em} \delta_{je}) \nabla_j \nabla_e A_m = \nabla_i (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta A_i$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = e^x + ax + 3bz^2$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = e^x + a, \quad \frac{\partial}{\partial y} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = 6bz$$

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} = e^x, \quad \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} = 6bz$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = (e^x + a) \hat{i} + 6bz \hat{k} - e^x \hat{i} - 6bz \hat{k}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = a \hat{i}$$

13. - Consideremos un espacio euclideo de dimension D . Un punto viene caracterizado por las coordenadas cartesianas $\vec{x} \equiv (x_1, x_2, \dots, x_D)$. Supongamos una función $\phi(r)$ que depende sólo de $r = |\vec{x}|$. Calcular $\Delta \phi(r)$

$$\frac{\partial \phi(r)}{\partial x_1} = \frac{d\phi(r)}{dr} \frac{\partial r}{\partial x_1} = \frac{d\phi(r)}{dr} \frac{\partial}{\partial x_1} (x_1^2 + \dots + x_D^2)^{1/2} = \frac{d\phi(r)}{dr} \left\{ +x_1, (x_1^2 + \dots + x_D^2)^{-1/2} \right\}$$

$$\frac{\partial^2 \phi(r)}{\partial x_1^2} = + \frac{d\phi(r)}{dr} \frac{1}{r} + \frac{d\phi(r)}{dr} x_1 \left(-x_1 \frac{1}{r^3} \right) + x_1^2 \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \phi(r)}{dr^2}$$

$$\Delta \phi = \frac{D}{r} \frac{d\phi(r)}{dr} - \frac{r^2}{r^3} \frac{d\phi(r)}{dr} + \frac{r^2}{r^2} \frac{d^2 \phi(r)}{dr^2}$$

$$\Delta \phi = \frac{d^2 \phi(r)}{dr^2} + \frac{(D-1)}{r} \frac{d\phi(r)}{dr}$$

14. - Considera un espacio Euclideo con coordenadas cartesianas (x^1, x^2, x^3) , entonces el cuadrado de la distancia entre los puntos de coordenadas (x^i) y $(x^i + dx^i)$ viene dado por

$$ds^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j$$

Se pueden introducir las coordenadas $x_i \equiv g_{ij} y^j$. Sean ahora nuevas coordenadas $y^i \equiv y^i(x^1, x^2, x^3)$. Introducir a continuación de seguida adem.

$$g_{ij}(y) = \frac{\partial x^k(y)}{\partial y^i} \frac{\partial x^k(y)}{\partial y^j}$$

35/003

Demostrar que

$$ds^2 = g_{ij} dy^i dy^j$$

Aplicar esto a las coordenadas esféricas

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} dy^j, \quad \delta_{ij} dx^i dx^j = \delta_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial y^k} dy^k \frac{\partial x^j}{\partial y^e} dy^e = g_{ke} dy^k dy^e$$

$$ds^2 = g_{ke} dy^k dy^e$$

$$\left. \begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi \\ y &= r \sin \theta \sin \phi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial r} &= \sin \theta \cos \phi, & \frac{\partial x}{\partial \theta} &= r \cos \theta \cos \phi, & \frac{\partial x}{\partial \phi} &= -r \sin \theta \sin \phi \\ \frac{\partial y}{\partial r} &= \sin \theta \sin \phi, & \frac{\partial y}{\partial \theta} &= r \cos \theta \sin \phi, & \frac{\partial y}{\partial \phi} &= r \sin \theta \cos \phi \\ \frac{\partial z}{\partial r} &= \cos \theta, & \frac{\partial z}{\partial \theta} &= -r \sin \theta, & \frac{\partial z}{\partial \phi} &= 0 \end{aligned}$$

$$g_{rr} = \sin^2 \theta \cos^2 \phi + \sin^2 \theta \sin^2 \phi + \cos^2 \theta = 1$$

$$g_{r\theta} = r \sin \theta \cos \theta \cos^2 \phi + r \sin \theta \cos \theta \sin^2 \phi - r \sin \theta \cos \theta = 0$$

$$g_{r\phi} = -r \sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi + r \sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi = 0$$

$$g_{\theta\theta} = r^2 \cos^2 \theta \cos^2 \phi + r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi + r^2 \sin^2 \theta = r^2$$

$$g_{\theta\phi} = -r^2 \sin \theta \cos \theta \sin \phi \cos \phi + r^2 \sin \theta \cos \theta \sin \phi \cos \phi = 0$$

$$g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi + r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi = r^2 \sin^2 \theta$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

15. Demostrar que si en un espacio euclideo

$$ds^2 = g_{ij}(y) dy^i dy^j$$

el elemento de volumen es

$$dV = \sqrt{g_{11}(y) g_{22}(y) g_{33}(y)} dy^1 dy^2 dy^3$$

Aplicar la fórmula obtenida a las coordenadas esféricas

El elemento de línea cuando la variación se limita a la coordenada y^i únicamente es

$$ds_i = \sqrt{g_{ii}(y)} dy^i$$

En esta parte el coseno del ángulo entre ds_i y dz es $(\partial z / \partial y^i)(\partial y^i / \partial s_i) = (\partial z / \partial y^i) / \sqrt{g_{ii}(y)}$ y

por tanto el coseno del ángulo θ_{ij} que forman ds_i con ds_j es

$$|dx_i| = \frac{g_{ij}(y)}{\sqrt{g_{11}(y)g_{22}(y)g_{33}(y) \dots}}$$

y el elemento de volumen es

$$dV = dx_1 dx_2 dx_3 \dots \sqrt{g_{11}(y)g_{22}(y)g_{33}(y) \dots} dy^1 dy^2 dy^3 \dots$$

16. En un espacio euclideo de dimensión D las coordenadas esféricas se pueden introducir

$$x^1 = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{D-3} \sin \theta_{D-2} \sin \theta_{D-1}$$

$$x^2 = r \sin \theta_1 \cos \theta_2 \dots \sin \theta_{D-3} \cos \theta_{D-2} \cos \theta_{D-1}$$

$$x^3 = r \sin \theta_1 \cos \theta_2 \dots \cos \theta_{D-3} \sin \theta_{D-2}$$

$$0 \leq r < \infty$$

$$x^4 = r \sin \theta_1 \cos \theta_2 \dots \cos \theta_{D-3}$$

$$0 \leq \theta_i < \pi \quad i=1, \dots, D-2$$

$$x^{D-1} = r \sin \theta_1 \cos \theta_2$$

$$0 \leq \theta_{D-1} < 2\pi$$

$$x^D = r \cos \theta_1$$

Entonces el área y el volumen de una esfera de radio R

se dan

$$g_{11} = \left(\frac{\partial x^1}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^2}{\partial r}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial x^D}{\partial r}\right)^2 = 1$$

$$g_{22} = r^2, \quad g_{33} = r^2 \sin^2 \theta_1, \quad g_{44} = r^2 \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2, \dots$$

$$g_{DD} = r^2 \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 \dots \sin^2 \theta_{D-2}$$

Entonces el elemento de volumen es

$$dV = r^{D-1} \sin^{D-2} \theta_1 \sin^{D-3} \theta_2 \dots \sin \theta_{D-2} dr d\theta_1 \dots d\theta_{D-1}$$

Entonces el volumen de la esfera de radio R es

$$V_D = \int_0^R dr r^{D-1} \int_0^\pi d\theta_1 \sin^{D-2} \theta_1 \int_0^\pi d\theta_2 \sin^{D-3} \theta_2 \dots \int_0^\pi d\theta_{D-2} \sin \theta_{D-2} \int_0^{2\pi} d\theta_{D-1}$$

$$= \frac{1}{D} R^D 2^{D-2} \frac{\Gamma(\frac{D-1}{2}) \Gamma(\frac{D-1}{2})}{\Gamma(D-1)} 2^{D-3} \frac{\Gamma(\frac{D-2}{2}) \Gamma(\frac{D-2}{2})}{\Gamma(D-2)} \dots 2 \frac{\Gamma(1) \Gamma(1)}{\Gamma(2)} 2\pi$$

$$D=2 \quad V_2 = \pi R^2$$

$$D=5 \quad V_5 = \frac{8}{15} \pi^2 R^5$$

$$D=3 \quad V_3 = \frac{4\pi}{3} R^3$$

$$D=6 \quad V_6 = \frac{1}{6} \pi^3 R^6$$

$$D=4 \quad V_4 = \frac{1}{2} \pi^2 R^4$$

35/003

Esto se puede escribir

$$V_D = \frac{2\pi^{D/2}}{D \Gamma(D/2)} R^D$$

$$\text{y el área } A_D = [V_D(R+DR) - V_D(R)]/DR$$

$$A_D = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)} R^{D+1}$$

17. Dado el vector $\vec{A} = 3\vec{e} - \vec{j} - \vec{k}$ encontrar sus componentes en la base $\vec{e}' = (1, 0, 1)$, $\vec{j}' = (1, 1, 0)$, $\vec{k}' = (0, 1, 1)$. ¿Cuáles son las componentes de la base $\vec{e}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ en la base dada?

$$\vec{A} = \alpha \vec{e}' + \beta \vec{j}' + \gamma \vec{k}'$$

$$\vec{A} = (3, -1, -1)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{e}' = 2, \quad \vec{A} \cdot \vec{j}' = 2, \quad \vec{A} \cdot \vec{k}' = -2$$

$$\vec{e}' \cdot \vec{e}' = 2, \quad \vec{e}' \cdot \vec{j}' = 1$$

$$\vec{e}' \cdot \vec{k}' = 1, \quad \vec{j}' \cdot \vec{j}' = 2, \quad \vec{j}' \cdot \vec{k}' = 1, \quad \vec{k}' \cdot \vec{k}' = 2$$

$$\left. \begin{aligned} 2 &= \alpha \cdot 2 + \beta + \gamma \\ 2 &= \alpha + 2\beta + \gamma \\ -2 &= \alpha + \beta + 2\gamma \end{aligned} \right\}$$

$$\alpha = \frac{3}{2}, \quad \beta = \frac{3}{2}, \quad \gamma = -\frac{5}{2}$$

$$\vec{A} = \frac{1}{2} (3\vec{e}' + 3\vec{j}' - 5\vec{k}')$$

Similarmente

$$\vec{e} = \frac{1}{2} (\vec{e}' + \vec{j}' - \vec{k}'), \quad \vec{j} = \frac{1}{2} (\vec{e}' - \vec{j}' + \vec{k}'), \quad \vec{k} = \frac{1}{2} (-\vec{e}' + \vec{j}' + \vec{k}')$$

18. Escribir las igualdades que expresan: a) que los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ son paralelos, b) que tres vectores son coplanares, c) Finalmente expresar vectorialmente la condición de que un vector $\vec{A}$, función del tiempo, sea de dirección constante

a) $\vec{A}$ y $\vec{B}$ paralelos: $\vec{A} \times \vec{B} = 0$

b) $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ coplanares: $\alpha \vec{A} + \beta \vec{B} + \gamma \vec{C} = 0$, $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$ ó $\vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = 0$

c) $\vec{A}(t) = f(t) \vec{a}$, $\vec{a} = \text{cte.}$

19. Considerar los vectores $\vec{A} = (3, 4, 1)$, $\vec{B} = 2\vec{e} + 3\vec{j} + 7\vec{k}$, $\vec{C} = (2, 7, 0)$ aplicados en el origen de coordenadas a) ¿son coplanares? b) calcular el volumen del paralelepípedo que forman c) ¿Cuál es la distancia del recto del tercer recto a la cara opuesta?

a) $\vec{A} \times \vec{B} = (25, -19, 1)$ $\vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = -83$

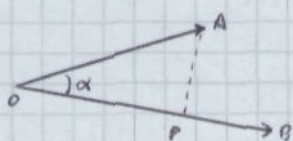
b) El volumen deseado es $V = |\vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})| = 83$

c) El vértice del tercer recta está en $(2, 7, 0)$. El plano opuesto a un plano que pasa por la punta $(0, 0, 0)$, $(3, 4, 1)$ y $(2, 3, 2)$ y en tanto a la forma

$$\begin{cases} ax+by+cz=0 \\ 3a+4b+c=0 \\ 2a+3b+7c=0 \end{cases} \Rightarrow 25x-19y+z=0.$$

y la distancia es $d = 7.270792$

20 - Calcúlese el valor de la proyección del vector $\vec{A} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$ según la dirección marcada por el vector $\vec{B} = \hat{i} + 6\hat{j} - \hat{k}$.



$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \alpha$$

$$OP = |\vec{A}| \cos \alpha$$

$$OP = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{B}|} = \frac{1}{\sqrt{38}} (2 - 18 - 1) = -\frac{17}{\sqrt{38}}$$

21 - Demuestran que la derivada de un vector de módulo constante es un vector perpendicular al dado comprobando con el vector $\vec{A}(t) \equiv (1, \sin wt, \cos wt)$.

Si $\vec{A}(t)$ es de módulo constante $\vec{A}(t) \cdot \vec{A}(t) = \text{cte}$ derivando $\vec{A}(t) \cdot \frac{d\vec{A}(t)}{dt} = 0$ Q.E.D.

$$\frac{d\vec{A}(t)}{dt} = (0, w \cos wt, -w \sin wt)$$

$$\vec{A}(t) \cdot \frac{d\vec{A}(t)}{dt} = 0$$

22) Sea $\vec{A} = 2\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}$, $\vec{C} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}$. a) Encuentra un vector $\vec{B}$ tal que $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}$.

¿Es única la solución? b) Encuentra un vector $\vec{B}$ tal que $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}$ y $\vec{A} \cdot \vec{B} = 1$. ¿Es

única la solución? c) Probar que b) tiene solución si $\vec{A}$ y $\vec{C}$ son dos vectores cualesquiera tales que $\vec{A} \neq 0$ y $\vec{A} \cdot \vec{C} = 0$.

$$a) \vec{B} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k} \quad \vec{A} \times \vec{B} = (2b-c)\hat{i} + (-2a-2c)\hat{j} + (a+2b)\hat{k}$$

$$\begin{cases} 2b-c=3 \\ -2a-2c=4 \\ a+2b=1 \end{cases} \Rightarrow \vec{B} = (1-2\alpha)\hat{i} + \alpha\hat{j} + (-3+2\alpha)\hat{k} \quad \alpha \text{ arbitrario. no única}$$

$$b) \vec{A} \cdot \vec{B} = 1 \Rightarrow 2(1-2\alpha) - \alpha - 2(-3+2\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{8}{9} \text{ única}$$

c) Siempre se puede elegir $\vec{A} = (a, 0, 0)$, $a > 0$ entonces $\vec{C} = (0, b, c)$ y sin pérdida de generalidad podemos tomar $c=0 \Rightarrow \vec{C} = (0, b, 0)$. Entonces $\vec{B} = (\alpha, 0, -b/a)$, α arbitrario

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 1 \Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow \vec{B} = (1, 0, -b/a).$$

35/003

23. Considere el vector $\vec{V} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ aplicado en el punto $A \equiv (0, 1, 1)$. Encuentra los momen-

tos respecto de los puntos $O = (0, 0, 0)$ y $P = (1, 2, 1)$ y comprobar que $\vec{M}_P = \vec{M}_O + \vec{PO} \times \vec{V}$

$$\vec{M}_O = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -3\hat{i} + 3\hat{j} - 3\hat{k}$$

$$\vec{M}_P = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$$

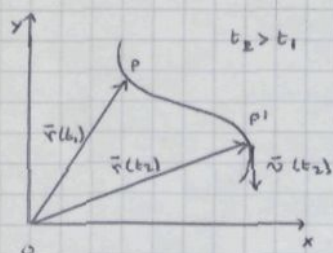
$$\vec{PO} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = +5\hat{i} - 5\hat{j} + 5\hat{k}$$

$$\Rightarrow \vec{M}_O + \vec{PO} \times \vec{V} = \vec{M}_P$$

IV - CINEMATICA

Definición: Es el estudio del movimiento sin entrar en consideraciones sobre las causas que lo producen.

Velocidad: Elijamos un sistema de referencia $Oxyz$ ligado al observador O y supongamos una partícula P cuya posición cambie, en general, en el transcurso del tiempo. Sea $\vec{r}(t)$ el vector posición de la partícula P en el instante t para el observador situado en O . El extremo de $\vec{r}(t)$ describe la trayectoria de la partícula. Se define la velocidad de P vista desde O como



$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \quad (1)$$

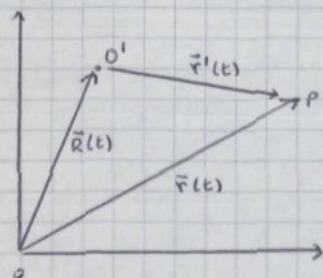
El vector $\vec{v}(t)$ es tangente a la trayectoria.

Movimiento uniforme: Se llama así al movimiento para el que

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 = \text{cte} \quad \Rightarrow \quad \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \vec{v}_0(t - t_0) \quad (2)$$

La trayectoria es rectilínea y viene recorrida con velocidad constante

Cambio de observador: El observador O' ve la partícula situada en



$$\vec{r}'(t) = \vec{r}(t) - \vec{R}(t) \quad (3)$$

y la ve con una velocidad

$$\vec{v}'(t) = \vec{v}(t) - \vec{V}(t) \quad (4)$$

donde

$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{R}(t)}{dt} = \text{velocidad de } O' \text{ vista desde } O. \quad (5)$$

i) $\vec{v}'(t) = \vec{v}(t)$ si y solo si $\vec{V}(t) = 0 \Rightarrow \vec{R}(t) = \text{const.}$ O' en reposo con relación a O .

ii) Si $O' = P \Rightarrow \vec{R}(t) = \vec{r}(t) \Rightarrow \vec{r}'(t) = 0 \Rightarrow \vec{v}'(t) = 0$ como debe ser.

Validez: La ley de suma de velocidades que acabamos de deducir es válida sólo si estas velocidades son todas ellas mucho menores que c . Esto es evidente pues de lo contrario siempre existirían velocidades mayores que c . La ley anterior falla pues hemos supuesto, en su deducción, que las distancias y tiempos tienen un carácter absoluto, independientes del observador y vemos que esto no es cierto.

La ley relativista de suma de velocidades es la siguiente: Si un observador O'

35/003

se mueve con velocidad constante $\vec{V}$ con relación a O , las velocidades de la partícula $\vec{v}$ y $\vec{v}'$ medidas, respectivamente, por O y O' están relacionadas por

$$\vec{v}' = \left\{ \left(1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}\right)^{1/2} \vec{v} + \left[1 - \sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}\right] \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{\vec{v}^2} \vec{V} - \vec{V} \right\} \frac{1}{1 - \frac{\vec{V} \cdot \vec{v}}{c^2}} \quad (6)$$

Si $\vec{V} = (V, 0, 0)$ estas ecuaciones se reducen a

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - Vv_x/c^2}, \quad v'_{y,z} = v_{y,z} \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - Vv_x/c^2} \quad (7)$$

i) Si $V \ll c \Rightarrow \vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}$ que es la ley usual

ii) Si $\vec{v} = (c, 0, 0)$, $\vec{V} = (V, 0, 0) \Rightarrow \vec{v}' = (c, 0, 0)$. La velocidad de la luz es la misma para todos los observadores. En realidad se llegan a estas leyes de transformación partiendo del hecho experimental de la constancia de la velocidad de la luz.

Acceleración $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} \quad (8)$

Movimiento uniformemente acelerado o retardado $\vec{a}(t) = \vec{a}_0 = \text{cte}$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \vec{a}_0(t - t_0), \quad \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \vec{v}(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2} \vec{a}_0(t - t_0)^2 \quad (9)$$

Movimiento circular uniforme: Se desean obtener $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$, $\vec{a}(t)$ para una partícula que con velocidad $|\vec{v}(t)| = v = \text{cte}$ describe una trayectoria circular de radio R alrededor del origen de coordenadas O

$$\vec{r}(t) = R \cos \omega(t - t_0) \hat{i} + R \sin \omega(t - t_0) \hat{j}$$

$$\vec{r}(t_0) = R \cos \omega t_0 \hat{i} - R \sin \omega t_0 \hat{j}$$

$$\vec{v}(t) = -\omega R \sin \omega(t - t_0) \hat{i} + R \omega \cos \omega(t - t_0) \hat{j}$$

$$\vec{v}(t) \perp \vec{r}(t) \quad v = \omega R \quad \omega = \text{velocidad angular}$$

$$\vec{a}(t) = -\omega^2 R \cos \omega(t - t_0) \hat{i} - R \omega^2 \sin \omega(t - t_0) \hat{j} \Rightarrow \vec{a}(t) = -\omega^2 \vec{r}(t)$$

$\vec{a}(t)$ dirigida hacia O : aceleración centrípeta

$$|\vec{a}(t)| = \omega^2 R \equiv a = \text{cte} \quad a = \omega^2 R = \frac{v^2}{R}$$

Periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$, tiempo que tarda en dar una vuelta

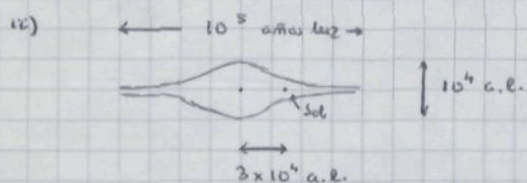
Frecuencia $\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$, número de vueltas por unidad de tiempo.

Ejemplo: Calcular la aceleración centrípeta del movimiento, supuesto circular. i) de la Tierra alrededor del Sol, ii) del Sol alrededor del centro de nuestra galaxia

i) $R \approx 1.5 \times 10^8 \text{ km} = 1.5 \times 10^{13} \text{ m}$ $T = 1 \text{ año} = 3.16 \times 10^7 \text{ s}$

$$v = \frac{2\pi R}{T} = 3 \times 10^6 \text{ m s}^{-1} = 30 \text{ km/s}$$

$$a = \frac{v^2}{R} = 0.59 \text{ m s}^{-2}$$



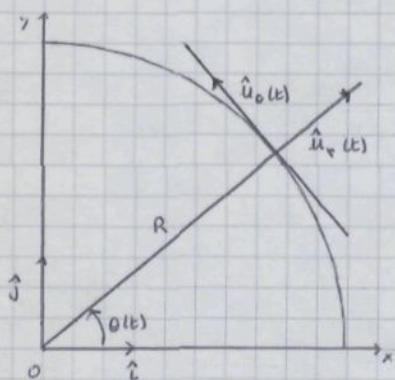
$$T = 2 \times 10^8 \text{ años} = 6.3 \times 10^{15} \text{ s}$$

$$R = 3 \times 10^4 \text{ a.l.} = 2.84 \times 10^{22} \text{ m}$$

$$v = 2.8 \times 10^7 \text{ m s}^{-1} = 280 \text{ km/s}$$

$$a = 2.8 \times 10^{-8} \text{ m s}^{-2}$$

Movimiento circular no uniforme:



$$\hat{u}_r(t) = \cos \theta(t) \hat{i} + \sin \theta(t) \hat{j} \quad (1)$$

$$\hat{u}_\theta(t) = -\sin \theta(t) \hat{i} + \cos \theta(t) \hat{j}$$

$$\vec{r}(t) = r(t) \hat{u}_\theta(t) \quad v(t) = |\vec{v}(t)| = R \dot{\theta}(t) \quad (2)$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{dr(t)}{dt} \hat{u}_\theta(t) + r(t) \frac{d\hat{u}_\theta(t)}{dt}$$

$$\frac{d\hat{u}_\theta(t)}{dt} = -\dot{\theta}(t) \cos \theta(t) \hat{i} - \dot{\theta}(t) \sin \theta(t) \hat{j} = -\dot{\theta}(t) \hat{u}_r(t)$$

$$\vec{a}(t) = \dot{r}(t) \hat{u}_\theta(t) - \dot{\theta}(t) r(t) \hat{u}_r(t) \quad (3)$$

Aceleración tangencial $a_t(t) = \dot{v}(t)$

Aceleración centrípeta $a_{cp}(t) = v(t) \dot{\theta}(t)$ (4)

i) Si $\theta = \omega t$ con $\omega = \text{cte}$ se recuperan las formulas del movimiento circular uniforme

ii) Si el movimiento es plano pero no circular las formulas de la aceleración continúan siendo válidas sustituyendo $1/R$ por la curvatura ρ de la trayectoria. Recuerda que si la curva es $y = f(x)$ la curvatura es

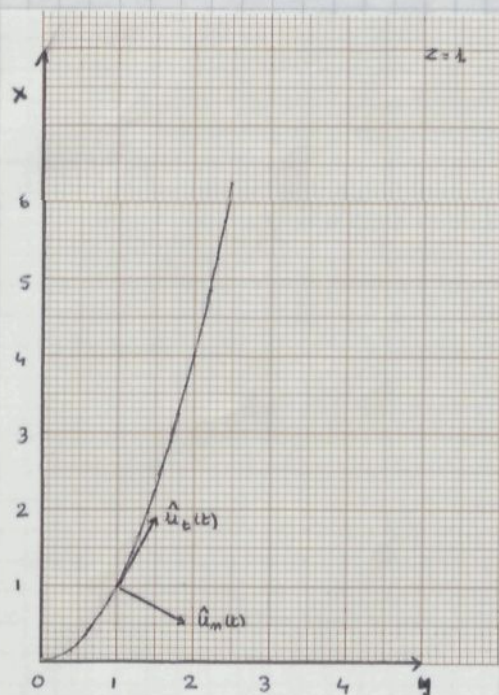
$$\rho = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}} \quad (5)$$

iii) Fórmulas más complicadas, que no discutiremos aquí, se pueden deducir para trayectorias no planas.

1 - Una partícula se mueve sobre una trayectoria cuyo vector posición es

$$\vec{r}(t) = t^2 \hat{i} + t \hat{j} + \hat{k} \quad (\text{unidades arbitrarias})$$

Determinese la velocidad y la aceleración. Determinar la tangente y la normal a la trayectoria y dese la descomposición de $\vec{v}(t)$ y $\vec{a}(t)$ según estas dos direcciones



$$\vec{r}(t) = t^2 \hat{i} + t \hat{j} + \hat{k}$$

Es un movimiento en el plano $z=1$

$$\vec{v}(t) = 2t \hat{i} + \hat{j} \quad |\vec{v}(t)| = [1 + 4t^2]^{1/2}$$

$$\vec{a}(t) = 2 \hat{i}$$

$$\text{Tangente } \hat{u}_t(t) = \frac{1}{[1 + 4t^2]^{1/2}} [2t \hat{i} + \hat{j}]$$

$$\text{Normal } \hat{u}_n(t) = \frac{1}{[1 + 4t^2]^{1/2}} [\hat{i} - 2t \hat{j}]$$

$$v_t(t) = v(t) \quad v_n(t) = 0$$

$$a_t(t) = \frac{4t}{[1 + 4t^2]^{1/2}} \quad a_n(t) = \frac{2}{[1 + 4t^2]^{1/2}}$$

Notar

$$a_t(t) = \dot{v}(t) \quad a_n(t) = \frac{2}{(1 + 4t^2)^{3/2}} v^2(t) \equiv g v^2(t)$$

g es la curvatura pues $y = \sqrt{x}$ $y' = \frac{1}{2} x^{-1/2}$ $y'' = -\frac{1}{4} x^{-3/2}$

$$g = + \frac{1}{4} \frac{1}{x^{3/2}} \frac{1}{(1 + 1/4 x^2)^{3/2}} = \frac{2}{(1 + 4t^2)^{3/2}}$$

2 - Un punto se desplaza sobre la parábola $y = x^2/(18\text{m})$ de modo que cuando $x = 8\text{m}$ la componente horizontal de la velocidad es 2ms^{-1} . ¿Cuánto vale en este instante la componente vertical de la velocidad?

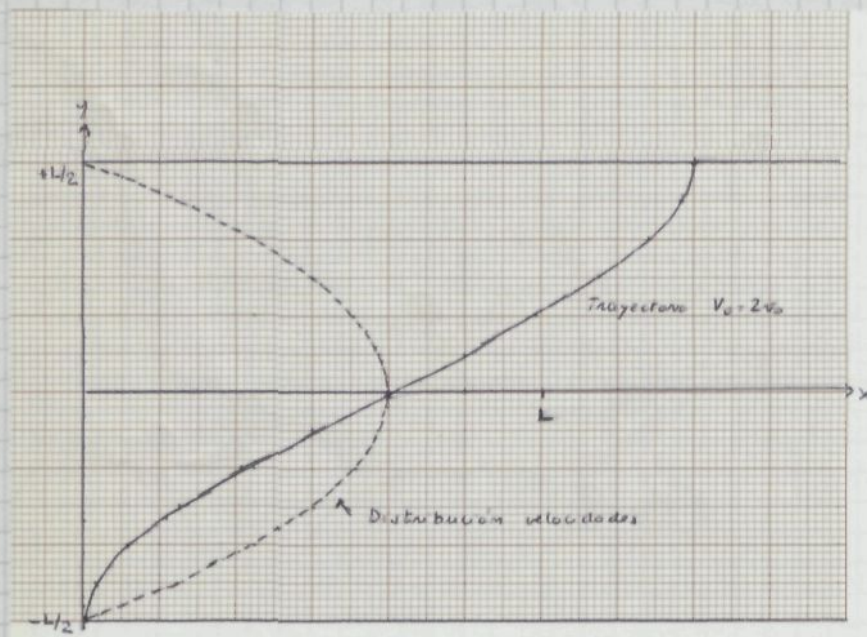
$$y(t) = \frac{1}{18} x^2(t) \quad v_y(t) = \frac{1}{9} x(t) v_x(t)$$

$$v_y = \frac{1}{9} 8 \times 2 \text{ ms}^{-1} = 4 \text{ ms}^{-1}$$

3 - Una barca atraviesa un río de anchura L . La velocidad de la barca es $v_0 \neq c$ y perpendicular a la corriente. Se supone que el agua se mueve con velocidad mala en las orillas y máxima V_0 en el centro, con una distribución parabólica de velocidades. Hallar la trayectoria de la barca y el tiempo empleado en

35/003

cruzan el río.



La distribución de velocidades
de la corriente es

$$V(y) = V_0 \left(1 - 4y^2/L^2\right)$$

Si en $t=0$ la banca está en
 $(0, -L/2)$

$$\vec{v}(y) = V(y) \hat{i} + v_0 \hat{j} \equiv$$

$$\equiv \frac{dx}{dt} \hat{i} + \frac{dy}{dt} \hat{j}$$

De donde

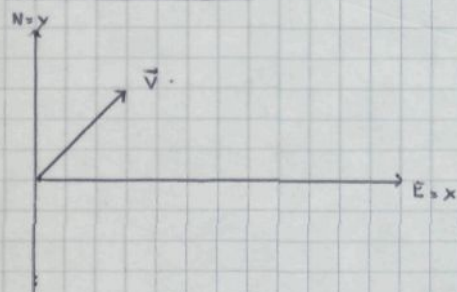
$$y = v_0 t - L/2$$

$$x = V_0 t^2 \frac{2v_0}{L} \left(1 - \frac{2}{3L} v_0 t\right)$$

Tarda en cruzar $T = \frac{L}{v_0}$

Trajectory
$$x = \frac{V_0}{v_0} \frac{L}{3} \left(1 + \frac{2y}{L}\right)^2 \left(1 - \frac{y}{L}\right)$$

4 - El piloto de un avión desea alcanzar un punto a 350 km al Este de su posición presente. Sopla un viento NE de 50 km/h. Calcular el vector velocidad, que supondremos constante, con respecto a la Tierra y con respecto a la masa de aire en movimiento, si el horario le exige que llegue en 40 min. a su destino. No tomar en cuenta la rotación de la Tierra.



$$\frac{350 \text{ km}}{\frac{2}{3} \text{ h}} = 525 \text{ km/h} = v_x + 50 \text{ km/h} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

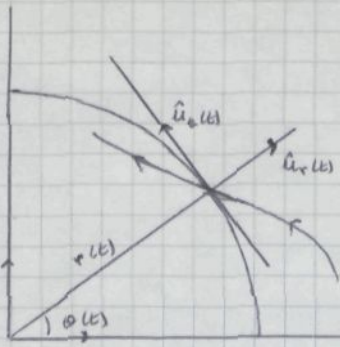
$$v_x = 489.6 \text{ km/h}$$

$$v_y = -35.4 \text{ km/h}$$

velocidad con respecto a la Tierra
$$\vec{v} = (489.6 \hat{i} - 35.4 \hat{j}) \text{ km/h}$$

velocidad con respecto a la masa de aire
$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_w = (454.3 \hat{i} - 70.7 \hat{j}) \text{ km/h}$$

5 - Hallar la velocidad y la aceleración de un movimiento plano cualquiera en coordenadas polares



$$\hat{u}_r(t) = \cos \theta(t) \hat{i} + \sin \theta(t) \hat{j}$$

$$\hat{u}_\theta(t) = -\sin \theta(t) \hat{i} + \cos \theta(t) \hat{j}$$

$$\vec{r}(t) = r(t) \cos \theta(t) \hat{i} + r(t) \sin \theta(t) \hat{j} = r(t) \hat{u}_r(t)$$

$$\vec{v}(t) = \frac{dr(t)}{dt} \hat{u}_r(t) + r(t) \frac{d\hat{u}_r(t)}{dt} \quad \frac{d\hat{u}_r(t)}{dt} = \dot{\theta}(t) \hat{u}_\theta(t)$$

$$\vec{v}(t) = \dot{r}(t) \hat{u}_r(t) + \dot{\theta}(t) r(t) \hat{u}_\theta(t)$$

$$\vec{a}(t) = \ddot{r}(t) \hat{u}_r(t) + \dot{r}(t) \frac{d\hat{u}_r(t)}{dt} + \ddot{\theta}(t) r(t) \hat{u}_\theta(t) + \dot{\theta}(t) \dot{r}(t) \hat{u}_\theta(t) + \dot{\theta}(t) r(t) \frac{d\hat{u}_\theta(t)}{dt}$$

$$\frac{d\hat{u}_\theta(t)}{dt} = -\dot{\theta}(t) \hat{u}_r(t)$$

$$\vec{r}(t) = r(t) \hat{u}_r$$

$$\vec{v}(t) = \dot{r}(t) \hat{u}_r + \dot{\theta}(t) r(t) \hat{u}_\theta$$

$$\vec{a}(t) = [\ddot{r}(t) - \dot{\theta}^2(t) r(t)] \hat{u}_r + [\dot{r}(t) \dot{\theta}(t) + 2\dot{\theta}(t) \dot{r}(t)] \hat{u}_\theta$$

6 - Una banca está impulsada por un motor que le confiere una velocidad constante respecto al agua. En un viento instantáneo, mientras navega río abajo, su tripulante suelta un concho. Transcurrida 1 hora, la banca comienza a navegar río arriba y encuentra el concho 1 km., mas abajo de donde lo había soltado. Calcular la velocidad de la corriente.

v_b = velocidad banca, v_c = velocidad corriente, ambas en km/h

Río abajo la banca recorre una distancia $L = v_b + v_c$

En su viaje río arriba hasta encontrar el concho emplea un tiempo $T = \frac{v_b + v_c - 1}{v_b - v_c}$

Debemos que $v_c(T+1) = 1$ De ambas $v_c \left(\frac{v_b + v_c - 1}{v_b - v_c} + 1 \right) = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow v_c(2v_b + 1) = v_b - v_c \Rightarrow 2v_c v_b - v_c = v_b - v_c \Rightarrow v_c = \frac{1}{2}$$

7 - Dos puntos recorren la misma recta con movimientos cuyas ecuaciones son

$$s_1 = \frac{5}{2} t^2 - 4t + 2$$

$$s_2 = t^2 + 5t + 4$$

¿Cuál es su velocidad relativa en el instante en que su distancia llega a ser mínima?

35/003

La distancia entre los dos puntos es $d = \left| \frac{3}{2} t^2 - 9t - 2 \right|$ y $d=0$ cuando

$t = (9 + \sqrt{93})/3$ y entonces sus velocidades son

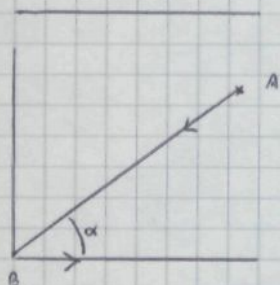
$$v_1 = 5t - 4 = \frac{33 + 5\sqrt{93}}{3}$$

$$v_2 = 2t + 5 = \frac{33 + 2\sqrt{93}}{3}$$

y la velocidad relativa es

$$v = \sqrt{93}$$

8 - Un barco se acerca a un puerto desde una distancia a , con una velocidad constante u y otro barco se aleja también del mismo puerto con velocidad constante v . Las trayectorias de ambos barcos son rectilíneas, formando entre sí un ángulo α . Encuétrase la relación de sus distancias al puerto en el momento en que la distancia entre ambos es mínima. ($\alpha \neq \pi/2$)



$$\vec{r}_A(t) = (a - ut) \cos \alpha \hat{i} + (a - ut) \sin \alpha \hat{j}$$

$$\vec{r}_B(t) = vt \hat{i}$$

$$d = |\vec{r}_A - \vec{r}_B| = \left\{ [(a - ut) \cos \alpha - vt]^2 + [(a - ut) \sin \alpha]^2 \right\}^{1/2}$$

$$d(t) = \left\{ (a - ut)^2 + v^2 t^2 - 2v(a - ut) \cos \alpha \cdot t \right\}^{1/2}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{d(t)}{dt} = 0 \Rightarrow 2(a - ut)(-u) + 2v^2 t - 2v(a - ut) \cos \alpha - 2v(-u) \cos \alpha \cdot t = 0$$

$$-2au + 2u^2 t + 2v^2 t - 2va \cos \alpha + 2uv t \cos \alpha + 2uv t \cos \alpha = 0$$

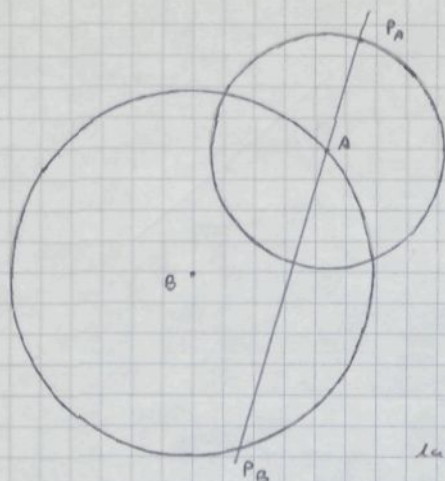
$$t_m = \frac{au + av \cos \alpha}{u^2 + v^2 + 2uv \cos \alpha}$$

La relación β de las distancias pedidas es

$$\beta = \frac{vt}{a - ut} \Big|_{t=t_m}$$

$$\beta = \frac{u + v \cos \alpha}{v + u \cos \alpha}$$

9 - Consideremos una circunferencia de centro en el punto A, radio R_A y sobre la que se mueve un móvil P_A con velocidad angular constante. Una segunda circunferencia de centro en el punto B y radio R_B pasa por el punto A y sobre ella se mueve un móvil P_B de forma tal que los puntos P_A , P_B y A estén siempre alineados. Calcular la velocidad y la aceleración del movimiento del móvil P_B visto desde el punto A.



Consideremos que A es el origen de coordenadas, entonces

$$\vec{r}_A(t) = R_A \cos(\omega t + \phi) \hat{i} + R_A \sin(\omega t + \phi) \hat{j}$$

$$\Rightarrow x_A(t) = R_A \cos(\omega t + \phi)$$

$$y_A(t) = R_A \sin(\omega t + \phi)$$

Sim. perdida de generalidad podemos escribir la ecuación de la otra circunferencia como

$$(x_B - R_B)^2 + y_B^2 = R_B^2 \Rightarrow x_B^2 + y_B^2 - 2R_B x_B = 0$$

La condición de que A, P_A, P_B estén alineados es $x_B = d(t) \cos(\omega t + \phi)$

$$y_B = d(t) \sin(\omega t + \phi)$$

de donde

$$d^2(t) \cos^2(\omega t + \phi) + d^2(t) \sin^2(\omega t + \phi) - 2R_B d(t) \cos(\omega t + \phi) = 0 \Rightarrow d(t) = 2R_B \cos(\omega t + \phi)$$

Por tanto

$$x_B(t) = 2R_B \cos^2(\omega t + \phi), \quad y_B(t) = 2R_B \sin(\omega t + \phi) \cos(\omega t + \phi)$$

$$x_B(t) = 2R_B \cos^2(\omega t + \phi)$$

$$y_B(t) = R_B \sin(2\omega t + 2\phi)$$

$$\dot{x}_B(t) = -4R_B \omega \cos(\omega t + \phi) \sin(\omega t + \phi)$$

$$\dot{y}_B(t) = 2R_B \omega \cos(2\omega t + 2\phi)$$

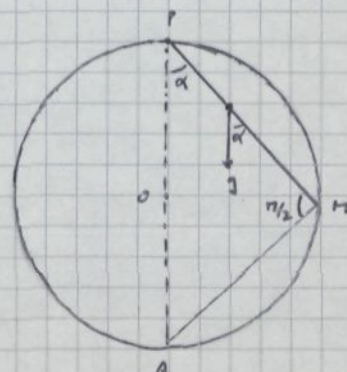
$$\dot{x}_B(t) = -2R_B \omega \sin(2\omega t + 2\phi)$$

$$\dot{y}_B(t) = 2R_B \omega \cos(2\omega t + 2\phi)$$

$$v_B = \sqrt{\dot{x}_B^2(t) + \dot{y}_B^2(t)} \Rightarrow v_B = 2R_B \omega$$

$$\Rightarrow a_{tB} = 0, \quad a_{mB} = 4\omega^2 R_B$$

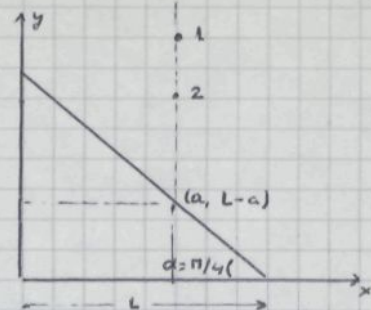
10. Calcular el tiempo que tarda un móvil en caer a lo largo de una cuerda de una circunferencia de radio R situada en un plano vertical y partiendo en reposo del punto más alto de dicha circunferencia.



$$T = \sqrt{\frac{2PM}{a}} = \left\{ \frac{2 \cdot 2R \cdot \omega \alpha}{g \sin \alpha} \right\}^{1/2} \Rightarrow T = 2 \sqrt{\frac{R}{g}}$$

35/003

11. Dos bolas elásticas, 1 y 2, caen simultáneamente, sin velocidad inicial, de dos puntos de coordenadas y_{0i} ($i=1,2$).
¿Qué coordenada x tienen en el momento de encontrarse?



$$\left. \begin{aligned} \text{Introducimos las coordenadas } \hat{x} &= x - a \\ \hat{y} &= y - (L - a) \end{aligned} \right\}$$

con lo que $(a, L-a) \rightarrow (0,0)$. Entonces $\hat{y}_{0i} = y_{0i} - (L-a)$.

El tiempo empleado por la bola i ($i=1,2$) en alcanzar un punto de coordenada $\hat{x}$ es

$$t_i = \left\{ \frac{2\hat{y}_{0i}}{g} \right\}^{1/2} + \frac{1}{\sqrt{2g\hat{y}_{0i}}} x$$

Entonces como $t_1 = t_2$

$$\sqrt{\frac{2\hat{y}_{01}}{g}} + \frac{1}{\sqrt{2g\hat{y}_{01}}} \hat{x} = \sqrt{\frac{2\hat{y}_{02}}{g}} + \frac{1}{\sqrt{2g\hat{y}_{02}}} \hat{x} \Rightarrow$$

$$\sqrt{\hat{y}_{01}} + \frac{1}{2\sqrt{\hat{y}_{01}}} \hat{x} = \sqrt{\hat{y}_{02}} + \frac{1}{2\sqrt{\hat{y}_{02}}} \hat{x} \Rightarrow$$

$$\hat{x} = 2 \sqrt{\hat{y}_{01}\hat{y}_{02}}$$

$$x = a + 2 \sqrt{(y_1 + a - L)(y_2 + a - L)}$$

12. Una partícula describe un movimiento rectilíneo y el camino recorrido es $s = 4t^3 - 3t^2 - 6$ donde s se expresa en metros y t en segundos. a) Determinar las unidades de las constantes de la ecuación. b) Si la partícula parte del reposo, calcular el tiempo que tardará en adquirir una velocidad de 6 ms^{-1} . c) Calcular en este momento su aceleración. d) Calcular el desplazamiento de la partícula cuando $t = 5 \text{ s}$.

a) $s = 4 \text{ ms}^{-3} t^3 - 3 \text{ ms}^{-2} t^2 - 6 \text{ m}$

b) $v \equiv \frac{ds}{dt} = 12t^2 - 6t \Rightarrow 6 = 12t^2 - 6t \Rightarrow 2t^2 - t - 1 = 0, t = 1 \text{ s}.$

c) $a = \frac{dv}{dt} = 24t - 6 \Rightarrow a = 18 \text{ ms}^{-2}$

d) $s = 4 \times 125 - 3 \times 25 - 6 = 500 - 75 - 6 = 419 \text{ m}.$

13 - Un maquinista de un tren que tiene una velocidad v_1 se que se está acercando a un tren que va a una velocidad $v_2 < v_1$, en la misma dirección y sentido. Tienen una aceleración constante a . Demuestra que si la distancia inicial d es mayor que $(v_1 - v_2)^2 / 2a$ no hay colisión. Dibuja $x(t)$ para cada tren

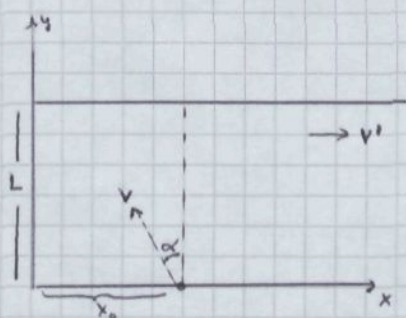
$$\left. \begin{aligned} x_1 &= v_1 t - \frac{1}{2} a t^2 \\ x_2 &= d + v_2 t \end{aligned} \right\} \text{ Para que haya colisión debe existir un } t > 0 \text{ tal que } x_1(t) = x_2(t)$$

$$v_1 t - \frac{1}{2} a t^2 = d + v_2 t \quad \frac{1}{2} a t^2 + (v_2 - v_1) t + d = 0$$

$$t = \frac{1}{a} \left\{ (v_1 - v_2) \pm \sqrt{(v_1 - v_2)^2 - 2da} \right\} \quad \text{No hay colisión si } (v_1 - v_2)^2 - 2da < 0$$

$$\Rightarrow d > (v_1 - v_2)^2 / 2a$$

14 - Una persona puede remar en banca a 6.44 Km/hora si el agua está tranquila. a) Está cruzando un río cuya corriente es de 3.22 Km/hora ¿que dirección le da a la banca si quiere llegar a un punto directamente opuesto al de partida? b) Si el río tiene 6.44 Km de ancho, ¿cuánto tiempo tardará en cruzarlo? c) ¿Cuánto tiempo tardará en remar 3.22 Km río abajo y después volver al punto de partida? d) ¿Cuánto tiempo tardará en remar 3.22 Km río arriba y volver al punto de partida? e) ¿Qué dirección debe tomar si quiere cruzar el río en el menor tiempo posible?



$$\text{Sea } V = 6.44 \text{ Km/h} \quad \text{y} \quad V' = 3.22 \text{ Km/h.}$$

a)

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= V' - V \cos \alpha \\ \frac{dy}{dt} &= V \sin \alpha \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} x &= x_0 + (V' - V \cos \alpha) t \\ y &= (V \sin \alpha) t \end{aligned}$$

$$\cos \alpha = V'/V = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \pi/3$$

$$b) \quad L = V \sin \alpha \quad T = \frac{L}{V \sin \alpha} \Rightarrow T = \frac{2}{13} \text{ horas}$$

c) Remando río abajo la velocidad es $V + V'$ y el tiempo para llegar a $x_1 = 3.22 \text{ Km}$ es

$$t_1 = \frac{3.22 \text{ Km}}{V + V'} = \frac{1}{3} \text{ h.} \quad \text{y para remontar } t_2 = \frac{3.22}{V - V'} = 1 \text{ h} \Rightarrow T = \frac{4}{3} \text{ h}$$

d) Lo mismo

$$e) \quad t = \frac{L}{V \sin \alpha} \Rightarrow \sin \alpha = 1 \quad \alpha = \frac{\pi}{2}$$

35/003

15. Puede existir un cuerpo tal que a) que tenga velocidad cero y este acelerado, b) con $|\vec{v}| = \text{cte}$ y $\vec{v} = \text{variable}$ c) con $\vec{v} = \text{cte.}$ y $|\vec{v}|$ variable, d) con velocidad tanto d este y aceleración tanto d este e) ¿puede variar la dirección de la velocidad cuando la aceleración sea constante?

a) Si. Sea $\vec{x} = \vec{x}_0 + \frac{1}{2} \vec{a} t^2$, en $t=0$ tiene velocidad cero y aceleración $\vec{a} \neq 0$.

b) Si $\vec{v} = (1, \cos \omega t, \sin \omega t)$

c) No

d) $x(t) = x_0 + vt - \frac{1}{2} at^2$, $v > 0$ a x_0 .

e) $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$, si basta que $\vec{v}_0 \neq \vec{a}$.

16) La velocidad de una partícula en el plano Oxy es $\vec{v} = (4t-1)\hat{i} + 2t\hat{j}$ donde $\vec{v}$ se expresa en ms^{-1} . Cuando $t=1\text{seg}$ la partícula está en el punto $(1, 2)$. Determinar:

a) La ecuación de la trayectoria b) Las aceleraciones normal, tangencial y total.
c) El radio de curvatura de la trayectoria

$$\frac{dx}{dt} = (4t-1)$$

$$x = x_0 + (2t^2 - t)$$

$$x = 1 + 2t^2 - t$$

$$\frac{dy}{dt} = 2t$$

$$y = y_0 + t^2$$

$$y = 1 + t^2$$

$$a) \vec{x}(t) = (1+t+2t^2)\hat{i} + (1+t^2)\hat{j}$$

$$\vec{v}(t) = (-1+4t)\hat{i} + 2t\hat{j}$$

$$\vec{a}(t) = 4\hat{i} + 2\hat{j}$$

$$|\vec{a}(t)| = \sqrt{20} \text{ ms}^{-2}$$

$$a_t(t) = \frac{\vec{a}(t) \cdot \vec{v}(t)}{|\vec{v}(t)|} = \frac{-4+16t+4t}{|(-1+4t)^2+4t^2|} = \frac{20t-4}{20t^2-8t+1}$$

$$a_t(1) = \frac{16}{13} \text{ ms}^{-2}$$

$$\vec{a}_t(1) = \frac{16}{13} (3\hat{i} + 2\hat{j}) \quad \vec{a}_n(1) = \vec{a}(1) - \vec{a}_t(1)$$

$$\vec{a}_n(t) = 4\hat{i} + 2\hat{j} - \frac{16}{13} (3\hat{i} + 2\hat{j}) = \frac{1}{13} (4\hat{i} - 6\hat{j})$$

$$\hat{\theta}(t) = \frac{a_n(t)}{v(t)} = \frac{1}{13} \frac{\sqrt{52}}{13} = \frac{2}{13}$$

$$\hat{\theta} = \rho v(t)$$

$$\rho = \frac{\hat{\theta}(t)}{v(t)} = \frac{2}{13} \frac{1}{13}$$

$$\rho(t=1) = \frac{2}{13 \sqrt{13}} \text{ m}^{-1}$$

V - LEYES DE NEWTON

Consideración.- Durante muchos siglos el problema del movimiento y sus causas fue un problema central de la Filosofía Natural. Aristóteles (384-322 BC) en su libro "Sobre los Cielos" establece que la velocidad de caída de un cuerpo es proporcional a su peso: "Un peso determinado recorre una distancia determinada en un tiempo dado; un peso más pesado se mueve la misma distancia en menos tiempo, siendo esto inmensamente proporcional al peso. Por ejemplo, si un peso es doble, tardará la mitad de tiempo en recorrer la misma distancia". La observación más elemental demuestra que el viento es totalmente falso, si bien quizá no sea fácil establecer una ley pues los tiempos de caída parecen depender del tamaño de los objetos. En aquellos tiempos nadie pensaba en hacer experimentos y debemos esperar muchos siglos antes de desterrar las ideas de Aristóteles.

Domingo Soto (1474-1560), hacia 1545, cuando era catedrático de Salamanca descubrió que la velocidad de caída de los cuerpos era, en notación moderna, $v = gt$, donde g es la aceleración de la gravedad. No se sabe claramente cómo llegó a este resultado y por qué su obra fue olvidada.

Galileo Galilei (1564-1642). "Dos Nuevas Ciencias" (1638)

Simplício $\equiv$ Punto de vista aristotélico

Salvati $\equiv$ Punto de vista de Galileo

Sagrado $\equiv$ La buena inteligencia, aún no contaminada y deseosa de aprender

Sal.- Dudo grandemente que Aristóteles haya comprobado por el experimento, si es verdad que dos piedras, siendo una de ellas diez veces más pesada que la otra, al dejarlas caer en el mismo instante desde una altura de 100 cubitos (≈ 50 m), difieren en velocidad de tal manera, que cuando la más pesada hubiera llegado a tierra, la otra no hubiera recorrido en su caída más de 10 cubitos.

Sim.- Su lenguaje parece indicar que él había ensayado el experimento, ya que dice "Vemos la más pesada"; la palabra vemos indica que él había hecho el experimento.

Sag.- Pero Simplício, ya que he hecho la experiencia, puedo asegurar que una bola de cañón, que pesa 100 o 200 libras, no alcanzará el suelo a mayor distancia de un span (≈ 23 cm) por delante de una bola de mosquete, que

35/003

pesa sólo media libra, siempre que ambos sean lanzados de una altura de 200 cúbitos.

A continuación Salviati intenta probar que esto es cierto mediante un argumento puramente Aristotélico, haciendo que Simplicio tenga que contradecirse y luego que éste acabe exclamando:

Sim.- Estoy humillado... Esto es ciertamente superior a mi comprensión.

Cuando Simplicio rehúsa de confundirse, Salviati sigue adelante con su argumento.

Simplicio no puede refutar la lógica de Salviati.

Sim.- Tu discusión es realmente admirable; sin embargo, yo no entiendo fácil que un perdigón caiga con la misma velocidad que una bala de cañón.

Sal.- ¿Por qué no caer un grano de arena, tan rápidamente como una piedra de molino? Pero, Simplicio, tengo la esperanza de que no seguirás el ejemplo de muchos otros, que desvían la discusión de un punto principal y dicen que mis afirmaciones se apartan de la verdad por un cabello, y por este cabello esconden faltas de otros teorías tan grandes como un cable de marino. Aristóteles dice que "una esfera de hierro de 100 libras, cayendo desde una altura de 100 cúbitos llega a tierra antes que una bala de una libra haya caído un simple cúbito." Yo digo que las dos llegan al mismo tiempo. Tú encuentras, al hacer la experiencia, que la más pesada adelanta a la más ligera en dos o tres dedos...; ahora no puedes esconder detrás de estos dos dedos los 99 cúbitos de Aristóteles, ni puedes mencionar mi pequeño error, y al mismo tiempo pesas el silencio el suyo, mucho mayor.

Comentarios.- Esta afirmación, tan clara, nos pone de manifiesto el hecho de que aún la observación más cuidadosa de los fenómenos naturales no es, en absoluto, base suficiente para la formulación de una ley física; diferentes cuerpos que caen libremente en el aire no llegan, realmente, a tierra en el mismo instante; pero esto, al pensarlo más detenidamente, es menos importante que el hecho de que lleguen casi al mismo tiempo. En el vacío la caída sería igual para todos los cuerpos. Hence la pena, por su utilidad, presta atención a este último punto, en que se dejan a un lado las primeras impresiones, porque en él se considera el fallo de que los tiempos de caída sean iguales, en lugar de como una gran verdad, como una pequeña desviación, explicable por la circunstancia experimental del rozamiento del aire. Cuando fue inventada la bomba de vacío, poco después de Galileo, esta hipótesis fue confirmada por la observación. Recordemos el viejo aforismo "La tierra ha creído casi más por lo que ha sabido ignorar que por lo que ha tenido en cuenta". Es necesario

considerar los sucesos observables con ojo penetrante para buscar detrás de la confusión inmediata de las apariencias una simplicidad subyacente y una legitimidad matemática. En este caso particular era más fácil borrar una hipótesis contraria (postulado de Aristóteles de que la velocidad de caída es inversamente proporcional al peso), razonando con un experimento mental, que molestarse con experimentos extensos que nunca podrían ser totalmente convincentes. Para llegar al resultado correcto, hubiera sido inútil confiar en los métodos de observación disponibles en aquel tiempo; en su lugar, todo dependía de la capacidad de "prescindir del aire" y sus efectos sobre la caída libre. Esto es fácil para nosotros que conocemos las bombas de vacío, pero en aquel tiempo era, incluso conceptualmente, muy difícil. Aristóteles había examinado la cuestión del vacío y había negado su posibilidad como contraria no sólo a la experiencia, sino también a la razón: "Donde existe el vacío no hay nada. Si no hay nada ni el propio espacio ni las leyes físicas pueden existir en este vacío, ¿pues cómo una piedra, por ejemplo, podría saber el camino a seguir, sino es en relación y a través de la influencia del medio?"

Galileo: Ya antes de Galileo se sabía que los aristotélicos estaban equivocados en sus teorías sobre la caída libre, pero fue él quien descubrió los detalles de la descripción correcta del movimiento. Aunque la comprobación experimental completa del punto de vista de Galileo sobre la forma en que los cuerpos se mueven se realizaría más tarde, su gran mérito es que estableció, con demostraciones y razonamientos plausibles y en forma cualitativamente comprobable, unas leyes para este movimiento:

- i) Cualquier cuerpo puesto en movimiento sobre un plano horizontal, sin rozamiento, continuará moviéndose indefinidamente con la misma velocidad (ley de inercia)
- ii) En caída libre, a través del vacío, todos los objetos caen una distancia determinada en el mismo tiempo.
- iii) El movimiento de un objeto en caída libre, o nadando hacia abajo sobre un plano inclinado, es uniformemente acelerado, es decir se obtienen incrementos iguales de velocidad en tiempos iguales.

Isaac Newton (1642-1727) formuló lo que hoy día se consideran las tres leyes fundamentales de la Mecánica Clásica

- i) Un cuerpo permanece en un estado de reposo o velocidad constante (aceleración cero) cuando se deja libre sin que actúe ninguna fuerza sobre él.

35/003

a) La fuerza $\vec{F}$ ejercida sobre un cuerpo es igual al producto de su masa M por su aceleración $\vec{a}$

$$\vec{F} = M \vec{a} \quad (1)$$

ii) Siempre que dos cuerpos interactúen, la fuerza $\vec{F}_{12}$ que el primer cuerpo ejerce sobre el segundo es igual y opuesta a la fuerza $\vec{F}_{21}$ que el segundo ejerce sobre el primero

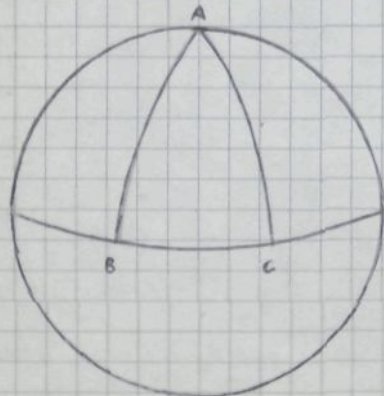
$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0 \quad (\text{Ley de acción y reacción}) \quad (2)$$

Nota: Evidentemente estas leyes contienen muchas hipótesis implícitas y una gran abundancia de conceptos que nos obligan a analizarlas cuidadosamente. Nótese que la segunda incluye la primera pues si $\vec{F} = 0$ entonces $\vec{a} = 0$ y el movimiento es rectilíneo y uniforme.

Espacio: Aquí y a lo largo de todo el curso supondremos que el espacio es Euclideo.

Los vectores pueden introducirse en espacios cualesquiera pero la forma en que hemos procedido sólo es válida en espacios Euclideos. Estos espacios son aquellos para los que son válidos los postulados de Euclides, y en consecuencia teoremas tales como: "La suma de los tres ángulos de cualquier triángulo es 180° ". ¿Es cierto que nuestro espacio es Euclideo? Sólo la experiencia nos puede responder a esta pregunta.

Espacio bidimensional. Para hacer más intuitiva la descripción nos limitaremos, de momento, a seres bidimensionales. Sus matemáticas les han descrito espacios de tres o más dimensiones, pero tienen muchas dificultades en desarrollar una percepción intuitiva de tales espacios. Podría muy bien suceder que nosotros, seres tridimensionales, viviéramos que estos animales bidimensionales vivían en un espacio infinito formado por un plano, en el que es aplicable la geometría Euclidea. También podría suceder que nosotros nos diéramos cuenta que están viviendo en la superficie de una esfera de radio R , en la que, como veremos, no es aplicable la geometría de Euclides. ¿Podríamos estos seres bidimensionales distinguir entre estas dos cosas? La



contestación es afirmativa y se pueden hacer de la forma siguiente: demostrar teoremas en espacios Euclideos y comprobar experimentalmente su validez. Pueden empezar construyendo rectas que definirán como las líneas que unen dos puntos y tienen menor longitud (en realidad longitud estacionaria). Nosotros llamamos a estas líneas geodésicas y en una esfera son los círculos máximos. Dichos seres podrían

toman tres puntos en su espacio y uníolos mediante geodésicas y a la figura resultante llámala triángulo. Si la geometría es Euclídea la suma de los tres ángulos internos de un triángulo es siempre 180° . Sobre la superficie de la esfera la suma de los tres ángulos internos es siempre mayor que 180° . Si el tamaño del triángulo es muy pequeño comparado con R , la suma valdrá 180° dentro de errores experimentales, pero para triángulos grandes verá que la suma no es 180° . Estas medidas le llevaron a la conclusión de que si bien localmente la geometría Euclídea es la adecuada, no lo es para grandes distancias y debe usar geometrías más complicadas, como por ejemplo las de Riemann, a las que la superficie de la esfera es un caso particular.

Carl Friedrich Gauss (1777-1850) sugirió que el carácter Euclídeo de nuestro espacio tridimensional debía comprobarse midiendo la suma de los tres ángulos internos de un triángulo de grandes dimensiones. Gauss midió de forma muy precisa los ángulos internos de un triángulo que forman, en Alemania, los montes Brackem, Hohehamgen e Inselberg. Obtuvo para la suma de los ángulos internos $180^\circ 0' 14.173''$. Como los instrumentos de medida se instalaron sobre planos horizontales en cada lugar, estos tres planos no eran paralelos y debía sustraerse a la cantidad hallada $14.853''$ y así el resultado final es $179^\circ 59' 59.320''$. La diferencia de $0.680''$ a 180° , estimó Gauss que era del orden del error de sus medidas y por tanto tuvo que concluir, que dentro del error de sus medidas, el espacio tridimensional es Euclídeo. Hoy de la comparación entre la teoría y la experiencia para los movimientos planetarios se deduce que si el espacio no es plano su radio de curvatura debe ser mayor que 0.5 años-luz y de observaciones de estrellas cercanas sabemos que debe ser mayor que 60 años-luz.

Nota: En la teoría de la relatividad general las masas modifican la estructura del espacio-tiempo a su alrededor. Por otra parte las ideas cosmológicas modernas danan al espacio de una geometría que puede ser no-Euclídea. Volvemos sobre este punto más adelante.

Invariancia traslacional. La invariancia traslacional responde al hecho admitido de que en la formulación de las leyes fundamentales de la naturaleza el origen de coordenadas empleado no juega ningún papel esencial si el sistema se halla aislado. Esto se supone al formular las leyes de Newton, pues no se pone limitación a los puntos del espacio en que son aplicables, ni se privilegia ningún punto. Una forma directa de comprobar la homogeneidad del espacio respecto a

35/003

la descripción matemática de las leyes físicas es medir en dos puntos muy alejados del universo una constante universal y comparar los valores obtenidos. En 1956 Sæveroff ha encontrado mediante observaciones radioastronómicas de la radio fuente Císmo A, que está a unos 3×10^8 años luz, la siguiente relación

$$(\alpha^2)_{\text{Císmo A}} / (\alpha^2)_{\text{local}} = 1.0036 \quad (12)$$

(11)

donde α es la constante de estructura fina $\alpha \equiv e^2 / \hbar c = 1 / 137.03604$ (11). Este y otros resultados similares apoyan la hipótesis de la homogeneidad del espacio (supuesta la del tiempo en el resultado dado). A partir de ahora esta homogeneidad será supuesta y volveremos a ella más adelante al hablar de la ley de conservación del momento

Invariancia bajo rotaciones. La invariancia bajo las rotaciones conduce la creencia general de que en la formulación de las leyes de la naturaleza, en sistemas aislados, la orientación del sistema de coordenadas empleado no juega ningún papel esencial. Podría suceder lo contrario. Por ejemplo que en $\vec{F} = M\vec{a}$ la masa dependiera de la orientación de la $\vec{F}$. y entonces esta formulación vectorial carecería de interés. Hay pruebas directas, de no fácil interpretación, que parecen apoyar esta creencia. Por otra parte veremos, más adelante, que una consecuencia de esta invariancia es la ley de conservación del momento angular, que ha sido extraordinariamente bien comprobada experimentalmente. A partir de ahora supondremos el espacio isótropo.

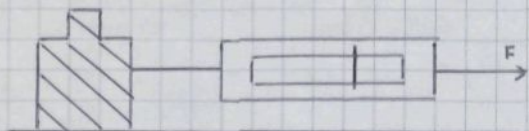
Tiempo. La formulación de las leyes de Newton implican también la invariancia de las ecuaciones dinámicas de sistemas aislados, con respecto al origen de tiempos elegidos. Más aún las leyes de Newton no sólo suponen la posibilidad de definir de forma absoluta, independiente del observador, la distancia entre dos puntos sino también el intervalo de tiempo transcurrido entre dos sucesos. Newton escribía: "El tiempo absoluto, real y matemático, por sí mismo y por su propia naturaleza, fluye igualmente sin dependencia de cualquier cosa externa". Nadie osó discutir esta afirmación hasta que Ernst Mach (1838-1916) proclamó que el tiempo absoluto "era una rara corrupción metafísica". Pocos tomaron en serio el criticismo de Mach, pero Albert Einstein (1879-1955) debió que él estuvo profundamente influenciado por el pensamiento de Mach y su teoría de la relatividad (1905), como veremos más adelante, implica un cuidadoso análisis de los conceptos de espacio y tiempo absolutos, para llegar a la negación de este carácter.

Masa: La segunda ley de Newton nos dice que si $\vec{F}$ es la fuerza que aplicamos sobre un cuerpo este adquiere una aceleración $\vec{a}$, paralela a $\vec{F}$, y para un dado cuerpo podemos escribir

$$|\vec{F}|/|\vec{a}| = \text{cte para un determinado cuerpo} \equiv M_i \text{ (masa inerte)} \quad (1)$$

M_i se llama la masa inerte, pues de alguna forma mide la inercia de un cuerpo a ponerse en movimiento. La ecuación $|\vec{F}| = M_i |\vec{a}|$ nos permite, en principio, asignar valores numéricos a una fuerza midiendo la aceleración que esta produce sobre un cuerpo de masa conocida o inversamente obtener el valor de M_i de un cuerpo si la fuerza y la aceleración son conocidas. El vínculo nítido es aparente: encontramos que la masa inerte y la fuerza, los dos conceptos que intentamos establecer cuidadosamente y rigurosamente son interdependientes; para determinar uno de ellos debemos conocer el otro. ¿Es la segunda ley una pura tautología? Veamos que no es así:

i) Hay una solución trivial al problema. Antes de intentar cualquier medida de M_i o de $\vec{F}$, elegimos un objeto conveniente como patrón de masa. Por ejemplo, decimos que una cierta masa que se guarda en París es 1 kg. Veamos como esto nos resuelve el problema. Para ello consideremos un experimento ideal. Coloquemos la masa patrón (1 kg) sobre un plano horizontal tan perfectamente lizo que lo podamos considerar libre de rozamiento. Añadamos ahora a la



masa patrón una balanza de resorte de masa despreciable y tiremos de ella horizontalmente con una fuerza que produzca una aceleración constante. Supongamos que sea $a = 4 \text{ m/s}^2$

la aceleración obtenida, entonces la fuerza es por definición 4 N, y marcamos en la balanza la posición del fiel con el número 4. Así podemos calibrar la balanza.

Con la balanza ya calibrada podemos medir cualquier masa. Si por ejemplo a un cuerpo de masa M_i , desconocida, le aplicamos una fuerza de 15 N y vemos que adquiere una $a = 3 \text{ m/s}^2$, entonces sabemos que $M_i = 5 \text{ kg}$. En resumen:

La segunda ley de Newton, junto con una definición arbitraria de masa patrón, nos fija, de un modo conveniente, la unidad de fuerza, nos permite calibrar balanzas y nos da una determinación operacional de la masa para cualquier objeto.

ii) Consideremos dos cuerpos aislados en el espacio. Al no actuar sobre ellos fuerzas externas las ecuaciones de Newton son

$$M_{1i} \vec{a}_1 = \vec{F}_{12}, \quad M_{2i} \vec{a}_2 = \vec{F}_{21} \quad (2)$$

35/003

Como $\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0$ entonces

$$\frac{M_{2i}}{M_{1i}} = \frac{|\vec{a}_{1i}}{|\vec{a}_{2i}} \quad (3)$$

Tomando una de ellas como masa unidad, podemos determinar la otra, ¿siempre este método para determinar las masas relativas de N cuerpos en interacción mutua que estén aislados? No lo sé.

Gravitación: Supongamos, para simplificar, que la Tierra es una esfera de radio R y describamos su rotación. Vamos a hacer una experiencia sobre la superficie de la Tierra.

Supongamos que disponemos de un cuerpo de masa inerte M_i colgado y que se deja caer libremente, es decir, actuando sobre él tan sólo la gravedad. Este adquiere una aceleración a_G y por tanto la fuerza gravitacional es

$$F_G = M_i a_G \quad (4)$$

Newton dio una ley para F_G que en este caso es, según justificaremos más adelante,

$$F_G = G \frac{M_{T,p} M_p}{R^2} \equiv g M_p \quad (5)$$

$M_p \equiv$ masa pesante del objeto, $M_{T,p} \equiv$ masa pesante de la Tierra

$$g \equiv \frac{G M_{T,p}}{R^2} \text{ no depende del cuerpo y tiene dimensiones de } L T^{-2}$$

Entonces

$$a_G = \frac{M_p}{M_i} g \quad (6)$$

Experimentalmente se observa que a_G es la misma para todos los cuerpos. Lo cual implica que $M_p = k M_i$, siendo k una constante universal. Siempre podemos elegir G de forma que $k=1$ y entonces $M_p = M_i$.

$M_p/M_i = 1$? Consideremos un péndulo simple y pequeñas oscilaciones, sin presuponer nada sobre la igualdad de M_i y M_p , se puede ver que

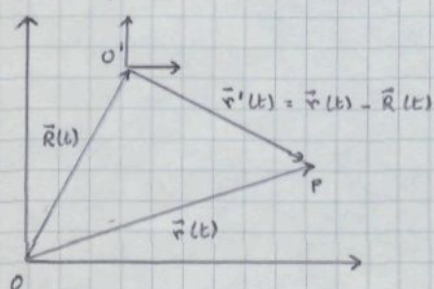
$$T = 2\pi \left(\frac{e}{g} \frac{M_i}{M_p} \right)^{1/2} \quad (7)$$

Si M_i y M_p no son siempre proporcionales, péndulos de distintos materiales tendrían periodos distintos. Bessel, en 1830, realizó experiencias con péndulos y vio que los periodos no dependían de las sustancias que constituían el péndulo. En 1899, Roland von Eötvös hizo experiencias mediante las que logró probar, usando un método mucho más preciso que (M_i/M_p) no difería de una sustancia

a otra más que, a lo sumo, en una parte en 10^9 . Modernamente, experiencias de R. H. Dicke en los EEUU y de V. B. Braginsky y V. I. Pomer en la URSS han logrado bajar esta cifra a 1 parte en 10^{12} , como cota superior. Estos números, convenientemente analizados, nos permiten concluir que no solo la materia está igualmente atraída por la interacción gravitacional, sino que ésta actúa por igual sobre las energías de ligadura de origen fuerte, electromagnético y débil, pero experiencias mucho más precisas serían necesarias para poder concluir algo sobre la energía de ligadura de origen gravitacional.

Comentario: Albert Einstein y Leopold Infeld en el libro "The Evolution of Physics" escribieron: "¿Es la identidad de los dos tipos de masa puramente accidental o tiene un significado más profundo? La contestación, desde el punto de vista de la física clásica, es: la identidad de las dos masas es accidental y no se le puede dar un significado más profundo. La contestación de la física moderna es justamente la opuesta: la identidad de las dos masas es fundamental, y constituye un dato nuevo y esencial que conduce a una comprensión más profunda de la naturaleza. Este fue, de hecho, uno de los datos más importantes de los que surgió la llamada teoría de la relatividad (general)".

Sistemas inerciales: Es evidente que la ecuación $\vec{F} = M\vec{a}$ no puede ser cierta para todos los observadores. Se denominan sistemas de referencia inerciales aquellos para los que esta ecuación es válida. Supongamos que el observador O logra establecer



que un sistema de referencia solidario con él es inercial. Sea P la posición de una partícula de masa M , caracterizada por $\vec{r}(t)$ sobre la que actúa una fuerza $\vec{F}$ entonces podremos escribir

$$M \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{F} \quad (1)$$

Consideremos un segundo observador O' cuya posición con relación a O viene determinada por el radio vector $\vec{R}(t)$. Supongamos que O' toma unos ejes de referencia paralelos a los que ha tomado O , entonces el vector de P es

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}(t) - \vec{R}(t) \quad (2)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 \vec{r}'(t)}{dt^2} = \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} - \frac{d^2 \vec{R}(t)}{dt^2} \quad (3)$$

y usando (1)

35/003

$$M \frac{d^2 \vec{r}'(t)}{dt^2} = \vec{F} - M \frac{d^2 \vec{R}(t)}{dt^2} \equiv \vec{F}' \quad (4)$$

Vemos pues que O' , en general, podrá mantener la validez del segundo principio sólo si incluye una fuerza ficticia $-M d^2 \vec{R}(t)/dt^2$ que refleja el hecho de que O' ha elegido un sistema no inercial. El sistema elegido por O' será inercial si y sólo si:

$$\frac{d^2 \vec{R}(t)}{dt^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{R}(t) = \vec{V}_0 t + \vec{R}_0, \quad \vec{V}_0, \vec{R}_0 = \text{cte.} \quad (5)$$

Vemos pues que si O elige un sistema inercial, entonces si O' elige un sistema de referencia con ejes paralelos a los que ha elegido O , el nuevo sistema es inercial si y sólo si O' describe respecto a O un movimiento rectilíneo y uniforme.

Transformaciones de Galileo: Se puede probar que la transformación más general que permite pasar de un sistema inercial a otro también inercial es

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 R_{ij} x_j + v_i t + a_i \quad (6)$$

$$t' = t + \tau$$

donde R_{ij} corresponde a una rotación fija de los ejes, v_i son las componentes de la velocidad constante con que O' se mueve con respecto a O , las constantes a_i y τ indican los orígenes de coordenadas y tiempo de O' con relación a O . Estas transformaciones se llaman de Galileo y forman un grupo.

Ejemplo de fuerzas ficticias: la fuerza centrífuga. Consideremos una plataforma giratoria alrededor de un eje perpendicular al plano del papel y que pasa por O . Supongamos que sean Oxy un sistema de ejes inercial, y $Ox'y'$ unos ejes solidarios con la plataforma. Sea ω la velocidad angular de giro de la plataforma. Supongamos que sobre la plataforma hay un bloque de masa M en reposo con relación a la plataforma y unido con una cuerda de longitud R al origen de coordenadas. El observador inercial dará al punto donde está la masa unas coordenadas

$$\vec{R}(t) = (R \cos \omega t, R \sin \omega t, 0) \quad (7)$$

y por tanto la red acelerada con una aceleración

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2 \vec{R}(t)}{dt^2} = -\omega^2 \vec{R}(t) \quad (\text{aceleración centrípeta}) \quad (1)$$

Esta aceleración viene suministrada por la fuerza real no equilibrada debida a la tensión $\vec{T}$ de la cuerda. Para el observador solidario con la plataforma el bloque se halla en reposo y por tanto $\vec{a}'(t) \equiv 0$. Para que este observador pueda usar la segunda ley de Newton tendrá que lograr que la fuerza total que actúa sea nula y para ello tendrá que compensar la fuerza real debida a la tensión de la cuerda con una fuerza ficticia $M\omega^2 \vec{R}(t)$, que es la llamada fuerza centrífuga. Si la cuerda se rompe la partícula nota sólo la influencia de la fuerza centrífuga y se desplazará, en cada instante, en la dirección radial, hacia el exterior.

Ejemplo 1. - Este efecto se usa en centrifugadoras que tienen amplias aplicaciones en química, biología, medicina, ... En las centrifugadoras modernas se alcanzan valores $\omega = 10^3 \text{ vueltas s}^{-1} = 2\pi \times 10^3 \text{ rad s}^{-1} = 6.28 \times 10^3 \text{ rad s}^{-1} \Rightarrow a_c = \omega^2 R = 3.95 \times 10^3 R \text{ s}^{-2}$ y si $R = 10 \text{ cm} \Rightarrow a_c = 3.95 \times 10^8 \text{ cm s}^{-2} \Rightarrow a_c/g = 4.02 \times 10^5$. Las partículas en suspensión en un líquido tenderán a irse, rápidamente, hacia la superficie externa.

Ejemplo 2. Para muchos problemas un sistema de ejes fijo en el centro de la Tierra y con los ejes orientados hacia las estrellas lejanas es un buen sistema inercial. Como la Tierra gira sobre sí misma y usando como sistema de referencia el sistema laboratorio, el cual ya no es inercial, un punto de masa M situado sobre la superficie de la Tierra (supuesta esférica) está sometido a dos tipos de fuerzas:

i) La fuerza real debida a la gravedad y que produce una aceleración

$$\vec{g} = (-g \cos \varphi, -g \sin \varphi) \quad (2)$$

ii) La fuerza ficticia centrífuga, que produce una aceleración

$$\vec{a}_c = (\omega^2 R \cos \varphi, 0) \quad (3)$$

Por tanto la aceleración total es

$$\vec{a} = \{ (-g + \omega^2 R) \cos \varphi, -g \sin \varphi \} \quad (4)$$

35/003

$$|\vec{a}| = g \left[1 - 2 \frac{\omega^2 R}{g} \cos^2 \varphi + \frac{\omega^4 R^2}{g^2} \cos^2 \varphi \right]^{1/2} \quad (1)$$

Por tanto

$$\Delta \equiv |\vec{a}|_{\text{Polo Norte}} - |\vec{a}|_{\text{Ecuador}} = g - g \left(1 - \frac{\omega^2 R}{g} \right) = \omega^2 R$$

$$\omega = \frac{2\pi}{86400 \text{ s}} = 7.2722 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1} \quad R \approx 6.378 \times 10^6 \text{ m} \quad \Rightarrow \Delta = 3.373 \text{ cm s}^{-2}$$

Polo Norte $g_{\text{exp}} = 983.245 \text{ cm s}^{-2}$

Jura ($\varphi \approx 60^\circ$) $g_{\text{exp}} = 978.18 \text{ cm s}^{-2}$

$$\Delta_{\text{exp}} = 5.07 \text{ cm s}^{-2}$$

La gran parte de la diferencia $\Delta_{\text{exp}} - \Delta > 0$ es debida a que la Tierra no es una esfera y su radio es menor en los polos que en el Ecuador.

Sistemas Inerciales: Galileo afirmó que un cuerpo no sometido a ninguna fuerza tiene un movimiento rectilíneo y uniforme. Hemos visto que este enunciado es únicamente cierto en algunos sistemas de referencia, que son los llamados inerciales. ¿Cómo sabemos que sobre un cuerpo no actúa ninguna fuerza? Recordemos que las fuerzas pueden actuar sobre un cuerpo no sólo por contacto directo sino también por acción a distancia, y en principio el hecho de que un cuerpo no esté en contacto directo con otros no significa que no actúen fuerzas sobre él. Se sabe que las únicas interacciones de alcance infinito son las electromagnéticas y las gravitacionales, y por tanto estas son las únicas que debemos tener en cuenta aquí. Por otra parte los cuerpos son en general eléctricamente neutros y las únicas que quedan son las gravitacionales. Conociendo la ley de la gravitación universal podemos estimar su efecto y ver así que un sistema inercial extraordinariamente bueno es uno centrado en el Sol y con los ejes dirigidos a tres estrellas fijas. Hay métodos técnicos para construir sistemas inerciales pero no vamos a entrar en su discusión.

Principio de la Relatividad Galileana: Las leyes de la mecánica tienen la misma forma en todos los sistemas de referencia inerciales o lo que es equivalente: mediante ningún tipo de experimentos mecánicos es posible distinguir un sistema inercial de otro. Estos sistemas inerciales se mueven los unos con respecto a otros con velocidad constante y por tanto la velocidad es un concepto relativo.

Aceleración: Un sistema que se mueva con velocidad arbitraria, no constante, con respecto a un sistema inercial, ya no es inercial y Newton se formuló la pregunta: ¿Qué es lo que determina los sistemas de referencia inerciales? New-

tom contestó a esta pregunta diciendo que debe existir un espacio absoluto, y que los sistemas de referencia inerciales son los que están en reposo o se mueven con velocidad constante respecto a él. Leibnitz rechazó la idea de un espacio absoluto argumentando que no había ninguna necesidad filosófica para una concepción del espacio más allá de las relaciones entre los cuerpos materiales. Este tema fue debatido en una serie de famosos escritos cruzados entre Leibnitz y Samuel Clarke, defensor de la tesis de Newton. Posteriormente, Euler y Kant defendieron la postura de Newton, que fue atacada por el obispo Berkeley. Por supuesto ninguno de ellos dio una sugerencia que permitiera construir una teoría dinámica que sustituyera a la de Newton.

El primer ataque constructivo al espacio absoluto de Newton fue lanzado por Ernst Mach. Hay una experiencia simple que clarifica la postura de Mach. En una noche estrellada nos podemos colocar en reposo mirando el cielo, con los brazos caídos a lo largo de nuestro cuerpo. Entonces empezamos a girar sobre nosotros mismos. Las estrellas giran alrededor de nuestro ombligo y al mismo tiempo nuestros brazos se levantan por acción de la fuerza centrífuga. Debemos elegir entre la notable coincidencia de que nuestro sistema de referencia en reposo coincide con el de las estrellas fijas o que de alguna forma hay una interacción entre ellas y nosotros que determina nuestro sistema inercial. El argumento puede hacerse más preciso: Ellos ejes ligados a la superficie de la Tierra no son exactamente inerciales y por supuesto la rotación de ésta alrededor de su eje y su revolución alrededor del sol dan a las estrellas un movimiento aparente, pero estos efectos pueden eliminarse usando un sistema de referencia definido por el sistema solar como un todo. Un observador solidario a éste gira respecto a un sistema inercial centrado en el sol y determinado por tres galaxias muy lejanas en menos de un segundo de año por siglo.

Nos enfrentamos con el siguiente dilema: O admitimos, con Newton, que existe un espacio absoluto que define los sistemas inerciales y con respecto al cual da la casualidad de que nosotros, y las galaxias, nos hallamos en reposo o debemos creer, con Mach, que la inercia es debida a la masa media del universo. Esta hipótesis de que las masas del universo y su distribución determinan los sistemas inerciales se conoce con el nombre de principio de Mach. De acuerdo con este principio no puede existir la inercia de la materia con relación al espacio, sino únicamente la inercia de la materia con relación a la materia. En consecuencia, si un cuerpo se aleja lo suficiente del resto de las masas del universo,

35/003

su inercia debe quedar reducida a cero. La magnitud de la inercia de un cuerpo cualquiera queda determinada por las masas del universo y por su distribución. El principio de Mach es algo más que un principio puramente filosófico, pues la inercia de los cuerpos dependió no solo de la distribución de las galaxias lejanas, sino también, aunque sea de forma muy ligera, de la distribución de materia en la inmediata vecindad.

Ni la teoría Newtoniana, ni la relatividad restringida conceden nada más a la teoría del espacio absoluto y el mismo Einstein decía: "En este estado nos sentimos obligados a dar una cuenta real de la física absoluta al movimiento no uniforme". Esta discrepancia entre la relatividad del movimiento uniforme y el aparente carácter no relativo de los otros tipos de movimiento, entre el hecho de que el primero no tiene sentido sino es comparándolo con algo, mientras que los segundos son evidentes dentro de su propio sistema de referencia, fue una de las principales preocupaciones de Einstein después de establecer la teoría de la relatividad especial en 1905. Como ha dicho Sciamma: "Esto molestaba a Einstein, que intuía que la armonía de su teoría de la relatividad exigía que todo movimiento fuera relativo".

Relatividad general: Todo esto, junto con la igualdad de las masas inerte y pesante, fueron los indicios que condujeron a Einstein a la formulación de la teoría de la Relatividad General o del campo gravitatorio. En 1907 publicó su primer trabajo encaminado a la formulación de una teoría de la gravitación y su trabajo definitivo sobre esta se publicó nueve años más tarde en Annalen der Physik con el título "El Fundamento de la Teoría General de la Relatividad". Ya en su primer trabajo elevaba a la categoría de principio la igualdad de la masa inerte y de la masa pesante, lo que le condujo a enunciar el principio de equivalencia.

Supongamos dos observadores: O , que está en un sistema inercial sumergido en un campo gravitatorio constante y uniforme de aceleración $\vec{g}$; el otro, O' está en reposo en un ascensor en caída libre en el campo gravitatorio considerado. Si elegimos Ox en la dirección de $\vec{g}$ y lo mismo tomamos para $O'x'$, entonces el primer observador escribe como ecuación del movimiento, según Ox ,

$$M_i \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = M_p g + F \quad (1)$$

donde F , alguna fuerza adicional, la suponemos según Ox , para simplificar. El

observador O' tiene sus coordenadas relacionadas con las de O por la ecuación

$$x'(t) = x(t) + \frac{1}{2} g t^2 \quad (1)$$

y por tanto

$$M_i \frac{d^2 x'_i(t)}{dt^2} = (M_p - M_i) g + \vec{F} \quad (2)$$

Si $M_p \equiv M_i$, entonces la fuerza ficticia que aparece en O' , por ser un sistema no inercial, compensa exactamente la atracción gravitacional. Einstein, se dio cuenta, que debido a la igualdad de ambas masas, un campo gravitacional estático y uniforme no podría ser detectado por un observador encerrado en un ascensor que cayera, pues el observador, los cuerpos de prueba, y el mismo ascensor responderían al campo gravitacional con la misma aceleración. Dicho de otra forma, si un observador inercial ve un sistema de partículas sometidas a un campo gravitacional estático y uniforme y escribe las ecuaciones del movimiento, entonces un observador en caída libre ve que las ecuaciones del movimiento transformadas a su sistema de referencia no contienen los términos gravitacionales, que han sido cancelados por las fuerzas inerciales debido a su equivalencia. Si la aceleración de la gravedad variara de un punto a otro del espacio o de un instante de tiempo a otro, no sería ya posible eliminar esta fuerza pasando a un sistema de referencia acelerado. Por ejemplo, el observador del ascensor en caída libre en el campo gravitatorio terrestre podría, en principio, detectar este, porque los objetos del ascensor caerían radialmente hacia el centro de la Tierra, y por tanto se irían acercando los unos a los otros a medida que el ascensor fuera descendiendo.

Principio de equivalencia. Aunque las fuerzas inerciales no cancelen exactamente las fuerzas gravitacionales para cuerpos en caída libre en un campo gravitacional inhomogéneo o que depende del tiempo, se puede aún esperar una cancelación aproximada si limitamos nuestra atención a una pequeña región del espacio y del tiempo en las que las variaciones del campo sean despreciables. Se puede entonces formular el principio de equivalencia diciendo:

"En cada punto del espacio-tiempo en un campo gravitatorio cualquiera es posible elegir un sistema de coordenadas localmente inercial tal que, en una región suficientemente pequeña del entorno del punto en cuestión, las leyes de la naturaleza toman la misma forma que en un sistema de coordenadas cartesianas no acelerado en ausencia de gravitación".

35/003

El principio que acabamos de enunciar recibe el nombre de principio de equivalencia fuerte para distinguirlo del débil en el que debemos sustituir "las leyes de la naturaleza" por "las leyes del movimiento de las partículas en caída libre". Las experiencias de Eötvös dan una verificación directa sólo del principio débil y dan también alguna evidencia indirecta del fuerte, debido a los distintos tipos de fuerza que contribuyen a la energía de ligadura.

Nota: Si bien Einstein se consideraba a sí mismo, al menos en sus principios, como un seguidor de Mach, de hecho la contestación dada por el principio de equivalencia al problema de la inercia está en una posición intermedia entre Newton y Mach. Los sistemas inerciales, esto es, los sistemas de coordenadas en caída libre, están determinados por el campo gravitacional local, que viene determinado por toda la materia del universo. Sin embargo, ya en un sistema inercial, las leyes del movimiento no vienen afectadas por la presencia de masas próximas, ni gravitacionalmente, ni de cualquier otra forma. En ausencia de materia cercana, los sistemas inerciales vienen determinados por el campo gravitacional cósmico medio, que a su vez es determinado por la densidad media de masa de las estrellas, y por tanto no es sorprendente que los sistemas inerciales estén en reposo, o en un estado de movimiento uniforme, con respecto a las estrellas fijas. Cuando una gran masa, como el Sol, está cerca, su efecto es cambiar los sistemas inerciales de forma que son acelerados hacia esta masa, pero las leyes del movimiento en estos sistemas de referencia en caída libre son aún las de la relatividad especial y no presentan efectos debidos a la distribución cercana de masas. En este sentido el principio de equivalencia y el de Mach están en oposición directa. ¿La presencia de masas cercanas afecta las leyes del movimiento de alguna otra manera que fijando el sistema inercial? Gozzani y Salpeter, sugirieron en 1960, que de acuerdo con Mach, al medir la masa inerte de un cuerpo en la dirección del centro de nuestra galaxia y en dirección perpendicular a esta deberían encontrarse valores ligeramente distintos. Hughes, Robinson y Bellarm-Lopez encontraron $\Delta M/M \pm 10^{-20}$, lo cual refuerza la posición de Einstein. Digamos, sin embargo, que hoy discutimos sobre la interpretación de este resultado.

Segunda ley: La segunda ley de Newton se puede escribir de varias formas

$$\vec{F} = M\vec{a} = M \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} M\vec{v} = \frac{d}{dt} \vec{p} \quad (3)$$

que son equivalentes si $M = \text{cte}$. De no ser así la forma $\vec{F} = d\vec{p}/dt$ es la adecuada

y además esta se generaliza inmediatamente, como veremos, a la relatividad especial con solo sustituir

$$\vec{p} = M \vec{v} \longrightarrow \vec{p} = \frac{M \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (1)$$

Consideremos M constante entonces podemos escribir

$$\vec{F} = M \frac{d^2 \vec{x}(t)}{dt^2} \quad (2)$$

que es una ecuación diferencial de segundo orden en la que conocidas M y $\vec{F}(\vec{x}; t)$ (con ciertas restricciones matemáticas) es posible determinar $\vec{x}(t)$ dadas unas condiciones adecuadas iniciales, que pueden ser, por ejemplo, la posición y la velocidad de la partícula en un instante de tiempo fijo.

Ejemplo 1.- Consideremos un muelle unidimensional y supongamos que la fuerza es proporcional a la elongación $F = -kx$, $k > 0$ y $[k] = M T^{-2}$. La ecuación del movimiento es

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \frac{k}{M} x(t) = 0 \quad (3)$$

Recordar que para resolver las ecuaciones del tipo

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + a \frac{dx(t)}{dt} + b x(t) = 0, \quad a, b = \text{constantes} \quad (4)$$

basta escribir $\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \Rightarrow \lambda_{\pm} = [-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}]/2$, entonces si $\lambda_+ \neq \lambda_-$ la solución más general de (4) es

$$x(t) = A e^{\lambda_+ t} + B e^{\lambda_- t}, \quad A, B = \text{constantes} \quad (5)$$

si $\lambda_+ = \lambda_-$ entonces la solución más general es

$$x(t) = [A + Bt] e^{\lambda_+ t}, \quad A, B = \text{constantes} \quad (6)$$

En nuestro caso $\lambda^2 + k/M = 0$, $\lambda_{\pm} = \pm i \sqrt{k/M} \equiv \pm i\omega$

$$x(t) = A e^{i\omega t} + B e^{-i\omega t} = (A+B) \cos \omega t + i(A-B) \sin \omega t \quad (7)$$

o equivalentemente

$$x(t) = \alpha \cos(\omega t + \varphi), \quad A = \frac{1}{2} \alpha e^{i\varphi}, \quad B = \frac{1}{2} \alpha e^{-i\varphi} \quad (8)$$

Si ponemos como condiciones iniciales $x(0) = A$ y $\dot{x}(0) = 0$ entonces

35/003

$$x(t) = A \cos(\omega t), \quad \omega = \sqrt{k/M} \quad (9)$$

y el periodo es

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{k}} \quad (10)$$

Ejemplo 2.- Supongamos que $F[x(t)]$ pero que no sepamos, o no queramos, resolver analíticamente la ecuación diferencial. Entonces podemos recurrir a un método numérico. Supongamos que en $t=0$ conocemos $x(0)$ y $v(0)$, entonces

$$a(0) = \frac{1}{M} F[x(0)] \quad (11)$$

Consideremos un intervalo de tiempo Δt muy pequeño, entonces las definiciones de velocidad y aceleración permiten calcular

$$v(\Delta t) = v(0) + a(0) \Delta t, \quad x(\Delta t) = x(0) + v(0) \Delta t \quad (12)$$

$$a(\Delta t) = \frac{1}{M} F[x(\Delta t)]$$

y continuar así hasta hallar el $x(t)$ deseado. Es evidente que se debe tomar Δt suficientemente pequeño para que el método sea una buena aproximación, pero tampoco puede tomarse extraordinariamente pequeño pues entonces el número de veces que deberíamos repetir el proceso $t/\Delta t$ puede ser demasiado grande.

Hay métodos más sofisticados de integración en los que sin aumentar sensiblemente el número de iteraciones se mejoran los resultados. Uno de ellos es el siguiente

$$x(0), v(0) \rightarrow a(0) = \frac{1}{M} F[x(0)] \rightarrow v(\Delta t/2) = v(0) + a(0) \Delta t/2 \rightarrow$$

$$x(\Delta t) = x(0) + v(\Delta t/2) \Delta t \rightarrow a(\Delta t) = \frac{1}{M} F[x(\Delta t)] \rightarrow \text{y así sucesivamente}$$

$$\text{así como } x(N\Delta t), v((N-1)\Delta t + \Delta t/2), a(N\Delta t) \Rightarrow$$

$$v[N\Delta t + \Delta t/2] = v[(N-1)\Delta t + \Delta t/2] + a[N\Delta t] \Delta t$$

$$x[N\Delta t + \Delta t] = x[N\Delta t] + v[N\Delta t + \Delta t/2] \Delta t$$

$$a[N\Delta t + \Delta t] = \frac{1}{M} F[x[N\Delta t + \Delta t]].$$

Consideremos el problema anterior tomando como unidades $M/k \equiv 1$ entonces

$$a(t) = -x(t)$$

y tomemos como condiciones iniciales

$$x(0) = 1, \quad v(0) = 0$$

$$\Delta t = 0.5$$

t	x(t)	v(t)	x(t) grados	ampl. 2
0	1.	0.	0	
0.25		-0.25		
0.50	0.875		0.877583	0.29
0.75		-0.6875		
1.00	0.53125		0.540302	1.68
1.25		-0.953125		
1.50	0.0546875		0.070737	22.69
1.75		-0.98046875		
2.00	-0.435546875		-0.416147	4.66

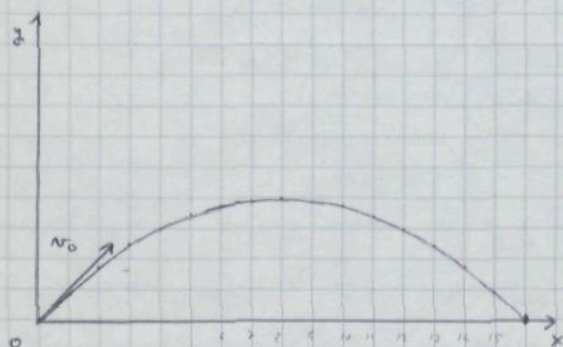
El periodo es $T = 4t_0$ donde t_0 es el primer cero de $x(t)$. Por interpolación lineal se obtiene

$$t_0 = 1.555777 \Rightarrow T = 6.223 \quad (1)$$

$$T_{exacto} = 2\pi = 6.283185...$$

Integraciones para Δt menores se dan en la tabla siguiente

Ejemplo 3.- Trayectorias de proyectiles



$$Ox \quad M \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = 0 \quad (2)$$

$$Oy \quad M \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = -Mg$$

$$x(t) = x(t_0) + v_x(t_0)(t-t_0) \quad (3)$$

$$y(t) = y(t_0) + v_y(t_0)(t-t_0) - \frac{1}{2}g(t-t_0)^2$$

$$x(t_0) = y(t_0) = 0 \quad a \quad t_0 \geq 0, \quad v_x(t_0) = v_0 \cos \alpha \quad v_y(t_0) = v_0 \sin \alpha$$

$$x(t) = (v_0 \cos \alpha) t, \quad y(t) = (v_0 \sin \alpha) t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (4)$$

$$\text{Trayectoria: Eliminamos } t \quad y = x \tan \alpha - \frac{g}{2(v_0 \cos \alpha)^2} x^2 \quad (\text{Parábola}) \quad (5)$$

$$\text{Alcance: } y=0, \text{ solución no trivial } x = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha \quad (6)$$

$$\text{Altura máxima } \frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow x = \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\alpha \quad (\text{obtenido por simetría}) \Rightarrow y = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha$$

35/003

$\Delta t = 0.1$		$\Delta t = 0.05$		$\Delta t = 0.02$		$\Delta t = 0.01$		
t	$x(t)$	t	$x(t)$	t	$x(t)$	t	$x(t)$	$x_{exact}(t)$
0	1	0	1	0	1	0	1	1
0.1	0.995000	0.1	0.995003	0.1	0.995004	0.1	0.995004	0.995004
0.2	0.980050	0.2	0.980062	0.2	0.980066	0.2	0.980066	0.980067
0.3	0.955300	0.3	0.955327	0.3	0.955335	0.3	0.955336	0.955336
0.4	0.920996	0.4	0.921045	0.4	0.921058	0.4	0.921060	0.921061
0.5	0.877483	0.5	0.877558	0.5	0.877579	0.5	0.877582	0.877583
0.6	0.825194	0.6	0.825300	0.6	0.825330	0.6	0.825334	0.825336
0.7	0.764654	0.7	0.764795	0.7	0.764835	0.7	0.764840	0.764842
0.8	0.696467	0.8	0.696647	0.8	0.696697	0.8	0.696704	0.696707
0.9	0.621316	0.9	0.621534	0.9	0.621598	0.9	0.621607	0.621610
1.0	0.539951	1.0	0.540215	1.0	0.540288	1.0	0.540299	0.540302
1.1	0.453187	1.1	0.453494	1.1	0.453580	1.1	0.453592	0.453596
1.2	0.361891	1.2	0.362241	1.2	0.362339	1.2	0.362353	0.362358
1.3	0.266976	1.3	0.267368	1.3	0.267478	1.3	0.267494	0.267499
1.4	0.169382	1.4	0.169823	1.4	0.169944	1.4	0.169961	0.169967
1.5	0.070113	1.5	0.070581	1.5	0.070712	1.5	0.070731	0.070737
1.6	-0.029877	1.55	0.020633	1.56	0.010770	1.57	0.000799	
		1.60	-0.029866	1.58	-0.009270	1.58	-0.009210	

$$T = 6.280480$$

$$T = 6.282534$$

$$T = 6.283080$$

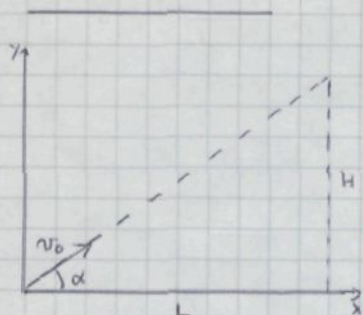
$$T = 6.283193$$

$$T_{\text{ex}} = 6.283185$$

Tercera ley: Recordemos: "Siempre que dos cuerpos interactúan, la fuerza que el primero ejerce sobre el segundo $\vec{F}_{12}$ es igual y opuesta a la que el segundo ejerce sobre el primero $\vec{F}_{21}$: $\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0$ ". Su validez tiene límites por el hecho que todas las fuerzas tienen una velocidad de propagación finita. Esta ley establece, sin embargo, que $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ cuando se miden en el mismo instante. Este requisito no está de acuerdo con el intervalo de tiempo finito que se necesita para que una partícula perciba la fuerza que la segunda ejerce sobre ella. Falta siempre que la velocidad de la partícula sea del orden de la velocidad de propagación de la interacción.

Notar que si la interacción depende sólo de la distancia entre las dos partículas entonces $\vec{F}_{12}(\vec{r}) = f(r) \hat{r}$, $\vec{F}_{21}(\vec{r}) = -f(r) \hat{r}$, y por tanto ambas están sobre la línea que une las dos partículas.

- 1.- Un proyectil apunta justamente a un blanco situado en la alto de una torre, con velocidad suficiente para que pueda llegar hasta la torre. En el mismo instante del disparo, el blanco se deja caer verticalmente. Demuéstrase que el proyectil chocará siempre con el blanco independientemente de su velocidad.



La trayectoria del proyectil es

$$x_1(t) = (v_0 \cos \alpha) t, \quad y_1(t) = (v_0 \sin \alpha) t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\tan \alpha \equiv H/L$$

La trayectoria del blanco es

$$x_2(t) = L$$

$$y_2(t) = H - \frac{1}{2} g t^2$$

El proyectil llega a la torre en un tiempo $T = L / (v_0 \cos \alpha)$ y en este instante

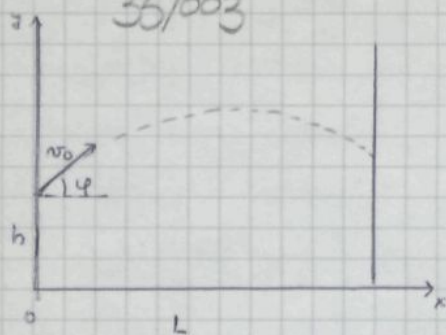
$$y_2(T) - y_1(T) = H - (v_0 \sin \alpha) T = H - L \tan \alpha = 0$$

- 2.- Un automóvil se mueve horizontalmente en línea recta a la velocidad constante de 20 m/s . Un proyectil se dispara desde el automóvil con velocidad de salida v y con ángulo de elevación θ , de manera que este proyectil vuelva al automóvil después de que éste haya recorrido 80 m . ¿Cuáles son los valores de θ y v ?

Evidentemente $\theta = \pi/2$. El tiempo del proyectil en el aire es $T = 4 \text{ s}$. Si v es la velocidad subirá una altura $H = v^2/2g$ y para recorrer esta altura necesita un tiempo $T/2 = \sqrt{2H/g}$ de donde $v = g T/2 = 19.6 \text{ m/s}$

- 3.- Un muchacho está a 4 m de una pared vertical y lanza una pelota contra ella; la pelota sale de la mano a 2 m por encima del nivel del suelo a una velocidad inicial de $10\sqrt{2} \text{ m/s}$ formando un ángulo de 45° con la horizontal. Cuando la pelota choca con la pared la componente horizontal de su velocidad cambia de signo y la vertical queda inalterada. ¿Puede caer la pelota? (Usar $g = 10 \text{ m/s}^2$).

35/003



La trayectoria hasta chocar con la pared es

$$x(t) = (v_0 \cos \varphi) t$$

$$y(t) = h + (v_0 \sin \varphi) t - \frac{1}{2} g t^2$$

Llegará a la pared en un tiempo $T = \frac{L}{v_0 \cos \varphi}$ y entonces

$$x(T) = L$$

$$y(T) = h + L \tan \varphi - \frac{g L^2}{2 v_0^2 \cos^2 \varphi}$$

$$v_x(T) = v_0 \cos \varphi$$

$$v_y(T) = v_0 \sin \varphi - \frac{g L}{v_0 \cos \varphi}$$

La trayectoria de regreso es

$$x(t) = L - (v_0 \cos \varphi) t$$

$$y(t) = h + L \tan \varphi - \frac{g L^2}{2 v_0^2 \cos^2 \varphi} + \left(v_0 \sin \varphi - \frac{g L}{v_0 \cos \varphi} \right) t - \frac{1}{2} g t^2$$

Llegará al suelo cuando $y(t) = 0$

$$t = \frac{1}{g} \left\{ v_0 \sin \varphi - \frac{g L}{v_0 \cos \varphi} + \sqrt{2 g h + v_0^2 \sin^2 \varphi} \right\}$$

y por tanto llega al suelo en el punto

$$x = L - \frac{v_0 \cos \varphi}{g} \left\{ v_0 \sin \varphi - \frac{g L}{v_0 \cos \varphi} + \sqrt{2 g h + v_0^2 \sin^2 \varphi} \right\}$$

Es decir

$$x = 4 - \frac{10\sqrt{2}/\sqrt{2}}{10} \left\{ 10\sqrt{2}/\sqrt{2} - \frac{10 \cdot 4}{10\sqrt{2}/\sqrt{2}} + \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 10 + 10^2 \cdot 2/2} \right\}$$

$$x = 4 - \left\{ 10 - 4 + \sqrt{40 + 100} \right\} = -2 + \sqrt{140} = -2(1 + \sqrt{35})$$

$$x = -2(1 + \sqrt{35}) \text{ m.} \approx -13.83 \text{ m.}$$

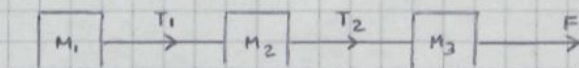
4 - En el sistema de la figura, determinar

la aceleración del sistema, T_1 y T_2

sabiendo que no hay rozamiento

y que

$$M_1 = 10 \text{ kg}, M_2 = 20 \text{ kg}, M_3 = 30 \text{ kg}, F = 60 \text{ N}$$



Cada bloque debe estudiarse aisladamente. Todos tienen la misma aceleración

$$\left. \begin{array}{l} \text{Bloque 1} \quad M_1 a = T_1 \\ \text{Bloque 2} \quad M_2 a = T_2 - T_1 \\ \text{Bloque 3} \quad M_3 a = F - T_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a = F / (M_1 + M_2 + M_3) \\ T_1 = M_1 F / (M_1 + M_2 + M_3) \\ T_2 = (M_1 + M_2) F / (M_1 + M_2 + M_3) \end{array}$$

$$a = 1 \text{ m s}^{-2}, \quad T_1 = 10 \text{ N}, \quad T_2 = 30 \text{ N}.$$

5.- Un cuerpo de masa M se deja caer en el campo gravitacional terrestre. El aire produce una fuerza de rozamiento $\vec{R} = -\alpha \vec{v}$, $\alpha > 0$. Determinar la velocidad al cabo de 10 s, si $M = 1 \text{ Kg}$, $g = 10 \text{ m s}^{-2}$, $\alpha = 100 \text{ g s}^{-1}$. Comprobar que en la fórmula de la velocidad obtenida el límite $\alpha \rightarrow 0$ reproduce el resultado usual. Suponer el cuerpo inicialmente en reposo.

$$M \frac{dv(t)}{dt} = Mg - \alpha v(t) \Rightarrow \frac{dv}{g - \frac{\alpha}{M} v} = dt \Rightarrow \int_0^{v(t)} \frac{1}{g - \frac{\alpha}{M} v} dv = \int_0^t dt$$

$$t = -\frac{M}{\alpha} \ln \left(1 - \frac{\alpha v}{Mg} \right) \Rightarrow$$

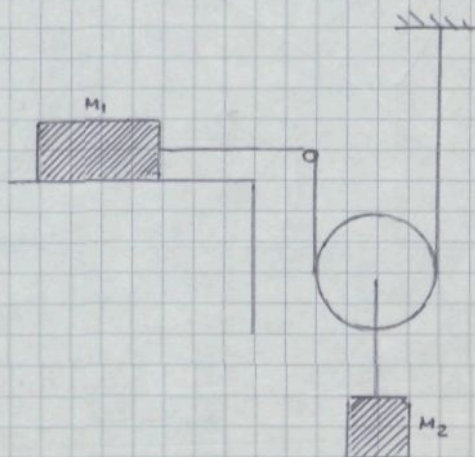
$$v(t) = \frac{Mg}{\alpha} \left(1 - e^{-\alpha t/M} \right)$$

$$\alpha \rightarrow 0 \quad v(t) = gt$$

$$v(t=10 \text{ s}) = \frac{10^3 \text{ g} \cdot 10^3 \text{ m s}^{-2}}{10^2 \text{ g s}^{-1}} \left(1 - e^{-10^2 \text{ g s}^{-1} \cdot 10 \text{ s} / 10^3 \text{ g}} \right) = 6.32120 \times 10^3 \text{ cm s}^{-1}$$

6.- Hállese en función de M_1 , M_2

y g las aceleraciones de los dos bloques, despreciando todos los rozamientos y las masas de las poleas

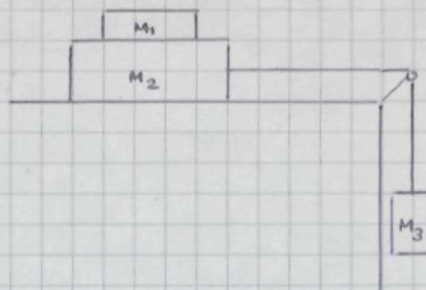


$$\left. \begin{array}{l} M_1 a = T \\ M_2 a = M_2 g - 2T \end{array} \right\}$$

$$a = \frac{M_2}{2M_1 + M_2} g$$

35/003

7. - Determinar la masa máxima de M_3 para que M_1 no se deslice sobre M_2 . si el coeficiente de fricción entre M_1 y M_2 es μ . Despreciar el rozamiento de M_2 sobre la mesa y el efecto de la polea



Sea a la aceleración de M_3 y M_2 suponiendo que M_1 no se desliza

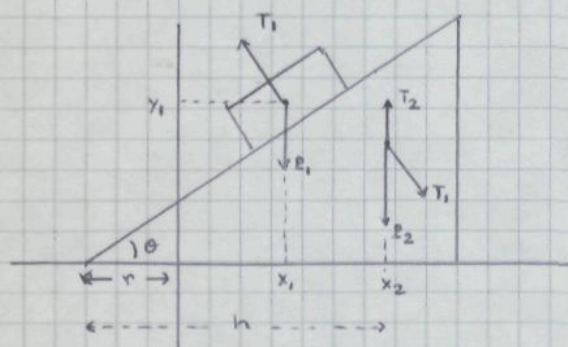
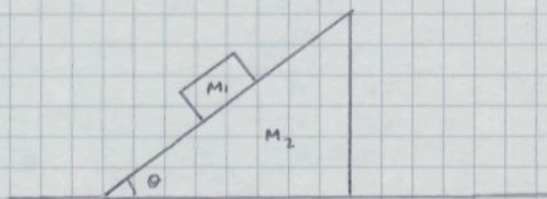
$$\left. \begin{aligned} M_3 a &= M_3 g - T \\ (M_1 + M_2) a &= T \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = \frac{M_3}{M_1 + M_2 + M_3} g$$

M_1 no se deslizará sobre M_2 si $M_1 a \leq M_1 g \mu \Rightarrow M_3 \leq \mu (M_1 + M_2 + M_3)$

$$M_3 \leq \frac{\mu}{(1-\mu)} (M_1 + M_2)$$

$$M_{3, \text{máxima}} = \frac{\mu}{1-\mu} (M_1 + M_2)$$

8. - Un bloque de masa M_1 se coloca sobre un plano inclinado de masa M_2 . El sistema se halla inicialmente en reposo. Determinar las aceleraciones del bloque y del plano inclinado despreciando todos los rozamientos. Despreciar el tamaño de M_1



En primer lugar

$$M_1 a_{1x} = -T_1 \sin \theta \quad (1)$$

$$M_1 a_{1y} = +T_1 \cos \theta - M_1 g$$

$$M_2 a_{2x} = T_1 \sin \theta \quad (2)$$

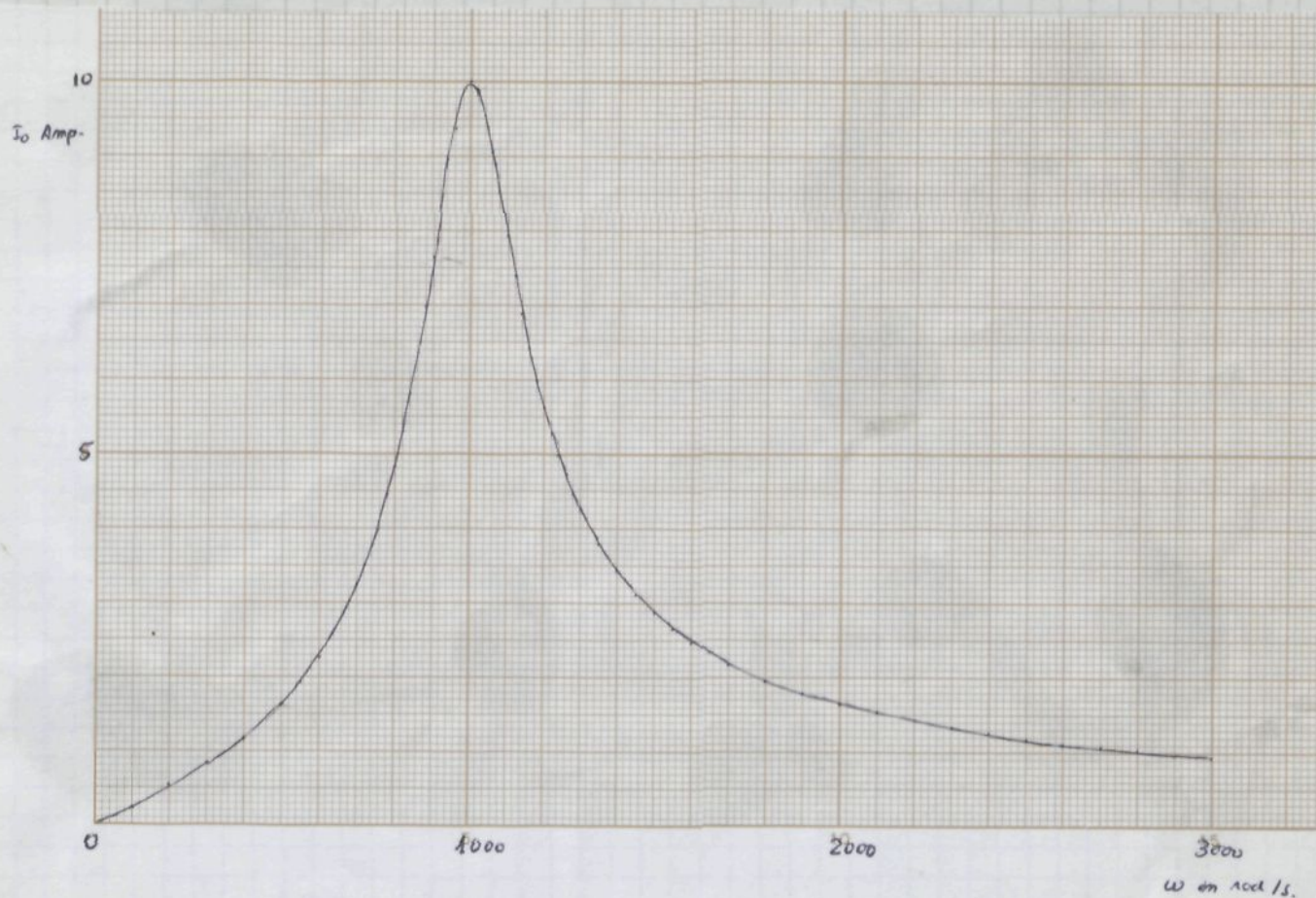
$$M_2 a_{2y} = T_2 - T_1 \cos \theta - M_2 g = 0$$

$$\text{Además } \left. \begin{aligned} (x_1 + r) \frac{1}{\cos \theta} &= y_1 \frac{1}{\sin \theta} \\ r + x_2 &= h \end{aligned} \right\} \Rightarrow (x_1 - h - x_2) \frac{1}{\cos \theta} = y_1 \frac{1}{\sin \theta} \Rightarrow$$

$$(a_{1x} - a_{2x}) \frac{1}{\cos \theta} = a_{1y} \frac{1}{\sin \theta} \quad (3)$$

(1) + (2) + (3) son las ecuaciones deseadas

$$a_{1x} = -\frac{T_1}{M_1} \sin \theta, \quad a_{1y} = -g + \frac{T_1}{M_1} \cos \theta, \quad a_{2x} = \frac{T_1}{M_2} \sin \theta$$



Factor Q : El factor Q de un circuito se define como

$$Q \equiv \left(\frac{L}{C} \right) \frac{\omega_R}{R} \quad (1)$$

Entonces la corriente máxima puede escribirse

$$I_0 = \frac{\phi_0}{Z} = \frac{\phi_0}{\left[R^2 + \left(\omega \frac{L}{C} - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right]^{1/2}} = \frac{\phi_0}{\left\{ R^2 + \frac{L^2}{C^2 \omega^2} (\omega^2 - \omega_R^2)^2 \right\}^{1/2}} \Rightarrow$$

$$I_0 = \frac{\phi_0}{R} \frac{1}{\left\{ 1 + Q^2 \left(\frac{\omega^2 - \omega_R^2}{\omega \omega_R} \right)^2 \right\}^{1/2}} \quad (2)$$

y si Q es muy grande el pico resonante es muy agudo

Las corrientes medias y las intensidades medias de las corriente estacionarias del circuito se definen

$$\phi_m = \langle \phi^2 \rangle^{1/2} = \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T dt \phi_0^2 \cos^2 \omega t \right\}^{1/2} = \frac{\phi_0}{\sqrt{2}} \quad (3)$$

$$I_m = \langle I^2 \rangle^{1/2} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \quad (4)$$

Similarmenete la potencia media es

35/003

$$\langle P \rangle : \frac{1}{T} \int_0^T dt \phi(t) I(t) : \frac{1}{T} \int_0^T dt \phi_0 \cos \omega t \frac{\phi_0}{Z} \cos(\omega t + \alpha) = \frac{1}{Z} \frac{\phi_0^2}{T} \int_0^T dt \cos^2 \omega t \cos \alpha$$

$$P_m = \langle P \rangle = \frac{1}{2} \phi_0 I_0 \cos \alpha = \phi_m I_m \cos \alpha \quad (5)$$

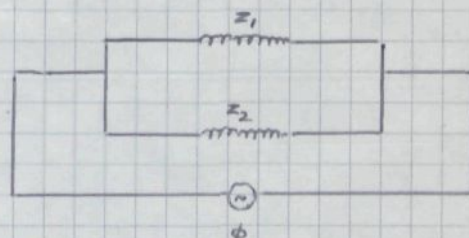
La cantidad α recibe el nombre de factor de potencia. Como $|\alpha| \leq \pi/2$ entonces $P_m \geq 0$.

Nota que

$$P_m = \frac{1}{2} \phi_0 I_0 \cos \alpha = \frac{1}{2} Z I_0^2 \cos \alpha = I_m^2 R \quad (6)$$

y por tanto la potencia disipada en un circuito de corriente alterna depende de la resistencia y no de los elementos reactivos.

1. Un generador de corriente alterna de $\phi_0 = 100 \text{ V}$ alimenta un circuito en paralelo de dos impedancias Z_1 y Z_2 . La primera está constituida por una bobina de 4Ω de resistencia ohmica y 3Ω de impedancia inductiva y la Z_2 por una resistencia ohmica de 5Ω y una impedancia inductiva de 7Ω . Hallese 1) Los ángulos de desfase de cada impedancia 2) La intensidad que circula por cada una de ellas 3) La intensidad total 4) El ángulo de desfase de ésta última con la tensión aplicada



$$\phi = 100 \text{ V } \cos(\omega t)$$

$$Z_1 = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \Omega, \quad Z_2 = \sqrt{5^2 + 7^2} = \sqrt{74}$$

$$X_1 = 3 \Omega, \quad X_2 = 7 \Omega, \quad R_1 = 4 \Omega, \quad R_2 = 5 \Omega$$

$$\cos \alpha_1 = \frac{4}{5}, \quad \sin \alpha_1 = -\frac{3}{5} \Rightarrow \alpha_1 = -(36^\circ 52' 11.63'') = -0.643501 \text{ rad}$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{5}{\sqrt{74}}, \quad \sin \alpha_2 = -\frac{7}{\sqrt{74}} \Rightarrow \alpha_2 = -(55^\circ 27' 44.35'') = -0.950547 \text{ rad}$$

$$I_1 = 20 \cos(\omega t + \alpha_1) \text{ A}, \quad I_2 = \frac{100}{\sqrt{74}} \cos(\omega t + \alpha_2) \text{ A}$$

$$I = 20 \cos(\omega t + \alpha_1) + \frac{100}{\sqrt{74}} \cos(\omega t + \alpha_2) = I \cos(\omega t + \alpha)$$

$$20 \cos \alpha_1 + \frac{100}{\sqrt{74}} \cos \alpha_2 = I \cos \alpha$$

$$20 \sin \alpha_1 + \frac{100}{\sqrt{74}} \sin \alpha_2 = I \sin \alpha$$

$$I = \left\{ 20^2 + \frac{100^2}{74} + 2 \times 20 \times \frac{100}{\sqrt{74}} \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \right\}^{1/2} = 34.2790 \text{ A}$$

$$\cos \alpha = 0.727540$$

$$\alpha = -(43^\circ 19' 9.95'') = -0.756067 \text{ rad.}$$

2. Una bobina con resistencia e inductancia se conecta con una línea de 120 V eficaces y 60 Hz . La potencia media suministrada a la bobina es de 60 W y la corriente eficaz es 1.5 A . Hallar 1) El factor de potencia 2) La resistencia de la bobina 3) La autoinducción de esta 4) La corriente adelantada o atrasada a la tensión? ¿Cuál es el ángulo de fase ϕ ?

Indiquemos $\phi(t) = \phi_0 \cos \omega t$

$\omega = 60 \text{ Hz}$ $\phi_0 = \sqrt{2} \phi_m = \sqrt{2} \times 120 \text{ V}$

$$i(t) = \frac{1}{Z} \phi_0 \cos(\omega t + \alpha)$$

$$I_0 = \sqrt{2} \phi_m = \sqrt{2} \times 1.5 \text{ A.}$$

$$I_0 = \frac{\phi_0}{Z}$$

$$Z = [R^2 + X^2]^{1/2} \quad X = \frac{\omega}{C} L$$

$$\cos \alpha = \frac{R}{Z}, \quad \sin \alpha = -\frac{X}{Z}$$

$$P_m = \frac{1}{2} \phi_0 I_0 \cos \alpha = I_m^2 R.$$

35/003

$$\text{La resistencia es } R = \frac{P_m}{I_m^2} = \frac{60 \text{ W}}{1.5^2} = \frac{20}{3}$$

$$R = \frac{80}{3} \Omega$$

$$\cos \alpha = \frac{2P_m}{I_0 \phi_0} = \frac{P_m}{I_m \phi_m} = \frac{60}{1.5 \times 120} = \frac{1}{3}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{3}$$

$$\sin \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\tan \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{1} = -2\sqrt{2}$$

$$\Sigma = R 2\sqrt{2} = \frac{160}{3} \sqrt{2} \Omega$$

$\alpha = -70^\circ 31' 43.6''$ y por tanto se obtiene

$$R = 26.67 \Omega, \quad \alpha = -70^\circ 31' 43.6'', \quad \cos \alpha = 0.333 \quad L = 0.200070 \text{ H.}$$

3. En un determinado circuito LRC, $\frac{1}{\omega C} = 16 \Omega$, $\frac{\omega L}{C} = 4 \Omega$ para una frecuencia determinada. La frecuencia de resonancia es $\omega_R = 10^4 \text{ rad/s}$. a) Hallar L y C. Si $R = 5 \Omega$ y $\phi_0 = 26 \text{ V}$ hallar 2) el valor de Q y 3) la corriente máxima.

$$\omega_R = \left[\frac{L}{C} \right]^{-1/2} = \omega \left[\frac{L\omega}{C} \right]^{-1/2} \Rightarrow 10^4 = \omega \cdot 2 \quad \omega = 5 \times 10^3 \text{ Hz}$$

$$C = \frac{1}{\omega 16 \Omega} = 12.5 \mu\text{F}$$

$$L = \frac{4 \Omega}{\omega} = 0.8 \text{ mH.}$$

$$Q = \left(\frac{L}{C} \right) \frac{\omega_R}{R} \Rightarrow Q = 1.6$$

$$I_0 = \frac{\phi_0}{R} \frac{1}{\left\{ 1 + Q^2 \left(\frac{\omega^2 - \omega_R^2}{\omega \omega_R} \right)^2 \right\}^{1/2}} \quad I_0 = 2 \text{ A}$$

y la corriente máxima para $\omega = \omega_R$ es $I_{\text{max}} = 5.2 \text{ A}$

4. En un circuito LRC en serie conectado a un generador de corriente alterna cuya fuerza electromotriz máxima es 200 V , la resistencia es 60Ω y la capacitancia $8.0 \mu\text{F}$. La autoinducción puede variarse desde 8.0 hasta 40.0 mH mediante la inserción de un núcleo de hierro en el solenoide. La frecuencia es $\omega = 2500 \text{ rad/s}$. Si la tensión del condensador no ha de superar los 150 V hallar 1) la corriente y 2) el margen de L que puede utilizarse con seguridad.

$$I_0 = \frac{\phi_0}{Z} \quad Z = \left\{ R^2 + \left(\omega \frac{L}{C} - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right\}^{1/2}$$

$$\text{La tensión máxima en el condensador es } \phi_{\text{max}} = \frac{I_0}{\omega C} \Rightarrow I_0 = 3 \text{ A}$$

$$Z = \frac{\phi_0}{I_0} > Z \geq \frac{200}{3} \Omega$$

$$R^2 + \left(\omega \frac{L}{C} - \frac{1}{\omega C} \right)^2 > \frac{4}{9} \times 10^4$$

$$\left(\omega \frac{L}{C} - \frac{1}{\omega C} \right)^2 > \frac{7600}{9}$$

$$\omega \frac{L}{C} - \frac{1}{\omega C} > \frac{20\sqrt{19}}{3} \quad \omega \frac{L}{C} - \frac{1}{\omega C} < -\frac{20\sqrt{19}}{3}$$

$$\omega \frac{L}{C} > \frac{20\sqrt{19}}{3} + \frac{1}{\omega C} \quad \omega \frac{L}{C} < -\frac{20\sqrt{19}}{3} + \frac{1}{\omega C}$$

$$L > \frac{C}{\omega} \left(\frac{20\sqrt{19}}{3} + \frac{1}{\omega C} \right) = 34.6237 \text{ mH} \quad , \quad L < \frac{C}{\omega} \left(-\frac{20\sqrt{19}}{3} + \frac{1}{\omega C} \right) = 8.3763 \text{ mH}.$$

5. Analizar la solución general de

$$\frac{L}{C} \frac{d^2 I(t)}{dt^2} + R \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C} I(t) = -\phi_0 \omega \sin \omega t$$

Empezamos buscando la solución de la ecuación homogénea $\frac{L}{C} \lambda^2 + R\lambda + \frac{1}{C} = 0$ con como raíces

$$\lambda_{\pm} = \frac{C}{2L} \left\{ -R \pm \sqrt{R^2 - 4 \frac{L}{C}} \right\}$$

y por tanto la solución general de la homogénea es (si $R^2 \neq 4L/C$)

$$I(t) = A e^{\lambda_+ t} + B e^{\lambda_- t}$$

que ambas son convenientes que desaparecen para $t \rightarrow \infty$. La solución de la homogénea es

$$I(t) = A(t) e^{\lambda_+ t} + B(t) e^{\lambda_- t}, \quad \dot{I}(t) = \dot{A}(t) e^{\lambda_+ t} + \lambda_+ A(t) e^{\lambda_+ t} + \dot{B}(t) e^{\lambda_- t} + \lambda_- B(t) e^{\lambda_- t}$$

$$\dot{I}(t) = \lambda_+ \dot{A}(t) e^{\lambda_+ t} + \lambda_- \dot{B}(t) e^{\lambda_- t} \quad \dot{A}(t) e^{\lambda_+ t} + \dot{B}(t) e^{\lambda_- t} = 0$$

$$\ddot{I}(t) = \lambda_+ \dot{A}(t) e^{\lambda_+ t} + \lambda_+^2 A(t) e^{\lambda_+ t} + \lambda_- \dot{B}(t) e^{\lambda_- t} + \lambda_-^2 B(t) e^{\lambda_- t}$$

$$\frac{L}{C} [\lambda_+ \dot{A}(t) e^{\lambda_+ t} + \lambda_+^2 A(t) e^{\lambda_+ t} + \lambda_- \dot{B}(t) e^{\lambda_- t} + \lambda_-^2 B(t) e^{\lambda_- t}] +$$

$$+ R [\lambda_+ A(t) e^{\lambda_+ t} + \lambda_- B(t) e^{\lambda_- t}] + \frac{1}{C} [A(t) e^{\lambda_+ t} + B(t) e^{\lambda_- t}] = -\phi_0 \omega \sin \omega t \Rightarrow$$

$$\dot{A}(t) e^{\lambda_+ t} + \dot{B}(t) e^{\lambda_- t} = 0$$

$$\lambda_+ \dot{A}(t) e^{\lambda_+ t} + \lambda_- \dot{B}(t) e^{\lambda_- t} = -\frac{C}{L} \phi_0 \omega \sin \omega t$$

$$\dot{A}(t) = -\frac{C \omega \phi_0}{L} \frac{1}{\lambda_+ - \lambda_-} e^{-\lambda_+ t} \sin \omega t$$

$$\dot{B}(t) = +\frac{C \omega \phi_0}{L} \frac{1}{\lambda_+ - \lambda_-} e^{-\lambda_- t} \sin \omega t$$

$$A(t) = \frac{1}{2i} \frac{C \omega \phi_0}{L} \frac{1}{\lambda_+ - \lambda_-} \left\{ \frac{1}{\lambda_+ - i\omega} e^{i\omega t} - \frac{1}{\lambda_+ + i\omega} e^{-i\omega t} \right\} e^{-\lambda_+ t}$$

$$B(t) = -\frac{1}{2i} \frac{C \omega \phi_0}{L} \frac{1}{\lambda_+ - \lambda_-} \left\{ \frac{1}{\lambda_- - i\omega} e^{i\omega t} - \frac{1}{\lambda_- + i\omega} e^{-i\omega t} \right\} e^{-\lambda_- t}$$

35/003

Por tanto lo conviene escribirlo as

$$I(t) = \frac{1}{2i} \frac{c\omega\phi_0}{L} \frac{1}{\lambda_+ - \lambda_-} \left\{ \frac{1}{\lambda_+ - i\omega} e^{i\omega t} - \frac{1}{\lambda_+ + i\omega} e^{-i\omega t} - \frac{1}{\lambda_- - i\omega} e^{i\omega t} + \frac{1}{\lambda_- + i\omega} e^{-i\omega t} \right\}$$

$$I(t) = \frac{c\omega\phi_0}{L} \frac{1}{\lambda_+ - \lambda_-} \left\{ \left[\frac{1}{\lambda_+^2 + \omega^2} - \frac{1}{\lambda_-^2 + \omega^2} \right] \omega \cos \omega t + \left[\frac{\lambda_+}{\lambda_+^2 + \omega^2} - \frac{\lambda_-}{\lambda_-^2 + \omega^2} \right] \sin \omega t \right\}$$

$$I(t) = \frac{c\omega\phi_0}{L} \frac{1}{\lambda_+ - \lambda_-} \frac{1}{\lambda_+^2 + \omega^2} \frac{1}{\lambda_-^2 + \omega^2} \left\{ -(\lambda_+^2 - \lambda_-^2) \omega \cos \omega t + (\lambda_+ - \lambda_-)(\omega^2 - \lambda_+ \lambda_-) \sin \omega t \right\}$$

$$I(t) = \frac{c\omega\phi_0}{L} \frac{1}{(\lambda_+^2 + \omega^2)(\lambda_-^2 + \omega^2)} \left\{ -(\lambda_+ + \lambda_-) \omega \cos \omega t + (\omega^2 - \lambda_+ \lambda_-) \sin \omega t \right\}$$

$$(\lambda_+^2 + \omega^2)(\lambda_-^2 + \omega^2) = \omega^4 + \left(\frac{c^2 R^2}{L^2} - \frac{2c}{LC} \right) \omega^2 + \frac{c^2}{L^2 C^2} = \frac{c^2 R^2}{L^2} \omega^2 + \left(\omega^2 - \frac{c}{LC} \right)^2 =$$

$$= \frac{c^2}{L^2} \omega^2 \left\{ R^2 + \left(\omega \frac{L}{c} - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right\} = \frac{c^2 \omega^2}{L^2} Z^2$$

$$\lambda_+ + \lambda_- = -R \frac{c}{L}, \quad \omega^2 - \lambda_+ \lambda_- = \omega^2 - \frac{c}{LC} = \omega \frac{c}{L} \left(\omega \frac{L}{c} - \frac{1}{\omega C} \right) = \omega \frac{c}{L} \delta$$

$$I(t) = \frac{c\omega\phi_0}{L} \frac{L^2}{c^2 \omega^2 Z^2} \left\{ R \frac{c}{L} \omega \cos \omega t + \omega \frac{c}{L} \delta \sin \omega t \right\}$$

$$I(t) = \phi_0 \frac{R}{Z^2} \cos \omega t + \phi_0 \frac{\delta}{Z^2} \sin \omega t$$

$$I(t) = \phi_0 \frac{1}{Z} \left\{ \frac{R}{Z} \cos \omega t + \frac{\delta}{Z} \sin \omega t \right\}$$

por tanto lo conviene escribirlo as

$$I(t) = \frac{\phi_0}{Z} \cos(\omega t + \alpha)$$

$$\cos \alpha = \frac{R}{Z} \quad \sin \alpha = -\frac{\delta}{Z}$$

6. Cuando se conecta un circuito en serie LRC a una línea de 120 V de valor eficaz y 60 Hz, la corriente eficaz es 11.0 A adelantando la corriente a la fem en 45° . 1) Hallar la potencia suministrada al circuito. 2) ¿Cuál es la resistencia? 3) Si la autoinducción es $L = 0.05 \text{ H}$, hallar la capacitancia C . 4) ¿Qué capacitancia o autoinducción deberían añadirse para hacer que el factor de potencia sea 1?

$$1) P_m = \frac{1}{2} \phi_0 I_0 \cos \alpha \Rightarrow P_m = \frac{1}{2} 120 \sqrt{2} 11 \sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ W} \Rightarrow P_m = 933.38 \text{ W}$$

$$2) P_m = I_m^2 R, \quad R = \frac{120}{11\sqrt{2}} = 7.7139 \Omega$$

$$3) \quad \text{tg} \alpha = 1 \quad \text{tg} \alpha = -\frac{X}{R} \quad X = -R \quad \omega \frac{L}{C} - \frac{1}{\omega C} = -R$$

$$\frac{1}{\omega C} = R + \omega \frac{L}{C} \Rightarrow C = \frac{1}{\omega} \left(R + \omega \frac{L}{C} \right)^{-1} \Rightarrow C = 99.8584 \mu\text{F}$$

$$4) \quad \cos \alpha = 1 \Rightarrow X = 0 \quad \omega \frac{L}{C} - \frac{1}{\omega C} = 0 \quad \text{como ante } X \text{ no negativo para tenerlo como debe}$$

se aumentó C en ΔC con $\Delta C > 0$

$$\omega \frac{L}{C} - \frac{1}{\omega(C+\Delta C)} = 0 \quad \omega^2 \frac{L}{C} = \frac{1}{C+\Delta C} \quad C+\Delta C = \frac{C}{\omega^2 L} \quad \Delta C = \frac{C}{\omega^2 L} - C$$

$$\Delta C = 40.8655 \mu\text{F}$$

7. Se dispone de un generador de $\phi_0 = 62.79 \text{ V}$ y $\omega = 50 \text{ periodos s}^{-1}$, del que se quieren obtener una corriente media de 10 A y una potencia media de 313.9 W . Para ello se monta sobre sus bornes una autoinducción. Hallar sus características

$$\phi_0 = 62.79 \text{ V}, \quad \omega = 50 \text{ rad s}^{-1}, \quad I_0 = \sqrt{2} 10 \text{ A} \quad W_p = 313.95 \text{ W}$$

$$\cos \alpha = \frac{2P_m}{\phi_0 I_0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \alpha = -45^\circ \quad \text{para } \mathcal{E} > 0 \quad \mathcal{E} = \omega \frac{L}{C}, \quad Z = \sqrt{R^2 + X^2}$$

$$\text{tg} \alpha = -\frac{X}{R} \quad \mathcal{E} = R \quad \Rightarrow \quad Z = \sqrt{2} R$$

$$I_0 = \frac{\phi_0}{Z} \Rightarrow R = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\phi_0}{I_0} \Rightarrow R = 3.1395 \Omega, \quad \mathcal{E} = 3.1395 \Omega$$

$$L = \frac{\mathcal{E}}{\omega} C \Rightarrow L = 0.00999333 \text{ H}$$

ECUACIONES DE MAXWELL

Las leyes básicas de la electricidad y magnetismo que hemos estudiado hasta ahora se pueden escribir, en forma diferencial, como

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = 4\pi \rho(\vec{x})$$

Ley de Coulomb

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}) = \frac{4\pi}{c} \vec{J}(\vec{x})$$

Ley de Ampère

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}; t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}(\vec{x}; t)}{\partial t} = 0$$

Ley de Faraday

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{x}) = 0$$

Ausencia de monopolos magnéticos

Nótese que salvo la ecuación de Faraday todas han sido derivadas para condiciones estacionarias y por tanto no es de esperar, a priori, que continúen siendo válidas si para cualquier cantidad que aparezca en ellas hacemos $F(\vec{x}) \rightarrow F(\vec{x}; t)$. En realidad si hubiéramos esto obtendríamos una inconsistencia pues a la segunda ecuación

$$\frac{4\pi}{c} \vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{x}; t) = \vec{\nabla} \cdot [\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}; t)] = 0 \quad \nabla \cdot \vec{J}(\vec{x}; t) + \frac{\partial \rho(\vec{x}; t)}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

es decir, tendríamos violación de la ley de conservación de la carga eléctrica.

Se necesitó el genio de James Clerk Maxwell para ver la inconsistencia de las ecuaciones obtenidas mediante la prescripción $F(\vec{x}) \rightarrow F(\vec{x}; t)$ y modificarlas de forma adecuada. Maxwell postuló

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}; t) = 4\pi \rho(\vec{x}; t)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}; t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}(\vec{x}; t)}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}(\vec{x}; t)$$

(2)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{x}; t) = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}; t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}(\vec{x}; t)}{\partial t} = 0$$

Estas ecuaciones son ya compatibles con la conservación de la carga eléctrica. Maxwell llamó al nuevo término conveniente de desplazamiento y es de importancia crucial para campos eléctricos que fluctúan rápidamente. Sin él no habría radiación electromagnética. Maxwell predijo que la luz era un fenómeno ondulatorio de carácter electromagnético y que era posible producir ondas electromagnéticas de todas las frecuencias. Las ondas electromagnéticas fueron producidas por primera vez en Hertz en 1887, treinta años después de la predicción de Maxwell.

Potenciales electromagnéticos: En situaciones estacionarias hemos visto que es posible describir un campo eléctrico $\vec{E}(\vec{x})$ mediante un potencial escalar $\phi(\vec{x})$ y que $\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla} \phi(\vec{x})$. En una situación general se puede ver que

35/003

$$\vec{E}(\vec{x}; t) = -\vec{\nabla} \phi(\vec{x}; t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}(\vec{x}; t)}{\partial t}, \quad \vec{B}(\vec{x}; t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}; t) \quad (4)$$

$\phi(\vec{x}; t)$ = potencial escalar, $\vec{A}(\vec{x}; t)$ = potencial vector

Notar que

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}; t) = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}(\vec{x}; t)}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \phi(\vec{x}; t)] - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}; t) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}; t) = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{x}; t) = \vec{\nabla} \cdot [\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}; t)] = 0$$

En realidad las dos últimas ecuaciones de Maxwell nos aseguran la existencia de ϕ y $\vec{A}$.

Ecuaciones para los potenciales

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}; t) = -\Delta \phi(\vec{x}; t) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} [\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{x}; t)] = 4\pi \rho(\vec{x}; t)$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}; t) &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}(\vec{x}; t)}{\partial t} = \vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}; t)] + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} [\vec{\nabla} \cdot \phi(\vec{x}; t)] + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}(\vec{x}; t)}{\partial t^2} \\ &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}(\vec{x}; t)}{\partial t^2} - \Delta \vec{A}(\vec{x}; t) + \vec{\nabla} [\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{x}; t)] + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \phi(\vec{x}; t) = \frac{4\pi}{c} \vec{J}(\vec{x}; t) \end{aligned}$$

de donde

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}(\vec{x}; t)}{\partial t^2} - \Delta \vec{A}(\vec{x}; t) + \vec{\nabla} \left\{ \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{x}; t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi(\vec{x}; t)}{\partial t} \right\} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}(\vec{x}; t) \quad (5)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi(\vec{x}; t)}{\partial t^2} - \Delta \phi(\vec{x}; t) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{x}; t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi(\vec{x}; t)}{\partial t} \right\} = 4\pi \rho(\vec{x}; t)$$

que, en principio, permiten determinar $\phi(\vec{x}; t)$ y $\vec{A}(\vec{x}; t)$ a partir de $\rho(\vec{x}; t)$ y $\vec{J}(\vec{x}; t)$.

Transformaciones de gauge: ¿Son $\phi(\vec{x}; t)$ y $\vec{A}(\vec{x}; t)$ únicos? No. Supongamos una distribución de cargas y corrientes que, a través de las ecuaciones de Maxwell, nos determinan $\vec{E}(\vec{x}; t)$ y $\vec{B}(\vec{x}; t)$. Supongamos que $\phi(\vec{x}; t)$ y $\vec{A}(\vec{x}; t)$ nos reproducen los campos a través de las ecuaciones (4). Veamos que también se pueden elegir como potenciales

$$\left. \begin{aligned} \phi(\vec{x}; t) &\longrightarrow \phi'(\vec{x}; t) = \phi(\vec{x}; t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda(\vec{x}; t)}{\partial t} \\ \vec{A}(\vec{x}; t) &\longrightarrow \vec{A}'(\vec{x}; t) = \vec{A}(\vec{x}; t) + \vec{\nabla} \Lambda(\vec{x}; t) \end{aligned} \right\} \quad (\text{Transformaciones de gauge}) \quad (6)$$

donde $\Lambda(\vec{x}; t)$ es arbitraria. En efecto

$$-\vec{\nabla} \phi'(\vec{x}; t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}'(\vec{x}; t)}{\partial t} = -\vec{\nabla} \phi(\vec{x}; t) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \Lambda(\vec{x}; t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}(\vec{x}; t)}{\partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \Lambda(\vec{x}; t) = \vec{E}(\vec{x}; t)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A}'(\vec{x}; t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}; t) + \vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \Lambda(\vec{x}; t)] = \vec{B}(\vec{x}; t).$$

Condición de Lorentz: La libertad en la elección de los potenciales permite imponer condiciones sobre los mismos. En particular se puede fijar que siempre es posible imponer la llamada condición de Lorentz

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{x}; t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi(\vec{x}; t)}{\partial t} = 0 \quad (\text{Condición de Lorentz}) \quad (1)$$

En este caso las ecuaciones para determinar ϕ y $\vec{A}$ son

$$\square \phi(\vec{x}; t) = 4\pi \rho(\vec{x}; t), \quad \square \vec{A}(\vec{x}; t) = \frac{4\pi}{c} \vec{J}(\vec{x}; t) \quad (2)$$

$$\square \equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \quad (\text{D'Alembertiana})$$

La condición (1) no implica aun la unicidad de ϕ y $\vec{A}$ ya que no cambia si hacemos una transformación de gauge en la que $A(\vec{x}; t)$ es

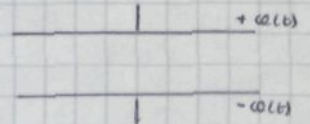
$$\square \Lambda(\vec{x}; t) = 0 \quad (3)$$

Notar que, al menos a nivel clásico, lo único medible físicamente es $\vec{E}$ y $\vec{B}$ pues la fuerza de Lorentz es

$$\vec{F}(\vec{x}; t) = q \left(\vec{E}(\vec{x}; t) + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B}(\vec{x}; t) \right) \quad (4)$$

1. Un condensador de láminas plano-paralelas tiene placas circulares de radio $R = 1.0 \text{ cm}$ separadas por una distancia $d = 1.0 \text{ mm}$, en aire. Está entrando una carga por la placa superior y saliendo por la inferior a un ritmo de 5 A . 1) Hallar la variación respecto al tiempo del campo eléctrico situado entre las placas. 2) Calcular la corriente de desplazamiento entre las placas. 3) Hallar la densidad de corriente de desplazamiento entre las placas.

1) La densidad superficial de carga es $\sigma(t) = \frac{Q(t)}{\pi R^2}$ y el campo eléctrico entre las placas



$$E(t) = 4\pi \sigma(t) = \frac{4Q(t)}{R^2}$$

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{4}{R^2} I$$

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{4}{1 \text{ cm}^2} \cdot 5 \times 2.99792458 \times 10^9 \text{ g}^{1/2} \text{ cm}^{3/2} \text{ s}^{-2}$$

$$\frac{dE(t)}{dt} = 5.9958491 \times 10^{10} \text{ g}^{1/2} \text{ cm}^{-1/2} \text{ s}^{-2}$$

$$= 5.9958491 \times 10^{10} \text{ g}^{1/2} \text{ cm}^{-1/2} \text{ s}^{-2} \cdot \frac{1 \text{ Volt}}{299.792458 \text{ g}^{1/2} \text{ cm}^{1/2} \text{ s}^{-1}} \cdot \frac{100 \text{ cm}}{1 \text{ m}}$$

$$= 1.9975 \times 10^{15} \text{ Volt m}^{-1} \text{ s}^{-1}$$

$$2) \quad \vec{j}_{\text{des}}(t) = \frac{1}{4\pi} \frac{dE(t)}{dt} = \frac{1}{4\pi} \frac{4}{R^2} I = I$$

$$3) \quad \vec{j}_{\text{des}}(t) = \frac{1}{4\pi} \frac{dE(t)}{dt} = \frac{1}{\pi R^2} I$$

2. Formular la ley de Ampère teniendo en cuenta las corrientes de desplazamiento.

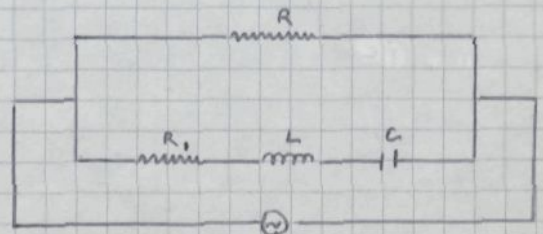
$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}, t) = \frac{4\pi}{c} (\vec{j}(\vec{x}, t) + \vec{j}_d(\vec{x}, t))$$

$$\vec{j}_d(\vec{x}, t) \equiv \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}(\vec{x}, t)}{\partial t}$$

$$\int_S d\vec{s} \cdot [\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}, t)] = \frac{4\pi}{c} \int_S d\vec{s} \cdot [\vec{j}(\vec{x}, t) + \vec{j}_d(\vec{x}, t)]$$

$$\int_E d\vec{l} \cdot \vec{B}(\vec{x}, t) = \frac{4\pi}{c} \int_C d\vec{s} \cdot [\vec{j}(\vec{x}, t) + \vec{j}_d(\vec{x}, t)]$$

3. En el circuito de la figura el generador tiene una frecuencia tal que la corriente que atraviesa la resistencia R es mínima.



¿Qué corriente atraviesa entonces la bobina y el condensador?

35/003

Si la corriente que atraviesa R es mínima, entonces la que pasa por R_1 es máxima y esto implica que la impedancia

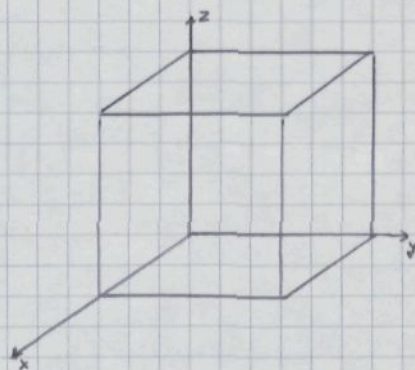
$$Z = \left\{ R_1^2 + \left(\omega \frac{L}{C} - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right\}^{1/2}$$

es mínima, lo cual se logra si $\omega L/C = 1/\omega C$ en cuyo caso $Z = R_1$. Con ello el circuito queda reducido a dos resistencias en paralelo. Si llamamos I_0 y I_1 a las corrientes que circulan, respectivamente, por R y R_1 ,

$$I_1 = \frac{\phi_0 \cos(\omega t)}{R_1}$$

4. En una región cúbica del espacio, de lado L , situada como en la figura existen dos campos vectoriales

$$\vec{A} = \alpha (1 + x/L) \hat{i}, \quad \vec{C} = \gamma (1 + x/L) \hat{j}, \quad \alpha, \gamma \neq 0$$



Demuestran: 1) Que $\vec{A}$ no puede ser magnético

2) Que $\vec{C}$ no puede ser electrostático.

Suponen que $\vec{A}$ sea un campo electrostático y $\vec{C}$ un campo magnético, entonces 3) Calcular la carga Q situada en el interior del cubo y su distribución. 4) Calcular la corriente total I que cruce el cubo 5) Calcular la energía electromagnética total en el interior del cubo

1) Si $\vec{A}$ es magnético $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ pero $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\alpha}{L}$

2) Si $\vec{C}$ es electrostático $\vec{\nabla} \times \vec{C} = 0$ pero $\vec{\nabla} \times \vec{C} = \frac{\gamma}{L} \hat{k}$

Sea entonces $\vec{E} = \alpha (1 + \frac{x}{L}) \hat{i}$, $\vec{B} = \gamma (1 + \frac{x}{L}) \hat{j}$

$$3) \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi \rho(\vec{r}) \Rightarrow \rho(x) = \frac{1}{4\pi} \frac{\alpha}{L} \quad j(x) = \frac{\alpha}{4\pi L} \quad \varphi = \frac{\alpha L^2}{4\pi}$$

$$4) \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j} \frac{4\pi}{c} \Rightarrow \frac{4\pi}{c} \vec{j}(x) = \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\gamma}{L} \hat{k} \quad \vec{j}(x) = \frac{\gamma c}{4\pi L} \hat{k}$$

$$I = \int_V d\vec{s} \cdot \vec{j}(x) = 0$$

$$5) \mathcal{E} = \frac{1}{8\pi} \int_V d^3x (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) = \frac{\alpha^2 + \gamma^2}{8\pi} \int d^3x \left(1 + \frac{2}{L}x + \frac{1}{L^2}x^2 \right) = \frac{L^2}{8\pi} (\alpha^2 + \gamma^2) \int_0^L dx \left(1 + \frac{2}{L}x + \frac{1}{L^2}x^2 \right)$$

$$= \frac{L^2}{8\pi} (\alpha^2 + \gamma^2) \left(L + \frac{2}{L} \frac{1}{2} L^2 + \frac{1}{L^2} \frac{1}{3} L^3 \right) \Rightarrow \mathcal{E} = \frac{7}{24\pi} L^3 (\alpha^2 + \gamma^2)$$

5. Cuales son los campos desuados por los potenciales

$$1) \quad \phi = \frac{Q}{r}, \quad \vec{A} = 0$$

$$2) \quad \phi = 0, \quad \vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{r}, \quad \vec{B} = B \hat{z}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$1) \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} \frac{Q}{r} = \frac{Q}{r^3} \vec{r}, \quad \vec{E} = \frac{Q}{r^2} \hat{r}, \quad \vec{B} = 0$$

$$2) \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}, \quad \vec{B} = B \hat{z}, \quad \vec{E} = 0$$

RELATIVIDAD.

Mecánica: El principio de la relatividad galileana afirma que mediante experimentos de tipo mecánico es totalmente imposible distinguir un sistema inercial de otro.

Electromagnetismo: ¿Se pueden distinguir los sistemas inerciales mediante experimentos electromagnéticos? Consideremos una zona del espacio alejada de toda distribución de cargas y corrientes. Para simplificar consideremos la ecuación del potencial escalar en 1+1 dimensiones

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi(x; t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi(x; t)}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

Hagamos ahora el cambio

$$\eta = x - ct, \quad \xi = x + ct$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta}, \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta}$$

y la ecuación anterior se convierte en

$$\frac{\partial^2 \bar{\phi}(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad \bar{\phi}(\xi, \eta) \equiv \phi(x; t) \quad (2)$$

y su solución general es

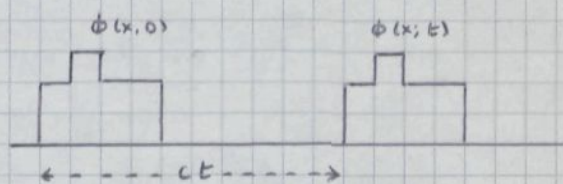
$$\phi(x; t) = g(x + ct) + h(x - ct) \quad (3)$$

donde g y h son funciones arbitrarias. Consideremos por ejemplo

$$\phi(x; t) = h(x - ct) \quad (4)$$

Se trata pues de una onda que se propaga con velocidad c hacia la derecha.

La $\phi(x; t) = g(x + ct)$ es una onda que se propaga con velocidad c hacia la izquierda. Estas son las llamadas ondas electromagnéticas.



Problema: ¿En qué sistema de referencia es cierto que la luz se propaga con velocidad c ?

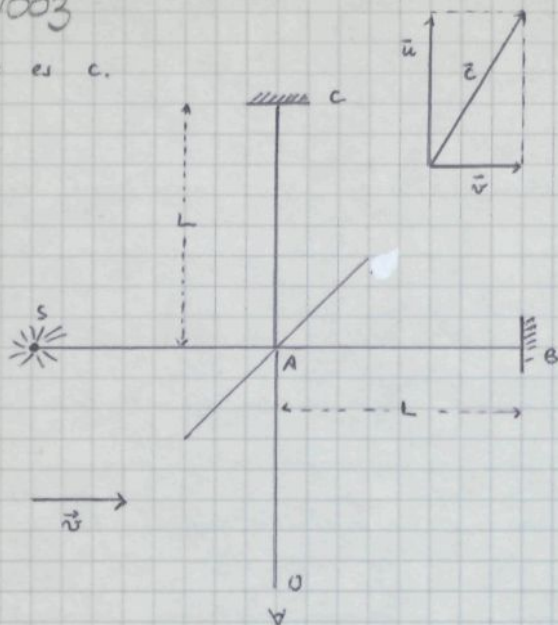
¿Disponemos de un sistema privilegiado de referencia? ¿Cuál es este sistema?

A finales del siglo pasado e inicios de este se realizaron múltiples experimentos para contestar a estas preguntas. Solo comentaremos uno de estos experimentos.

Experimento de Michelson-Morley. Veamos como se puede determinar la velocidad de la Tierra respecto al sistema inercial privilegiado en el que la velocidad de la

35/003

La luz es c.



La luz emitida por la fuente S es reflejada parcialmente en A y parcialmente transmitida. El haz transmitido se mueve hacia B y se refleja volviendo a A y llegando al observador en O. El haz reflejado se mueve hacia C donde es reflejado y después de atravesar A, llega al observador en O. El tiempo en que la luz tarda en hacer el recorrido ABA, en la hipótesis de que este aparato tenga una velocidad $\vec{v}$ respecto al éter, esto es respecto al sistema

de referencia en que la luz se mueve con velocidad c, es

$$t_1 = \frac{L}{c-v} + \frac{L}{c+v} = \frac{2L}{c} \frac{1}{1-v^2/c^2} \quad (5)$$

Consideremos ahora el tiempo invertido en hacer el recorrido ACA. La velocidad del haz respecto al aparato es $\vec{u} = \vec{c} - \vec{v}$ y por tanto

$$t_2 = \frac{2L}{|c^2 - v^2|} = \frac{2L}{c} \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \quad (6)$$

Luego

$$\Delta t \equiv t_1 - t_2 = \frac{2L}{c} \left\{ \frac{1}{1-v^2/c^2} - \frac{1}{(1-v^2/c^2)^{1/2}} \right\} \approx \frac{Lv^2}{c^3} + \dots \quad \text{si } v^2/c^2 \ll 1.$$

Esta diferencia de tiempos es posible medirla observando las franjas de interferencia en O. Si $S = \text{Sol}$ se esperaba que $v \approx 3 \times 10^6 \text{ cm s}^{-1}$ pero todos los resultados eran compatibles con $v=0$. Todo parece indicar que el sistema terrestre era el sistema privilegiado, lo cual venía descartado por otras experiencias.

Constancia de c. Hoy día experiencias muy precisas permiten afirmar

- i) La velocidad de la luz es constante para $10^8 \text{ hertz} \leq \nu \leq 10^{22} \text{ hertz}$
- ii) c es independiente de la intensidad de la luz
- iii) c es independiente del movimiento de la fuente con relación al observador.

Einstein: En 1905 publica su famoso trabajo en el que establece la teoría de la relatividad especial basándose en los postulados: 1) Principio de la constancia de la velocidad de la luz: La luz se propaga siempre, en el vacío, con velocidad c. 2) Principio de relatividad: Mediante ningún tipo de experiencias físicas es posible distinguir un sistema inercial de otro.

Transformaciones de Lorentz. Supongamos que en $t=0$ se emite desde el punto O una señal luminosa, de acuerdo con el observador inercial S solidario con $Oxyz$. Al cabo de un cierto tiempo t este observador vea que los puntos alcanzados por el frente de onda son los que cumplen

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \quad (1)$$

Supongamos un segundo sistema inercial S' tal que en $t=0$ $O=O'$ y sea que O' se mueve con velocidad $\vec{V}$ paralela al eje Ox . La constancia de la velocidad de la luz para todos los observadores inerciales obliga a que O' vea también que los frentes de onda son esferas de ecuaciones

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 \quad (2)$$

¿Qué relación hay entre las coordenadas medidas por ambos observadores? La contestación directa es

$$x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t \quad (3)$$

pero entonces es inmediato comprobar que las ecuaciones de los frentes de onda (1) y (2) no pueden ser simultáneamente ciertas. En relatividad se puede probar que un suceso que para S tiene las coordenadas (t, x, y, z) para S' tiene las coordenadas (t', x', y', z') donde

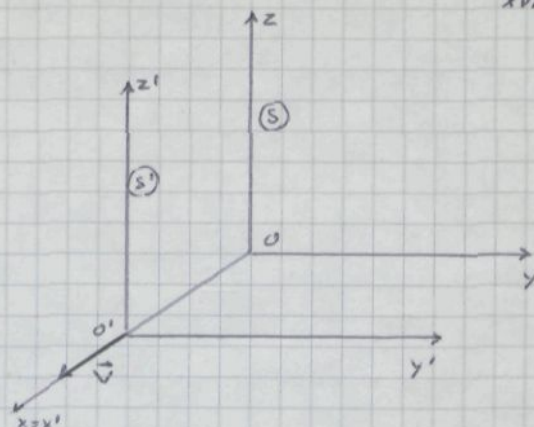
$$t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z \quad (4)$$

y en general

$$\left. \begin{aligned} t' &= \frac{t - \frac{\vec{V} \cdot \vec{x}}{c^2}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\ \vec{x}' &= \vec{x} + \frac{(\vec{x} \cdot \vec{V})}{V^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} - 1 \right) \vec{V} - \frac{\vec{V} t}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Transformaciones} \\ \text{de Lorentz} \end{array} \quad (5)$$

Propiedades

- i) Notar que $c^2 t^2 - \vec{x}^2 = c^2 t'^2 - \vec{x}'^2$
- ii) Si $V \ll c \Rightarrow t' = t, \quad \vec{x}' = \vec{x} - \vec{V}t$
- iii) Si se desea hallar la transformación inversa de (5) basta tomar $\vec{V} \rightarrow -\vec{V}$.



35/003

Suma de velocidades: Supongamos dos observadores inerciales S y S' y un suceso E que según S tiene unas coordenadas $(t, \vec{x})$ y según S' las $(t', \vec{x}')$. Si el suceso es un punto en movimiento las velocidades atribuidas por S y S' son

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}, \quad \vec{v}' = \frac{d\vec{x}'}{dt'} \quad (6)$$

¿Qué relación hay entre $\vec{v}$ y $\vec{v}'$ con $\vec{V}$?

$$\vec{v}' = \frac{d\vec{x}'}{dt'} = \frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{dt - \frac{\vec{V} \cdot d\vec{x}}{c^2}} \left\{ d\vec{x} + \frac{(\vec{V} \cdot d\vec{x})}{v^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1 \right) \vec{V} - \frac{\vec{V}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} dt \right\}$$

$$\vec{v}' = \frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{1 - \frac{\vec{V} \cdot \vec{v}}{c^2}} \left\{ \vec{v} + \frac{\vec{V} \cdot \vec{v}}{v^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1 \right) \vec{V} - \frac{\vec{V}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right\} \quad (5)$$

1) Si $\vec{V} = (V, 0, 0)$ entonces

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{V v_x}{c^2}}, \quad v'_y = v_y \frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{1 - \frac{V v_x}{c^2}}, \quad v'_z = v_z \frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{1 - \frac{V v_x}{c^2}} \quad (6)$$

2) Si $V/c \rightarrow 0$ entonces $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}$

3) Si $\vec{v} = (c, 0, 0)$ y $\vec{V} = (V, 0, 0) \Rightarrow \vec{v}' = (c, 0, 0)$ (7)

Simultaneidad: Sean dos sucesos simultáneos para $S : (t, \vec{x}_1)$ y $(t, \vec{x}_2)$. ¿Serán simultáneos para S' ?

$$t'_2 - t'_1 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \left[t_2 - \frac{\vec{V} \cdot \vec{x}_2}{c^2} - t_1 + \frac{\vec{V} \cdot \vec{x}_1}{c^2} \right] = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{\vec{V}}{c^2} \cdot (\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \quad (8)$$

que es distinto de cero en general. La simultaneidad es pues un concepto relativo. Evidentemente si $V/c \ll 1$ entonces $t'_2 = t'_1$

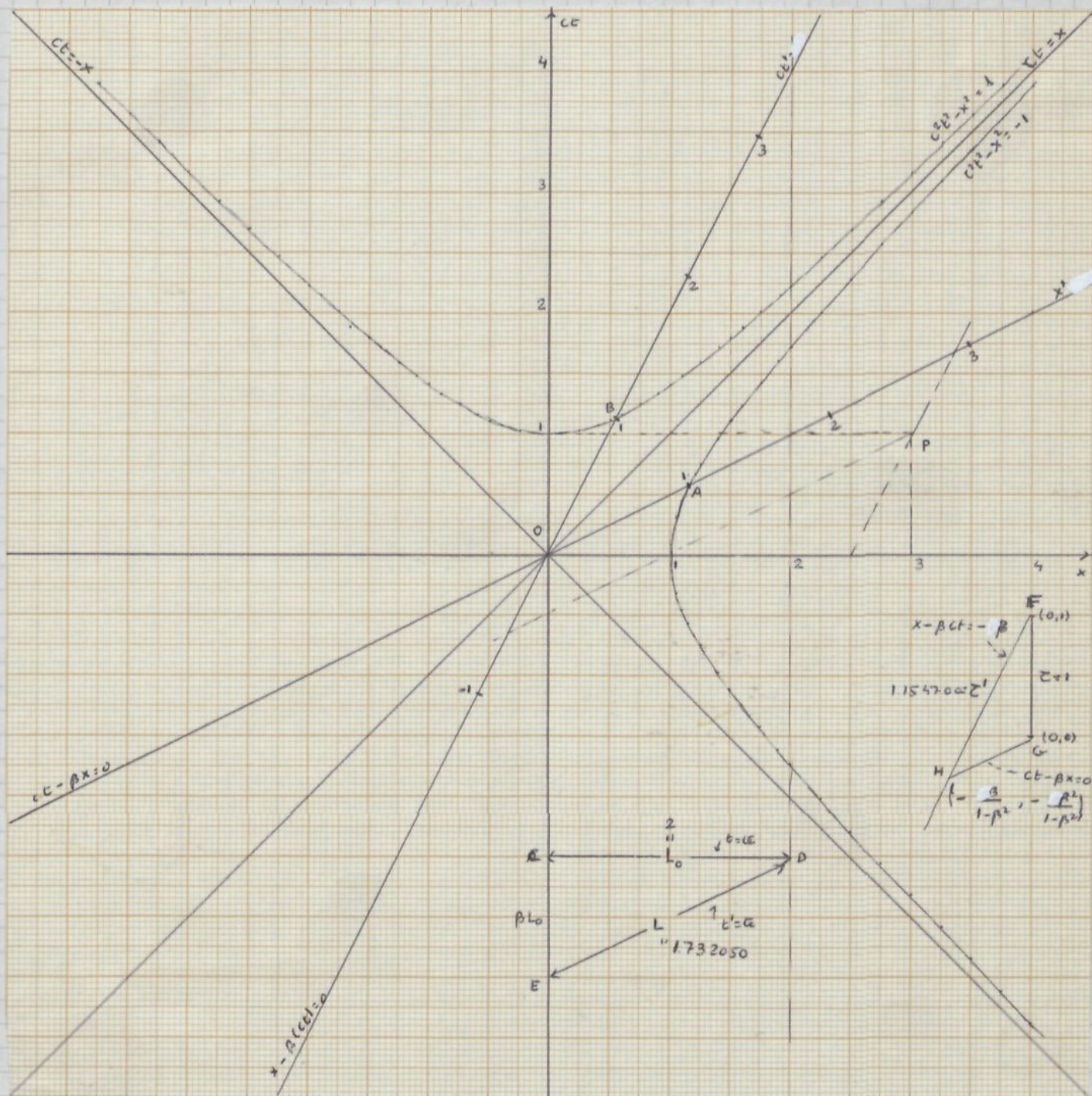
Pasado y futuro: Sean dos sucesos que para S tienen coordenadas $(t_1, \vec{x}_1)$ y $(t_2, \vec{x}_2)$ con $t_2 > t_1$. Para S' las coordenadas son $(t'_1, \vec{x}'_1)$ y $(t'_2, \vec{x}'_2)$. ¿Continúa siendo cierto que $t'_2 > t'_1$?

$$t'_2 - t'_1 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \left\{ (t_2 - t_1) - \frac{\vec{V}}{c^2} \cdot (\vec{x}_2 - \vec{x}_1) \right\} \quad (9)$$

Luego $t'_2 > t'_1$, cualquiera que sea $\vec{V}$, si $|\vec{x}_2 - \vec{x}_1| / (t_2 - t_1) < c$, es decir que los dos sucesos se pueden relacionar con una señal física que viaje a velocidad menor que la de la luz. Si $|\vec{x}_2 - \vec{x}_1| / (t_2 - t_1) > c$ existían observadores para los cuales $t'_2 < t'_1$. Fijemos que siempre que pueda existir una relación causa efecto $t'_2 > t'_1$, pero en caso

com tanto algún observador vea $t_2' < t_1'$

Como de luz : $c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$



Supondremos $y=z=0$. $\Rightarrow c^2 t^2 - x^2 = 0$. Los generadores del cono de luz son las trayectorias $x = \pm ct$ de los rayos de luz que pasan por $ct = x = 0$

i) Interior del cono ($|x| < |ct|$) : Los puntos $ct > 0$ ($ct < 0$) corresponden al futuro (pasado) absoluto. Los puntos del exterior son futuro ($ct > 0$) o pasado ($ct < 0$) relativos

$$ii) \quad ct' = \frac{ct - \frac{v}{c} x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad x' = \frac{x - \frac{v}{c} (ct)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Las líneas $x' = ct'$ o $ct' = x'$ son rectas Adomas

$$(ct' \pm x') = \frac{1 \mp v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} (ct \pm x) \Rightarrow \text{Las líneas } ct = \pm x \text{ son invariantes}$$

35/003

$$u) \quad v/c = \beta = 0.5$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1.154700538$$

$$ct' = \frac{2}{\sqrt{3}} (ct - \frac{1}{2}x) \quad x' = \frac{2}{\sqrt{3}} (x - \frac{1}{2}ct)$$

$$\text{Las líneas coordenadas son } ct'=0 \Rightarrow x=2(ct)$$

$$x'=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}(ct)$$

$$\text{Determinemos las coordenadas de A: } \left. \begin{array}{l} ct - \beta x = 0 \\ x^2 - c^2 t^2 = 1 \end{array} \right\} \quad x = \frac{1}{1-\beta^2} \quad ct = \frac{\beta}{1-\beta^2}$$

$$OA = OB = \sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}} = \sqrt{\frac{5}{3}} = 1.290994449 \quad (\text{Unidad sobre } x' \text{ y } ct')$$

$$\text{Coordenadas de B: } (ct=1, x=3) \quad \text{entonces } ct' = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -0.577350269$$

$$x' = +\frac{5}{\sqrt{3}} = +2.886751345$$

Contracción de longitudes. Supongamos un observador S y según OX una varilla en reposo. En un instante t mide las posiciones extremas de la varilla y encuentra (t, x_2) y (t, x_1) y entonces su longitud es $L_0 \equiv x_2 - x_1 > 0$, ¿qué longitud encuentra S'?. En un instante t' mide las longitudes extremas y encuentra

$$L = x'_2(t') - x'_1(t')$$

$$x_2 = \frac{x'_2(t') + vt'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad x_1 = \frac{x'_1(t') + vt'}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \Rightarrow$$

$$L = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} L_0 \quad (1)$$

El observador en movimiento ve la longitud de la varilla acortada.

Representación gráfica: Imaginemos la varilla CD de $L_0 = 2$ sus extremos en el transcurso del tiempo recorren las trayectorias $x=0$ y $x=2$. Al medir su longitud S' encuentra

$$L = \frac{DE}{\sqrt{1-\beta^2}} = \sqrt{\frac{1-\beta^2}{1+\beta^2}} \sqrt{L_0^2 + \beta^2 L_0^2} = \sqrt{1-\beta^2} L_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} L_0 = 1.732050808$$

Dilatación de tiempos: Supongamos que un reloj está en reposo en S y que medimos con él un intervalo de tiempo (t_2, x) , $(t_1, x) \Rightarrow \tau = t_2 - t_1 > 0$. Este es el llamado tiempo propio. ¿qué intervalo de tiempo mide S'?

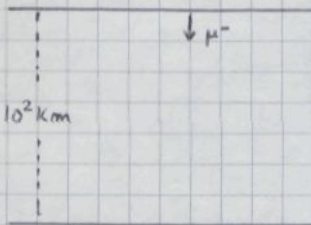
$$\tau' = t'_2 - t'_1 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \left\{ \left(t_2 - \frac{v}{c^2}x \right) - \left(t_1 - \frac{v}{c^2}x \right) \right\} \Rightarrow \tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (2)$$

El observador S' mide un intervalo de tiempo mayor.

Representación gráfica: El reloj en reposo recorre la línea $x = ct$. Tomemos sobre ella un tiempo $FG = \tau = 1$. Entonces el intervalo de tiempo medido por S' es

$$\tau' = \frac{HF}{\sqrt{1-\beta^2}} = \sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}} \sqrt{\frac{\beta^2}{(1-\beta^2)^2} + \left(1 + \frac{\beta^2}{1-\beta^2}\right)^2} = \frac{\tau}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1.154700538$$

Ejemplo: La radiación cósmica primaria produce μ^- en la parte más alta de la atmósfera, es decir a unos 100 Km sobre la superficie de la Tierra. La vida media del μ^- es $\tau = 2 \times 10^{-6}$ s y su masa $m = 0.1$ GeV. Supongamos que su energía es $E = 10$ GeV entonces



$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = E \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = 100$$

Una gran parte de estos muones se pueden observar en la superficie terrestre. ¿Se puede entender esto?

Física clásica: La velocidad es $v \approx c$ y por tanto para recorrer 10^2 Km necesitan un tiempo $t \approx \frac{100}{300.000}$ s $= 3.3 \times 10^{-4}$ s. Si N_0 es el número de muones producidos el número que llegan a la Tierra sin desintegrarse es

$$N = N_0 e^{-t/\tau} = N_0 \exp \left\{ - \frac{3.3 \times 10^{-4}}{2 \times 10^{-6}} \right\} \Rightarrow N = 2.2 \times 10^{-72} N_0$$

y por tanto, contra la evidencia experimental, no llegan prácticamente muones a la superficie terrestre.

Física relativista:

i) Observador terrestre: La vida media del muón es $\tau = \frac{2 \times 10^{-6}}{1/100}$ s $= 2 \times 10^{-4}$ s.

$$\text{y } N = N_0 \exp \left(- 3.3 \times 10^{-4} / 2 \times 10^{-4} \right) \Rightarrow N = N_0 \exp (-1.65) \Rightarrow N = 0.1920 N_0$$

ii) Observador viajero con el muon: Debe recorrer una distancia $L = \frac{L_0}{100} = 1$ Km y tardará en

$$\text{hacerlo } t = \frac{1}{300.000} = 3.3 \times 10^{-6} \text{ s. y por tanto } N = N_0 \exp \left(- 3.3 \times 10^{-6} / 2 \times 10^{-6} \right) \Rightarrow$$

$$N = N_0 \exp (-1.65) \Rightarrow N = 0.1920 N_0.$$

Velocidad: Queremos discutir de nuevo el concepto de velocidad para poner énfasis, una vez más, de la necesidad de cuidar mucho el lenguaje en relatividad. Consideremos un tren en movimiento a lo largo de una línea férrea rectilínea, a lo largo de la cual hay indicadores de tiempo y distancias. ¿Cómo puede el viajero del tren medir la velocidad?

1) Para medir la velocidad del tren un pasajero puede usar un procedimiento externo midiendo los postes indicadores de la distancia que hay en la vía férrea y los

35/003

relojes situados en estos. Así determina que su velocidad es

$$v \equiv \frac{dx}{dt} \quad (1)$$

2) Puede usar un procedimiento mixto midiendo las distancias en los postes de la vía y los tiempos en su propio reloj. Así determina lo que llamaremos "celeridad"

$$w \equiv \frac{dx}{d\tau} \quad (2)$$

Como

$$d\tau = \sqrt{1 - v^2/c^2} dt \quad \Rightarrow \quad w = \frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (3)$$

3) Puede usar un procedimiento totalmente interno. Para ello el viajero debe llevar un acelerómetro y medir la aceleración como función del tiempo propio: $a(\tau)$. Entonces una misma cantidad que fija la rapidez con que se mueve es

$$\varphi - \varphi' = \int_{\tau'}^{\tau} d\tau'' a(\tau'') \quad (4)$$

Nótese que al ser la medida totalmente interna los límites que medimos son cambios en φ . Llamaremos a φ rapidez (rapidity). Este es el procedimiento que se usa en los cohetes para medir su velocidad. Veamos como esta relacionada esta cantidad con v . Calculemos en primer lugar el incremento de velocidad dado en el sistema de referencia del tren debido a un cambio $v \rightarrow v + dv$ en el sistema de la vía. De acuerdo con la ley de suma de velocidades

$$dv_0 = \frac{(v + dv) - v}{1 - \frac{(v + dv)v}{c^2}} = \frac{dv}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad \Rightarrow \quad a(\tau) \equiv \frac{dv_0}{d\tau} = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{dv}{d\tau}$$

Eligiendo de forma arbitraria la constante que aparece en la definición de rapidez

$$\varphi = \int_0^v dv' \frac{1}{1 - \frac{v'^2}{c^2}} \quad \Rightarrow \quad \varphi = c \operatorname{arctanh} \frac{v}{c} \quad (5)$$

i) Si $v \ll c \Rightarrow v = w = \varphi$

ii) En el caso general las tres son distintas

v : velocidad usual introducida por Einstein

w : en este caso $p = mw$

φ : Es aditiva $\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi$, esto es la ley de suma es la galileana.

iii) Noten que ni w ni φ están acotadas. Para ellas, c es una unidad natural y no un límite.

35/003

$$p^\mu \equiv (E/c, \vec{p}) \quad , \quad p^\mu p_\mu = m^2 c^4 \quad , \quad E = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 \vec{p}^2} \quad (9)$$

Fuerzas: Por analogía con la mecánica definimos la ley fundamental del movimiento como

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} \vec{p} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{F} = \frac{d}{dt} \frac{m \vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (10)$$

$$\vec{F} = \frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{m}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} \frac{1}{c^2} \left(\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \right) \vec{v} \quad (11)$$

1) En general $\vec{F}$ no es paralelo a la aceleración $\vec{a} = d\vec{v}/dt$. $\vec{F}$ y $\vec{a}$ son paralelos si y sólo si:

$$\vec{F} \parallel \vec{a} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v} \parallel \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \vee \quad \vec{v} \perp \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (12)$$

$$\text{Si } \vec{v} \parallel \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = \frac{m}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (13)$$

$$\text{Si } \vec{v} \perp \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = \frac{m}{(1-v^2/c^2)^{1/2}} \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (14)$$

$$\text{Notar además que si } \vec{v} \perp \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \vec{v}^2 = 0 \Rightarrow \vec{v}^2 = \text{cte} \quad \text{y} \quad \vec{F} \cdot \vec{v} = 0.$$

Fourfuerzas: form vector contravariante

$$f^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} \quad (15)$$

$$1) \quad \vec{f} = \frac{d\vec{p}}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \vec{F}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad f^0 &= \frac{dp^0}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{d}{dt} \left(\frac{E}{c} \right) = \frac{1}{c} (1-v^2/c^2)^{-1/2} \frac{d}{dt} (m^2 c^4 + c^2 \vec{p}^2)^{1/2} = \\ &= \frac{1}{c} (1-v^2/c^2)^{-1/2} \frac{1}{2} (m^2 c^4 + c^2 \vec{p}^2)^{-1/2} 2c^2 \vec{p} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{1}{E} \vec{p} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{F}}{c \sqrt{1-v^2/c^2}} \end{aligned}$$

$$f^\mu = \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{F}}{c \sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{\vec{F}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) \quad (16)$$

Ejemplo: Consideremos una partícula de masa m bajo la acción de una fuerza constante

$\vec{F}$, entonces queremos determinar la trayectoria

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = \vec{p}_0 + \vec{F} t \quad \text{donde} \quad \vec{p}_0 = \vec{p}(0)$$

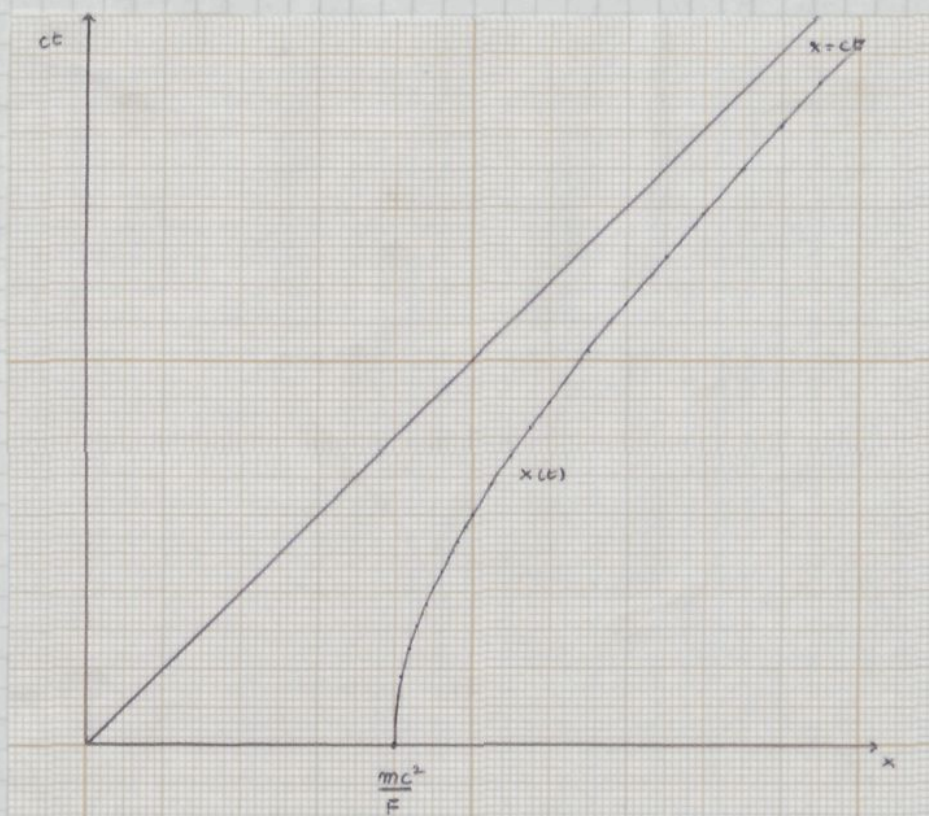
$$\text{Supongamos que } \vec{p}_0 > 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = \vec{F} t \quad \Rightarrow \quad \frac{m \vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \vec{F} t \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v} = c \frac{t \vec{F}}{\sqrt{t^2 \vec{F}^2 + m^2 c^2}} \quad \text{y en tanto} \quad v \rightarrow c \quad \text{cuando} \quad t \rightarrow \infty$$

Entonces

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \frac{c}{\vec{F}^2} \sqrt{m^2 c^2 + \vec{F}^2 t^2} \vec{F}$$

(1)



Consideremos

$$\vec{x}(0) = \frac{m c^2}{F^2} \vec{F}$$

entonces

$$\vec{x} = \frac{c}{F^2} \sqrt{m^2 c^2 + \vec{F}^2 t^2} \vec{F}$$

y la trayectoria es

$$\vec{x}^2 - c^2 t^2 = \frac{m^2 c^4}{F^2}$$

Si $\vec{F}^2 t^2 \ll m^2 c^2$ entonces

$$\vec{x} = \frac{m c^2}{F^2} \vec{F} + \frac{1}{2} \frac{\vec{F}}{m} t^2 + \dots$$

1. ¿Con qué velocidad se ha de mover un cohete para que su longitud medida en el sistema de referencia en reposo sea la mitad de la longitud medida por un pasajero dentro del cohete?

$$L = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} L_0 \Rightarrow \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = \frac{3}{4}, \quad v = \frac{\sqrt{3}}{2} c$$

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2} c = 0.866025404 c$$

2. En un cierto sistema de referencia se observa una partícula que tarda $T = 2$ s para recorrer $L = 5$ m a lo largo del eje Ox . ¿Cuánto tiempo empleará según un observador situado en un referencial paralelo al primero que se desplaza a $v = 0.8c$ en la dirección de Ox ?

$$P_1 = (0, 0, 0, 0), \quad P_2 = (cT, L, 0, 0)$$

En el nuevo referencial las coordenadas son

$$P_1 = (0, 0, 0, 0), \quad P_2 = \left(\frac{cT - \frac{v}{c}L}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{L - \frac{v}{c}cT}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, 0, 0 \right)$$

y por tanto

$$T' = \frac{T - \frac{v}{c^2}L}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$T' = \frac{1}{\sqrt{1 - 0.8^2}} \left[2 - 0.8 \frac{5}{3 \times 10^8} \right] s = 3.333 \text{ s.}$$

3. Dos naves espaciales, cada una de 100 m de longitudes cuando se miden en reposo, se mueven la una hacia la otra. La velocidad de ambas medidas desde la Tierra es $v = 0.8c$. 1) ¿Qué longitud tiene cada nave medida por un observador en la Tierra? 2) ¿Qué velocidad encuentra para una nave un observador situado en la otra? 3) ¿Qué longitud tiene una de las naves medida desde la otra? 4) En un cierto instante $t=0$, en los relojes terrestres, están una junto a otra las partes delanteras de las dos naves y es cuando empiezan a cruzarse. ¿En qué instante, en los relojes terrestres, están sus partes traseras la una junto a la otra?

$$1) L = L_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad L = 100 \text{ m} \sqrt{1 - 0.8^2} = 60 \text{ m}, \quad L = 60 \text{ m}$$

35/003

$$2) v = \frac{0.8c + 0.8c}{1 + 0.8^2} = v = \frac{40}{41} c = 0.975610 c$$

$$3) L' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{40^2}{41^2}}} 100 \text{ m} = \frac{41}{9} 100 \text{ m} = \frac{4100}{9} \text{ m} \Rightarrow L' = \frac{900}{41} \text{ m} = 21.9512 \text{ m}$$

$$4) \tau = \frac{L}{0.8c} = \frac{60 \text{ m}}{0.8c} \Rightarrow \tau = 2.5 \times 10^{-7} \text{ s.}$$

4. ¿Cuánta energía se necesita para poder arrancar uno de los neutrones del ^3H y producir ^2H más un neutrón? $M_m = 939.573 \text{ MeV}/c^2$, $M_{^3\text{H}} = 2808.944 \text{ MeV}/c^2$

$$M_{^2\text{H}} = 1875.628 \text{ MeV}/c^2$$

$$(M_{^2\text{H}} + M_m - M_{^3\text{H}}) c^2 = 6.257 \text{ MeV}$$

5. La vida media del π^+ es $2.60 \times 10^{-8} \text{ s}$. Un haz de estas partículas tiene una velocidad de $0.95c$. 1) ¿Cuánto será su vida media medida en el sistema laboratorio? 2) ¿Qué distancia pueden recorrer antes de que se hayan desintegrado la mitad de las mismas?

$$\tau_{\text{lab}} = \frac{\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \Rightarrow \tau_{\text{lab}} = \frac{2.60 \times 10^{-8} \text{ s}}{\sqrt{1 - 0.95^2}} = 8.33 \times 10^{-8} \text{ s.}$$

$$N = N_0 e^{-t/\tau} = e^{-t/\tau_{\text{lab}}} = \frac{1}{2} \quad t = \tau_{\text{lab}} \ln 2$$

$$L = \tau_{\text{lab}} \ln 2 \times 0.95c \Rightarrow L = 1.645 \times 10^3 \text{ cm.}$$

6. Una varilla de longitud 2 m forma un ángulo de 30° con el eje Ox y se desplaza a $0.9c$ en la dirección del mismo. Calcular la longitud de la varilla y el ángulo que forma con el eje para un observador en reposo sobre él.

$$x = 2 \text{ m} \times \cos 30^\circ = \sqrt{3} \text{ m}$$

$$x' = \sqrt{1 - 0.9^2} \sqrt{3} \text{ m} = \sqrt{0.57} \text{ m} = 0.754983 \text{ m}$$

$$y = 2 \text{ m} \times \sin 30^\circ = 1 \text{ m}$$

$$y' = 1 \text{ m}$$

$$\tan \theta' = \frac{1}{\sqrt{0.57}} = 1.324532$$

$$\Rightarrow \theta' = 0.924113 \text{ rad} = 52^\circ 56' 52.08''$$

7. Un núcleo radiactivo se mueve con una velocidad $v = 0.1c$, medida en el sistema laboratorio, cuando emite una partícula β con una velocidad $0.9c$ respecto al sistema de

condiciones en que el núcleo está en reposo. ¿Cuál será la velocidad y dirección de la partícula β respecto al sistema laboratorio si se emite 1) En la misma dirección del núcleo, 2) En dirección perpendicular al núcleo?

$$1) \quad v_x = \frac{v' + V}{1 + \frac{v'V}{c^2}} = \frac{1 \cdot c}{1 + 0.9} = \frac{100}{109} c \quad \Rightarrow \quad v_x = 0.917531c$$

$$2) \quad v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}} = 0.1c, \quad v_y = \frac{v'_y}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}} \sqrt{1 - V^2/c^2} = 0.9c \sqrt{0.99} = 0.895687c$$

$$\tan \theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{0.9 \sqrt{0.99}}{0.1} \quad \tan \theta = 9 \sqrt{0.99} = 8.956882$$

$$\theta = 1.459586 \text{ rad} = 83^\circ 37' 41.27''$$

8. Para un observador A los relámpagos se producen en puntos separados 1 km, con un intervalo de tiempo de 1 μ s. ¿Con qué velocidad debe moverse otro observador B, respecto a A, para que los dos relámpagos sean simultáneos en el tiempo de B?

$$(t_2 - t_1) - \frac{V}{c^2} (x_2 - x_1) = 0 \quad (t_2 - t_1) = \frac{V}{c^2} (x_2 - x_1) \quad V = \frac{c^2}{x_2 - x_1} (t_2 - t_1)$$

$$\frac{V}{c} = \frac{c(t_2 - t_1)}{x_2 - x_1} = \frac{3 \times 10^{10}}{1 \times 10^5} 1 \times 10^{-6}$$

$$\frac{V}{c} = 0.3$$

9. A las 12 h del mediodía un cohete espacial pasa frente a un punto de la Tierra con una velocidad $0.8c$. Los observadores de la nave y de la Tierra están de acuerdo en que, efectivamente, es mediodía. 1) A las 12.30 h, según un reloj situado en la nave, ¿está por delante de una estación interplanetaria que está fija en relación a la Tierra? ¿Qué hora es en la estación? 2) ¿A qué distancia de la Tierra (en coordenadas terrestres) se encuentra la estación? 3) A las 12.30 h, hora de la nave, se establece comunicación luminosa con la Tierra desde la nave ¿cuánto (en tiempo de la Tierra) se recibe esta señal? 4) La estación terrestre contesta inmediatamente ¿informando (hora de la nave) se recibirá la respuesta?

1) El lapso de tiempo en los relojes de la estación interplanetaria es $t = 30 \text{ m} / \sqrt{1 - 0.64} = 50 \text{ m}$
La hora en la estación es $12^{\text{h}} 50^{\text{m}}$.

35/003

2) La distancia de la Tierra a la estación es $L = 0.8c \times 50m = 7.195 \times 10^{13} \text{ m}$

3) La señal emitida a las $12^h 50^m$ (hora Tierra) tarda en llegar a la nave $L/c = 240^m$ y por tanto es recibida en la Tierra a las $13^h 30^m$ (hora Tierra).

4) La Tierra emite la señal a las $13^h 30^m$ y en este momento la nave se encuentra ya a una distancia $L_1 = 0.8c \times 90^m = 1.2951 \times 10^{14} \text{ m}$ y la señal emitida por la Tierra tarda en llegar a la nave $L_1 + 0.8ct = ct \Rightarrow 0.2ct = L_1 = t = \frac{5L_1}{c} = 360^m$ y por tanto el reloj terrestre marca $19^h 30^m$ y el de la nave $12^h + 7.5h \sqrt{1-0.64} = 16^h 30^m$.

11. Nuestra galaxia mide, aproximadamente, de extremo a extremo 10^5 años-luz y las partículas cósmicas de mayor energía tienen $E \approx 10^{19} \text{ eV}$. ¿Cuánto tardaría un protón que posea esta energía en atravesar la galaxia si el tiempo se mide en el sistema en reposo
1) en la galaxia, 2) en el protón?

$$1 \text{ año-luz} = 9.4609 \times 10^{17} \text{ s}$$

La velocidad del protón v es
$$E_0 = \frac{Mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{10^{19} \text{ GeV}}{0.9382796 \text{ GeV}} = 1.0658 \times 10^{10}$$

1) Como $v \approx c$ el tiempo medido desde la galaxia son 10^5 años

2) Desde el protón $10^5 \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 9.3828 \times 10^{-6} \text{ años} = 296.15$

12. Una regla tiene una longitud propia L y forma un ángulo θ con el eje x en el sistema S . Demuestra que el ángulo formado por el eje x' , del sistema S' , que se mueve a lo largo del eje x con velocidad V es θ' dado por $\tan \theta' = \gamma \tan \theta$, y que la longitud de la regla para S' es

$$L' = L \left[(\cos \theta / \gamma)^2 + \sin^2 \theta \right]^{1/2}$$

En el sistema S : $x = L \cos \theta$, $y = L \sin \theta$ $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$

En el sistema S' $x' = \frac{L}{\gamma} \cos \theta$, $y' = L \sin \theta$

$$\tan \theta' = \frac{L}{L/\gamma} \tan \theta \Rightarrow \tan \theta' = \gamma \tan \theta$$

$$L' = L \left\{ (\cos \theta / \gamma)^2 + \sin^2 \theta \right\}^{1/2}$$

13. Algunas veces se usa, para medir la velocidad, la rapidez definida como

$$\varphi = c \operatorname{arctanh} \frac{v}{c}$$

Demuestra que la ley de composición de rapidez es $\varphi_{12} = \varphi_1 + \varphi_2$

Sabemos que
$$v_{12} = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}$$

$$\varphi_{12} = c \operatorname{arctanh} \frac{v_{12}}{c} = c \operatorname{arctanh} \frac{v_1/c + v_2/c}{1 + \frac{v_1}{c} \cdot \frac{v_2}{c}} = c \left(\operatorname{arctanh} \frac{v_1}{c} + \operatorname{arctanh} \frac{v_2}{c} \right) = \varphi_1 + \varphi_2$$

14. Demuestra que una transformación de Lorentz se puede escribir

$$x' = \cosh \psi \ x - \sinh \psi \ (ct) \quad , \quad ct' = -\sinh \psi \ x + \cosh \psi \ (ct)$$

$$x' = \frac{x - (V/c)(ct)}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} \quad , \quad ct' = \frac{ct - (V/c)x}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}$$

$$\cosh \psi = \frac{1}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} \quad , \quad \sinh \psi = \frac{(V/c)}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} \quad \Rightarrow \quad \cosh^2 \psi - \sinh^2 \psi = 1.$$

15. En un vagón de tren se ha colocado una bombilla en el techo y un espejo en el suelo. El vagón se mueve con una velocidad V . Calcular el tiempo necesario para que un rayo de luz que parte de la bombilla, se refleja en el espejo y vuelve a la bombilla para 1) Un observador dentro del vagón 2) Un observador en el andén.

Sea H la altura del vagón

1)
$$\tau = \frac{2H}{c}$$

2)
$$T = \frac{\tau}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{2H}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

16. Una radiación γ de energía $E = 2.620 \text{ MeV}$ provoca la ruptura de un deuterio, en efecto, $\gamma + d \rightarrow n + p$. Las masas del deuterio y del protón son

$$M_d = 1875.63 \text{ MeV}/c^2$$

$$M_p = 938.28 \text{ MeV}/c^2$$

Calcular la masa del neutrón sabiendo que las energías cinéticas del neutrón y del protón son ambas de 0.225 MeV .

35/003

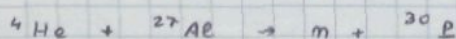
$$2.620 + 1875.63 = 938.28 + 0.225 + M_p c^2 + 0.225 \Rightarrow$$

$$M_n = 939.52 \text{ MeV } c^2$$

17. Demuestra, usando las leyes de conservación de energía y momento, que en el vacío es imposible la reacción $e^+ + e^- \rightarrow \gamma$

$$\begin{array}{l} \vec{p} = p\hat{y} \\ e^+ \quad e^- \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} p = p_y \\ m^2 c^4 + \{m^2 c^4 + c^2 p^2\} = c^2 p_y^2 \end{array} \right\} \text{ que no tiene solución}$$

18. Fósforo radiactivo puede producirse mediante



y las masas son

$$M({}^4\text{He}) = 4.002603 \text{ u a m } c^2 \quad M(\text{Al}) = 26.981532 \text{ u a m } c^2$$

$$M(m) = 1.0086653 \text{ u a m } c^2 \quad M(\text{P}) = 29.978353 \text{ u a m } c^2$$

$$1 \text{ u a m} = 931.5016 (26) \text{ MeV}$$

Suponiendo el ${}^{27}\text{Al}$ en reposo ¿cuál es la menor energía cinética de las partículas α para que sea posible la reacción?

$$S = (p_1 + p_2)^2 = M^2({}^4\text{He})c^4 + M^2(\text{Al})c^4 + 2E M(\text{Al})c^2 \quad E = \text{energía } \alpha$$

$$S = (M(m)c^2 + M(\text{P})c^2)^2$$

$$E = \frac{1}{2 M(\text{Al})c^2} [(M(m)c^2 + M(\text{P})c^2)^2 - M^2({}^4\text{He})c^4 - M^2(\text{Al})c^4]$$

$$E = 4.0054142 \text{ MeV}$$

$$K = E - M({}^4\text{He})c^2 \Rightarrow$$

$$K = 0.0033 \text{ u a m}$$

$$K = 3.08 \text{ MeV}$$

19. Sabiendo que existen ondas electromagnéticas de frecuencia ν , determina una cota a la masa del fotón

Sea m la masa del fotón, entonces $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$, siendo p su momento. Además $E = h\nu$ por lo cual $h\nu = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \geq mc^2$

$$m \leq \frac{h\nu}{c^2}$$

$$m \leq 4.1357 \times 10^{-21} \frac{\text{MeV}}{c^2} \text{ v s.}$$

Para los rayos de radio $\lambda \approx 10^2 \text{ m} \Rightarrow v = 3 \times 10^8 \text{ s}^{-1} \Rightarrow m \leq 1.2 \times 10^{-12} \text{ MeV.}$

20. ¿Cuánto tiempo debe volar un avión a la velocidad de 3600 km/h para que el reloj de su piloto marque un segundo menos que el reloj del aeropuerto, teniendo en cuenta que fueran sincronizados a la salida?

Sea Δt y $\Delta t'$ los tiempos del aeropuerto y del piloto

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Sea T el retraso producido $\Delta t = \frac{\Delta t - T}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

El tiempo de vuelo debe ser

$$\Delta t = \frac{T}{1 - \sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Como $v \ll c$ entonces

$$\Delta t \approx 2 \frac{c^2}{v^2} T$$

$v = 1 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}$ $c = 3 \times 10^{10} \text{ cm s}^{-1}$ $T = 1 \text{ s}$ $\Delta t = 1.8 \times 10^{11} \text{ s} \approx 5705 \text{ años}$

21. Un objeto con un movimiento acelerado se observa desde dos sistemas inerciales O y O' . Los ejes Ox y $O'x'$ son colineales con la trayectoria del objeto. O' tiene con respecto a O una velocidad V en la misma dirección. Encontrar la relación entre aceleraciones

$$\left. \begin{aligned} t' &= \frac{t - (V/c^2)x}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} \\ x' &= \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} \end{aligned} \right\}$$

$$a' = \frac{d^2 x'}{dt'^2} = \frac{d}{dt'} \frac{dx'}{dt'} = \frac{dv'}{dt'}$$

$$\text{Recordemos } v' = \frac{dx'}{dt'}, \frac{dx'}{dt} \frac{dt}{dt'} = \frac{v - V}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \frac{1}{1 - Vv/c^2} = \frac{v - V}{1 - Vv/c^2}$$

35/003

$$a' = \frac{d}{dt'} \frac{v-v}{1-vv/c^2} = \frac{d}{dt} \frac{v-v}{1-vv/c^2} \frac{dt}{dt'} = \frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-vv/c^2} \left\{ \frac{a}{1-vv/c^2} + \frac{av/c^2(v-v)}{(1-vv/c^2)^2} \right\}$$

$$= \frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{(1-vv/c^2)^3} a \left\{ 1 - \frac{vv}{c^2} + \frac{vv}{c^2} - \frac{v^2}{c^2} \right\}$$

$$a' = a \frac{(1-v^2/c^2)^{3/2}}{(1-vv/c^2)^3}$$

22. El sistema inercial O' se mueve con respecto al O con una velocidad V según Ox . Se supone que

$$x' = \gamma(x - vt)$$

$$y' = y \quad z' = z$$

$$t' = \gamma(t + \delta)$$

Determinar γ y δ de la invariancia de $s^2 = R^2 t^2 - \vec{x}^2$. γ es constante y $\delta = \delta(x)$.

$$c^2 t'^2 - \vec{x}'^2 = c^2 t^2 - \vec{x}^2 \quad c^2 \gamma^2 (t^2 + 2\delta t + \delta^2) - \gamma^2 (x^2 - 2Vxt + v^2 t^2) = c^2 t^2 - x^2$$

$$(c^2 \gamma^2 - \gamma^2 v^2 - c^2) t^2 + (2c^2 \gamma^2 \delta + 2\gamma^2 x V) t + c^2 \gamma^2 \delta^2 - \gamma^2 x^2 + x^2 = 0 \quad \forall t.$$

a donde

$$c^2 \gamma^2 - \gamma^2 v^2 - c^2 = 0$$

$$\gamma^2 (c^2 - v^2) = c^2$$

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - v^2/c^2}$$

$$\gamma = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

y por continuidad

$$\gamma = + \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$2c^2 \gamma^2 \delta + 2\gamma^2 x V = 0$$

$$\delta = - \frac{V}{c^2} x$$

y debe también cumplirse $c^2 \gamma^2 \delta^2 - \gamma^2 x^2 + x^2 = 0$ En efecto $c^2 \gamma^2 \delta^2 - \gamma^2 x^2 + x^2 =$

$$= x^2 \left(c^2 \gamma^2 \frac{V^2}{c^4} - \gamma^2 + 1 \right) = x^2 \gamma^2 \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 + \frac{1}{\gamma^2} \right) = 0$$

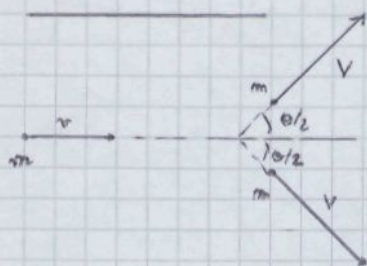
Luego

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$y' = y \quad z' = z$$

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

23. Una partícula de masa m tiene energía cinética relativista K y choca elásticamente con otra partícula de igual masa que está en reposo. Cada partícula sale formando un ángulo $\theta/2$ con la dirección incidente. Calcular θ .



$$mc^2 + mc^2 + K = 2 \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p^2}$$

$$p = 2 P \cos \theta/2$$

donde p y P son los momentos asociados con v y V de Gam

$$K + mc^2 = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p^2} \Rightarrow K^2 + 2mc^2 K + m^2 c^4 = m^2 c^4 + c^2 p^2 \Rightarrow$$

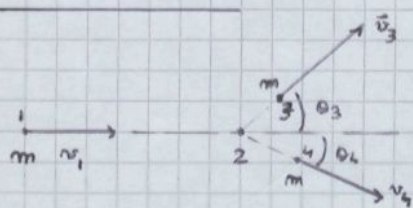
$$c^2 p^2 = K(K + 2mc^2)$$

$$2mc^2 + K = 2 \sqrt{m^2 c^4 + c^2 P^2} \Rightarrow 4m^2 c^4 + 4mc^2 K + K^2 = 4m^2 c^4 + 4P^2 c^2 \Rightarrow$$

$$4c^2 P^2 = K(K + 4mc^2)$$

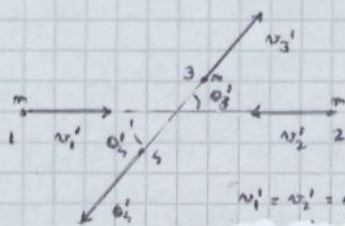
$$\text{De equ: } \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{P^2}{4P^2} = \frac{K + 2mc^2}{K + 4mc^2} \Rightarrow \cos \theta = \frac{K}{K + 4mc^2}$$

24. Una partícula de masa m , en movimiento relativista, choca con otra de igual masa que está en reposo. Probar que las trayectorias de las dos partículas salientes forman entre sí un ángulo que siempre es $\leq \pi/2$.



S.L.

$$V = \frac{v_1}{1 + \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}$$



$$v_1' = v_2' = v_3' = v_4' = v', \quad \theta_3' = \theta_4' = \theta'$$

S.C.M.

La V se determina exigiendo que $\frac{v_1' - V}{1 - \frac{Vv_1}{c^2}} = - \frac{v_2' - V}{1 - \frac{Vv_2}{c^2}}$ con $v_2 = 0$

En el sistema CM θ' puede tomar cualquier valor,

$$\vec{v}_3' = (v' \cos \theta', v' \sin \theta', 0) \quad \vec{v}_4' = (-v' \cos \theta', -v' \sin \theta', 0)$$

entonces

$$\vec{v}_3 = \left(\frac{v' \cos \theta' + V}{1 + \frac{Vv' \cos \theta'}{c^2}}, v' \sin \theta' \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + \frac{Vv' \cos \theta'}{c^2}}, 0 \right)$$

$$\vec{v}_4 = \left(\frac{-v' \cos \theta' + V}{1 - \frac{Vv' \cos \theta'}{c^2}}, -v' \sin \theta' \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - \frac{Vv' \cos \theta'}{c^2}}, 0 \right)$$

35/003

Entonces si $\phi \equiv \theta_3 + \theta_4$

$$\vec{v}_3 \cdot \vec{v}_4 = |v_3| |v_4| \cos \phi$$

$$\Rightarrow \cos \phi = \frac{\vec{v}_3 \cdot \vec{v}_4}{|v_3| |v_4|}$$

Además $v'_1 = \frac{v_1 - v}{1 - \frac{v v_1}{c^2}} = v$

$$|v_3| = \frac{1}{1 + \frac{v^2}{c^2} \cos \theta'} \left[(v \cos \theta' + v)^2 + v^2 \sin^2 \theta' \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \right]^{1/2} = \frac{1}{1 + \frac{v^2}{c^2} \cos \theta'} \left[2v^2 + 2v^2 \cos \theta' - \frac{v^4}{c^2} \sin^2 \theta' \right]^{1/2}$$

$$|v_4| = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2} \cos \theta'} \left[(-v \cos \theta' + v)^2 + v^2 \sin^2 \theta' \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \right]^{1/2} = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2} \cos \theta'} \left[2v^2 - 2v^2 \cos \theta' - \frac{v^4}{c^2} \sin^2 \theta' \right]^{1/2}$$

$$\vec{v}_3 \cdot \vec{v}_4 = \frac{1}{1 - \frac{v^4}{c^4} \cos^2 \theta'} \left[(v + v \cos \theta') (v - v \cos \theta') + v^2 \sin^2 \theta' \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \right] = \frac{1}{1 - \frac{v^4}{c^4} \cos^2 \theta'} \frac{v^4}{c^2}$$

$$\cos \phi = \frac{c^2}{v^4} \left[2v^2 + 2v^2 \cos \theta' - \frac{v^4}{c^2} \sin^2 \theta' \right]^{1/2} \left[2v^2 - 2v^2 \cos \theta' - \frac{v^4}{c^2} \sin^2 \theta' \right]^{1/2}$$

$$\cos \phi = \frac{c^2}{v^2} \left[2 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta' + 2 \cos \theta' \right]^{1/2} \left[2 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta' - 2 \cos \theta' \right]^{1/2}$$

$$\cos \phi = \frac{c^2}{v^2} \left\{ \left(2 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta' \right)^2 - 4 \cos^2 \theta' \right\}^{1/2} > 0 \Rightarrow \phi \leq \pi/2$$

PRIMERA LEY DE LA TERMODINÁMICA.

La Termodinámica estudia las transferencias de energía con interacción de la temperatura entre los cuerpos macroscópicos, sin tener en cuenta su composición microscópica.

A. Einstein: "... la gran impresión que me causó la termodinámica clásica. Es la única teoría física de contenido universal sobre la que estoy convencido de que, dentro del marco de aplicabilidad de sus conceptos básicos, jamás será superada."

A. S. Eddington: "La ley del crecimiento de la entropía ... ocupa, en mi opinión, un puesto supremo entre las leyes de la naturaleza. Si alguien te indica que tu modesta teoría del Universo no está de acuerdo con las ecuaciones de Maxwell, peor para éstas ... Pero si se demuestra que tu teoría va en contra de la segura ley de la Termodinámica, pierde toda esperanza, su único recurso es colapsar en la más profunda humillación."

Las leyes de la Termodinámica, que como las de Newton del movimiento, son elegantes y compactas generalizaciones de resultados experimentales, son por tanto, generales e independientes de cualquier hipótesis hecha en el enfoque microscópico. De hecho, la mayor parte de la termodinámica se desarrolló antes de que el modelo molecular de la materia fuese por completo aceptado.

En el enfoque macroscópico, característico de la termodinámica, un sistema viene descrito sólo por unas cuantas variables macroscópicas tales como la presión, temperatura, volumen, etc. El número mínimo de variables macroscópicas necesarias para describir un sistema depende del tipo de sistema, pero es siempre un número pequeño. Normalmente se debe especificar la composición (si el sistema no es homogéneo, por ejemplo una mezcla de dos o más gases), la masa de cada parte, variables como la presión y el volumen, etc. Si nos restringimos al estudio de sistemas homogéneos de masa constante entonces se necesitan, en los casos que consideraremos aquí, sólo dos variables P y V .

Cuando las propiedades macroscópicas de un sistema aislado se hacen constantes con respecto al tiempo, el sistema se dice que se halla en equilibrio consigo mismo. Sólo en un sistema en equilibrio podemos hablar de $T, P, V, \dots$

¿Cuándo P y V especifican el estado macroscópico de un sistema? Supongamos, por

35/003

ejemplo, un gas que en un instante tiene P_0 y V_0 y medimos entonces otras propiedades macroscópicas, por ejemplo la temperatura que resulta ser T_0 . Sin cambiar la masa del gas hagamos cambiar de forma arbitraria P y V y al final logremos que vuelvan a ser P_0 y V_0 . Si ahora todas las cantidades macroscópicas vuelven a tener los valores iniciales, entonces P y V especifican el estado macroscópico.

Variables de estado: Son variables macroscópicas que dependen únicamente de las variables macroscópicas que especifican el sistema.

Pared adiabática: Decimos que dos sistemas están separados por una pared adiabática si podemos variar arbitrariamente las variables de todo uno de ellos, sin que se produzca ningún efecto sobre el otro. El nombre vulgar de una pared adiabática es una pared perfectamente aislada. Los asbestos gruesos son aproximadamente paredes adiabáticas.

Pared diatérmica: Si los dos sistemas se conectan por una pared diatérmica, una variación de una de las variables de un sistema influirá sobre las variables del otro. El nombre vulgar es una pared hecha de un conductor perfecto del calor. Dos sistemas conectados por una pared diatérmica se dice que están en contacto térmico.

Sistemas en equilibrio térmico: Supongamos que dos sistemas, originalmente separados, se ponen en contacto por medio de una pared diatérmica y se aíslan del exterior mediante paredes adiabáticas. En general, cuando los dos sistemas se ponen en contacto térmico, las variables termodinámicas cambian, con respecto a sus valores originales. Cuando se llegue a una situación de equilibrio se dice que "los dos sistemas se encuentran en equilibrio térmico el uno con el otro". No's aun, se dice que esto es así aún cuando los sistemas no estén en contacto, si al ponerlos en contacto estuvieran en equilibrio térmico.

Ley Cero de la Termodinámica: "Si dos sistemas se encuentran en equilibrio térmico con un tercer sistema, los dos sistemas iniciales se encuentran en equilibrio entre sí". El principio cero de la termodinámica, que es un principio experimental, demuestra que la relación entre dos sistemas que se encuentran en equilibrio térmico es una relación transitiva.

Temperatura: Dos sistemas en equilibrio térmico el uno con el otro se dice, por definición, que están a la misma temperatura. Dos sistemas que no estén en equilibrio térmico están a temperaturas distintas. Así se puede llegar a definir una escala de temperaturas.

Primer principio de la Termodinámica: Este no es más que el principio de conservación de la energía. Esta ley fundamental proclama la conservación de una cantidad que no representa nada particular.

$$\Delta (\text{Energía interna del sistema}) = + Q - W$$

$Q \equiv$ energía que llega al sistema en forma de calor

(1)

$W \equiv$ energía que sale del sistema en forma de trabajo.

Los signos son de origen histórico, pues en las máquinas térmicas damos calor y producimos trabajo.

Energía interna del sistema $\equiv U(P, V, \dots)$ es una función que depende sólo de las variables macroscópicas que especifican el sistema y por tanto es una variable de estado. En la materia hay una ecuación de estado $V = V(P, T)$ y por tanto en medios homogéneos es frecuente que $U = U(T, P)$.

¿Cómo usar el primer principio? Supongamos un gas homogéneo, entonces

$$\Delta U(P, T) = Q - W$$

(2)

i) En el laboratorio tenemos un dispositivo para medir P, T, Q y W . Entonces es posible determinar para este gas $U(P, T)$ para distintos valores de P y T , vale una constante aditiva que no nos preocupa pues sólo nos interesa $\Delta U(P, T)$. Podemos dar $U(P, T)$ en un conjunto de tablas o, si hay suerte, mediante una expresión matemática. ii) Obtenido $U(P, T)$, para un gas determinado, podemos usar (2) para calcular Q o W si se mide W o Q .

Nota: Hacemos múltiples experiencias y la ley da siempre resultados correctos, pero un día deja de funcionar. ¿Qué ha sucedido? Notamos que este día el cuerpo de masa M con el que hacemos las experiencias lo elevamos y bajamos respecto a la superficie terrestre, todo vuelve a funcionar si modificamos la ecuación a

$$\Delta U(P, T, \dots) + Mg \Delta z = + Q - W$$

(3)

donde z es la altura del centro de masas del sistema. Más adelante la ley falla de nuevo. No damos cuenta de que esta vez a lo largo de la experiencia el centro de masas no permanece siempre en reposo y vemos que no hay problemas si cambiamos a

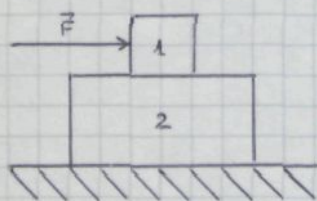
$$\Delta U(P, T, \dots) + Mg \Delta z + \frac{1}{2} M \Delta v^2 = + Q - W$$

(4)

35/003

¿Es esto serio? Alguien puede pensar que la ley de conservación de la energía es válida porque estamos empeñados en que así sea. Esta persona tendría toda la razón si consideramos lo mínimo de la forma Δ (no explícito), pero esto no es el caso.

Nota: La ley es totalmente general y es siempre válida. No la podemos demostrar pues es un principio. No puedo enseñar un trozo de energía. Aunque la ley no siempre es válida el formalismo matemático usado para expresar la ley puede presentar dificultades si el sistema no se elige con cuidado. Analicemos esto con un ejemplo.



Apliquemos una fuerza $\vec{F}$ sobre el bloque 1 de forma que se deslice con velocidad constante sobre el bloque 2 que está fijo. La fuerza de fricción $\vec{F}'$ que actúa en la superficie de separación de los dos bloques debe ser igual y opuesta

a $\vec{F}$, en el sentido del movimiento, para que la velocidad sea constante y por tanto globalmente sobre el bloque 1 no actúa ninguna fuerza. Por esta razón al

aplicar el formalismo matemático desarrollado al bloque 1 podemos escribir $\Delta U = Q$:

el aumento de energía interna del bloque 1 es igual al calor transferido al bloque desde el medio ambiente. La experiencia nos dice que la temperatura del bloque 1 aumentará y esto se traduce en que $\Delta U > 0$; sin embargo no hay mecanismos

por los que la temperatura del medio ambiente se haga superior a la del bloque y le ceda calor. Todo el problema está en que están sucediendo cosas en la

misma superficie frontera del sistema. Podríamos cambiar nuestras ecuaciones para hacer que el formalismo fuera aplicable redefiniendo Q , pero esto no es conveniente.

En este caso y para evitar problemas podemos elegir el sistema 1+2 y escribir

$$\Delta U_1 + \Delta U_2 = Q - W. \text{ Ahora si el bloque se desplaza en } dx \text{ el trabajo es } dW = -F dx.$$

La termodinámica, por sí sola, es incapaz de permitirnos calcular ΔU_1 , ΔU_2 y Q .

Moraleja: 1) Debemos ser juiciosos en el momento de elegir el sistema, 2) Muchos problemas no pueden resolverse usando únicamente termodinámica.

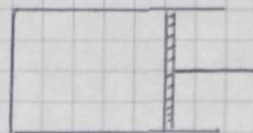
Nota: En lo que sigue utilizaremos frecuentemente émbolos y para estos problemas los supondremos siempre suficientemente lubricados para que podamos despreciar las fuerzas de fricción.

Procesos quasi-estáticos: Son procesos que transcurren de forma tan lenta que todos los estados intermedios son de equilibrio. En un gas en un émbolo el proceso es quasi-estático si el pistón se desplaza muy lentamente, para que después de cada movimiento el gas esté en equilibrio. En este caso y

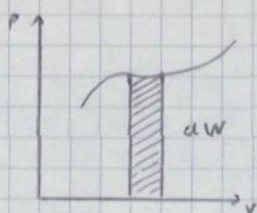
al suponer que no hay rozamiento

$$dW = \vec{F} dx = PA dx = P dV$$

(1)



Notar que



Trabajo: El trabajo realizado por el sistema que va de 1 hasta 2 depende, en general, del camino seguido y por tanto el trabajo no es una variable de estado. Como U es una variable de estado esto implica que Q tampoco lo es. En procesos quasi-estáticos el trabajo es

$$W = \int_{V_1}^{V_2} P dV$$

(2)

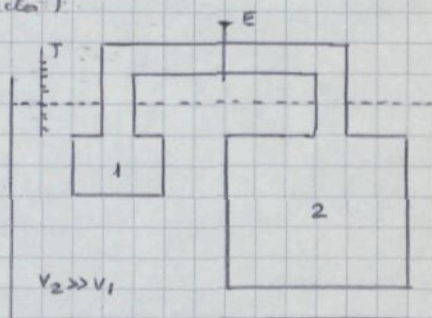
Ley de Joule: La energía interna de un gas perfecto es sólo función de la temperatura

$$U = U(T)$$

(gases perfectos)

(3)

Veamos como establecen esta ley. Consideremos el dispositivo de la figura. El compartimento 1, de volumen V_1 , está lleno de un gas ideal; el compartimento 2, de volumen V_2 , está vacío y la espita E está cerrada. El termómetro del fondo marca una



temperatura T . Abramos ahora la espita E . El gas contenido en 1 se expandirá y pasará a ocupar el volumen $V_1 + V_2$. Para ello no se necesita realizar ningún trabajo pues no hay que vencer ninguna presión y $W = 0$. Se observa que el termómetro no varía y por tanto $Q = 0$ y esto implica que $\Delta U = 0$ y Joule concluyó: "la energía interna de un gas perfecto no depende ni del volumen ni de la presión, sino sólo de la temperatura".

¿Por qué? La ley nos da un hecho experimental y no podemos dar una explicación dentro del marco de la termodinámica. Sin embargo la ley se entiende fácilmente si admitimos una descripción microscópica y identificamos U con la suma de las energías de las moléculas. Entonces U depende de las velocidades de las moléculas y de la interacción entre ellas. La primera dependencia implica que U depende de T . En un gas real la energía de interacción crecerá a medida que disminuya el volumen y $U = U(T, V)$. En un gas ideal, por definición, la energía de interacción es despreciable y por tanto $U = U(T)$.

35/003

Calor molar a volumen constante (C_v): Consideremos 1 mol de gas contenido en un cuerpo de bomba y démosle una cantidad de calor dQ , manteniendo el volumen constante, entonces el aumento de temperatura es tal que $dQ = C_v dT$ y C_v es el calor molar a volumen constante. Como $dW = 0$ se tiene que

$$dU = C_v dT \quad (4)$$

Si el gas es perfecto, la ley de Joule nos dice que los cambios de V no influyen en U y por tanto: cuando la temperatura de un gas perfecto varía en dT su energía interna varía en $dU = C_v dT$.

Calor molar a presión constante (C_p): Supongamos un mol de gas en un cuerpo de bomba y manteniendo la presión constante sobre el émbolo démosle una cantidad de calor dQ , lo cual provoca un cambio dV en el volumen y un cambio dT en la temperatura. C_p se define como $dQ \equiv C_p dT$. Entonces para gases perfectos

$$C_v dT = C_p dT - P dV \quad (5)$$

Como $PV = RT$ $R = 1.98719 \text{ cal mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ $1 \text{ cal} = 4.184 \text{ joules}$

$$P dV = R dT \quad (6)$$

y por tanto

$$C_p = C_v + R \quad (\text{Relación de Mayer}) \quad (7)$$

Muchas veces se introduce

$$\gamma \equiv \frac{C_p}{C_v} = 1 + \frac{R}{C_v} > 1 \quad (\text{Índice adiabático}) \quad (8)$$

Ejemplos: C_v en $\text{cal mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ y γ para distintos gases

He	$C_v = 2.99$	$\gamma = 1.666$
Ar	2.99	1.666
N ₂	4.92	1.405
O ₂	5.04	1.396
CO ₂	6.74	1.302
C ₂ H ₆	9.39	1.220

Gases perfectos: Como es bien sabido la ecuación de estado es

$$PV = nRT \quad n = \text{número de moles} \quad (9)$$

Las transformaciones isotermas son tales que

$$PV = \text{cte}$$

(transformaciones isotermas, gases perfectos)

(1)

Intentemos hallar una ley parecida para las transformaciones adiabáticas quasi-estáticas de Gama

$$dU = Q - W \Rightarrow m C_V dT = -P dV \Rightarrow m C_V dT + P dV = 0$$

$$PV = mRT \Rightarrow V dP + P dV = mR dT \Rightarrow mR dT = V dP + P dV$$

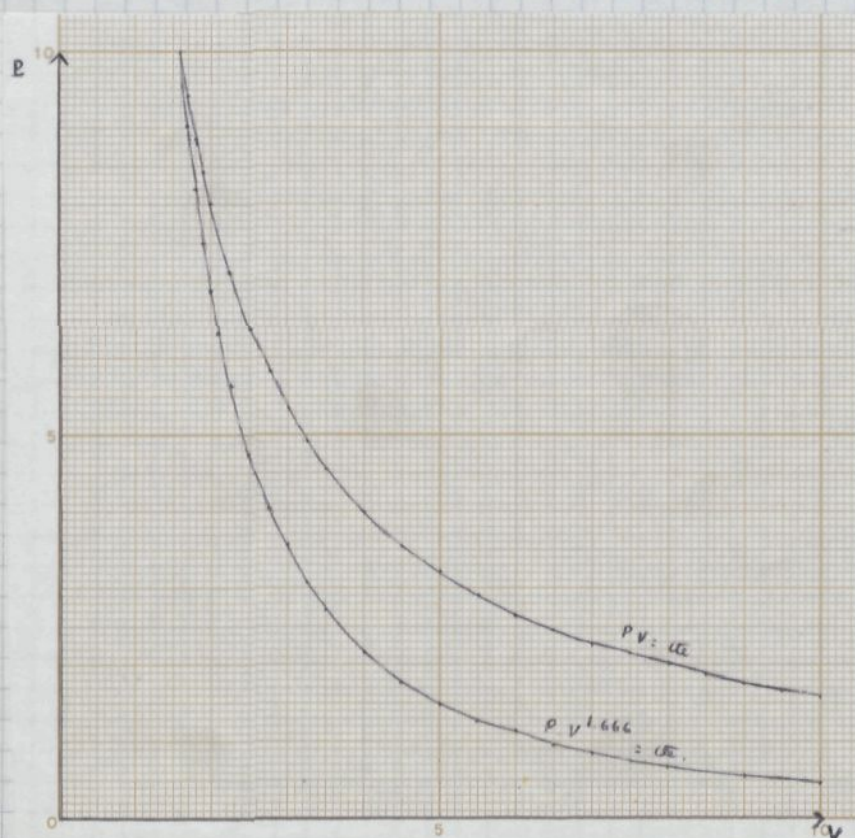
$$C_V V dP + C_V P dV + R P dV = 0 \Rightarrow C_V V dP + C_P P dV = 0$$

$$\gamma P dV + V dP = 0 \Rightarrow \gamma \frac{dV}{V} = - \frac{dP}{P} \Rightarrow \gamma \ln \frac{V_2}{V_1} = - \ln \frac{P_2}{P_1} \Rightarrow$$

$$V^\gamma P = \text{cte}, \quad V^{\gamma-1} T = \text{cte}, \quad T P^{(1-\gamma)/\gamma} = \text{cte}$$

(transformaciones adiabáticas quasi-estáticas, gases perfectos)

(2)



1. Dos recipientes de $V = 5$ litros contienen, el uno oxígeno a 50°C y a una presión de 72 cm de mercurio y el otro CO_2 a 7°C y 45 cm de mercurio. Se ponen en comunicación. Hallar la presión y temperatura finales. $C_V(\text{O}_2) = 4.96 \text{ cal mol}^{-1} \text{K}^{-1}$, $C_V(\text{CO}_2) = 6.74 \text{ cal mol}^{-1} \text{K}^{-1}$

Empezamos calculando los moles de cada gas: $\frac{PV}{T} = \frac{P'V'}{T'} \Rightarrow V = \frac{T}{T'} \frac{P'}{P} V'$. En unidades normales ($T = 273.15$, $P = 76 \text{ cm de Hg}$) un mol ocupa 22.41383 (70) litros. y en tanto

$$n(\text{O}_2) = \frac{5}{22.41383} \frac{273.15}{323.15} \frac{72}{76} = 0.1786 \text{ mol.}, \quad n(\text{CO}_2) = 0.1288 \text{ mol.}$$

La temperatura de la mezcla es

$$0.1786 \times 4.96 (323.15 - T) = 0.1288 \times 6.74 \times (T - 280.15)$$

$$T (0.1288 \times 6.74 + 0.1786 \times 4.96) = 0.1288 \times 6.74 \times 280.15 + 0.1786 \times 4.96 \times 323.15$$

$$T = 301.87 \text{ K}$$

El volumen final es $V = 10 \text{ l.}$ y en tanto hay $n = 0.1288 + 0.1786 = 0.3074 \text{ mol}$ a una $T = 301.87 \text{ K}$ y en tanto la presión es

$$P = n \frac{RT}{V} = 0.3074 \text{ mol.} \frac{1.98719 \text{ cal mol}^{-1} \text{K}^{-1} \times 301.87 \text{ K}}{10^4 \text{ cm}^3} = 1.8450 \times 10^{-2} \text{ cal cm}^{-3} =$$

$$= 7.7153 \times 10^{-2} \text{ joule cm}^{-3} = 7.7153 \times 10^5 \text{ dinas / cm}^2 = 0.77153 \text{ bar} =$$

$$= \frac{0.77153}{1.01325} \text{ atm.} = 0.76154 \text{ atm} = 578.7 \text{ mm. Hg.}$$

2. La energía interna de un gas ideal es

$$U(T) = R [(a - T) - a \ln \beta(a - T)] \quad , \quad a, \beta > 0 \quad T < a$$

Calcular C_V , C_P y γ .

$$C_V = \frac{\partial U}{\partial T} = -R + \frac{aR}{a - T} \Rightarrow C_V = \frac{RT}{a - T}$$

$$C_P = C_V + R \Rightarrow C_P = \frac{aR}{a - T} \quad , \quad \gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{a}{T}$$

3. Un gas de van der Waals satisface la ecuación de estado

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = nRT$$

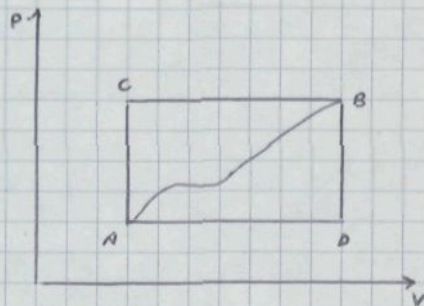
35/003

¿cuál es la expresión del trabajo en un proceso quasi-estático a temperatura constante en el que el volumen cambia de V_1 a V_2 ?

$$W = \int_{V_1}^{V_2} dV P \quad \text{Pero} \quad P = \frac{nRT}{V-b} - \frac{a}{V^2}$$

$$W = nRT \ln \frac{V_2-b}{V_1-b} + a \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right)$$

4. Cuando se lleva un sistema de A a B siguiendo el camino ACB se da al sistema una cantidad de calor de 80 J. y el sistema realiza un trabajo de 30 J. 1) ¿cuánto calor recibirá el sistema a lo largo del camino ADB, si el trabajo que realiza es de 10 J. 2) El sistema vuelve de B a A por el camino unido. El trabajo que se entrega al sistema es de 20 J. El sistema ¿absorbe o entrega calor? ¿cuánto? 3) Si $U_A = 0$ y $U_D = 40$ J hallar el calor absorbido en las transformaciones AD y DB.



Indiquemos por U_A, U_B, U_C y U_D las energías internas en los puntos A, B, C y D, respectivamente.

$$U_B - U_A = 80 \text{ J} - 30 \text{ J} = 50 \text{ J} \quad \Rightarrow \quad U_B - U_A = 50 \text{ J}$$

$$1) \quad 50 \text{ J} = Q - 10 \text{ J} \quad \Rightarrow \quad Q = 60 \text{ J.}$$

$$2) \quad -50 \text{ J} = Q + 20 \text{ J} \quad \Rightarrow \quad Q = -70 \text{ J.} \quad \text{el sistema entrega calor.}$$

$$3) \quad \text{Es evidente que } W_{DB} = 0 \quad \text{y además } U_A = 0, \quad U_B = 50 \text{ J}, \quad U_D = 40 \text{ J}$$

$$U_D - U_B = Q_{DB} - W_{DB} \quad \Rightarrow \quad +10 \text{ J} = Q_{DB} \quad \Rightarrow \quad Q_{DB} = +10 \text{ J}$$

$$U_D - U_A = Q_{AD} - W_{AD} \quad \Rightarrow \quad Q_{AD} - W_{AD} = 40 \text{ J} \quad \text{y como } Q_{ADB} = 60 \text{ J y}$$

$$Q_{DB} = 10 \text{ J entonces } Q_{AD} = 50 \text{ J y } W_{AD} = 10 \text{ J.}$$

5. Calcular el calor cedido a la fuente fría con un motor de Carnot. El gas que circula es O_2 . La temperatura de la fuente caliente es 75°C . En la primera isoterma y en la segunda adiabática el volumen del gas se duplica.

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \left(\frac{V_2}{V_3} \right)^{\gamma-1} = 1 - \frac{1}{2}^{0.396} = 0.2400$$

$$Q_c = RT \ln \frac{V_2}{V_1} = 579.5 \text{ cal}$$

$$\eta = \frac{Q_c - Q_f}{Q_c} \quad \Rightarrow \quad Q_f = Q_c(1-\eta) \quad \Rightarrow \quad Q_f = 366.4 \text{ cal.}$$

6. De las transformaciones isoterma ($T = \text{cte}$), isocora ($V = \text{cte}$) y adiabáticas, determinar cual tiene mayor incremento de energía interna, en el caso de un gas perfecto

Para gases perfectos $dU = C_v dT$

i) Isoterma $T_1 = T_2$ $(\Delta U)_{12} = 0$

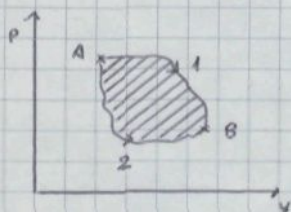
ii) Isocora $V_1 = V_2$ $(\Delta U)_{12} = C_v (T_2 - T_1) = C_v \left(\frac{P_2}{P_1} - 1 \right) T_1 = C_v T_1 \left(\frac{P_2}{P_1} - 1 \right)$

iii) Adiabática $(\Delta U)_{12} = C_v (T_2 - T_1) = C_v T_1 \left(\left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right)$, $\gamma > 1$

Si $P_2 > P_1$ y $0 < \frac{\gamma-1}{\gamma} < 1$ entonces la isocora es la de mayor variación

Si $P_2 < P_1$ es la isoterma pues las otras dos son negativas.

7. Demostrar que dos puntos del plano V - P están unidos por una línea adiabática



Supongamos que existieran dos : 1 y 2. Consideremos el ciclo de la figura (ida por 1 y vuelta por 2) entonces

$$0 = \Delta U = Q - W = 0 - W \Rightarrow W = 0$$

pero $W \neq 0$.

8. Una caja cúbica metálica de lado $L = 20 \text{ cm}$, contiene aire a la presión $P = 1 \text{ atm}$ y a $T = 300 \text{ K}$. Se cierra herméticamente de forma que el volumen sea constante y se calienta a $T' = 400 \text{ K}$. Hallar la fuerza neta desarmada sobre cada pared de la caja.

Supondremos que el gas es perfecto : $PV = nRT$

$$1 \text{ atm} = 1.01325 \times 10^6 \text{ dinas/cm}^2$$

$$R = 8.31451 (31) \times 10^7 \text{ erg. mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

$$\text{El número de moles es } n = \frac{1.01325 \times 10^6 \times 8 \times 10^3}{8.31451 \times 10^7 \times 300} = 0.3250 \text{ mol.}$$

$$\text{La presión final es } \frac{P'}{P} = \frac{T'}{T} \Rightarrow P' = \frac{400}{300} \times 1 = \frac{4}{3} \text{ atm} = 1.351 \times 10^6 \text{ dinas/cm}^2$$

$$\Delta F = (P' - P) \times L^2 = 1.351 \times 10^8 \text{ dinas}$$

9. Un gas perfecto se encuentra en un cilindro de acero a $T = 20^\circ$ y $P = 5 \text{ atm}$

1) Si el cilindro está rodeado de agua hirviendo y se deja que alcance el equilibrio térmico ¿Cuál será la presión del gas? 2) Si se deja escapar gas hasta que la

35/003

presión sea de nuevo 5 atm ¿qué fracción (en peso) del gas original se habrá escapado?

3) Si la temperatura del gas que queda en el cilindro mejor es de 20° ¿cuál será la presión final?

$$\left. \begin{array}{l} P_f V = n R T_f \\ P_i V = n R T_i \end{array} \right\} \quad P_f = P_i \frac{T_f}{T_i} = 5 \frac{373.15}{293.15} = 6.3645 \text{ atm.}$$

$$\left. \begin{array}{l} P_f V = n_f R T_f \\ P_i V = n_i R T_i \end{array} \right\} \quad \frac{n_f}{n_i} = \frac{P_f}{P_i} = \frac{n_f}{n_i} = \frac{P_f}{P_i} = \frac{5}{6.3645} = \alpha$$

$$\text{Se ha escapado la fracción } \eta = \frac{n_i - n_f}{n_i} = 1 - \frac{P_f}{P_i} \Rightarrow \eta = 0.2144$$

3) La presión final es $\propto P_i = 3.9280 \text{ atm.}$

10. El calor específico a volumen constante del NaCl se calcula a bajas temperaturas mediante la expresión

$$C_v = K \left(\frac{T}{\Theta} \right)^3 \quad K = 19.4 \times 10^5 \text{ joules / mol} \cdot \text{K}^4, \quad \Theta = 281 \text{ K}$$

1) ¿qué cantidad de calor se requiere para elevar la temperatura de 2 moles de NaCl desde 10° K a 50° K, a volumen constante? 2) ¿cuál es el calor específico medio en este intervalo?

$$1) \quad Q = n \int_{T_1}^{T_2} dT C_v = n \frac{K}{4 \Theta^3} (T_2^4 - T_1^4)$$

$$Q = 2 \text{ mol} \frac{19.4 \times 10^5 \text{ joules}}{10^3 \text{ mol} \cdot \text{K}^4} \frac{1}{4} \frac{1}{281^3 \text{ K}^3} (50^4 - 10^4) \text{ K}^4 = 272.80 \text{ Joules}$$

$$2) \quad \langle C_v \rangle = \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} dT C_v = \frac{K}{4 \Theta^3} \frac{T_2^4 - T_1^4}{T_2 - T_1} \Rightarrow \langle C_v \rangle = 3.4099 \text{ Jul / mol} \cdot \text{K}$$

11. Una muestra de gas se expande de forma quasi-estática y adiabática. Su presión disminuye de 1.185 atm a 0.987 atm. y su temperatura desciende de 301 K a 280 K. ¿calcular el valor de γ ?

$$T_1 P_1^{(1-\gamma)/\gamma} = T_2 P_2^{(1-\gamma)/\gamma} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{(1-\gamma)/\gamma} \Rightarrow \frac{1-\gamma}{\gamma} \ln \frac{P_2}{P_1} = \ln \frac{T_1}{T_2}$$

$$\gamma = \frac{\ln(P_2/P_1)}{\ln(P_2 T_1 / P_1 T_2)}$$

y en nuestro caso $\gamma = 1.6544$

12. Demostrar que para toda gas ideal las transformaciones isotermas son también isoentálpicas (entalpía $H \equiv U + PV$)

$$H_2 - H_1 = U_2 + P_2 V_2 - U_1 - P_1 V_1 = n C_v (T_2 - T_1) + n R (T_2 - T_1) = 0.$$

13. A bajas temperaturas el calor específico de los metales puede expresarse como

$$C = K_1 T + K_3 T^3$$

Para el cobre

$$K_1 = 2.75 \times 10^{-6} \text{ cal / gr. } K^2, \quad K_3 = 2.48 \times 10^{-7} \text{ cal / gr. } K^4$$

- ¿Que calor es necesario dar a una masa de cobre de $M = 15$ gramos si queremos elevar la temperatura de $T_1 = 5 \text{ K}$ a $T_2 = 30 \text{ K}$?

$$Q = M \int_{T_1}^{T_2} dT C(T) = M \left\{ \frac{1}{2} K_1 (T_2^2 - T_1^2) + \frac{1}{4} K_3 (T_2^4 - T_1^4) \right\}$$

$$Q = 0.7708 \text{ cal.}$$

14. En una estrella homogénea de masa M y radio R el potencial gravitacional es de la forma $\Omega = -\lambda G M^2 / R$, donde λ es un factor numérico del orden de la unidad. Si aumentamos el radio en dR , cambia su volumen en dV y la energía interna de la estrella varía en

$$dU = d\Omega - P dV$$

Determinar la presión P en una situación de equilibrio

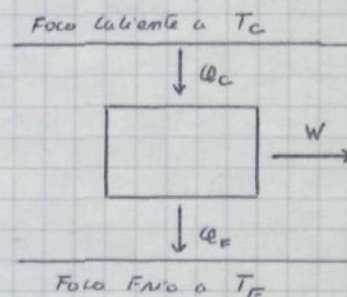
Si R cambia en dR entonces $d\Omega = \frac{\lambda G M^2}{R^2} dR$ y $dV = 4\pi R^2 dR$ de donde como en una situación de equilibrio $dU = 0$

$$P V = \frac{\lambda}{3} \frac{G M^2}{R} = -\frac{1}{3} \Omega$$

SEGUNDO PRINCIPIO DE LA TERMODINAMICA

El primer principio de la termodinámica establece la ley de conservación de la energía. Hay procesos que están de acuerdo con la primera ley pero que en la práctica nunca ocurren. El segundo principio resume la imposibilidad de que existan tales procesos. Veamos algunos ejemplos 1) Un bloque con energía cinética inicial K_i resbala sobre una mesa rugosa. El trabajo realizado por la fricción disminuye K_i e incrementa el valor de la energía interna del bloque y de la mesa. El proceso inverso nunca ocurre: la energía interna del bloque y de la mesa nunca se convierten espontáneamente en energía cinética del bloque, haciéndolo deslizarse sobre la mesa, mientras la mesa y el bloque se enfrían. 2) El calor no pasa espontáneamente de un cuerpo frío a uno caliente.

Máquinas térmicas: Se llaman así a máquinas cíclicas que toman una cantidad de calor Q_C de un foco caliente que está a una temperatura T_C , realizan un trabajo W , y devuelven una cantidad de calor Q_F a un foco frío a temperatura T_F .



Al ser cíclicas

$$0 = \Delta U = Q_C - Q_F - W \Rightarrow W = Q_C - Q_F \quad (1)$$

$$\text{Su rendimiento se define } \eta = \frac{W}{Q_C} = 1 - \frac{Q_F}{Q_C} \leq 1 \quad (2)$$

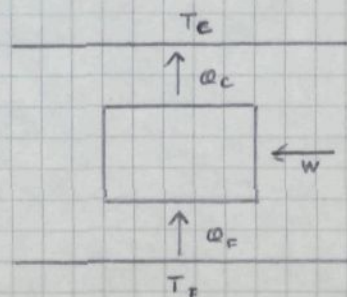
Que $\eta = 1$ implicaría que $Q_F = 0$

Enunciado de Kelvin-Planck del segundo principio de la termodinámica: "Es imposible que una máquina térmica (que trabaja cíclicamente) extraiga calor de un foco y produzca una cantidad equivalente de trabajo, sin producir ningún otro efecto". Si este principio fuera falso sería posible construir un barco que extrajera calor del agua del mar y convertirlo todo en energía para mover el barco.

Refrigeradores: Son análogos a las máquinas térmicas pero absorben calor de un foco frío y lo ceden a uno caliente, consumiendo trabajo

$$0 = \Delta U = Q_F - Q_C + W \Rightarrow W = Q_C - Q_F$$

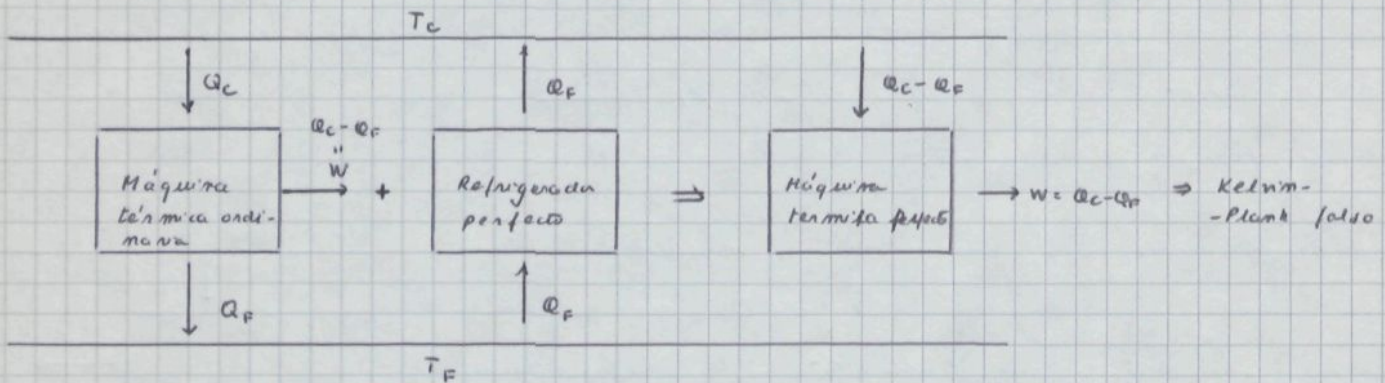
$$\text{Rendimiento } \eta = \frac{Q_C}{W} = \frac{1}{1 - \frac{Q_F}{Q_C}} \geq 1 \quad (\text{conforme a la ecuación}) \quad (3)$$



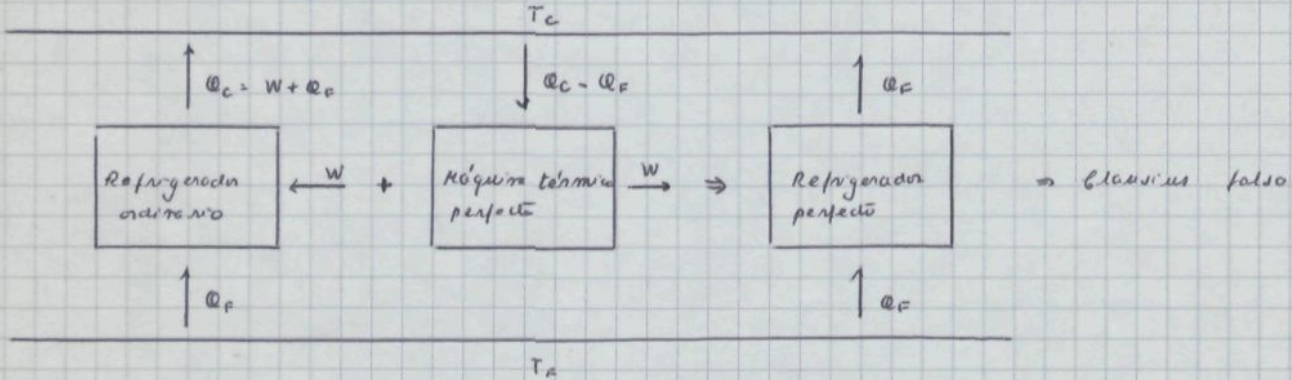
Enunciado de Clausius del segundo principio de la termodinámica: "Es imposible que un refrigerador, que trabaje cíclicamente, transfiera calor de un cuerpo frío a otro caliente sin realizar otro efecto". Si esto fuera falso sería posible enfriar nuestras cosas, en verano, con un refrigerador que emitiere calor al exterior sin usar electricidad o cualquier otro tipo de energía.

Equivalencia de ambos enunciados: Basta probar que si uno de ellos es falso lo es el otro

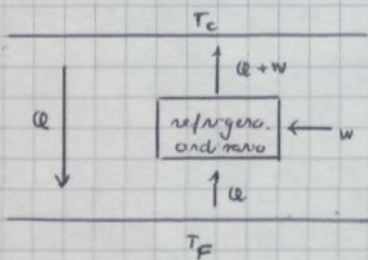
1) Si Clausius fuera falso



2) Si Kelvin-Planck es falso



Reversibilidad: Consideremos un simple proceso de conducción de una determinada cantidad de calor Q del foco caliente al foco frío. Según el principio de Clausius es imposible transferir de nuevo el calor Q del foco frío al caliente sin producir otros cambios en el medio que lo rodea.



Podríamos usar un refrigerador ordinario para extraer Q del foco frío y transferir $Q+W$ al foco caliente, dando $W>0$ es el trabajo realizado sobre el

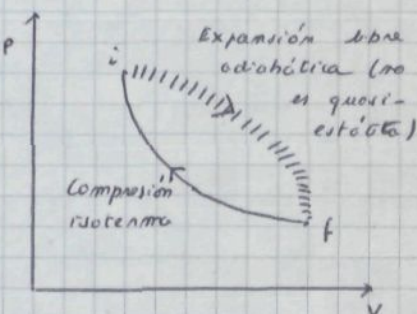
refrigerador, pero en este caso la energía W se habrá perdido de los alrededores y una cantidad extra de calor se ha transferido al foco caliente. Según Kelvin-Planck, no podemos extraer este calor $W>0$ del foco caliente y convertirlo totalmente en trabajo. En todo ciclo parte del calor debe ser cedido a los alrededores. El proceso de con-

ducción de calor desde un cuerpo caliente a uno frío es irreversible: no podemos hacer retroceder el sistema a su estado original sin dar lugar a un cambio permanente o sus alrededores.

Procesos irreversibles: Definimos un proceso como irreversible si el sistema y sus alrededores no pueden volver a sus estados iniciales. Algunos ejemplos de procesos irreversibles son:

- i) Cualquier proceso que convierta energía mecánica en energía interna es irreversible.
- ii) Por ejemplo, es irreversible el proceso de un bloque que se desliza sobre una superficie de una mesa hasta que se para debido a las fuerzas de fricción. iii) También lo es el lanzar un bloque de madera a un lago y la energía mecánica del bloque se convierte en energía interna del bloque y del lago.

2) Supongamos que un gas a una temperatura T_i se expande libremente desde un volumen inicial V_i a un volumen final V_f de forma adiabática. La temperatura final sigue siendo $T_f = T_i$, ya que la energía interna del gas no cambia $\Delta U = 0 - 0 = 0$ y suponemos el gas perfecto. Podemos ahora hacer retroceder este gas a su volumen original mediante una compresión isotérmica, realizando un trabajo W y cediendo una cantidad de calor $Q = W$ a un foco térmico a una temperatura T_i . Esta compresión isotérmica es por sí misma reversible, pero la combinación de la expansión libre adiabática más la compresión isotérmica devuelve el gas a su estado original, con una cantidad de calor W convertida en energía en el foco caliente. Como es imposible convertir de nuevo esta energía en trabajo, sin introducir ningún cambio, el proceso es irreversible.



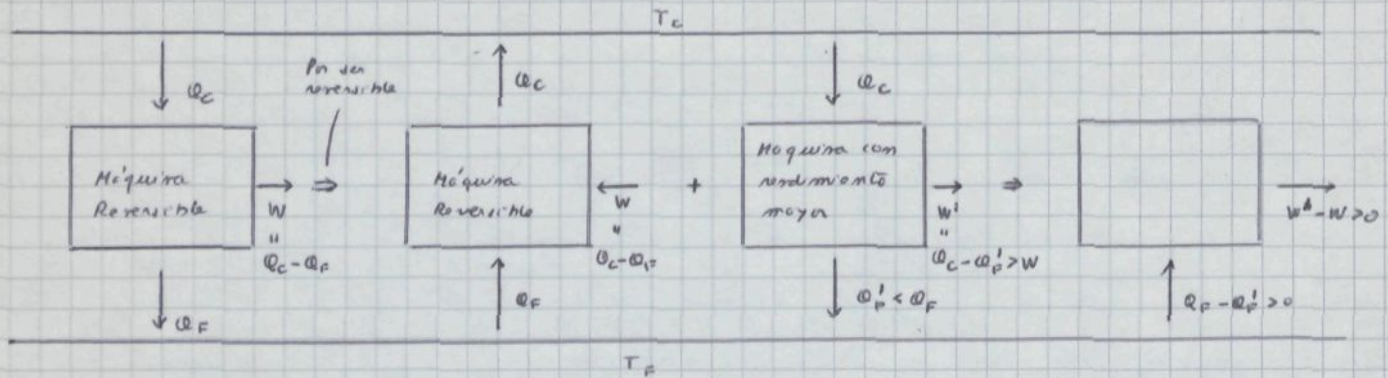
Procesos reversibles: Algunas condiciones necesarias para que un proceso sea reversible son:

- i) No debe existir trabajo realizado por fricción, fuerzas debidas a la viscosidad, u otras fuentes disipativas que produzcan calor.
- ii) No debe existir conducción térmica debido a una diferencia de temperatura.
- iii) El proceso debe ser cuasi-estático de tal forma que el proceso se encuentre siempre en un estado de equilibrio (o en un estado infinitamente próximo al equilibrio).

Maquina de Carnot: En 1824 el francés N.L.S. Carnot diseñó una máquina ideal, reversible, que trabajaba cíclicamente entre dos focos calóricos y encontró el rendimiento de esta máquina en función de la temperatura de los focos calóricos.

35/003

núfios. Esto es lo llamado máquina de Carnot y su ciclo se llama ciclo de Carnot. Los resultados que obtuvieron pueden expresarse mediante el llamado teorema de Carnot. "Ninguna máquina que trabaje entre dos focos calóricos determinados puede tener un rendimiento mayor que una máquina reversible que trabaje entre los dos mismos focos". La demostración es

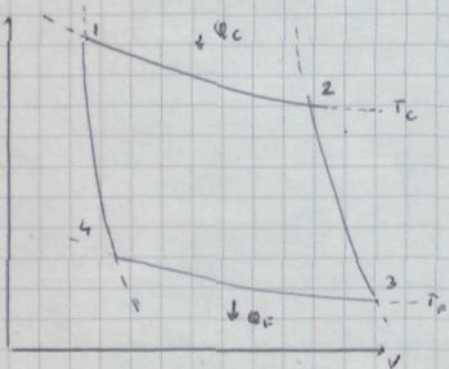


y la última máquina viola Kelvin-Planck

Conclusión: "Todas las máquinas reversibles que trabajen entre los mismos focos tienen el mismo rendimiento". En efecto, el teorema de Carnot dice que para dos máquinas reversibles cada una debe tener un rendimiento mayor o igual que el de la otra y por tanto ambos deben ser iguales.

Resultados análogos se pueden enunciar para refrigeradores: "Ningún refrigerador que trabaje entre dos focos dados puede tener un coeficiente de eficiencia mayor que el de un refrigerador reversible trabajando entre los dos mismos focos". y "Todos los refrigeradores reversibles que trabajen entre los mismos focos tienen el mismo rendimiento".

Ciclo de Carnot. No es difícil imaginar el ciclo de una máquina de Carnot. Como el ciclo es reversible, el calor no puede transferirse a través de una diferencia de temperaturas, ya que esto implicaría un proceso irreversible. Por lo tanto la máquina debe ceder y absorber calor isotérmicamente.



- 1 → 2 Expansión isotérmica quasi-estática
- 2 → 3 Expansión adiabática quasi-estática
- 3 → 4 Compresión isotérmica quasi-estática
- 4 → 1 Compresión adiabática quasi-estática.

Todos estos procesos son reversibles y por tanto lo es el ciclo de Carnot.

Ciclo de Carnot para un gas perfecto.

$$1 \rightarrow 2, \quad \Delta U = 0, \quad Q_c = W_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p \, dV = n R T_c \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = n R T_c \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (1)$$

$$3 \rightarrow 4, \quad \Delta U = 0, \quad Q_F = -W_{34} = n R T_F \ln \frac{V_3}{V_4}$$

$$\eta = \frac{Q_c - Q_F}{Q_c} = \frac{T_c \ln(V_2/V_1) - T_F \ln(V_3/V_4)}{T_c \ln(V_2/V_1)} \quad (2)$$

$$\text{Pero } T_c V_2^{r-1} = T_F V_3^{r-1} \quad \text{y} \quad T_c V_1^{r-1} = T_F V_4^{r-1} \Rightarrow V_2/V_1 = V_3/V_4 \quad (3)$$

$$\eta = 1 - \frac{T_F}{T_c} \quad (4)$$

Escala absoluta de temperaturas. Cualquiera que sea la sustancia usada en una máquina ideal el rendimiento es el mismo si la energía entra los dos mismos focos térmicos. Como la única característica de un foco es su temperatura, el rendimiento de una máquina de Carnot debe depender solo de la temperatura de los focos térmicos. Como $\eta = 1 - Q_F/Q_c$, entonces Q_F/Q_c es siempre únicamente una función de las temperaturas de los focos térmicos. Nos valdremos de este resultado para definir una escala de temperaturas absolutas de los focos térmicos mediante

$$\frac{T_c}{T_F} = \frac{Q_c}{Q_F} \quad (5)$$

Esta definición se completa eligiendo un punto fijo. Definimos la temperatura absoluta del punto triple del agua, como $T = 273.15 \text{ K}$.

Entropía. 1) El primer principio nos permitió definir una función de estado termodinámica, la temperatura, que es la forma de medir la frío o caliente que se encuentra un cuerpo. 2) El primer principio nos permitió definir otra función de estado U . 3) Vamos a ver que el segundo principio se formula fácilmente en términos de una nueva función de estado: la entropía S .

Empezaremos considerando un gas ideal. Consideremos un proceso arbitrario reversible quasi-estático en el que un gas perfecto absorbe una cantidad de calor dQ . De acuerdo con el primer principio

$$dQ = dU + p \, dV \quad (6)$$

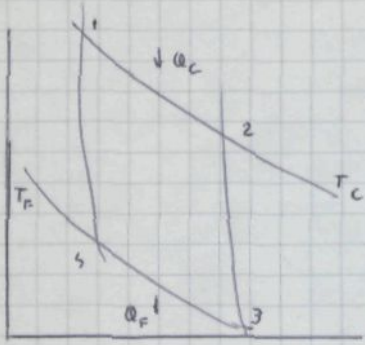
$$\Rightarrow dQ = n C_V dT + n R T \frac{dV}{V} \Rightarrow \frac{dQ}{T} = n C_V \frac{dT}{T} + n R \frac{dV}{V}$$

$$\Rightarrow \int_1^2 \frac{dQ}{T} = n C_V \ln \frac{T_2}{T_1} + n R \ln \frac{V_2}{V_1} = \text{función de estado pues solo depende del estado inicial y final, y no del camino seguido.}$$

35/003

Definición: La definición de entropía, válida para cualquier proceso reversible es

$$dS \equiv \frac{dQ_{rev}}{T} \quad (7)$$



Veamos que en un ciclo de Carnot $(\Delta S) = 0$, como debe ser para toda variable de estado

$$(\Delta S)_{1 \rightarrow 2} = \frac{Q_c}{T_c}$$

$$(\Delta S)_{2 \rightarrow 3} = 0$$

$$(\Delta S)_{cyc} = S_f - S_i$$

$$(\Delta S)_{3 \rightarrow 4} = -\frac{Q_f}{T_f}$$

$$(\Delta S)_{4 \rightarrow 1} = 0$$

$$\sum (\Delta S)_{cyc} = \frac{Q_c}{T_c} - \frac{Q_f}{T_f} = 0 \quad (8)$$

Se puede probar que $dS \equiv dQ_{rev}/T$ es una variable de estado para cualquier sistema que experimente una transformación reversible.

Universo: En lo que sigue al hablar de universo entendemos el sistema y sus alrededores, por ejemplo, focos fríos y calientes que interactúan con el sistema. El universo está siempre totalmente aislado.

Variación de entropía de un foco térmico: El estado de un foco térmico viene determinado por su energía interna y su temperatura que, por definición, es constante. Si un foco térmico absorbe una cantidad de calor Q por algún proceso reversible, su entropía aumenta en Q/T , donde T es la temperatura del foco. Si la absorción tiene lugar mediante un proceso irreversible, busquemos un proceso reversible equivalente y al ser la entropía una función de estado su variación continua siendo Q/T .

Proceso reversible: Para calcular la variación de entropía procederemos de la siguiente forma: Un sistema absorbe calor Q de un foco a temperatura T ; como el proceso es reversible ésta absorción debe ser isotérmica. El sistema aumenta su entropía en Q/T y el foco disminuye la suya en $-Q/T$. Así la variación de entropía del sistema más el foco es nula. No tiene importancia el número de sistemas y focos que forman parte de este proceso reversible pues en cada uno de ellos $\Delta S = 0$ y así tenemos que en cualquier proceso reversible

$$\Delta S_{total} = 0 \quad (\text{proceso reversible}) \quad (9)$$

Procesos irreversibles: Consideremos algunos procesos irreversibles

1) Conducción de calor de un foco caliente a uno frío. Una cantidad de calor Q pasa de un foco caliente, a temperatura T_c , a uno frío de temperatura $T_f < T_c$. El cambio de entropía en el foco caliente es $\Delta S = -Q/T_c$ y ~~de~~ del foco frío es $\Delta S = +Q/T_f$ y por tanto $\Delta S_{\text{total}} = Q/T_f - Q/T_c > 0$

2) Proceso en el que la energía mecánica se transforma en energía interna por fricción o por el efecto de otras fuerzas disipativas. Sea una mesa grande, que se puede considerar como foco, y un bloque con energía cinética K que por causa del rozamiento se frena hasta pararse. Debido al trabajo realizado por la fricción la energía interna de la mesa (y del bloque si no es mucho más pequeño que la mesa) y del aire a su alrededor aumenta en una cantidad K . La variación de entropía del aire y de la mesa es la misma que correspondería si el calor $Q \equiv K$ fuera transmitido reversiblemente. Así pues $\Delta S_{\text{total}} = K/T > 0$.

3) Expansión libre adiabática de un gas perfecto. Como no se transfiere calor ni se realiza trabajo los alrededores al gas no sufren variación alguna en entropía y por tanto $\Delta S_{\text{total}} \equiv \Delta S_{\text{gas}}$. Sea V_1 el volumen inicial del gas y $V_2 > V_1$ su volumen final. Al ser S una función de estado podemos calcular ΔS_{gas} mediante cualquier proceso reversible que conecte el estado inicial con el final, por ejemplo una expansión isotérmica quasi-estática de V_1 a V_2 . Si el gas es perfecto

$$\Delta S_{\text{total}} = \Delta S_{\text{gas}} = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_1^2 \frac{P dV}{T} = nR \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = nR \ln \frac{V_2}{V_1} > 0 \quad (1)$$

Conclusión: En cada uno de estos procesos irreversibles $\Delta S_{\text{total}} > 0$ y postulamos

$$\Delta S_{\text{total}} \geq 0 \quad (\text{procesos irreversibles}) \quad (2)$$

Si $\Delta S_{\text{total}} < 0$ se violaría el segundo principio. Veamos algunos ejemplos

1) Conducción de calor: Si $\Delta S_{\text{total}} < 0 \Rightarrow Q/T_f - Q/T_c < 0 \Rightarrow Q < 0$ es decir pasa calor del foco frío al foco caliente, violando el principio de Clausius.

2) Conversión de energía interna en mecánica: La variación de entropía es negativa si el calor fuera tomado del ambiente y convertido en energía mecánica y esto violaría el principio de Kelvin-Planck.

Enunciado alternativo del segundo principio: "En cualquier proceso, la variación de entropía del universo debe ser mayor o igual que cero. La variación de entropía es nula sólo si el proceso es reversible".

Trabajo utilizable " En un proceso irreversible en el que la variación de entropía es $\Delta S_{\text{total}} > 0$, parte de la energía se convierte en utilizable para realizar trabajo. La cantidad de energía utilizable es $T \Delta S_{\text{total}}$, donde T es la temperatura del foco usado de menor temperatura".

Daremos algunos ejemplos para hacer plausible este resultado general

1) Consideremos un solo foco térmico a temperatura T . Si no hay otros focos alrededor, ni sistemas a temperatura más baja que puedan usarse como focos térmicos, no podremos utilizar la energía interna del foco considerado para realizar trabajo. La energía interna del foco es inutilizable. Para extraerla y realizar trabajo se requiere un foco o sistema a temperatura más baja que acepte el calor cedido. El segundo principio establece que no podemos tomar parte de la energía interna y convertirla en trabajo, en otras palabras, la conversión de parte de la energía interna en trabajo disminuiría la entropía del universo, lo cual está prohibido. Cuando un bloque se desliza por una superficie rugosa con energía cinética K . Inicialmente K puede ser utilizada para hacer trabajo útil. Una vez la energía cinética se ha convertido en energía interna de los alrededores, todo este potencial para producir trabajo se pierde. En este caso $\Delta S_{\text{total}} = K/T$ y se hace inutilizable una energía $T \Delta S_{\text{total}} = K$.

2) Expansión adiabática libre de un gas perfecto. Se supone un foco a la temperatura T del gas, que es la misma antes y después de la expansión. En el proceso considerado $\Delta S_{\text{total}} = n R \ln(V_2/V_1)$. Si el gas se hubiera expandido de forma isotérmica reversible se hubiera realizado un trabajo $W = n R T \ln(V_2/V_1)$ y hemos perdido la oportunidad de hacer un trabajo $T \Delta S_{\text{total}}$.

3) Proceso irreversible de conducción de calor: $\Delta S_{\text{total}} = Q/T_F - Q/T_C$. Evidentemente Q no es la cantidad de energía que ha pasado a ser utilizable, pues no podemos convertir la Q totalmente en trabajo. En realidad se ha perdido $Q(1/T_F - 1/T_C) = T_F(1/T_F - 1/T_C) = T_F \Delta S_{\text{total}}$.

Prueba general de la existencia de la entropía: Consideremos un sistema que a lo largo de un ciclo absorbe y cede calor en varios focos calóricos, hace un trabajo (≥ 0) y vuelve a su estado original. Sea $\Delta Q_i > 0$ (< 0) el calor absorbido (cedido) al foco i que está a la temperatura T_i , entonces

$$\sum_i \frac{\Delta Q_i}{T_i} \leq 0 \quad (\text{Desigualdad de Clausius}) \quad (3)$$

Probemos esta desigualdad. Usaremos un foco auxiliar a temperatura T_0 y tantos ciclos

de fánnot como sean necesarios. Reemplazamos una máquina de fánnot entre cada foco y el foco auxiliar de forma que el foco original vuelva a su estado inicial. Esto es, si ΔQ_i fue tomado del foco i , reemplazamos una máquina de fánnot entre este foco y el auxiliar para reemplazar ΔQ_i al foco i . El calor extraído del foco auxiliar usando la máquina fánnot entre éste y el foco i es $\Delta Q_{0i} = T_0 \Delta Q_i / T_i$ y el calor total extraído del foco auxiliar es

$$\Delta Q_0 = \sum_i \Delta Q_{0i} = T_0 \sum_i \frac{\Delta Q_i}{T_i} \quad (1)$$

Después de este proceso todos los focos i se hallan en su estado inicial. El resultado neto es que el calor ΔQ_0 ha sido extraído del foco auxiliar y, de acuerdo con el primer principio, se realiza una cantidad igual de trabajo. El segundo principio dice que $\Delta Q_0 \leq 0$ y la desigualdad de Clausius queda probada. Mas aún

$$\sum_i \frac{\Delta Q_i}{T_i} = 0 \quad (\text{procesos reversibles}) \quad (2)$$

Esto es claro pues si el proceso es reversible podemos invertir $\Delta Q_i \rightarrow -\Delta Q_i$ y queda $-\sum_i \Delta Q_i / T_i \leq 0$ y como también $\sum_i \Delta Q_i / T_i \geq 0$, la única posibilidad es (2).

Veamos ahora como definir la entropía. Dejemos el sistema evolucionar reversiblemente de $A \rightarrow B$ y volvamos de $B \rightarrow A$ por un camino reversible distinto. Se pueden usar en el proceso cualquier número de focos

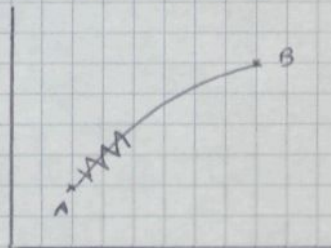
$$\sum_i \frac{\Delta Q_i^{(A \rightarrow B)}}{T_i} + \sum_i \frac{\Delta Q_i^{(B \rightarrow A)}}{T_i} = 0 \quad (3)$$

Si ambos son reversibles

$$\sum_i \frac{\Delta Q_i^{(A \rightarrow B)}}{T_i} = - \sum_i \frac{\Delta Q_i^{(B \rightarrow A)}}{T_i} \quad (4)$$

y por tanto $\sum_i \Delta Q_i / T_i$ es la misma para todos los procesos reversibles que van de A a B .

En la figura se representa un proceso quasi-estático entrópico para un gas desde A a B . Para hacer este proceso reversible debe absorber calor isotérmicamente. Esto puede hacerse utilizando un número muy grande de focos calóricos a diferentes temperaturas y siguiendo un camino alternativo, consistente



en una serie de caminos isotérmicos y adiabáticos. En el límite de un número infinito de focos, podemos hacer que este camino alternativo se aproxime al original todo lo que queramos. Entonces el resultado anterior

$$\int_{\text{camino 1}} \frac{dQ_{\text{rev}}}{T} = \int_{\text{camino 2}} \frac{dQ_{\text{rev}}}{T} \quad (5)$$

35/003

Como la integral de dQ_{rev}/T es independiente del camino podemos definir una nueva función de estado, la entropía S , como

$$S_B - S_A = \int_A^B \frac{dQ_{rev}}{T} \quad (6)$$

Consideremos ahora un sistema que experimente un cambio irreversible del estado A al B y que vuelva al estado A por un proceso reversible. De acuerdo con la desigualdad de Clausius



$$\int_A^B \frac{dQ_{irr}}{T} + \int_B^A \frac{dQ_{rev}}{T} < 0 \Rightarrow$$

$$\int_A^B \frac{dQ_{irr}}{T} < - \int_B^A \frac{dQ_{rev}}{T} = \int_A^B \frac{dQ_{rev}}{T} = S_B - S_A \quad (7)$$

En particular, si un sistema está aislado no puede captar calor y por tanto cuando un sistema aislado pasa del estado A al B, $dQ=0$. Luego si el proceso es irreversible

$$0 < S_B - S_A \Rightarrow S_B > S_A$$

y para procesos reversibles $0 = S_B - S_A \Rightarrow S_B = S_A$.

1. El trabajo producido por una máquina de Carnot es $W = 1.00 \times 10^3 \text{ J}$. Sus temperaturas de funcionamiento son $T_c = 400 \text{ K}$ y $T_f = 300 \text{ K}$. 1) ¿Cuánta energía es absorbida por la sustancia que recibe el calor en expansión isotérmica? 2) ¿Cuánta energía se disipa en la fuente fría?

$$\eta = 1 - \frac{T_f}{T_c} = \frac{1}{4}, \quad \eta = \frac{W}{Q_c} \Rightarrow Q_c = \frac{W}{\eta} = 4.00 \times 10^3 \text{ J}$$

$$\frac{Q_f}{Q_c} = 1 - \eta, \quad Q_f = (1 - \eta) Q_c = \frac{1 - \eta}{\eta} W = 3W = 3.00 \times 10^3 \text{ J}$$

2. Determinar el aumento de entropía que experimentan 200 gr. de H_2O que inicialmente están líquidos a 100°C y presión normal y se les comunica la cantidad de calor necesaria para elevar su temperatura hasta 500°C a presión constante. El calor de vaporización es $L = 540 \text{ cal/g}$ y para el vapor de agua

$$C_p = [8.62 + 0.002 (T - 273)] \text{ cal mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

$$\Delta S = 200 \text{ g} \left[\frac{540 \text{ cal g}^{-1}}{373 \text{ K}} + \frac{200}{18} \text{ mol} \int_{373}^{773} \frac{dT}{T} \frac{8.62 + 0.002(T - 273)}{T} \right]$$

$$= 289.54 + \frac{200}{18} \int_{373}^{773} dT \left\{ 0.002 + \frac{8.074}{T} \right\} =$$

$$= 289.54 + \frac{200}{18} \left\{ 0.002 (773 - 373) + 8.074 \ln \frac{773}{373} \right\} \Rightarrow \Delta S = 363.81 \text{ cal K}^{-1}$$

3. Calcular el cambio de entropía específica del agua para pasar del estado líquido a 95°C al de vapor a 100°C , a la presión normal. 1) Suponiendo que el agua se calienta a 100° y luego se vaporiza. 2) Suponiendo que primero se vaporiza a 95° y después se calienta hasta 100° . Datos: calor específico del agua entre 95° y 100° $c = 1.005 \text{ cal g}^{-1} \text{ K}^{-1}$. Calor específico del vapor entre 95° y 100° $c' = 0.482 \text{ cal g}^{-1} \text{ K}^{-1}$. Calor de vaporización a 100° $L = 539.6 \text{ cal g}^{-1}$, calor de vaporización a 95° $L' = 547.6 \text{ cal g}^{-1}$.

$$1) \Delta S = \int_{368}^{373} dT \frac{1.005}{T} + \frac{539.6}{373} = 1.005 \ln \frac{373}{368} + \frac{539.6}{373} = 1.660 \text{ cal g}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

$$2) \Delta S = \frac{547.6}{368} + \int_{368}^{373} dT \frac{0.482}{T} = \frac{547.6}{368} + 0.482 \ln \frac{373}{368} = 1.695 \text{ cal g}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

En realidad ΔS debe ser el mismo en ambos casos pues la entropía es función de estado.

35/003

4. Un mol de un gas perfecto a $T = 500 \text{ K}$, $P = 1 \text{ atm}$, se expande por una vía reversible e isotérmica hasta $P' = 0.01 \text{ atm}$. Calcular ΔQ , ΔW , ΔU , ΔS .

$$\Delta Q = \Delta W = \int_V^{V'} p dV = - \int_P^{P'} p dV = - RT \int_P^{P'} \frac{dP}{P} = - RT \ln \frac{P'}{P}$$

$$\Delta U = 0$$

$$\Delta S = - R \ln \frac{P'}{P}$$

$$R = 1.98 \text{ cal mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \Rightarrow \Delta Q = \Delta W = 3657 \text{ cal}, \quad \Delta S = 9.118 \text{ cal K}^{-1}$$

5. Tres moles de CO_2 se comprimen de $P_1 = 1 \text{ atm}$ a $P_2 = 10 \text{ atm}$ al mismo tiempo que se calientan de $T_1 = 273 \text{ K}$ a $T_2 = 373 \text{ K}$. Calcular la variación de entropía sabiendo que $C_V = 6.76 \text{ cal K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$ y suponiendo que es un gas ideal.

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_1^2 \frac{dU + dW}{T} = \int_1^2 \frac{1}{T} [m C_V dT + p dV] =$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{T} [m C_V dT + m R dT - V dP] = \int_1^2 \frac{1}{T} [m (C_V + R) dT - m R T \frac{dP}{P}] \Rightarrow$$

$$\Delta S = m \left\{ (C_V + R) \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{P_2}{P_1} \right\}$$

$$\Delta S = 3 \left\{ (6.76 + 1.98) \ln \frac{373}{273} - 1.98 \ln \frac{10}{1} \right\} \Rightarrow \Delta S = -5.49 \text{ cal K}^{-1}$$

6. Una máquina térmica que intercambia calor entre dos focos a temperaturas T_C y T_F , según un ciclo de Carnot, convierte en trabajo útil la cuarta parte del calor que se le suministra. Sabiendo que cuando la temperatura T_C disminuye en 60° el rendimiento técnico es hoy la mitad del anterior, calcúlase T_C y T_F .

$$\frac{T_C - T_F}{T_C} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{T_C - 60 - T_F}{T_C - 60} = \frac{1}{8}$$

$$3T_C - 4T_F = 0$$

$$7T_C - 8T_F = 60$$

$$T_C = 420 \text{ K}$$

$$T_F = 315 \text{ K}$$

7. ¿Cuál es el medio más eficaz de incrementar el rendimiento de una máquina de Carnot: Aumentar T_C en ΔT manteniendo T_F constante o disminuir T_F en ΔT manteniendo T_C constante?

$$\eta_1 = \frac{T_C + \Delta T - T_F}{T_C + \Delta T} \quad \eta_2 = \frac{T_C - T_F + \Delta T}{T_C} \quad , \quad \Delta T > 0$$

$$\eta_2 - \eta_1 = \frac{\Delta T}{T_C (T_C + \Delta T)} (T_C + \Delta T - T_F) > 0 \quad \text{En tanto el segundo procedimiento}$$

8. Una resistencia de 100Ω y capacidad calorífica 180 J/K es atravesada por una corriente de 5 A durante 10 s. , siendo 20° la temperatura inicial. Calcúlese la variación de entropía de la resistencia y del universo. 1) En el caso de que la resistencia esté sumergida en un líquido, permaneciendo constante la temperatura. 2) Suponiendo que la resistencia está aislada adiabáticamente del exterior, con lo cual su temperatura aumenta.

1) $\Delta S_{\text{resist}} = 0$ (estado inicial = estado final)

$$\Delta S_{\text{univ}} = \frac{Q}{T} = \frac{I^2 R t}{T} = \frac{5^2 \times 100 \times 10}{293} = 85.32 \text{ J/K}$$

- 2) El calor producido por efecto Joule aumenta la temperatura de la resistencia en ΔT

$$Q = I^2 R t = C \Delta T \Rightarrow \Delta T = \frac{I^2 R t}{C} = \frac{5^2 \times 100 \times 10}{180} \Rightarrow \Delta T = 138.89 \text{ K}$$

$$T_i = 293 \text{ K} \quad T_f = 431.89 \text{ K}$$

$$\Delta S_{\text{univ}} = \Delta S_{\text{res}} = C \ln \frac{T_f}{T_i} = 180 \ln \frac{431.89}{293} = 69.85 \text{ J/K}$$

9. Un muelle situado en un termostato a $T=300 \text{ K}$, se estira reversiblemente e isotérmicamente desde una longitud inicial L_1 (tensión nula) hasta una longitud final L_2 y en el proceso el muelle absorbe $Q=20 \text{ cal}$. A continuación se deja libre el muelle y este recupera, bruscamente, la longitud inicial al ceder $Q'=40 \text{ cal}$ al termostato. El muelle recupera las condiciones iniciales. Calcular el trabajo sobre el muelle y las variaciones de entropía del muelle al estirarlo y al dejarlo en libertad, así como la variación de entropía del universo en el proceso global.

La variación de energía interna experimentada por el muelle en el proceso total es cero y por tanto $0 = \Delta U = Q - W$, es decir que el trabajo realizado es $W = -20 \text{ cal}$.

$$\left. \begin{aligned} \text{Al estirar el muelle} \quad \Delta S(\text{muelle}) &= \frac{20}{300} = \frac{1}{15} \text{ cal K}^{-1} \\ \Delta S(\text{termostato}) &= -\frac{1}{15} \text{ cal K}^{-1} \end{aligned} \right\} \Delta S(\text{total}) = 0, \text{ pues el proceso es reversible.}$$

35/003

El muelle sufre un proceso total en el que el estado inicial es idéntico al final y en tanto al empuje.

$$\Delta S(\text{muelle}) = -1/15 \text{ cal/K}$$

Al empujar el muelle $\Delta S(\text{res muestab}) = + \frac{40}{300} = \frac{2}{15} \text{ cal K}^{-1}$

y en tanto al empuje $\Delta S(\text{total}) = + \frac{1}{15} \text{ cal K}^{-1}$

10. Calcúlese la variación total de entropía que tiene lugar en el universo cuando un ladrillo de $M=1\text{Kg}$ cae al suelo desde una altura $H=5\text{m}$, siendo la temperatura ambiente 27°C

$$\Delta S_{\text{total}} = \frac{Q}{T} = \frac{MgH}{T} = \frac{1\text{Kg} \cdot 9.82\text{ms}^{-2} \cdot 5\text{m}}{300\text{K}} = 0.1634 \text{ J K}^{-1}$$

11. Un refrigerador opera entre 0°C y 50°C . ¿Cuál es el coeficiente de eficiencia y qué potencia consume si extrae 400 cal/s del foco frío?

$$\eta = \frac{Q_c}{W} = \frac{1}{1 - \frac{Q_F}{Q_c}} = \frac{1}{1 - \frac{T_F}{T_C}} = \frac{T_C}{T_C - T_F} = \frac{313}{40} = 7.825$$

$$W + Q_F = Q_C \Rightarrow W + Q_F = \eta W \Rightarrow W = \frac{Q_F}{\eta - 1} \Rightarrow P = \frac{400\text{ cal/s}}{6.825}$$

$$P = 245.22 \text{ W}$$

$$1\text{ cal} = 4.184 \text{ J}$$

12. Un refrigerador doméstico tiene una temperatura interior de 4°C y está situado en una habitación a 14°C , consumiendo una potencia de 25W . ¿Qué potencia consumiría en una habitación a 24°C ?

$$\eta = \frac{T_F}{T_C - T_F}, \quad P = \frac{Q_F}{\eta - 1} = Q_F \frac{T_C - T_F}{T_F}$$

Si C es el calor específico medio de la muestra $Q_F = C(T_C - T_F) \Rightarrow P = C \frac{(T_C - T_F)^2}{T_F}$

$$\frac{P'}{P} = \frac{(T_C' - T_F)^2}{T_F} \frac{T_F}{(T_C - T_F)^2} \quad \text{"} \quad \frac{P'}{P} = \left(\frac{T_C' - T_F}{T_C - T_F} \right)^2$$

$$P' = 25\text{W} \left(\frac{24 - 4}{14 - 4} \right)^2 \Rightarrow P' = 100\text{W}$$

13. Un inventor anuncia que ha descubierto una máquina que extrae 10^8 J de una fuente térmica, entrega $2.5 \times 10^7 \text{ J}$ a la fuente fría y produce 25 kWh de trabajo mecánico. ¿Almosejano Ud. inventar dinero en este invento?

El calor extraído de la fuente caliente y no cedido a la fría son $7.5 \times 10^7 \text{ J}$. Además $25 \text{ kWh} = 25 \times 10^3 \times 3600 \text{ J} = 9 \times 10^7 \text{ J}$. El rendimiento es superior a la unidad y por tanto la máquina es absurda.

14. Expresar el rendimiento del ciclo de Carnot en función de los volúmenes que ocupa el gas perfecto en los momentos inicial y final de la expansión adiabática

$$\eta = \frac{T_c - T_f}{T_c} \quad \text{como } TV^{\gamma-1} \text{ es constante} \quad T_f V_f^{\gamma-1} = T_c V_i^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{T_c}{T_f} = \left(\frac{V_f}{V_i} \right)^{\gamma-1}$$

$$\eta = 1 - \left(\frac{V_i}{V_f} \right)^{\gamma-1}$$

15. ¿Qué rendimiento energético se produce al calentar 1 l. de aire a presión atmosférica hasta duplicar su volumen, isobáricamente. ¿Cuál es la variación de la energía interna? $\gamma = 1.4$

$$\Delta U = Q - W \quad Q = m C_p \Delta T \quad , \quad W = P \Delta V$$

$$\Delta U = m C_p \Delta T - P \Delta V \quad \text{pero } PV = nRT \Rightarrow P \Delta V = nR \Delta T \Rightarrow$$

$$\Delta U = C_p \frac{P}{R} \Delta V - P \Delta V = P \left(\frac{C_p + R}{R} - 1 \right) \Delta V \Rightarrow \Delta U = C_v \frac{P}{R} \Delta V$$

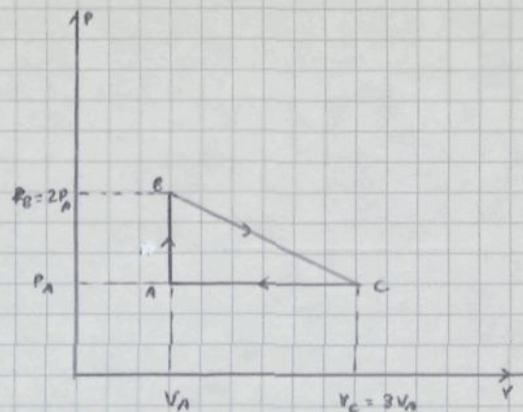
$$\Delta U = P \frac{C_v}{C_p - C_v} \Delta V \quad \Rightarrow \quad \Delta U = \frac{P}{\gamma - 1} \Delta V$$

$$\Delta U = \frac{1}{1.4 - 1} \cdot 1 \text{ atm} \cdot \frac{1.01325 \times 10^6 \text{ dinas cm}^{-2}}{1 \text{ atm}} \cdot 10^3 \text{ cm}^3 = 2.533 \times 10^9 \text{ erg.}$$

$$\eta = \frac{W}{Q} = \frac{P \Delta V}{C_p \frac{P}{R} \Delta V} = \frac{R}{C_p} = 1 - \frac{1}{\gamma} \Rightarrow \eta = 0.2857$$

35/003

16. Una máquina térmica funciona de forma quasi-estática siguiendo el ciclo ABC. Se usa como fluido working n moles de un gas biatómico ideal. 1) Encuentra el trabajo producido en cada ciclo, el calor absorbido por ciclo y la eficiencia de la máquina. 2) Encuentra el cambio de entropía del gas en las procesos AB, BC y CA.



$$W = \int p \, dV \quad W = \frac{1}{2} (P_B - P_A) (V_C - V_A) = P_A V_A$$

$$C_V = \frac{5}{2} n R, \quad C_P = \frac{7}{2} n R \quad \text{por ser el gas ideal biatómico.}$$

$$\text{De } PV = nRT \Rightarrow T_B = 2T_A, \quad T_C = 3T_A, \quad T_A = \frac{P_A V_A}{nR}$$

$$\Delta Q(A \rightarrow B) = U_B - U_A = \frac{5}{2} n R (T_B - T_A) = \frac{5}{2} n R T_A = \frac{5}{2} P_A V_A$$

$$\begin{aligned} \Delta Q(B \rightarrow C) &= U_C - U_B + \int_{V_B}^{V_C} p \, dV = \frac{5}{2} n R (T_C - T_B) + \int_{V_B}^{V_C} p \, dV \left[-\frac{P_A}{2V_A} V + \frac{5}{2} P_A V \right] = \\ &= \frac{5}{2} P_A V_A - \frac{P_A}{2V_A} \frac{1}{2} (V_C - V_B)^2 + \frac{5}{2} P_A (V_C - V_B) = \frac{5}{2} P_A V_A - 2P_A V_A + 5P_A V_A = \frac{11}{2} P_A V_A \end{aligned}$$

$$\Delta Q(C \rightarrow A) = U_A - U_C + \int_C^A p \, dV = n \frac{7}{2} R (T_A - T_C) + P_A (V_A - V_C) = -7P_A V_A + 2P_A V_A = -5P_A V_A$$

$$\eta = \frac{W}{Q} = \frac{P_A V_A}{\frac{5}{2} P_A V_A + \frac{11}{2} P_A V_A} = \frac{1}{8} = 0.125$$

$$\begin{aligned} \Delta S(1 \rightarrow 2) &= \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_1^2 \frac{dU}{T} + \int_1^2 dV \frac{P}{T} = C_V \ln \frac{T_2}{T_1} + nR \ln \frac{V_2}{V_1} \\ &= C_V \ln \frac{P_2 V_2}{P_1 V_1} + nR \ln \frac{V_2}{V_1} \end{aligned}$$

$$\Delta S(1 \rightarrow 2) = C_V \ln \frac{P_2}{P_1} + C_P \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$\Delta S(1 \rightarrow 2) = \frac{1}{2} n R \left(5 \ln \frac{P_2}{P_1} + 7 \ln \frac{V_2}{V_1} \right)$$

$$\Delta S(A \rightarrow B) = \frac{1}{2} n R (5 \ln 2 + 7 \ln 1) = +1.7329 n R$$

$$\Delta S(B \rightarrow C) = \frac{1}{2} n R (5 \ln \frac{1}{2} + 7 \ln 3) = +2.1123 n R$$

$$\Delta S(C \rightarrow A) = \frac{1}{2} n R (5 \ln 1 + 7 \ln \frac{1}{3}) = -3.8451 n R = -(\Delta S(A \rightarrow B) + \Delta S(B \rightarrow C))$$

17. Un mol de gas perfecto bicitómico que ocupa 1 l. a la presión normal, incrementa su entropía en 11.51 cal K^{-1} a la vez que su presión pasa a ser 10 atm. Calcular el volumen que ocupa al final del proceso

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = n C_V \int_1^2 dT \frac{1}{T} + n R \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = n C_V \ln \frac{T_2}{T_1} + n R \ln \frac{V_2}{V_1} = n C_V \ln \frac{P_2}{P_1} + n C_P \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$V_2 = V_1 \exp \left\{ \frac{1}{n C_P} (\Delta S - n C_V \ln \frac{P_2}{P_1}) \right\}$$

$$V_2 = 1 \text{ l} \exp \left\{ \frac{2}{7 \times 1.985} (11.51 - \frac{5}{2} (1.985 \ln 10)) \right\} \Rightarrow V_2 = 1.012 \text{ l.}$$

18. Estudiar la variación de entropía del sistema formado por 100 g de hielo fundente, con 200 g de agua a 10°C , cuando se los pone en contacto, estando el sistema térmicamente aislado

$$M_A = 200 \text{ g} \quad M_H = 100 \text{ g} \quad \Delta T = 10^\circ\text{K} \quad T_0 = 273.15$$

$$C = 1. \text{ cal g}^{-1} \text{ K}^{-1} \quad \text{calor específico del agua}$$

$$L = 80 \text{ cal g}^{-1} \quad \text{calor latente de fusión del hielo}$$

Al enfriarse el agua ΔT grados se liberan $M_A C \Delta T$ calones y en tanto se pueden fundir $M_A C \Delta T / L$ gramos de hielo, quedando así $M_H = M_H - M_A C \Delta T / L > 0$, entonces

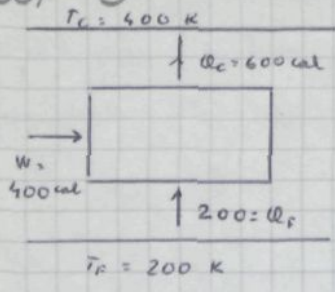
$$\Delta S = \frac{L M_A C \Delta T / L}{T_0} + M_A C \int_{T_0 + \Delta T}^{T_0} \frac{dT}{T} = \frac{M_A C \Delta T}{T_0} - M_A C \ln \left(1 + \frac{\Delta T}{T_0} \right)$$

$$\Delta S = M_A C \left\{ \frac{\Delta T}{T_0} - \ln \left(1 + \frac{\Delta T}{T_0} \right) \right\} \quad \Delta S = + 0.07056 \text{ cal K}^{-1}$$

19. Entre dos focos térmicos a temperaturas dadas T_F y $T_C > T_F$ trabaja un refrigerador irreversible que absorbe una cierta cantidad de trabajo W para extraer Q_F calones del foco frío en cada ciclo. Una máquina de Carnot trabaja entre los mismos focos y absorbiendo también Q_F calones necesitaría un trabajo $W_C < W$. Sin embargo, el trabajo adicional que requiere la máquina irreversible no se pierde en su totalidad. 1) Calcular que fracción del trabajo adicional se pierde completamente. 2) Calcular la variación de entropía en cada foco y del universo en cada ciclo.

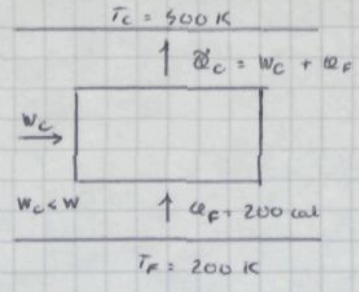
$$\text{Tomar : } T_F = 200 \text{ K}, \quad T_C = 300 \text{ K}, \quad Q_F = 200 \text{ cal}, \quad W = 400 \text{ cal.}$$

35/003



Irreversible

$E = 400 \text{ cal.}$



Reversible

El rendimiento de la máquina reversible es $\eta = 1 - \frac{T_F}{T_c} = \frac{1}{2}$

y además $\eta = 1 - \frac{Q_c}{Q_F} \Rightarrow \tilde{Q}_c = \frac{Q_F}{1-\eta} = \frac{200}{1/2} \Rightarrow Q_c = 400 \text{ cal.}$

$$\Delta S_{total} = -\frac{Q_F}{T_F} + \frac{Q_c}{T_c} =$$
$$= -\frac{200}{200} + \frac{600}{400} = \frac{1}{2} \text{ cal K}^{-1}$$

Energía recuperable $E = T_F \Delta S_{total}$

MECÁNICA ESTADÍSTICA

Preámbulo: Hasta aquí no hemos usado el hecho de que los cuerpos macroscópicos están formados por moléculas; probablemente si lo hacemos aprenderemos algo nuevo. El hecho de que haya un número extraordinariamente grande de moléculas en todo cuerpo macroscópico hace pensar en la posibilidad de usar un tratamiento estadístico y así surge la mecánica estadística, íntimamente relacionada con la termodinámica, si bien en esta última la composición molecular no se tiene en cuenta.

Asambleas: La asamblea es una gran colección de sistemas macroscópicos idénticos. Todos los miembros de la asamblea deben ser iguales para el observador macroscópico. Por ejemplo, tener todos el mismo número N de moléculas, ocupar el mismo volumen V , estar todos en equilibrio térmico con una fuente a temperatura T , — es decir, estar todos los miembros en un mismo estado termodinámico. Todos los miembros de la asamblea deben estar en contacto los unos con los otros y el conjunto totalmente aislado del medio ambiente.

Diferencias: Sabemos que las moléculas se mueven de forma caótica y que en un instante dado la configuración molecular particular de un miembro de la asamblea es materia de probabilidad. Si consideramos todos los miembros de la asamblea en un instante dado esperamos encontrar una tremenda variedad de configuraciones microscópicas. Estas configuraciones, vistas en un instante, es de esperar que fueran las mismas que si consideramos un único sistema y lo observamos durante un largo tiempo. Además, supondremos que las propiedades macroscópicas observadas, tales como P y U , son las medias resultantes de las distintas configuraciones consideradas, sea bien sobre una gran asamblea, sea sobre un largo período de tiempo (Teorema ergódico). Recuerdese que el intervalo entre dos choques de una molécula es extraordinariamente corto comparado con el tiempo de duración de una observación.

Configuraciones microscópicas. El problema es ahora caracterizar las configuraciones microscópicas. La Mecánica Cuántica nos dice que para un sistema de N partículas empujadas en un volumen V , que interactúan mediante un potencial, tiene sólo un conjunto discreto de valores posibles de la energía $\{E_q\}$, perfectamente determinado. $q \equiv$ conjunto de números cuánticos que determinan el estado de la asamblea en el nivel E_q . Se puede esperar que la energía de un miembro de la asamblea paseará, en el transcurso del tiempo, por todos los estados posibles. Evidentemente en un instante de tiempo pueden existir varios sistemas de la asamblea en el mismo estado energético E_q .

35/003

Propiedades: Sea $m_q \equiv$ número de miembros de la asamblea con energía E_q . Si m es el número total de miembros de la asamblea, entonces

$$m = \sum_q m_q \quad (1)$$

Llamaremos energía interna total de la asamblea a la energía de la misma

$$U = \sum_q m_q E_q = U_0 \quad (\text{Energía interna}) \quad (2)$$

Esta cantidad es constante pues hemos supuesto la asamblea aislada.

Nota: Fijemos que no consideramos como está constituida la asamblea o más precisamente el número distinto de formas de logeante. El número de formas distintas en que una asamblea con m sistemas puede distribuirse entre los $\{E_q\}$ estados posibles con m_q sistemas en el estado de energía E_q es

$$w = \frac{m!}{\prod_q m_q!} \quad (3)$$

¿Por qué? Introduzcamos las variables $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$. Asignemos α_1 a un sistema; esto puede hacerse de m formas distintas. Asignemos α_2 a otro sistema, lo cual puede hacerse de $(m-1)$ formas distintas, ... Por tanto tenemos $m!$ asignaciones posibles. Si hay m_q en el estado E_q , estos se pueden permutar entre sí de $m_q!$ maneras distintas sin que pase nada.

¿Qué valen los m_q ? ¿Cuál es la distribución de m_q propiada? Para contestar a esta pregunta definiremos una variable que llamaremos entropía

$$S \equiv k_B \ln w \quad (\text{Entropía}) \quad (4)$$

donde $k_B =$ constante de Boltzmann. Como la asamblea está aislada y en equilibrio exigiremos que se cumpla $dS = 0$. Noten que S de alguna forma mide el estado de orden del sistema: 1) Si todos los estados de la asamblea están en el mismo estado $w = 1 \Rightarrow S = 0$. 2) Si todo dos cuantos están ocupados y $m_1 = m_2 = m/2$ entonces $S = k_B \ln (m! / (m/2!)^2) > 0$. 3) Un aumento de w se traduce en un aumento de S y un aumento de w se traduce en desorden.

Problema: Para determinar los $\{m_q\}$ es necesario buscar el máximo de S con respecto a los posibles cambios de m_q , con el bien entendido que U y m deben permanecer constantes. Una forma elegante de resolver el problema es mediante la técnica de los multiplicadores de Lagrange.

Multiplicadores de Lagrange: Queremos hallar el mínimo de la función

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 \quad (1)$$

con la condición de que

$$x + y = 1/2 \quad (2)$$

1) Una forma de proceder es eliminar la variable y de (1) mediante el uso de (2)

$$F(x) = f(x, 1/2 - x) = x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{dF(x)}{dx} = 0 \Rightarrow 2x - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x = 1/4, y = 1/4$$

$$\text{El mínimo es para } x = 1/4, y = 1/4 \text{ y } f(1/4, 1/4) = \frac{3}{16}$$

2) Definamos

$$F(x, y) = x^2 + xy + y^2 + \lambda(x + y - 1/2) \quad \lambda = \text{multiplicador de Lagrange} \quad (3)$$

$$F(x+dx, y+dy) - F(x, y) = (2x+y+\lambda)dx + (x+2y+\lambda)dy = 0 \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x+y+\lambda=0 \\ x+2y+\lambda=0 \end{array} \right\} \Rightarrow x=y=-\lambda/3 \text{ y como } x+y=1/2, \lambda=-3/4 \Rightarrow x=y=1/4$$

Fórmula de Stirling. La expresión de S es muy complicada debido a la presencia de factoriales. Para $m \gg 1$ es válida la fórmula de Stirling

$$\ln m! = (m+1/2) \ln(m+1) - (m+1) + \frac{1}{2} \ln 2\pi + \frac{1}{12(m+1)} - \frac{1}{360(m+1)^3} + \dots$$

Como en nuestro caso $m \gg 1$ usaremos

$$\ln m! = m \ln m - m + O(\ln m) \quad (5)$$

Forma alternativa de $\mathcal{J}$: Usando (5)

$$\begin{aligned} \ln \omega &= \ln m! - \sum_q \ln m_q! = m \ln m - m - \sum_q (m_q \ln m_q - m_q) = m \ln m - \sum_q m_q \ln m_q = \\ &= \ln m \sum_q m_q - \sum_q m_q \ln m_q = - \sum_q m_q \ln \left(\frac{m_q}{m} \right) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\ln \omega = -m \sum_q P_q \ln P_q, \quad P_q \equiv \frac{m_q}{m} \quad (6)$$

donde P_q es la probabilidad de que la asamblea aparezca en el estado de energía E_q .

Problema: tenemos pues que hallar los estados estacionarios de $\mathcal{J}$ sujetos a las condiciones de ligadura

35/003

$$\mathcal{J} = -m k_B \sum_i p_i \ln p_i$$

(12)

$$U = m \sum_i p_i E_i, \quad \sum_i p_i = 1$$

Definimos

$$\mathcal{J}' = -k_B m \sum_i p_i \ln p_i + \lambda \left[m \sum_i p_i E_i - U \right] \quad \lambda = \text{multiplicador de Lagrange}$$

$$d\mathcal{J}' = -k_B m \sum_i dp_i \ln p_i - k_B m \sum_i p_i dp_i + \lambda m \sum_i E_i dp_i = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_i \left[1 + \ln p_i - \frac{\lambda}{k_B} E_i \right] dp_i = 0$$

Si $\beta \equiv -\lambda/k_B$ tenemos

$$\sum_i \left[1 + \ln p_i + \beta E_i \right] dp_i = 0, \quad \sum_i dp_i = 0 \quad (13)$$

$$\Rightarrow 1 + \ln p_i + \beta E_i = 0 \Rightarrow p_i = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_i} \Rightarrow$$

$$p_i = \frac{e^{-\beta E_i}}{\sum_{i'} e^{-\beta E_{i'}}} \quad (\text{Distribución de Gibbs o canónica}) \quad (14)$$

Función de partición: $Z \equiv \sum_i e^{-\beta E_i} \quad (15)$

Esta es la cantidad básica de la teoría y es una función de β y del volumen del gas, pues las E_i dependen de V : $Z(\beta, V)$.

Energía interna: se define como la energía media de un miembro de la asamblea

$$U \equiv \frac{\mathcal{U}}{m} = \sum_i p_i E_i = \frac{1}{Z} \sum_i E_i e^{-\beta E_i} \quad (16)$$

$$\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \right)_V = \frac{1}{Z} \left(\frac{\partial Z}{\partial \beta} \right)_V = -\frac{1}{Z} \sum_i E_i e^{-\beta E_i} \Rightarrow U = - \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \right)_V \quad (17)$$

Entropía: se define como la entropía media

$$S \equiv \frac{\mathcal{J}}{m} = -k_B \sum_i p_i \ln p_i = -k_B \sum_i p_i \ln \frac{e^{-\beta E_i}}{Z} = k_B \sum_i p_i \ln Z + \beta k_B \sum_i p_i E_i$$

$$S = k_B (\ln Z + \beta U) \quad (18)$$

¿Qué es la β ?

$$d(\ln Z) = \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \right)_V d\beta + \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial V} \right)_\beta dV = -U d\beta + \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial V} \right)_\beta dV \quad (19)$$

Además

$$d(U\beta) = U d\beta + \beta dU \Rightarrow -U d\beta = \beta dU - d(U\beta) \Rightarrow$$

$$d(\ln Z) = \beta dU - d(U\beta) + \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial V} \right)_{\beta} dV \Rightarrow$$

$$\beta dU = d[\ln Z + U\beta] - \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial V} \right)_{\beta} dV \quad (1)$$

Recordemos que en termodinámica tenemos $dU = T dS - P dV \Rightarrow$

$$\beta T dS = \beta dU + \beta P dV \quad (2)$$

y usando (1)

$$\beta T dS = d[\ln Z + U\beta] + [\beta P - \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial V} \right)_{\beta}] dV \Rightarrow$$

$$\left\{ \beta T - \frac{1}{k_B} \right\} dS + \left\{ \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial V} \right)_{\beta} - \beta P \right\} dV = 0 \quad (3)$$

de donde

$$\beta = \frac{1}{k_B T}, \quad P = \frac{1}{\beta} \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial V} \right)_{\beta} \quad (4)$$

Resumen: Calculado Z se obtiene

$$\beta = \frac{1}{k_B T}, \quad Z(V, T) = \sum_q e^{-E_q / k_B T}$$

$$U = k_B T^2 \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial T} \right)_V, \quad P = k_B T \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial V} \right)_T \quad (5)$$

$$S = k_B \ln Z + \frac{U}{T}, \quad P_q = \frac{1}{Z(V, T)} e^{-E_q / k_B T}$$

Vemos pues que todo el problema está en calcular $Z(V, T)$ y esto implica conocer los niveles energéticos E_q de los distintos estados del sistema encerrado en una caja de volumen V .

Gas perfecto. Pongámonos a calcular Z para un gas perfecto. Sean E_α los estados posibles energéticos de una partícula del gas encerrado en el volumen V . Como la definición de gas perfecto no hay energía de interacción entre las N moléculas del sistema basta conocer $\{E_\alpha\}$ y todas las posibilidades de ocupación. Supondremos que los números de ocupación no están limitados (estadística de Boltzmann), entonces

$$\sum_q e^{-\beta E_q} = \frac{1}{N!} \left(\sum_\alpha e^{-E_\alpha / k_B T} \right)^N \quad (6)$$

35/003

¿Cuándo es válido? Imaginemos que los estados posibles monoenergéticos son $\epsilon_1, \dots, \epsilon_m$ y que $N=2$ entonces los estados posibles de ocupación son

$$2\epsilon_1, \epsilon_1 + \epsilon_2, \dots, \epsilon_1 + \epsilon_m; 2\epsilon_2, \epsilon_2 + \epsilon_3, \dots, \epsilon_2 + \epsilon_m; \dots; 2\epsilon_m$$

es decir $\alpha = 1 + \dots + N = \frac{N+1}{2} N$ formas distintas. Entonces

$$Z = \sum_{q=1}^{\alpha} e^{-\beta \epsilon_q} = \frac{1}{2!} \left(\sum_{\alpha=1}^m e^{-\beta \epsilon_{\alpha}} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\sum_{\alpha=1}^m e^{-2\beta \epsilon_{\alpha}} \right)$$

Supongamos que $\epsilon_{\alpha} \equiv \alpha \epsilon$ y que $x \equiv e^{-\beta \epsilon}$ entonces

$$Z = \frac{1}{2} \left(x \frac{1-x^m}{1-x} \right)^2 + \frac{1}{2} x^2 \frac{1-x^{2m}}{1-x^2} \Rightarrow$$

$$Z = \frac{1}{2} \left(x \frac{1-x^m}{1-x} \right)^2 \left\{ 1 + \frac{(1-x^{2m})(1-x)^2}{(1-x^m)^2(1-x^2)} \right\} \quad (2)$$

El factor correctivo es

$$S(x) \equiv \frac{(1-x)^2(1-x^{2m})}{(1-x^2)(1-x^m)^2}$$

$$S(x) \sim 1 \quad T \rightarrow 0$$

$$S(x) \sim \frac{1}{m} \quad T \rightarrow \infty$$

La aproximación es siempre válida para T grandes y sistemas poco densos

Gases perfectos monoatómicos: En este caso, si el spin es nulo como sucede habitualmente, no hay grados de libertad internos y los niveles vienen dados por

$$\epsilon_{\alpha} = \frac{4\pi^2 \hbar^2}{8ML^2} (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) \quad V \equiv L^3 \quad (3)$$

$$k_i \text{ enteros } > 0, \quad \alpha \equiv (k_1, k_2, k_3)$$

Si $k^2 \equiv k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$ el número de estados entre k y $k+dk$ es $4\pi k^2 dk / 8$, aproximación válida independiente de la forma de V en el límite de grandes V .

$$\sum_{\alpha} e^{-\epsilon_{\alpha} \beta} = \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} dk k^2 e^{-\pi^2 k^2 / 2ML^2 kT} = V \left(\frac{m k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} \quad (4)$$

$$Z(V, T) = \frac{V^N}{N!} \left(\frac{m k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3N/2}$$

gases perfectos monoatómicos

Estadística de Boltzmann

(10)

$$\ln Z = - \ln N! + N \ln V + \frac{3}{2} N \ln T + \frac{3}{2} N \ln \frac{M k_B}{2 \pi \hbar^2} \quad (1)$$

Presión $P = k_B T \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial V} \right)_T \Rightarrow P = k_B T N \frac{1}{V}$

$$PV = N k_B T = m (N_{\text{avg}} k_B) T = m R T \quad (1')$$

$$R \equiv N_{\text{avg}} k_B = [6.022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}] \times [1.380 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}]$$

$$= 8.31451 (31) \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} = 1.987192 (75) \text{ cal mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \quad (2)$$

donde m es el número de moles

Energía interna $U = k_B T^2 \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial T} \right)_V \Rightarrow U = k_B T^2 \frac{3}{2} N \frac{1}{T}$

$$U = \frac{3}{2} N k_B T = 3N \left(\frac{1}{2} k_B T \right) \quad (3)$$

esta es la famosa fórmula de equipartición de la energía. Cada grado de libertad contribuye en $k_B T/2$ a la energía interna. Aquí cada molécula tiene solo dos grados de libertad: los traslacionales

$$C_V \equiv \frac{\partial U}{\partial T} \Rightarrow C_V = \frac{3}{2} N k_B = m \frac{3}{2} R = m 2.98079 (11) \text{ cal mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \quad (4)$$

$$C_P = C_V + m R \Rightarrow C_P = m \frac{5}{2} R = m 4.96798 (19) \text{ cal mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \quad (5)$$

$$\gamma = \frac{5}{3} = 1.666... \quad (6)$$

gases biatómicos: Además de los tres grados de libertad traslacionales hay dos rotacionales y uno vibracional, que en general, contribuye poco a la energía interna y

$$U = 5N \left(\frac{1}{2} k_B T \right) \quad (7)$$

$$C_V = m \frac{5}{2} R, \quad C_P = m \frac{7}{2} R, \quad \gamma = \frac{7}{5} = 1.400 \quad (8)$$

Entropía

$$S = \frac{3}{2} N k_B + k_B N \ln V + \frac{3}{2} k_B N \ln k_B T + \frac{3}{2} k_B N \ln \frac{M}{2 \pi \hbar^2} - k_B N \ln N! + k_B N$$

$$S = \frac{5}{2} N k_B - N k_B \ln R + \frac{5}{2} N k_B \ln k_B T + N k_B \left(\ln \left(\frac{M}{2 \pi \hbar^2} \right) \right)^{3/2} \quad (9)$$

$$dS = C_P \frac{dT}{T} - R \frac{dP}{P} \quad \text{para un mol} \quad (10)$$

35/003

Nótese que $S \rightarrow 0$ para $T \rightarrow 0$. Esto no es cierto pues la fórmula falla para $T \rightarrow 0$, al fallar la aproximación de Boltzmann.

Distribución de Maxwell. Consideremos un viento formado por átomos, partículas o moléculas y deseamos calcular la distribución de sus velocidades en función de T . Supongamos que la energía se puede escribir

$$E(q, p) = K(p) + V(q) \quad p = (p_1, \dots, p_{3N}) \quad q = (q_1, \dots, q_{3N}) \quad (11)$$

la probabilidad de hallar el sistema en $d^{3N}p \, d^{3N}q$ es

$$dw = \rho(q, p) \, d^{3N}q \, d^{3N}p \quad \rho(q, p) = A e^{-K(p)/k_B T} e^{-V(q)/k_B T} \quad (12)$$

donde A es una constante de normalización. Entonces la probabilidad de que una partícula tenga un momento en d^3p es

$$dw = u e^{-\vec{p}^2 / 2m k_B T} d^3p$$

y como $\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$ se tiene

$$dw = \frac{1}{(2\pi m k_B T)^{3/2}} e^{-\vec{p}^2 / 2m k_B T} d^3p \quad (13)$$

Pasando a velocidades

$$dw_v = \rho(v) \, d^3v \quad (14)$$

$$\rho(v) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{-\frac{m}{2k_B T} v^2} \quad (\text{Distribución de Maxwell})$$

Velocidad cuadrática media

$$\overline{v_x^2} = \int dw_v v_x^2 = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \int dv v^2 e^{-\frac{m}{2k_B T} v^2} = \frac{k_B T}{m} \quad (15)$$

y la energía cinética media es $\langle K \rangle = \frac{3}{2} k_B T$, como se esperaba

- 1) El aire se compone, fundamentalmente, de moléculas diatómicas y su peso molecular es 29.09 g/mol. ¿Cuál tiene mayor energía total, 1 mol de aire en reposo a 25°C o un mol de aire a 25°C con una velocidad del viento de 10 m/s? ¿Cuál usará la energía para mover un mol de viento?

$$U = \frac{5}{2} N k_B T + \frac{1}{2} M v^2$$

$$N k_B = R = 8.3144 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$$

$$1) \quad U = \frac{5}{2} \times 8.3144 \times 298.15 + 0 = 6.197 \times 10^3 \text{ J/mol}$$

$$2) \quad U = \frac{5}{2} \times 8.3144 \times 298.15 + \frac{1}{2} \times 29.09 \times 10^2 = 6.094 \times 10^3 \text{ J/mol}$$

El segundo

2. Un recipiente de 5 cm³ contiene gas nitrógeno a la presión de 0.2 atm., siendo la velocidad cuadrática media de las moléculas 4000 m/s². Calcúlese el número de moles de nitrógeno en dicho recipiente.

$$PV = nRT \quad \text{y} \quad \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T \quad \Rightarrow \quad n = \frac{PV}{RT} = \frac{PV}{R} \frac{3 k_B}{m \langle v^2 \rangle} = \frac{PV}{k_B N_A} \frac{3}{m \langle v^2 \rangle}$$

$$n = \frac{3 PV}{(m N_A) \langle v^2 \rangle} \quad N_2 = 28 \text{ g.}$$

$$n = \frac{3 \times 0.2 \text{ atm} \times \frac{1.01325 \times 10^6 \text{ g cm}^{-1} \text{ s}^{-2}}{\text{atm}} \times 5 \text{ cm}^3}{28 \text{ g mol}^{-1} \times 4 \times 10^7 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-2}} \Rightarrow n = 2.7141 \times 10^{-3} \text{ mol}$$

3. Se introducen 100 g de hidrógeno en un recipiente a 1 l. y se alcanza una presión de 1 atm. Calcúlese la velocidad cuadrática media.

$$PV = nRT, \quad \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T \quad \langle v^2 \rangle = \frac{3 k_B T}{m} = \frac{3 k_B}{m} \frac{PV}{n k_B N_A} = \frac{3 PV}{(m N_A) n}$$

$$\langle v^2 \rangle = \frac{3 \times 1 \text{ atm} \times \frac{1.01325 \times 10^6 \text{ g cm}^{-1} \text{ s}^{-2}}{\text{atm}} \times 10^3 \text{ cm}^3}{2 \text{ g mol}^{-1} \times \frac{100}{2} \text{ mol}} \quad \sqrt{\langle v^2 \rangle} = 5.5134 \times 10^3 \text{ cm s}^{-1}$$

4. Calcúlese la velocidad cuadrática media que poseen las moléculas de hidrógeno en condiciones normales de presión y temperatura. ¿Qué tanto por ciento de las moléculas tienen velocidades superiores a $m \langle v^2 \rangle^{1/2}$, $m = 1, 2, 3, \dots$?

35/003

$$\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T \quad \Rightarrow \quad \langle v^2 \rangle^{1/2} = \sqrt{\frac{3 k_B T}{m}} \quad \Rightarrow \quad \langle v^2 \rangle^{1/2} = \sqrt{\frac{3 R T}{m N_{Av}}}$$

$$v_m = \langle v^2 \rangle^{1/2} = \left\{ \frac{3 \times 8.31447 \times 10^7 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \times 273.15 \text{ K}}{2 \text{ g mol}^{-1}} \right\}^{1/2} \Rightarrow v_m = 1.8457 \times 10^5 \text{ cm s}^{-1}$$

$$p(v) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right) e^{-\frac{m}{2k_B T} v^2}$$

$$P_m = \int_{N v_m}^{\infty} v^3 p(v) dv = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} 4\pi \int_{N v_m}^{\infty} dv v^2 e^{-\frac{m}{2k_B T} v^2}$$

$$= 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \left(\frac{2 k_B T}{m} \right)^{3/2} \int_{\sqrt{3/2} m}^{\infty} dx x^2 e^{-x^2} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{3/2} m}^{\infty} dx x^2 e^{-x^2}$$

$$P_0 = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} dx x^2 e^{-x^2} = 1$$

$$P_m = 1 - \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{3/2} m} dx x^2 e^{-x^2}$$

$$P_m = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{3/2} m}^{\infty} dx x^2 e^{-x^2} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left\{ -\frac{1}{2} x e^{-x^2} \Big|_{\sqrt{3/2} m}^{\infty} + \frac{1}{2} \int_{\sqrt{3/2} m}^{\infty} dx e^{-x^2} \right\} =$$

$$P_m = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} m e^{-\frac{3}{2} m^2} + \frac{1}{2} \int_{\sqrt{3/2} m}^{\infty} dx e^{-x^2} \right\}$$

$$P_m = \sqrt{\frac{6}{\pi}} m e^{-\frac{3}{2} m^2} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{3/2} m}^{\infty} dx e^{-x^2}$$

$$P_0 = 1$$

$$P_3 =$$

$$P_1 = 0.308361$$

$$P_4 =$$

$$P_2 =$$

$$P_5 =$$

5. Calcúlese la energía cinética media de traslación de una molécula gaseosa a 300 K. Calcúlese la velocidad cuadrática media si el gas es hidrógeno, oxígeno o nitrógeno.

$$E = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T = \frac{3}{2} 1.380662 \times 10^{-16} \text{ erg K}^{-1} 300 \text{ K} = 6.2130 \times 10^{-14} \text{ erg}$$

$$H_2 \quad \langle v^2 \rangle = \frac{2E}{m} = \frac{2E}{M} N_{Av} = 2 \times \frac{6.2130 \times 10^{-14} \text{ erg}}{2 \text{ g}} \times 6.022045 \times 10^{23} \Rightarrow \langle v^2 \rangle^{1/2} = 1.9343 \times 10^5 \text{ cm s}^{-1}$$

$$O_2 \quad \langle v^2 \rangle^{1/2} = 1.8357 \times 10^5 \text{ cm s}^{-1}, M = 4 \text{ g}; \quad Hg \quad \langle v^2 \rangle^{1/2} = 1.9314 \times 10^4 \text{ cm s}^{-1} \quad \text{con } M = 200.59 \text{ g}$$

6. Calcular la contribución de la energía de traslación y de rotación interna de 2 moles de Oxígeno a 25°C.

Traslación $E_T = \frac{3}{2} n R T = \frac{3}{2} 2 \text{ mol } 8.31447 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1} \times 298.15 \text{ K} = 7.4368 \times 10^3 \text{ J}$

Rotación $E_R = \frac{2}{2} n R T = 4.9579 \times 10^3 \text{ J}$

7. Calcularse el recorrido libre medio de las moléculas de aire contenidas en una habitación a 1 atm de presión y 25°C. El "radio" de las moléculas de aire se considera que es $r = 1.5 \times 10^{-10} \text{ m}$.

Una molécula tiene radio r . Demos que dos moléculas chocan cuando sus centros se aproximan a una distancia menor que $2r$. Una de estas moléculas ficticias de radio $2r$ barre en el tiempo Δt un volumen $\pi (2r)^2 n_{\text{mol}} \Delta t$. El número de choques es $4\pi r^2 n_{\text{mol}} \Delta t m$, donde m es el número de moléculas reales por unidad de volumen. El espacio recorrido es $n_{\text{mol}} \Delta t$, y por tanto el recorrido libre medio es

$$\lambda = \frac{n_{\text{mol}} \Delta t}{4\pi r^2 m n_{\text{mol}} \Delta t} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{4\pi r^2 m}$$

$V = 1 \text{ m}^3$ $P = 1 \text{ atm} = 1.01325 \times 10^6 \text{ g cm}^{-1} \text{ s}^{-2}$ $T = 298.15 \text{ K}$

$PV = n R_0 T$ $n = \frac{PV}{R_0 T} = \frac{1.01325 \times 10^6 \text{ g cm}^{-1} \text{ s}^{-2} \times 1 \text{ m}^3}{1.380662 \times 10^{-16} \text{ g cm}^2 \text{ s}^{-2} \text{ K}^{-1} \times 298.15 \text{ K}} \Rightarrow n = 2.5644 \times 10^{19} \text{ moléculas cm}^{-3}$

$\lambda = 1.4369 \times 10^{-5} \text{ cm}$

8. Una vasija de volumen V contiene N moléculas de un gas perfecto. Sea m el número de moléculas en una parte de la vasija de volumen v . Considera que la probabilidad de encontrar una cierta molécula en v es v/V , en el estado de equilibrio. 1) Determinar la probabilidad $f(m)$ de que haya m moléculas en v . 2) Calcular $\langle m \rangle$, $\sigma^2 \equiv \langle (m - \langle m \rangle)^2 \rangle$. 3) Demostrar que para N y m grande $f(m)$ es aproximadamente una gaussiana. 4) Demostrar que en el límite $v/V \rightarrow 0$, $V \rightarrow \infty$, $N/V = \bar{n}$, $f(m)$ se aproxima a una distribución de Poisson

$$f(m) = \frac{\langle m \rangle^m}{m!} e^{-\langle m \rangle}$$

- 1) La probabilidad de encontrar una molécula en v es $p = v/V$ y la de encontrarla

35/003

en $V-v$ es $(1-p)$. Como hay N moléculas la probabilidad de que haya m en v es

$$f(m) = \frac{N!}{m! (N-m)!} p^m (1-p)^{N-m} \quad p = \frac{Nv}{V}$$

2) Definimos la función generatriz $F(x) \equiv \sum_{m=0}^{\infty} f(m) x^m = [(1-p) + px]^N$

$$F(1) = 1.$$

$$\langle m \rangle = \sum_{m=0}^N m f(m) = \left. \frac{dF(x)}{dx} \right|_{x=1} = Np \quad \Rightarrow \quad \langle m \rangle = \frac{Nv}{V}$$

$$\sigma^2 = \langle m^2 - 2m\langle m \rangle + \langle m \rangle^2 \rangle = \langle m^2 - m\langle m \rangle \rangle = \langle m(m-1) \rangle + (1 - \langle m \rangle)\langle m \rangle =$$

$$= \left. \frac{d^2 F(x)}{dx^2} \right|_{x=1} + Np(1-Np) = N(N-1)p^2 + Np(1-Np) = Np(1-p) = \frac{Nv}{V} \left(1 - \frac{v}{V}\right)$$

3) Si $N \gg 1$ y $m \gg 1$ $\ln N! = N \ln N - \dots$

$$\phi(m) \equiv \ln f(m) = N \ln N - m \ln m - (N-m) \ln (N-m) + m \ln p + (N-m) \ln (1-p)$$

$$\frac{d\phi(m)}{dm} = 0 \quad -\ln m - 1 + \ln(N-m) + 1 + \ln p - \ln(1-p) = 0 \quad m = Np = \langle m \rangle$$

es decir que $\phi(m)$ tiene un máximo en $\langle m \rangle = Np$

$$\phi(m) = \phi(\langle m \rangle) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 \phi(m)}{dm^2} \right|_{m=\langle m \rangle} (m - \langle m \rangle)^2 + \dots$$

$$\phi(m) = \phi(\langle m \rangle) + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{\langle m \rangle} - \frac{1}{N - \langle m \rangle} \right) (m - \langle m \rangle)^2 + \dots$$

$$\phi(m) = \phi(\langle m \rangle) - \frac{1}{2\sigma^2} (m - \langle m \rangle)^2 + \dots$$

Luego

$$f(m) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [m - \langle m \rangle]^2 \right\}$$

4) $\lim F(x) \equiv \bar{F}(x) = \lim \exp \{ N \ln [(1-p) + px] \} = \exp \{ \lim N \ln [1 - p(1-x)] \}$

$$= \exp \{ \lim [-Np(1-x) + N O(p^2)] \} \quad \text{Como } Np = \frac{Nv}{V} = \langle m \rangle$$

$$\bar{F}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \bar{f}(m) x^m = e^{-\langle m \rangle (1-x)} \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(m) = \frac{\langle m \rangle^m}{m!} e^{-\langle m \rangle}$$

9. Los niveles energéticos de un oscilador de pulsación ω , monodimensional, son

$$E = \hbar \omega (m + 1/2) \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Cuando el sistema contiene N osciladores independientes sus energías son

$$E = \hbar \omega (M + N/2) \quad M = 0, 1, 2, \dots$$

1) Encontrar el peso termodinámico de que el sistema esté en el estado M : W_M . 2) Calcular la entropía y hallar la relación entre la energía y la temperatura ($M, N \gg 1$).

1) Si el sistema está en el estado M , se debe tener en cuenta que $m_1 + m_2 + \dots + m_N = M$. Luego W_M es el número de estados $(m_1, \dots, m_N)$ compatibles con la condición mencionada antes y con todas las $m_i \geq 0$.

$$W_M = \binom{M+N-1}{M} = \frac{(M+N-1)!}{M! (N-1)!}$$

$$2) S = k_B \ln W_M = k_B \{ (M+N) \ln (M+N) - M \ln M - N \ln N \}$$

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{\partial S}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial E} = \frac{k_B}{\hbar \omega} \ln \frac{M+N}{M} = \frac{k_B}{\hbar \omega} \ln \frac{E/\hbar \omega + N/2}{E/\hbar \omega - N/2}$$

$$\frac{1}{T} = \frac{k_B}{\hbar \omega} \ln \frac{1 + N\hbar \omega / 2E}{1 - N\hbar \omega / 2E} \Rightarrow$$

$$E = \frac{\hbar \omega N}{2} \frac{e^{\hbar \omega / T k_B} + 1}{e^{\hbar \omega / T k_B} - 1}$$

$$E \sim N k_B T \quad \frac{\hbar \omega}{T k_B} \ll 1$$

$$E \sim \frac{\hbar \omega}{2} N \quad \frac{\hbar \omega}{T k_B} \gg 1$$

10. Un sistema tiene solo dos microestados con energías $\epsilon_1 = 0$ y $\epsilon_2 = \epsilon$. Probar que la energía media del sistema es

$$U(T) = \frac{\epsilon e^{-\epsilon/k_B T}}{1 + e^{-\epsilon/k_B T}}$$

1) Encontrar $C(T)$ y estudiar sus valores límites para $T \rightarrow 0$ y $T \rightarrow \infty$. 2) Hallar la entropía y estudiar su límite en los casos anteriores.

$$Z = 1 + e^{-\epsilon/k_B T}$$

$$U = \frac{1}{Z} \epsilon e^{-\epsilon/k_B T}$$

$$1) C(T) = \frac{dU(T)}{dT} = \frac{\epsilon^2}{k_B T^2} \frac{e^{-\epsilon/k_B T}}{(1 + e^{-\epsilon/k_B T})^2}$$

$$C(T) \sim \frac{\epsilon^2}{k_B T^2} e^{-\epsilon/k_B T} \quad T \rightarrow 0$$

$$C(T) \sim \frac{\epsilon^2}{4 k_B T^2} \quad T \rightarrow \infty$$

$$2) S(T) = k_B \ln Z + k_B \frac{1}{T} U = k_B \ln (1 + e^{-\epsilon/k_B T}) + \frac{1}{T} \frac{\epsilon e^{-\epsilon/k_B T}}{1 + e^{-\epsilon/k_B T}}$$

35/003

$$S(T) \sim 0 \quad T \rightarrow 0$$

$$S(T) \sim k_B \ln 2 \quad T \rightarrow \infty$$

11. Un gas perfecto está formado por partículas de masa m , velocidad v y momento p , demuestran que la expresión de la presión es $P = \frac{1}{3} m p v$. Dar la expresión de P en función de la densidad de energía cinética ϵ en un gas normal y en un relativista. (n = número de partículas por unidad de volumen)

Consideremos el gas encerrado en un cubo de volumen V . Una partícula de momento p que encuentra una pared normal a su camino y sufre una reflexión elástica transmite a la pared un momento $2p$. Si hay n partículas por unidad de volumen, el número de partículas que llegan a la pared por unidad de tiempo es $n v$. La contribución a la presión total de estas partículas es $2 p n v$. Sumando sobre todas las partículas obtenemos un factor $1/6$, pues solo un sexto de las partículas con velocidad v golpea la pared. (hay seis vectores en el espacio) y en tanto

$$P = \frac{1}{3} m p v$$

Partículas normales: la energía cinética es $\frac{1}{2} m v^2$ y la densidad es $\epsilon = \frac{1}{2} m n v^2$, como $p = m v$ se obtiene

$$P = \frac{2}{3} \epsilon \quad (v \ll c)$$

Partícula relativista $p = E/c$ $v = c$, $\epsilon = m E$ =

$$P = \frac{1}{3} \epsilon \quad (v \approx c)$$

12. Consideremos una ^{esférica} nube muy poco densa formada por N protones y N electrones. Sea T su temperatura. La energía cinética es $K = 2N \left(\frac{3}{2} k_B T \right) = 3N k_B T$. Su energía potencial es $\Omega = -\lambda G M^2 / R$ donde λ es una constante del orden de la unidad y R el radio de la esfera. El teorema del virial dice que $K = -\frac{1}{2} \Omega$. Sea d la distancia media entre protones. Probar que $T \propto 1/d$

$$3N k_B T = -\frac{1}{2} \Omega = \frac{\lambda G M^2}{2R}$$

Se tiene que $R^3 \propto N d^3$ y $M \propto m_p N$ por lo cual

$$k_B T \propto G m_p^2 \frac{N^{2/3}}{d}$$

Introduciendo la constante de estructura fina gravitacional $\alpha_G = G m_p^2 / \hbar c$ se tiene

$$k_B T \approx \alpha_G N^{2/3} \frac{\hbar c}{d}$$

Se puede introducir

$$N_0 = \frac{1}{\alpha_G^{3/2}} = 2.2042 (20) \times 10^{57}$$

y entonces

$$k_B T \approx \left(\frac{N}{N_0} \right)^{2/3} \frac{\hbar c}{d}$$

Esta nube tiende a contraerse (disminución de d) debido a las fuerzas gravitatorias y de acuerdo con la ecuación obtenida aumenta su temperatura. Esto corresponde al proceso de formación de una estrella a partir de una nube gaseosa. Nota que la energía total es

$$U = K + \Omega \approx + \frac{1}{2} \Omega \approx - \frac{1}{2} \frac{G M^2}{R}$$

y en tanto la energía total de la estrella disminuye cuando ésta se contrae. De hecho cuando se contrae se calienta más y más y por consecuencia radia energía. ¡Tenemos un sistema que está perdiendo energía y cuya temperatura está aumentando!

13. Estrellas de hidrógeno no demasiado calientes (para las que se pueda despreciar la presión de la radiación) tienen un comportamiento regido por la ecuación aproximada

$$P V = N k_B T + \frac{N \hbar^2}{m_e d^3}$$

donde d es la distancia media entre los electrones. El último término se llama la presión de degeneración y es debido al principio de exclusión de Pauli. Además la presión P es del orden de la densidad media de energía cinética y en tanto $P V \approx K$ y en el teorema del virial $K = - \frac{1}{2} \Omega$. Estudiar la variación de $k_B T$ con d .

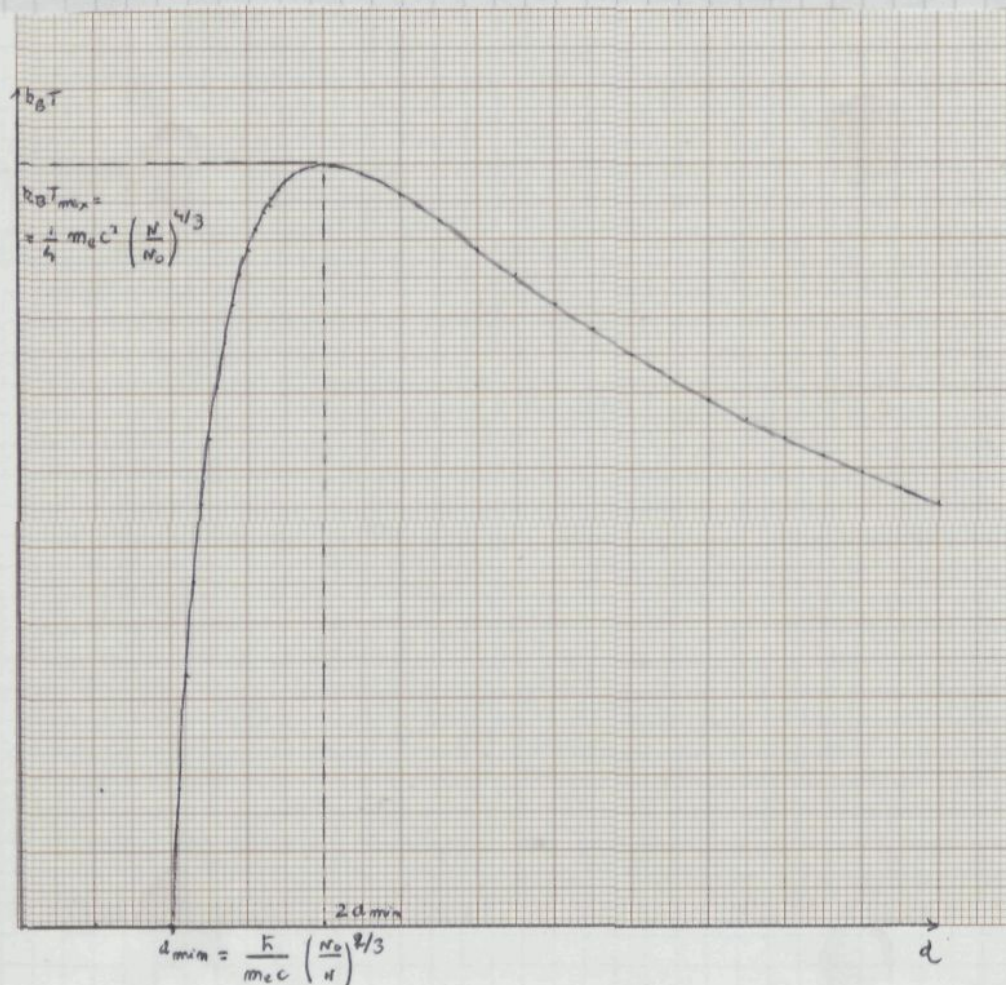
$$P V = K = - \frac{1}{2} \Omega \approx \frac{G M^2}{R} = \frac{G N^2 m_p^2}{N^{1/3} d} = \frac{\hbar c \alpha_G N^{2/3} N}{d} = \left(\frac{N}{N_0} \right)^{2/3} \frac{\hbar c}{d} N$$

$$N_0 = \frac{1}{\alpha_G^{3/2}} = 2.2042 (20) \times 10^{57}$$

35/003
Lentones

$$k_B T = - \frac{\hbar^2}{m_e d^2} + \left(\frac{N}{N_0} \right)^{2/3} \frac{\hbar c}{d}$$

$$k_B T = - \frac{1}{m_e c^2} \left(\frac{\hbar c}{d} \right)^2 + \left(\frac{N}{N_0} \right)^{2/3} \frac{\hbar c}{d}$$



Notar que la estrella tiene una temperatura máxima posible

$$k_B T_{\max} = \frac{1}{4} m_e c^2 \left(\frac{N}{N_0} \right)^{4/3}$$

La estrella puede contraerse hasta $d = d_{\min} = \frac{\hbar}{m_e c} \left(\frac{N_0}{N} \right)^{2/3}$. Cuando T varía de $T_{\max}$ a $T=0$

la estrella debe radiar mucho en un tiempo muy corto. Durante este período las estrellas son llamadas enanas blancas.

Vemos pues que una nube de gas hidrógeno, se contrae y calienta bajo la acción de la fuerza gravitacional hasta alcanzar una temperatura $k_B T_{\max}$. Si esta es suficientemente elevada tienen lugar procesos de fusión que producirán energía. Cuando una parte del hidrógeno se haya quemado así, esto se haya producido la fusión de los elementos más pesados, nada prohibe que la estrella se contraiga hasta convertirse en un pedrusco de ^{56}Fe , fierro.

14. Sea una nube de masa M y radio R ; su energía potencial es $\Omega = -\lambda G M^2 / R$ donde λ es un número del orden de la unidad. Se puede probar que en una situación de equilibrio la presión interna y Ω están relacionados por la ecuación

$$3PV = -\Omega$$

Se sabe que si las partículas son no relativistas $P = 2E/3$ y que si son altamente relativistas $P = E/3$, donde E es la densidad de energía cinética media. Discuta la estabilidad del sistema.

La energía total es

$$U = K + \Omega \quad \text{y} \quad K = VE$$

Sistema no relativista $U = K + \Omega = VE - 3PV = V(E - 3P) = V(E - 2E) = -EV < 0$

y el sistema es estable

Sistema altamente relativista $U = V(E - 3P) = 0$ sistema inestable.

- 15) Se puede probar que a una temperatura T la densidad de energía de un gas de fotones es del orden de $(k_B T)^4 / (hc)^3$. Supongamos una masa gaseosa de forma esférica con radio R formada por N átomos de hidrógeno en interacción gravitacional a una temperatura T . Se puede probar que la ecuación de estado para este sistema es aproximadamente

$$PV = N k_B T + \frac{(k_B T)^4}{(hc)^3} V$$

Recuerda que en una situación de equilibrio $3PV = -(\text{potencial gravitacional})$. Cuando el término debido a la radiación domina la estrella es inestable. Demuestra que esto implica que las estrellas no pueden ser mayores que un cierto número de veces la masa del sol.

$$PV = \frac{GM^2}{R} \quad k_B T + \frac{(k_B T)^4}{(hc)^3} \frac{V}{N} = \frac{G m_p^2 N}{R} \quad V \propto N d^3 \Rightarrow R \propto N^{1/3} d$$

$$k_B T + (k_B T)^4 \left(\frac{d}{hc} \right)^3 = \frac{G m_p^2}{d} N^{2/3} = \frac{hc}{d} \left(\frac{G m_p^2}{hc} \right) N^{2/3} = \frac{hc}{d} \alpha_0 N^{2/3}$$

$$k_B T + (k_B T)^4 \left(\frac{d}{hc} \right)^3 = \frac{hc}{d} \left(\frac{N}{N_0} \right)^{2/3}$$

$$N_0 = \frac{1}{\alpha_0^{3/2}} = 2.2042(20) \times 10^{57}$$

$$x \equiv k_B T (d/hc) = x(1+x^3) = \left(\frac{N}{N_0} \right)^{2/3}$$

35/003

El término de reducción de número si $x \geq 2$ y en este caso $\left(\frac{N}{N_0}\right)^{2/2} > 18$; luego el número máximo de protones en una estrella es

$$N_{\max} \approx 18^{3/2} N_0 \approx 1.7 \times 10^{59}$$

y su masa es

$$M_{\max} = m_p N_{\max} = 2.8 \times 10^{37} \text{ g}$$

$$M_{\max} \approx 1.00 M_{\odot}$$

Substituyendo en (3)

$$\left(-\frac{T_1}{M_1} \sin \theta - \frac{T_1}{M_2} \sin \theta \right) \sin \theta = \left(-g + \frac{T_1}{M_1} \cos \theta \right) \cos \theta \Rightarrow$$

$$\frac{T_1}{M_1} + \frac{T_1}{M_2} \sin^2 \theta = g \cos \theta$$

$$T_1 = \frac{M_1 M_2 \cos \theta}{M_2 + M_1 \sin^2 \theta} g$$

$$T_2 = \frac{M_2 (M_1 + M_2)}{M_2 + M_1 \sin^2 \theta} g$$

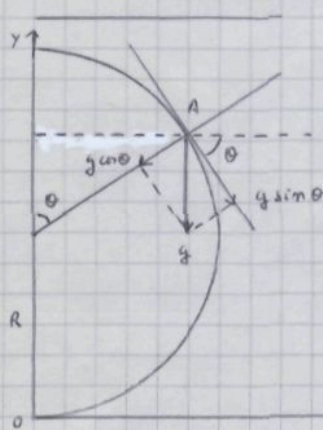
$$a_{1x} = -\frac{M_2 \sin \theta \cos \theta}{M_2 + M_1 \sin^2 \theta} g$$

$$a_{2x} = +\frac{M_1 \sin \theta \cos \theta}{M_2 + M_1 \sin^2 \theta} g$$

$$a_{1y} = -\frac{(M_1 + M_2) \sin^2 \theta}{M_2 + M_1 \sin^2 \theta} g$$

$$a_{2y} = 0$$

9 - Una partícula de masa M comienza a moverse desde el punto más alto de una esfera de radio R que se halla en reposo. Actúa sobre la partícula sola la gravedad y resbala sin rozamiento. 1) ¿A qué distancia la partícula dejará de estar en contacto con la superficie? 2) ¿A qué distancia llegará al suelo? 3) ¿Cuál será la velocidad en este instante?



1) La ley de conservación de la energía da

$$2MgR = MgR(1 + \cos \theta) + \frac{1}{2} Mv^2 \Rightarrow$$

$$v^2(\theta) = 2gR(1 - \cos \theta)$$

la partícula dejará de estar en contacto con la superficie para un ángulo θ_0 tal que

$$\frac{v^2(\theta_0)}{R} = g \cos \theta_0 \Rightarrow 2(1 - \cos \theta_0) = \cos \theta_0 \Rightarrow \cos \theta_0 = \frac{2}{3}, \quad \sin \theta_0 = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

2) Ir es A el último punto de contacto

$$x_A = \frac{\sqrt{5}}{3} R$$

$$y_A = \frac{5}{3} R$$

$$v_{Ax} = +\frac{2}{3} \left(\frac{2gR}{3} \right)^{1/2}$$

$$v_{Ay} = -\frac{\sqrt{5}}{3} \left(\frac{2gR}{3} \right)^{1/2}$$

La ecuación paramétrica de la trayectoria es

$$x(t) = \frac{\sqrt{5}}{3} R + \frac{2}{3} \left(\frac{2gR}{3} \right)^{1/2} t$$

$$y(t) = \frac{5}{3} R - \frac{\sqrt{5}}{3} \left(\frac{2gR}{3} \right)^{1/2} t - \frac{1}{2} g t^2$$

35/003

llegara el suelo cuando $y(t)=0$ y

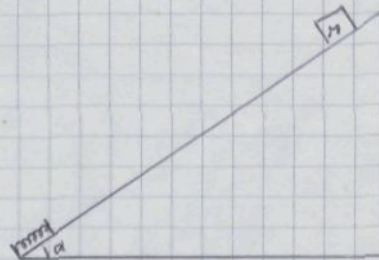
$$T = \frac{10 - \sqrt{10}}{3\sqrt{3}} \left(\frac{R}{g} \right)^{1/2}$$

y el alamo es

$$x(t) = \frac{5 [\sqrt{5} + 4\sqrt{2}]}{27} R \approx 1.46165 \dots R$$

3) La velocidad al llegar al suelo es $v(t) = 2(gR)^{1/2}$

10 - Un resorte ideal sin masa se puede comprimir 1 m mediante una fuerza de 100 N. Este mismo resorte se coloca en la parte inferior de un plano inclinado que forma un ángulo $\alpha = 30^\circ$ con la horizontal. Una masa $M = 10 \text{ kg}$ se suelta,



a partir del reposo, desde la parte superior y queda momentáneamente en reposo

después de comprimir el resorte 2 m. 1) ¿Qué distancia recorre la masa antes de quedar en reposo? 2) ¿Cuál es la velocidad de la masa justo antes de

tocar el resorte? 3) ¿Cuál debería ser el valor del coeficiente de rozamiento del bloque en el plano inclinado para que se detuviera después de comprimir el muelle 0.5 m? Usar $g = 10 \text{ m/s}^2$.

i) $F = -kx \Rightarrow k = 100 \text{ N/m}$. La energía potencial necesaria para comprimir el muelle en una cantidad x es $W = \frac{1}{2} kx^2$ y si $x = 2 \text{ m} \Rightarrow W = 200 \text{ J}$. La conservación de la energía implica $W = Mgh$ donde h es la altura de caída. Entonces $h = 2 \text{ m}$ y la distancia recorrida es $d = h/\sin\alpha = 4 \text{ m}$.

ii) $\frac{1}{2} Mv^2 = Mg(h - x \sin\alpha) \Rightarrow v = \sqrt{2g(h - 1 \text{ m})} = \sqrt{20} \text{ m/s} \approx 4.472 \text{ m/s}$

iii) La fuerza sobre $F = Mg \sin\alpha - Mg \mu \cos\alpha$ y el trabajo $W = Fs$ con $s = (4 - 1.5) \text{ m} = 2.5 \text{ m}$

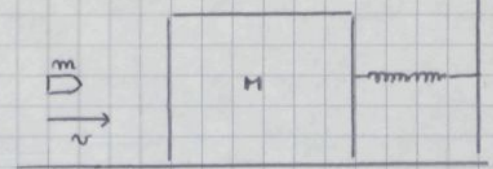
El trabajo para comprimir el muelle $W = \frac{1}{2} k 0.5^2 = 12.5 \text{ J}$

$$10 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}^2 \left(\frac{1}{2} - \mu \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \times 2.5 \text{ m} = 12.5 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2}$$

$$\mu = \frac{3\sqrt{3}}{10} \approx 0.5196$$

11 - Una bala de rifle de $m = 10 \text{ g}$ choca contra un bloque de $M = 990 \text{ g}$, que se encuentra en reposo sobre una superficie horizontal lisa y se queda

inmóvil en él. El bloque está unido a un resorte helicoidal y el choque lo comprime 10 cm. El calibrado del resorte indica que para comprimirlo 1 cm se necesita una fuerza de 10^5 dinas. Hallar 1) La energía



potencial máxima del resorte. 2) La velocidad del bloque justo después del choque. 3) La velocidad inicial de la bala

1) $|F| = kx$ $k = 10^5 \text{ dinas/cm}$ $W = \frac{1}{2} kx^2$

$W = \frac{1}{2} \cdot 10^5 \frac{\text{dinas}}{\text{cm}} \cdot 10^2 \text{ cm}^2 \Rightarrow W = 5 \times 10^6 \text{ erg.}$

2) $\frac{1}{2} (m+M) V^2 = W$, $V = \sqrt{\frac{2W}{(M+m)}} = \sqrt{\frac{2 \times 5 \times 10^6}{1000}} = 10^2 \text{ cm s}^{-1}$

3) $m v = (M+m) V \Rightarrow v = \frac{M+m}{m} V = \frac{10^3}{10} 10^2 \text{ cm s}^{-1} \Rightarrow v = 10^4 \text{ cm s}^{-1}$

12- Un cuerpo de 15 Kg es empujado hacia arriba por un plano inclinado de 30° y de longitud 3 m, mediante una fuerza horizontal $\vec{F}$. La velocidad en la parte inferior del plano es de 0.6 m s^{-1} y en la superior de 3.0 m s^{-1} . Calcular el trabajo realizado por $\vec{F}$ si no hay rozamiento. Calcular también el trabajo que debería hacer una fuerza $\vec{F}'$, también horizontal, si el coeficiente de rozamiento es $\mu = 0.5$ y las velocidades inicial y final son las mismas

Sea L = longitud del plano, α = el ángulo de inclinación del plano

$W = FL \cos \alpha = \frac{1}{2} M v_f^2 - \frac{1}{2} M v_i^2 + M g L \sin \alpha + \mu M g \cos \alpha L$

$\mu = 0$ $W = \frac{1}{2} 15 \cdot 9 - \frac{1}{2} 15 \cdot 0.36 + 15 \times 10 \times 3 \cdot \frac{1}{2} = 289.8 \text{ J}$

$\mu = 0.5$ $W' = 289.8 \text{ J} + 0.5 \times 15 \times 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 3 = 484.7 \text{ J.}$

13- Una partícula de masa M se mueve a lo largo de una recta bajo la acción de una fuerza $F(t) = k t \exp(-a t^2)$, donde k y a son constantes positivas. Se sabe que para $t=0$, $v_0=0$. Se pide i) El impulso producido por $\vec{F}$ al cabo de un tiempo t . ii) La energía cinética de la partícula en el instante en que $\vec{F}$ es máxima.

i) $I(t) = \int_0^t dt' F(t') = k \int_0^t dt' t' e^{-a t'^2} = -\frac{k}{2a} e^{-a t'^2} \Big|_0^t \Rightarrow I(t) = \frac{k}{2a} \{1 - e^{-a t^2}\}$

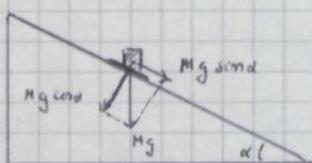
35/003

$$ii) \frac{dF(t)}{dt} = 0 \quad k e^{-at^2} - 2kat e^{-at^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{\sqrt{2a}}$$

$$I(t = 1/\sqrt{2a}) = \frac{k}{2a} \{1 - e^{-1/2}\} = Mv = 0 \quad \Rightarrow \quad v = \frac{k}{2aM} [1 - e^{-1/2}]$$

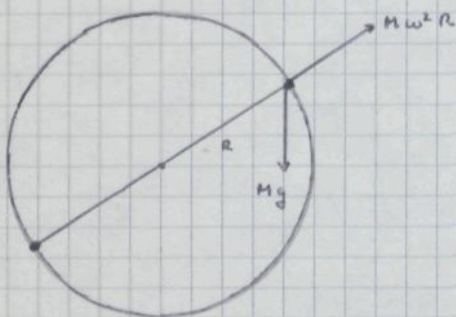
$$K = \frac{1}{2} M v^2 \quad K = \frac{k^2}{8a^2 M} [1 - e^{-1/2}]^2 \quad K = 0.049352 \frac{k^2}{a^2 M}$$

14.- Un muchacho de masa $M = 54 \text{ kg}$ se pesa montado sobre una pataleta que está dispuesta sobre una plataforma con ruedas que se desliza por un plano inclinado. ¿Cuál es su peso, si el ángulo del plano inclinado es $\alpha = 30^\circ$?



$$P = Mg \sin \alpha, \quad P = 270 \text{ N} \quad \text{si } g = 10 \text{ m/s}^2$$

15.- Dos astronautas están colocados en los extremos de una barra rígida y sin peso de longitud $2R$. El aparato puede girar alrededor del punto medio en un plano vertical. ¿Cuál es la velocidad angular requerida para que el astronauta no pese en la parte más alta de la trayectoria? En estas condiciones: ¿Cuánto pesa en la parte más baja de la trayectoria?



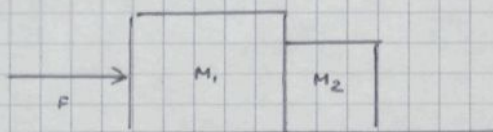
Para que no pese en la parte más alta

$$Mg = Mw^2 R \quad \Rightarrow \quad w = \sqrt{\frac{g}{R}}$$

y entonces el peso en la parte más baja es

$$W = 2mg$$

16.- Dos bloques están en contacto sobre una mesa sin rozamiento. Se aplica una fuerza horizontal $\vec{F}$ a un bloque de acuerdo con la figura adjunta. Si $M_1 = 2 \text{ kg}$, $M_2 = 1 \text{ kg}$ y $F = 30 \text{ N}$, encontrar la fuerza de contacto entre los dos bloques. ¿Cuál será la fuerza de contacto si se aplica $\vec{F}$ al segundo bloque?



$$\left. \begin{array}{l} M_1 a = F - T \\ M_2 a = T \end{array} \right\} \quad a = F / (M_1 + M_2) \quad , \quad T = \frac{M_2}{M_1 + M_2} F \quad \Rightarrow \quad T = 10 \text{ N}$$

Por tanto en el segundo caso $T = \frac{M_1}{M_1 + M_2} F \Rightarrow T = 20 \text{ N}$

- 17 - Una barca de masa $M = 100 \text{ kg}$ navega a una velocidad $v_0 = 30 \text{ km h}^{-1}$ y para su motor. Suponiendo que el rozamiento con el agua es de la forma $-b v(t)$, con $b = 3000 \text{ kg s}^{-1}$, calcular: la aceleración, la velocidad y la distancia recorrida en función del tiempo. ¿cuál es la distancia total que recorrió antes de pararse?

$$M \frac{dv(t)}{dt} = -b v(t) \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{b}{M} dt \Rightarrow v(t) = v_0 e^{-bt/M}$$

$$x(t) = \frac{M v_0}{b} \left(1 - e^{-bt/M} \right) \quad , \quad a(t) = -\frac{b v_0}{M} e^{-bt/M}$$

La distancia total es $x_T = \frac{M v_0}{b}$.

$$x(t) = \frac{1}{3600} \left(1 - e^{-30t/s} \right) \text{ km} \quad , \quad x_T = \frac{1}{3600} \text{ km}$$

$$v(t) = 30 e^{-30t/s} \text{ km h}^{-1} \quad , \quad a(t) = -\frac{1}{4} e^{-30t/s} \text{ km s}^{-2}$$

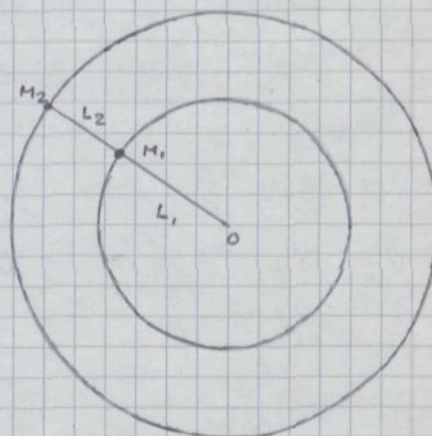
- 18 - Una masa M_1 está sujeta a una cuerda de longitud L_1 fija por el extremo O .

La masa se mueve en un círculo horizontal soportada por una mesa pulida.

Una segunda masa M_2 se une a la primera mediante una cuerda de longitud L_2

y se mueve también en círculo según la

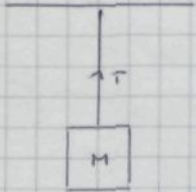
figura. Determinar la tensión en cada una de las cuerdas cuando las masas giran con una frecuencia de ν revoluciones s^{-1} .



$$\left. \begin{array}{l} \omega = \frac{1}{2\pi\nu} \\ T_2 = M_2 \omega^2 (L_1 + L_2) \\ T_1 - T_2 = M_1 \omega^2 L_1 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} T_1 = M_1 \omega^2 L_1 + M_2 \omega^2 (L_1 + L_2) \\ T_2 = M_2 \omega^2 (L_1 + L_2) \end{array}$$

35/003

19 - Un péndulo en reposo está suspendido verticalmente de una cuerda en un ascensor que está bajando. El ascensor tiene una desaceleración $a = 2.44 \text{ m s}^{-2}$ antes de detenerse. 1) Si la tensión de la cuerda es de $T = 98 \text{ N}$ ¿cuál es la masa M del péndulo? 2) ¿cuál es la tensión T' de la cuerda si el ascensor va bajando con una aceleración $a = 2.44 \text{ m s}^{-2}$?



$$1) \quad T - Mg = Ma, \quad M = \frac{T}{a+g}$$

$$M = 8.00 \text{ kg} \quad \text{si} \quad g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$$

$$2) \quad T = Mg - Ma, \quad T = M(g-a), \quad T = 58.96 \text{ N.}$$

20. Consideremos una distribución esférica de masa sobre densidad $\rho(r)$. Calcular la velocidad $v(R)$ que tiene una partícula que gira en una órbita circular estacionaria a una distancia R . Demuestra que si $\rho(r) = 0$ para $r \geq R_0$ entonces $v(R) \propto R^{-1/2}$ para $r \geq R_0$. En muchas galaxias se ve que la distribución radial de materia llega hasta un radio R_0 y se encuentra $v(R) = C$ para $R_0 \leq R \leq 5-10 R_0$. Estimar la masa de esta materia oscura, suponiendo $\rho(r) = C$ para $r \leq R_0$ y $\rho(r)$ continua

La masa $M(R)$ en el interior de una esfera de radio R es $M(R) = 4\pi \int_0^R dr r^2 \rho(r)$, entonces

$$\frac{GM(R)}{R^2} = \frac{v^2(R)}{R}$$

$$\Rightarrow \quad v(R) = \left\{ \frac{4\pi G}{R} \int_0^R dr r^2 \rho(r) \right\}^{1/2}$$

Si $\rho(r) = 0$ para $R \geq R_0$ entonces $\int_0^R dr r^2 \rho(r) = M$, siendo M la masa total de la galaxia y

$$v(R) = \left\{ \frac{4\pi G M}{R} \right\}^{1/2} \quad R \geq R_0$$

Si $v(R)$ es constante entonces en esta zona $\rho(r) \propto \frac{1}{r^2}$ y se tiene:

$$M_{\text{vis}} = 4\pi \int_0^{R_0} dr r^2 \rho(r) \quad M_{\text{halo}} = 4\pi \int_{R_0}^{x R_0} dr r^2 \frac{C}{r^2} = 4\pi C (x-1) R_0^3 \quad x = 5-10$$

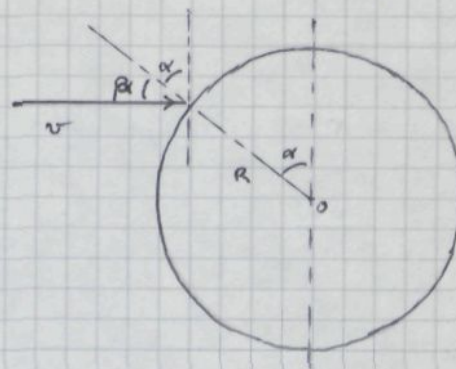
$$\rho(r) = \frac{C}{r^2} \text{ para } r \leq R_0 \Rightarrow M_{\text{vis}} = \frac{4\pi}{3} \rho R_0^3 \quad \rho(r) = \text{continua} \Rightarrow C = \rho R_0^2$$

$$M_{\text{vis}} = \frac{4\pi}{3} \rho R_0^3 \quad M_{\text{halo}} = 4\pi \rho (x-1) R_0^3$$

$$M_{\text{halo}} = 3(x-1) M_{\text{vis}}$$

$$\frac{M_{\text{halo}}}{M_{\text{vis}}} \approx 15-30$$

21. Calcúlese la fuerza que soporta una torre cilíndrica de 30 m de altura y de radio 10 m un día de huracán en que la velocidad del viento es de 40 m/s, suponiendo que el aire pierde toda su energía al chocar contra la pared. La densidad del aire es $\rho = 1.293 \text{ g/l}$.



$d(Mv) = F dt$, donde $v = \alpha$ es la velocidad del viento y dM es la masa de aire que incide sobre la torre en un tiempo dt . Un elemento de la superficie de la torre, paralelo a su generatriz, tendrá un área

$$dS = R H d\alpha \quad R = \text{radio} \quad H = \text{altura}$$

La fuerza sobre este elemento de la torre es $dF = p dS \sin \alpha$ $p = \text{presión}$.

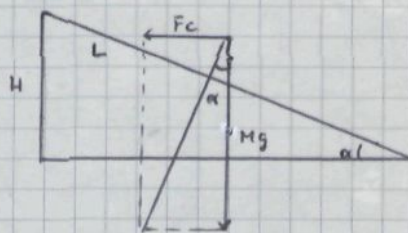
$$dF = p R H \sin \alpha d\alpha \quad \text{la presión es} \quad F dt = v dM = v \rho v S dt \Rightarrow p = \rho v^2$$

$$dF = \rho R H v^2 \sin \alpha d\alpha$$

$$F = \int_0^\pi d\alpha \rho R H v^2 \sin \alpha \Rightarrow F = 2 \rho v^2 R H$$

$$F = 1.4213 \times 10^6 \text{ dinas} \Rightarrow F = 1.4213 \times 10^6 \text{ N}$$

22. Calcúlese el penalti que ha de darse a una vía férrea de anchura $L = 1.4 \text{ m}$ en una curva de radio $R = 175.4 \text{ m}$, si el tren viaja a una velocidad máxima de $v = 72 \text{ km/h}$.



$$\tan \alpha = \frac{F_c}{Mg} = \frac{m v^2}{R} \cdot \frac{1}{mg} = \frac{v^2}{R g}$$

$$H = L \sin \alpha = L \frac{v^2}{\sqrt{v^4 + R^2 g^2}}$$

$$H = L \frac{v^2}{\sqrt{v^4 + R^2 g^2}}$$

$$L = 1.4 \times 10^2 \text{ cm}$$

$$R = 1.754 \times 10^4 \text{ cm}$$

$$g = 9.82 \times 10^2 \text{ cm s}^{-2}$$

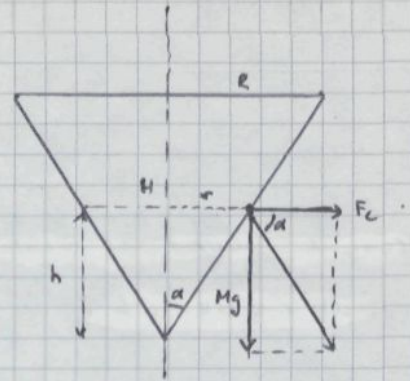
$$v = 20 \times 10^3 \text{ cm s}^{-1}$$

$$R g / v^2 = 4.30607$$

$$H = 31.67 \text{ cm}$$

35/003

23. Un cono invertido de $R = 2\text{ m}$ en la base y de altura $H = 4\text{ m}$ gira con $\omega = 6\text{ rad/s}$ alrededor de su eje. Se deja en sus paredes una bolita. ¿A qué distancia del vértice alcanza el equilibrio?



$$F_c = m \omega^2 r$$

$$\tan \alpha = \frac{R}{H}$$

$$\tan \alpha = \frac{mg}{\omega^2 r m}$$

$$\frac{R}{H} = \frac{g}{\omega^2 r}$$

$$r = \frac{g}{\omega^2} \frac{H}{R}$$

$$\tan \alpha = \frac{r}{h}$$

$$h = \frac{r}{\tan \alpha} = \frac{r}{R} H$$

$$h = \frac{H}{R} \frac{g}{\omega^2} \frac{H}{R}$$

$$h = \frac{g}{\omega^2} \left(\frac{H}{R} \right)^2$$

$$h = \frac{10}{9} \text{ m.}$$

$$\text{si } g = 10 \text{ m/s}^2$$

24. Un cohete se eleva verticalmente con aceleración constante $2.0g$. La aceleración dura 4.0 min , después de este tiempo se para el motor: 1) ¿Qué velocidad tiene el cohete cuando se para el motor? 2) ¿A qué altura se halla? 3) ¿Qué altura máxima alcanzará el cohete, despreciando la variación de g con la altura? 4) ¿Cuánto tarda en alcanzar esta altura máxima? 5) ¿Cuánto tardará en caer al terreno? 6) ¿Qué velocidad tendrá cuando choque con el suelo?

$$1) \quad v = at \quad \Rightarrow \quad v_c = 2.0g \cdot 60s = 1.176798 \times 10^5 \text{ m/s}^2 \quad g = g_m = 980.665 \text{ m/s}^2$$

$$2) \quad y = \frac{1}{2} at^2 \quad \Rightarrow \quad y_c = \frac{1}{2} 2.0g (60s)^2 = 3.530394 \times 10^6 \text{ m}$$

$$3) \quad y_{\max} = y_c + \frac{v_c^2}{2g} \quad \Rightarrow \quad y_{\max} = 4.0591182 \times 10^7 \text{ m}$$

$$4) \quad y_{\max} = y_c + v_c(t-t_c) - \frac{1}{2}g(t-t_c)^2 \quad t_c = 60s.$$

$$\frac{v_c^2}{2g} = v_c(t-t_c) - \frac{1}{2}g(t-t_c)^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{v_c^2}{2g} = 2gt_c(t-t_c) - \frac{1}{2}g(t-t_c)^2$$

$$2gt_c^2 = 2gt_c(t-t_c) - \frac{1}{2}g(t-t_c)^2 \quad \Rightarrow \quad t-t_c = 2t_c \quad \Rightarrow \quad t = 3t_c = 180s.$$

$$5) \quad y(\hat{t}) = y_{\max} - \frac{1}{2}g\hat{t}^2 \quad \hat{t} = t - 3t_c \quad \hat{t} = \sqrt{\frac{2y_{\max}}{g}} = 146.97s.$$

$$6) \quad v = -g\hat{t} \quad \Rightarrow \quad v = 1.4413 \times 10^5 \text{ m/s}^2$$

25.- Se dispara un proyectil con un ángulo de 45° con una velocidad inicial $v_0 = 20 \text{ m/s}$.

- a) Calcular su velocidad al cabo de $t = 2 \text{ s}$. b) Si cuando llega al nivel del suelo se encuentra con el inicio de un desnivel de $h = 200 \text{ m}$ de profundidad ¿con qué velocidad llega al fondo del mismo? c) ¿Cómo verá el movimiento un observador que se mueva horizontalmente hacia adelante, a ras de suelo, con velocidad $v = 20 \text{ m/s}$? d) ¿A qué distancia llega el proyectil?

La ecuación de la trayectoria es $x(t) = (v_0 \cos \alpha) t$

$$y(t) = (v_0 \sin \alpha) t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= (v_0 \cos \alpha) \\ \dot{y}(t) &= (v_0 \sin \alpha) - g t \end{aligned} \right\} v(t) = \left\{ v_0^2 \cos^2 \alpha + (v_0 \sin \alpha - g t)^2 \right\}^{1/2}$$

$$v(t) = \left\{ v_0^2 - 2 g v_0 \sin \alpha t + g^2 t^2 \right\}^{1/2}$$

$$g = 9.8 \text{ m/s}^2 \quad v(t=2\text{s}) = 15.16 \text{ m/s}^{-1}$$

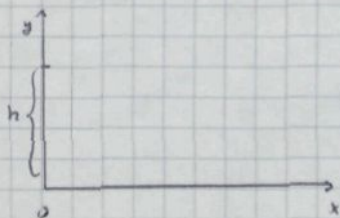
$$b) (v_0 \sin \alpha) t - \frac{1}{2} g t^2 = -200 \text{ m.} \quad 4.9 t^2 - \frac{20}{12} t - 200 > 0 \Rightarrow t = 7.9928 \text{ s}$$

$$v(t=7.9928 \text{ s}) = 65.73 \text{ m/s}$$

$$\left. \begin{aligned} x'(t) &= (v_0 \cos \alpha) t - v t \\ y'(t) &= (v_0 \sin \alpha) t - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x'(t) &= v_0 (\cos \alpha - 1) t \\ y'(t) &= (v_0 \sin \alpha) t - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned} \right\}$$

$$d) x(t=7.9928 \text{ s}) = 113.04 \text{ m}$$

- 26) Una persona que viaja en un tren deja caer una moneda por la ventana. Como ve la caída de la moneda: a) La persona que viaja en el tren b) La persona que está solitaria con la vía c) Una persona que viaja en otro tren que se mueve paralelamente al primero pero en sentido contrario.



$$b) x(t) = v_0 t$$

v_0 : velocidad del tren

$$y(t) = h - \frac{1}{2} g t^2$$

h : altura desde la ventana al suelo.

$$a) x'(t) = 0$$

$$y'(t) = h - \frac{1}{2} g t^2$$

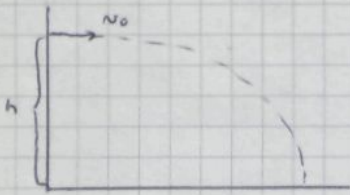
$$c) x''(t) = (v_0 + v_0') t$$

v_0' : velocidad del otro tren

$$y''(t) = h - \frac{1}{2} g t^2$$

35/003

27) Se lanza una piedra con velocidad horizontal $v_0 = 15 \text{ m/s}$. Encuentra las aceleraciones tangencial y normal a un $t = 1 \text{ s}$ después de iniciarse el movimiento



$$\left. \begin{aligned} x(t) &= v_0 t \\ y(t) &= h - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned} \right\}$$

$$\vec{r}(t) = v_0 t \hat{i} + \left[h - \frac{1}{2} g t^2 \right] \hat{j}$$

$$\vec{v}(t) = v_0 \hat{i} - g t \hat{j}$$

$$\vec{a}(t) = -g \hat{j}$$

El vector unitario tangencial a $t = 1$ es $\hat{e} = \frac{1}{\sqrt{v_0^2 + g^2}} (v_0 \hat{i} - g \hat{j})$

El normal es $\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{v_0^2 + g^2}} (g \hat{i} + v_0 \hat{j})$

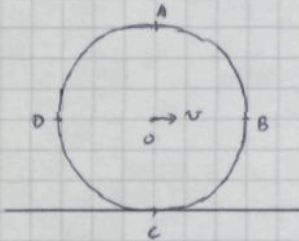
$$a_t = \frac{g^2}{\sqrt{v_0^2 + g^2}}, \quad a_n = -\frac{v_0 g}{\sqrt{v_0^2 + g^2}}$$

$$\text{d.e. } g = 9.8 \text{ m/s}^2$$

$$a_t = 5.36 \text{ m/s}^2$$

$$a_n = -8.20 \text{ m/s}^2$$

28) Un disco rueda sin deslizarse por un plano horizontal con velocidad constante v .



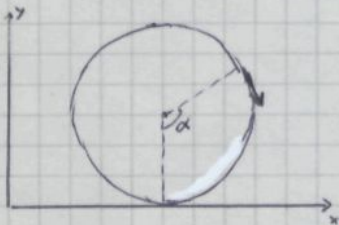
a) Demuestran que la velocidad lineal de rotación respecto al centro

O de cualquier punto de la periferia es igual a la velocidad de traslación del disco.

b) Determinan la velocidad, en módulo y dirección, de los puntos A, B, C, D para un observador fijo

en el plano c) Que punto del disco tiene la misma velocidad que O.

$$\vec{v}(\alpha) =$$



LEYES DE CONSERVACIÓN

Necesidad: i) En general las leyes de la Física son complicadas y el hecho de que se encuentren leyes de conservación facilita extraordinariamente el análisis de muchos problemas. ii) Al intentar establecer nuevas teorías es una gran ayuda saber que hay leyes de conservación que deben satisfacerse.

Ejemplos: leyes de conservación bien conocidas son las de la energía, momento, momento angular, carga eléctrica, ...

Ley de conservación del momento: Supongamos dos partículas de masas M_1 y M_2 , aisladas, que interactúan mediante fuerzas Newtonianas, es decir que satisfacen la tercera ley de Newton. Sus ecuaciones del movimiento son

$$M_1 \frac{d\vec{v}_1(t)}{dt} = \vec{F}_{21}(t), \quad M_2 \frac{d\vec{v}_2(t)}{dt} = \vec{F}_{12}(t) \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt} (M_1 \vec{v}_1 + M_2 \vec{v}_2) = 0 \Rightarrow M_1 \vec{v}_1(t) + M_2 \vec{v}_2(t) = \text{cte} \quad (1)$$

La misma demostración puede realizarse para un sistema de N partículas aisladas con interacciones Newtonianas. Entonces podemos afirmar que en tales sistemas el momento total

$$\vec{P}(t) = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i(t) = \sum_{i=1}^N M_i \vec{v}_i(t) \quad (2)$$

es una cantidad conservada, es decir adquiere el mismo valor en cualquier instante de tiempo.

La ley así formulada tiene una validez muy limitada, pues hemos supuesto interacciones Newtonianas. Sin embargo existe una ley de conservación del momento que se usa que valdría totalmente general. Esta ley puede enunciarse: Supongamos



un instante inicial en el que hay N_i partículas que se mueven libremente y sea $\vec{P}_i$ el momento total del sistema (suma de cada uno de los momentos de las partículas del sistema). En

el transcurso del tiempo las partículas de este sistema, que se supone aislado, pueden interactuar las unas con las otras, aniquilándose algunas o creándose otras. Al final tenemos N_f partículas que se mueven libremente con momento total $\vec{P}_f$. Entonces

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{N_i} \vec{p}_i = \sum_{j=1}^{N_f} \vec{p}_j' \quad (2)$$

Si se trata de partículas relativistas se debe tomar la expresión relativista del momento. En realidad también existe un vector $\vec{P}(t)$ que se conserva para todo t , pero éste sólo en el estado inicial y final coincide con la expresión usual del momento, y no es fácil dar una expresión general de $\vec{P}(t)$.

Nota: No sé ninguna demostración sencilla de esta ley más general, la cual se sabe que es una consecuencia directa de la homogeneidad del espacio. Sin embargo podemos razonar así: consideremos un sistema aislado de dos partículas



y supongamos que la energía inicial y final sea la misma (la ley de conservación de la energía es aquí una consecuencia directa de la invariancia de las leyes

Físicas bajo traslaciones espaciales). Entonces

$$\frac{1}{2} M_1 \vec{n}_1^2 + \frac{1}{2} M_2 \vec{n}_2^2 = \frac{1}{2} M_1 \vec{n}_1'^2 + \frac{1}{2} M_2 \vec{n}_2'^2 \quad (3)$$

Consideremos un segundo observador O' , que se mueve con velocidad arbitraria $\vec{V} = c\vec{u}$ con relación al primero. Para él las velocidades de las partículas son

$$\vec{w}_i = \vec{n}_i - \vec{V}, \quad \vec{w}_i' = \vec{n}_i' - \vec{V}, \quad i = 1, 2 \quad (4)$$

y de acuerdo con el principio de relatividad galileana O' debe también ver la conservación de la energía

$$\frac{1}{2} M_1 \vec{w}_1^2 + \frac{1}{2} M_2 \vec{w}_2^2 = \frac{1}{2} M_1 \vec{w}_1'^2 + \frac{1}{2} M_2 \vec{w}_2'^2 \Rightarrow$$

$$M_1 (\vec{n}_1^2 + \vec{V}^2 - 2\vec{n}_1 \cdot \vec{V}) + M_2 (\vec{n}_2^2 + \vec{V}^2 - 2\vec{n}_2 \cdot \vec{V}) = M_1 (\vec{n}_1'^2 + \vec{V}^2 - 2\vec{n}_1' \cdot \vec{V}) + M_2 (\vec{n}_2'^2 + \vec{V}^2 - 2\vec{n}_2' \cdot \vec{V}) \Rightarrow$$

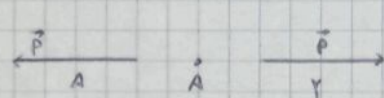
$$\vec{V} \cdot (M_1 \vec{n}_1 + M_2 \vec{n}_2 - M_1 \vec{n}_1' - M_2 \vec{n}_2') = 0 \quad \forall \vec{V} \Rightarrow$$

$$M_1 \vec{n}_1 + M_2 \vec{n}_2 = M_1 \vec{n}_1' + M_2 \vec{n}_2'$$

y la ley queda probada sin hacer ninguna hipótesis sobre el tipo de fuerzas.

Ejemplo: ¿Puede tener lugar el proceso $A \rightarrow A + \gamma$? Sea M la masa de la partícula A .

Supongamos que elegimos un sistema de referencia en el que la partícula inicial



se halla en reposo. La ley de conservación del momento

implica que las dos partículas finales tienen momentos

iguales y opuestos. La ley de la conservación de la energía es pues

$$Mc^2 = \sqrt{M^2 c^4 + c^2 |\vec{p}|^2} + c |\vec{p}| \quad (5)$$

la cual no tiene ninguna solución para $|\vec{p}| \neq 0$ y por tanto el proceso no puede tener lugar.

Impulso: Consideremos una partícula de masa M sobre la que actúa una fuerza $\vec{F}(t)$, entonces

$$M \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \vec{F}(t) \quad (1)$$

y por tanto

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^t dt' \frac{1}{M} \vec{F}(t') \Rightarrow$$

$$M \vec{v}(t) - M \vec{v}(t_0) = \int_{t_0}^t dt \vec{F}(t) \equiv \text{impulso de la fuerza} \quad (2)$$

Si $\vec{F}(t) = \vec{F} = \vec{F}_0$ entonces

$$M \vec{v}(t) - M \vec{v}(t_0) = \vec{F}(t-t_0), \quad \vec{F} = \vec{F}_0 \quad (3)$$

Trabajo: Supongamos una partícula de masa M que bajo la acción de una fuerza aplicada $\vec{F}_{op}$ se desplaza desde A hasta B , siguiendo un camino L . Entonces se define el trabajo realizado por esta fuerza para llevar la partícula de A a B , siguiendo el camino L , como

$$W(A \xrightarrow{L} B) \equiv \int_{A,L}^B d\vec{r} \cdot \vec{F}_{op} \quad (4)$$

Nota: El símbolo que aparece en (4) se llama integral curvilínea. Veamos que sentido tiene.

Consideremos un camino muy pequeño $\Delta\vec{r}$, entonces el trabajo realizado es

$$\Delta W = \Delta\vec{r} \cdot \vec{F}_{op} = |\Delta\vec{r}| |\vec{F}_{op}| \cos \alpha \quad (5)$$

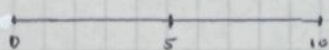
$$[\Delta W] = M L^2 T^{-2} \quad (\text{dimensiones de energía})$$

En el caso general

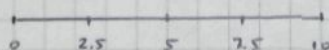
$$W(A \xrightarrow{L} B) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \vec{F}_{op}(\vec{r}_i) \cdot \Delta\vec{r}_i, \quad \vec{r}_i \in \Delta\vec{r}_i \quad (6)$$

Ejemplo 1: Movimiento unidimensional $F_{op} = kx^2$, ¿cuál es el trabajo para ir de $x=0$ a $x=10$?

$$W = \int_0^{10} dx kx^2 = k \left. \frac{1}{3} x^3 \right|_0^{10} = \frac{1000}{3} k$$



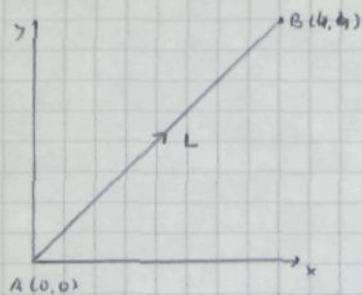
$$W = 5k [(2.5)^2 + (7.5)^2] = 312.5k$$



$$W = 2.5k [(1.25)^2 + (3.75)^2 + (6.25)^2 + (8.75)^2] = 328.125k$$

$$\text{Si } \Delta x = 1, \quad W = 332.5k, \quad \text{Si } \Delta x = 0.1 \quad W \approx 333.325k.$$

Ejemplo 2



$$\vec{F}_{op} = (x, y^2, 0) \quad \text{Unidades arbitrarias}$$

$$\text{Sobre el camino} \quad \vec{F}_{op} = (x, x^2, 0)$$

$$\text{Sobre el camino} \quad d\vec{r} = (dx, dx, 0)$$

$$d\vec{r} \cdot \vec{F}_{op} = (x + x^2) dx$$

$$W = \int_0^4 dx (x + x^2) = \left. \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 \right|_0^4 = \frac{88}{3} = 29.333 \dots$$

Veamos el cálculo numérico

$$i) 1 \text{ Intervalo} : \vec{F}(2, 2, 0) = (2, 4, 0)$$

$$W = 8 + 16 = 24$$

$$\Delta \vec{r} = (4, 4, 0)$$

$$ii) 2 \text{ Intervalos}$$

$$\vec{F}_{op}(1, 1, 0) = (1, 1, 0), \quad \vec{F}_{op}(3, 3, 0) = (3, 9, 0)$$

$$\Delta \vec{r} = (2, 2, 0)$$

$$W = (2+2) + (6+18) = 28$$

$$iii) 4 \text{ Intervalos}$$

$$\vec{F}(0.5, 0.5, 0) = (0.5, 0.25, 0), \quad \vec{F}(1.5, 1.5, 0) = (1.5, 2.25, 0)$$

$$\vec{F}(2.5, 2.5, 0) = (2.5, 6.25, 0), \quad \vec{F}(3.5, 3.5, 0) = (3.5, 12.25, 0)$$

$$\Delta \vec{r} = (1, 1, 0)$$

$$W = 0.75 + 3.75 + 8.75 + 15.75 = 29.$$

$$iv) 10 \text{ intervalos} \quad W = 29.28$$

$$v) 100 \text{ intervalos} \quad W = 29.3328.$$

Parametrización: Es bastante usual que el camino L pueda parametrizarse:

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s) \quad (7)$$

donde $s = s_A$ corresponde a las coordenadas de A y $s = s_B$ a las de B . Entonces

$$d\vec{r} = \left(\frac{dx(s)}{ds} ds, \frac{dy(s)}{ds} ds, \frac{dz(s)}{ds} ds \right) \quad (8)$$

$$\vec{F}_{op}(s) = \vec{F}_{op}(x(s), y(s), z(s))$$

entonces

$$\begin{aligned} W(A \xrightarrow{L} B) &= \int_{s_A}^{s_B} ds \left\{ \frac{dx(s)}{ds} F_{opx}(s) + \frac{dy(s)}{ds} F_{opy}(s) + \frac{dz(s)}{ds} F_{opz}(s) \right\} = \\ &= \int_{s_A}^{s_B} ds \frac{d\vec{x}(s)}{ds} \cdot \vec{F}_{op}(s) \end{aligned} \quad (9)$$

Trabajo y Energía Cinética: Vamos a demostrar que el trabajo realizado sobre una partícula por una fuerza aplicada es igual a la variación de su energía cinética

$$\begin{aligned} W(A \xrightarrow{L} B) &= \int_{A,L}^B d\vec{r} \cdot \vec{F}_{op}(\vec{r}) = M \int_{A,L}^B d\vec{r} \cdot \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = M \int_{t_A}^{t_B} dt \vec{v}(t) \cdot \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{1}{2} M \int_{t_A}^{t_B} dt \frac{d\vec{v}^2(t)}{dt} = \\ &= \frac{1}{2} M \vec{v}_B^2 - \frac{1}{2} M \vec{v}_A^2 = K_B - K_A \quad \text{Si } W \geq 0 \Leftrightarrow K_B \geq K_A \end{aligned} \quad (10)$$

Potencia: Se denomina así el trabajo realizado por unidad de tiempo

$$P = \frac{dW}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{F}_{op} \cdot \Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{F}_{op} \cdot \vec{v} \quad (1)$$

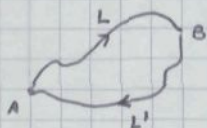
$$[P] = M L^2 T^{-3}$$

$$1W = 1J s^{-1} = 10^7 \text{ erg } s^{-1} \quad (2)$$

Fuerzas conservativas: Un tipo particularmente interesantes de fuerzas son las llamadas fuerzas conservativas. Se dice que un campo de fuerzas es conservativo si el trabajo $W(A \xrightarrow{L} B)$ que realiza al mover la partícula de A a B, siendo estos puntos arbitrarios, es independiente de L; entonces se puede escribir

$$W(A \xrightarrow{L} B) \equiv W(A \rightarrow B) \equiv W_{AB}, \quad \forall L, \quad \forall A, B \quad (3)$$

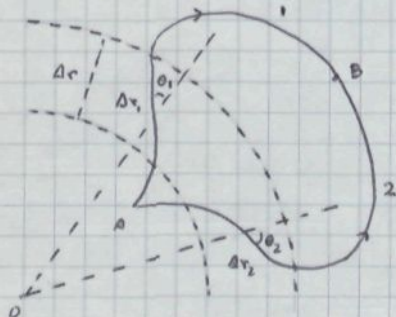
Es evidente que en este caso $W(A \xrightarrow{\tilde{L}} A) = 0$.



$$W(A \xrightarrow{L+L'} B) = W(A \xrightarrow{L} B) + W(B \xrightarrow{L'} A) = W(A \xrightarrow{L} B) - W(A \xrightarrow{L'} B) = 0$$

Si $W(A \xrightarrow{\tilde{L}} A) = 0, \forall \tilde{L}$ entonces la fuerza es conservativa, como se ve inmediatamente.

Fuerzas centrales: Un campo de fuerzas es central si $\vec{F}(\vec{r}) = f(r) \hat{r}$. Veamos que estos campos son conservativos. Consideremos dos caminos 1 y 2 que unen A y B. Tomemos dos esferas de radios próximos r y $r + \Delta r$



$$\text{Caminio 1: } \vec{F}_{op1} \cdot \Delta \vec{r}_1 = |f(r)| \Delta r_1 \cos \theta_1 = |f(r)| \Delta r$$

$$\text{Caminio 2: } \vec{F}_{op2} \cdot \Delta \vec{r}_2 = |f(r)| \Delta r_2 \cos \theta_2 = |f(r)| \Delta r$$

$$\text{Integrando} \quad \int_{A,1}^B d\vec{r} \cdot \vec{F}_{op}(\vec{r}) = \int_{A,2}^B d\vec{r} \cdot \vec{F}_{op}(\vec{r}) \quad \text{q.e.d.}$$

Ejemplos: Dos fuerzas centrales de gran interés son

$$\text{Fuerzas gravitacionales} \quad \vec{F}(\vec{r}) = -G \frac{M_1 M_2}{r^2} \hat{r} \quad (4)$$

$$\text{Fuerzas electrostáticas} \quad \vec{F}(\vec{r}) = \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \hat{r} \quad (5)$$

Energía Potencial: Puesto que si el campo de fuerzas es conservativo $W(A \rightarrow B)$ no depende del camino, entonces esta cantidad depende únicamente del punto inicial A y del final B, teniendo en cuenta las propiedades de la integral podemos introducir una función $V(\vec{r})$, no unívocamente definida, tal que

$$W(A \rightarrow B) = \int_A^B d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) \equiv V(\vec{r}_A) - V(\vec{r}_B) \quad (6)$$

35/003

$V(\vec{r})$ se denomina energía potencial. Su indeterminación se resuelve fijando su valor en un punto $\vec{r}_0$ del espacio y entonces

$$V(\vec{r}) = V(\vec{r}_0) - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}' \cdot \vec{F}(\vec{r}') \quad (7)$$

Si $\vec{F}(\vec{r})$ tiende hacia cero con rapidez suficiente para $r \rightarrow \infty$ de forma que la integral anterior tenga sentido se suele definir $V(\infty) = 0$.

Dado $V(\vec{r})$ determinar $\vec{F}(\vec{r})$: Consideremos los puntos $\vec{r}$ y $\vec{r} + \Delta x \hat{i}$, se tiene

$$V(\vec{r} + \Delta x \hat{i}) - V(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}}^{\vec{r} + \Delta x \hat{i}} d\vec{r}' \cdot \vec{F}(\vec{r}') = - \Delta x F_x(\vec{r}), \quad \Delta x \neq 0$$

$$F_x(\vec{r}) = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{V(\vec{r} + \Delta x \hat{i}) - V(\vec{r})}{\Delta x} = - \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial x}$$

$$\vec{F}(\vec{r}) = - \left\{ \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial z} \hat{k} \right\} \equiv - \vec{\nabla} V(\vec{r}) \quad (\text{gradiente}) \quad (8)$$

Caracterización: ¿cómo saber si $\vec{F}(\vec{r})$ es conservativo? Si lo es $\vec{F} = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$ y entonces

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) \equiv \hat{i} \left(\frac{\partial F_z(\vec{r})}{\partial y} - \frac{\partial F_y(\vec{r})}{\partial z} \right) + \hat{j} \left(\frac{\partial F_x(\vec{r})}{\partial z} - \frac{\partial F_z(\vec{r})}{\partial x} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial F_y(\vec{r})}{\partial x} - \frac{\partial F_x(\vec{r})}{\partial y} \right) = 0 \quad (9)$$

La condición

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = 0 \quad (10)$$

(notacional de $\vec{F}(\vec{r})$ igual a cero) se puede probar que es la condición necesaria y suficiente para que $\vec{F}(\vec{r})$ sea conservativo.

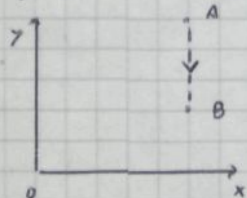
Conservación de la energía: En los campos de fuerzas conservativos

$$W(A \rightarrow B) = K_B - K_A = V_A - V_B \Rightarrow$$

$$K_A + V_A = K_B + V_B \equiv E \quad (11)$$

La constante E se llama energía. Como $V(\vec{r})$ está definido sobre una constante aditiva lo mismo sucede con E .

Ejemplo. Supongamos $\vec{F} = (0, -Mg, 0)$. Entonces $d\vec{r} = (0, dy, 0)$



$$\begin{aligned} W(A \rightarrow B) &= \int_A^B d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = - \int_{y_A}^{y_B} dy Mg = Mg y_A - Mg y_B = \\ &= \frac{1}{2} M \vec{v}_B^2 - \frac{1}{2} M \vec{v}_A^2 \Rightarrow \end{aligned}$$

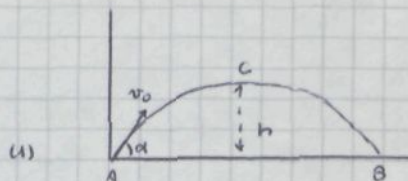
$$E = \frac{1}{2} M \vec{v}^2 + Mgy \quad (12)$$

Se ha fijado arbitrariamente que la energía potencial $V(\vec{r}) = Mgh$ y se anula en el plano $y=0$.

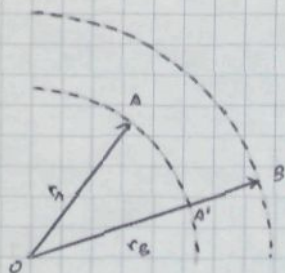
Apliquemos este resultado para calcular la altura máxima de un proyectil.

$$\frac{1}{2} M v_0^2 = \frac{1}{2} M (v_0 \cos \alpha)^2 + Mgh \Rightarrow$$

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$



Ejemplo: $\vec{F}(\vec{r}) = -GM_1 M_2 \vec{r}/r^3$, ¿ $V(\vec{r})$?



$W(A \rightarrow A') = 0$ por ser la fuerza perpendicular al camino

$$W(A \rightarrow B) = W(A' \rightarrow B) = - \int_{r_A}^{r_B} dr \frac{GM_1 M_2}{r^2} = \frac{GM_1 M_2}{r_B} - \frac{GM_1 M_2}{r_A}$$

Eligiendo $V(\infty) = 0$

$$V(\vec{r}) = - \frac{GM_1 M_2}{r} \quad (2)$$

Comprobemos $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(r)$

$$\frac{\partial V(r)}{\partial x} = -GM_1 M_2 \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} = GM_1 M_2 \frac{x}{r^3} \Rightarrow$$

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{GM_1 M_2}{r^3} (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) = \frac{GM_1 M_2}{r^3} \vec{r} \quad \text{O.E.D.}$$

Ejemplo: Velocidad de escape. Sea un cuerpo de masa M y radio R . ¿Con qué velocidad v se debe lanzar verticalmente un proyectil, para que escape a su campo gravitacional?

Sea m la masa del proyectil.

$$\frac{1}{2} M v^2 - \frac{GMm}{R} = 0 \quad v_{es} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \quad G = 6.6720 \times 10^{-8} \text{ c.g.s.} \quad (3)$$

$$\text{Luna: } R = 1.7 \times 10^8 \text{ cm}, \quad M = 7.3 \times 10^{25} \text{ g} \Rightarrow v_{es} = 2.4 \times 10^5 \text{ cm s}^{-1} = 2.4 \text{ km s}^{-1}$$

¿Puede retener atmósfera? De acuerdo con el principio de equipartición de la energía la

velocidad media de las moléculas de un gas es $\frac{1}{2} m v_m^2 = \frac{3}{2} k_B T \Rightarrow$

$$v_m = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} \quad k_B = 1.38 \times 10^{-16} \text{ erg K}^{-1} \quad (4)$$

si $m = A m_p$, A = número másico y m_p = masa protón $= 1.67 \times 10^{-24} \text{ g}$.

$$v_m = 0.157 \sqrt{T/A} \text{ km s}^{-1}$$

La temperatura en la superficie de la Luna puede ser $T = 400 \text{ K}$ o superior y en tanto

$v_m = 3.1 \text{ km s}^{-1} / \sqrt{A}$, la Luna por tanto no retiene la atmósfera.

$$\text{Tierra: } R = 6.4 \times 10^8 \text{ cm}, \quad M = 5.997 \times 10^{27} \text{ g} \Rightarrow v_{es} = 11.2 \text{ km s}^{-1}$$

35/003

Sol: $R = 7 \times 10^{10} \text{ m}$, $M = 1.989 \times 10^{33} \text{ g}$ $\Rightarrow v_{es} = 616 \text{ km s}^{-1}$

Enana blanca: $R \approx 6 \times 10^8 \text{ m}$, $M \approx 10^{33} \text{ g}$ $\Rightarrow v_{es} \approx 5 \times 10^3 \text{ km s}^{-1}$

Estrella de neutrones: $R \approx 6 \times 10^6 \text{ m}$, $M \approx 10^{33} \text{ g}$ $\Rightarrow v_{es} = 5 \times 10^4 \text{ km s}^{-1}$

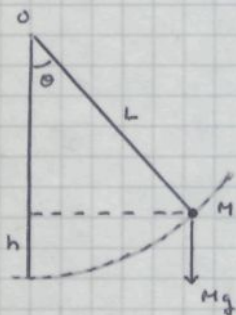
¿Que pasaría si $v_{es} \geq c$? El razonamiento no tiene sentido pues la mecánica New-

toniana no es válida. Añaden que $v_{es} \geq c \Rightarrow R \leq R_s \equiv \frac{2GM}{c^2}$. La teoría de la relatividad general afirma que si $R \leq R_s$ (radio de Schwarzschild) el cuerpo se comporta como un agujero negro, del cual, clásicamente, nada puede escapar. Notar que si $M_{\odot} = 1.989 \times 10^{33} \text{ g}$.

$$R_s = 2.95 \frac{M}{M_{\odot}} \text{ km.} \quad (5)$$

Comentan algo sobre agujeros negros.

Ejemplo: Pendulo simple. Veamos como la ley de conservación de la energía permite simplificar el cálculo



$$h = L(1 - \cos \theta), \quad v = L \dot{\theta}, \quad T = \frac{1}{2} M L^2 \dot{\theta}^2$$

$$V = M g L (1 - \cos \theta)$$

$$E = \frac{1}{2} M L^2 \dot{\theta}^2 + M g L (1 - \cos \theta) \quad (6)$$

Esto es una ecuación diferencial de primer grado en $\theta(t)$. Vamos a suponer que $\theta(t)$ es siempre pequeño y $\cos \theta \approx 1 - \frac{1}{2} \theta^2$, entonces

es

$$E = \frac{1}{2} M L^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M g L \theta^2 \Rightarrow \dot{\theta}^2(t) = \frac{g}{L} \left(\frac{2E}{M g L} - \theta^2 \right)$$

$$\theta_0^2 \equiv \frac{2E}{M g L} \quad \text{ángulo máximo pues } \dot{\theta}^2(t) > 0.$$

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \sqrt{\frac{g}{L}} (\theta_0^2 - \theta^2)^{1/2}$$

$$\frac{d\theta}{(\theta_0^2 - \theta^2)^{1/2}} = \sqrt{\frac{g}{L}} dt$$

¿Por que se ha elegido la raíz positiva? Es indiferente pues significa cambiar el sentido del movimiento. Hablan de esto en microcosmos y macrocosmos.

$$\text{Si en } t=0, \theta=\theta_0 \text{ entonces } \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta'}{(\theta_0^2 - \theta'^2)^{1/2}} = \sqrt{\frac{g}{L}} \int_0^t dt' \Rightarrow$$

$$\arccos \frac{\theta'}{\theta_0} \bigg|_{\theta_0}^{\theta} = \sqrt{\frac{g}{L}} t' \bigg|_0^t \Rightarrow$$

$$\theta(t) = \theta_0 \cos \left(\sqrt{\frac{g}{L}} t \right) \quad \theta_0 \ll 1 \quad (7)$$

$$\text{Periodo } T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (8)$$

i) Deducir el valor de T dimensionalmente

$$T = M^\alpha g^\beta L^\gamma \Rightarrow M^\alpha L^\beta T^{-2\beta} L^\gamma = T \quad \alpha = 0 \quad \beta = -1/2 \quad \gamma = +1/2 \Rightarrow T \propto \sqrt{L/g}$$

ii) Si se libera la restauración $\theta_0 \ll 1$ entonces se puede probar

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \left\{ 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\theta_0}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{\theta_0}{2} + \dots \right\} \quad (1)$$

El factor correctivo $F(\theta_0)$ vale

$$F(\theta_0 = 10^\circ) = 1.0019, \quad F(\theta_0 = 20^\circ) = 1.0077, \quad F(\theta_0 = 30^\circ) = 1.16.$$

Teorema del virial: consideremos un cuerpo que describe un movimiento periódico con período T ,

$$M \frac{d}{dt} (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) = M \dot{\vec{r}}^2 + M \vec{r} \cdot \vec{a} = 2K + \vec{r} \cdot \vec{F} \quad (2)$$

Para cualquier cantidad X definamos $\langle X \rangle \equiv \frac{1}{T} \int_0^T dt X(t)$ (valor medio en un período)

Entonces de (2),

$$\langle K \rangle = -\frac{1}{2} \langle \vec{r} \cdot \vec{F} \rangle \quad (\text{Teorema del virial}) \quad (3)$$

i) Se puede hacer una demostración análoga para un sistema de N partículas con movimiento periódico e incluso cuando no es periódico, pero las funciones y derivadas de las partículas están acotadas y tomamos $T \rightarrow \infty$.

$$\text{ii) Si } \vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(r) = -\frac{dV(r)}{dr} \hat{r} \Rightarrow \langle K \rangle = \frac{1}{2} \left\langle r \frac{dV(r)}{dr} \right\rangle \quad (4)$$

$$\text{iii) } V(r) = A r^m \Rightarrow \langle K \rangle = \frac{m}{2} \langle V \rangle \quad (5)$$

$$\text{Además } E = \langle K \rangle + \langle V \rangle \Rightarrow \langle K \rangle = \frac{m}{2} \langle V \rangle = \frac{m}{m+2} E \quad (6)$$

$$m=2 \text{ (Oscilador armónico)} \quad \langle K \rangle = \langle V \rangle = \frac{1}{2} E \quad (7)$$

$$m=-1 \text{ (Potencial coulombiano y gravitacional)} \quad \langle K \rangle = -\frac{1}{2} \langle V \rangle = -E \quad (8)$$

Ejemplo: Oscilador armónico.

$$V(x) = \frac{1}{2} M \omega^2 x^2 \quad K = \frac{1}{2} M \dot{x}^2$$

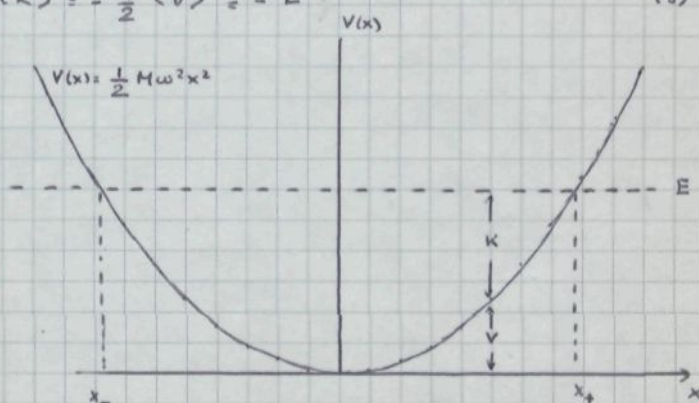
$$F = -M\omega^2 x$$

$$\frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} M \omega^2 x^2 = E$$

Como $T \geq 0$ los valores posibles de x son

$$\frac{1}{2} M \omega^2 x^2 \leq E \quad \text{Los puntos de retorno son } V(x) = E \quad x_{\pm} = \pm (2E/M\omega^2)^{1/2} \equiv \pm A$$

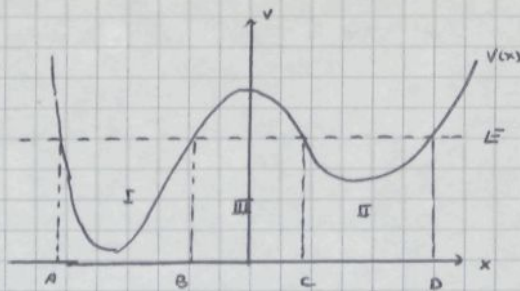
$$\text{Solución exacta por analogía con el péndulo } x(t) = A \cos(\omega t + \alpha), \quad A = \sqrt{\frac{2E}{M\omega^2}}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (9)$$



35/003

Describe cualitativamente el movimiento usando la figura

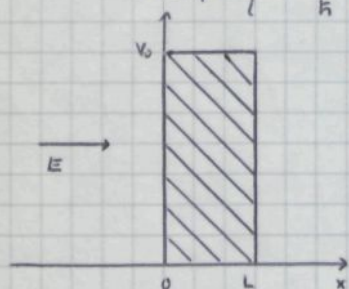
Ejemplo: Considera la figura. Para una energía E los puntos A, B, C y D son puntos de retroceso y las zonas de movimiento permitidas son $A \leq x \leq B$ o $C \leq x \leq D$



Las partículas se hallan confinadas en las zonas

I o II. La Mecánica cuántica nos dice que esto no es cierto y que una partícula inicialmente en I con energía E , puede saltar a la zona II. Una fórmula aproximada para calcular el coeficiente de transmisión es

$$T = \exp \left\{ -\frac{2}{\hbar} \int_{x_B}^{x_C} dx [2M(V(x) - E)]^{1/2} \right\}, \text{ válido solo si } T \ll 1 \quad (10)$$



$$T = \exp \left\{ -\frac{2L}{\hbar} \sqrt{2M[V_0 - E]} \right\} \quad (11)$$

i) $M = 1g$, $v = 20 \text{ cm s}^{-1}$, Obstacle de 100 cm de altura y $L = 10^2 \text{ cm}$.

$$E = \frac{1}{2} M v^2 = 2 \times 10^2 \text{ erg}, \quad V_0 = Mgh = 9.8 \times 10^4 \text{ erg}, \quad L = 10^2 \text{ cm}, \quad \hbar = 1.97 \times 10^{-27} \text{ erg cm}$$

$$\Rightarrow T = e^{-4.5 \times 10^{31}} = 10^{-2 \times 10^{31}} \ll 1$$

ii) Electron $m_e c^2 = 0.511 \text{ MeV}$, $E = 1 \text{ eV}$, $V_0 = 2 \text{ eV}$, $L = 3 \times 10^{-9} \text{ cm}$

$$\hbar c = 1.97 \times 10^{-5} \text{ eV cm} \quad T = e^{-2.18} \Rightarrow T = 0.113$$

La posibilidad de atravesar la barrera de potencial es grande

¿Se pueden medir energías cuánticas negativas? Para localizar la partícula

$$\text{dentro de la barrera } \Delta x \approx 10^{-9} \text{ cm} \Rightarrow \Delta p \approx \hbar / \Delta x$$

$$\Delta E = \frac{1}{2m} (\Delta p)^2 = 388 \text{ eV} !!$$

1.- Demuestra que $\vec{F}(\vec{r}) = (y^2 \cos x + z^3, 2y \sin x - 4, 3xz^2 - 2)$ (unidades arbitrarias) es un campo de fuerzas conservativo. Halla el potencial correspondiente. Calcula el trabajo realizado para mover la partícula desde $(0, 1, -1)$ a $(\pi/2, -1, 2)$.

i) Se comprueba que $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ y por tanto el campo es conservativo.

$$ii) \frac{\partial V}{\partial x} = -y^2 \cos x + z^3 \Rightarrow V = -y^2 \sin x - xz^3 + f(y, z)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -2y \cos x + \frac{\partial f}{\partial y} = -2y \sin x + 4 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = +4 \quad f(y, z) = +4y + g(z)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -3xz^2 + \frac{dg}{dz} = -3xz^2 + 2 \quad g(z) = 2z + C$$

$$V(\vec{r}) = -y^2 \sin x - xz^3 + 4y + 2z + C$$

$$\text{Si imponemos } V(0) = 0 \Rightarrow$$

$$V(\vec{r}) = -y^2 \sin x - xz^3 + 4y + 2z$$

$$iii) V(0, 1, -1) = +2, \quad V(\pi/2, -1, 2) = -1 - 4\pi$$

$$W = V(0, 1, -1) - V(\pi/2, -1, 2) = 3 + 4\pi$$

2.- Calcula el trabajo realizado para mover una partícula en el campo de fuerzas

$\vec{F} = (3x^2, 2xz - y, z)$ a lo largo de 1) Una línea recta que une los puntos $(0, 0, 0)$ y $(2, 1, 3)$; 2) A lo largo de la curva $x = 2t^2$, $y = t$, $z = 4t^2 - t$ desde $t = 0$ a $t = 1$

$$i) \vec{r} = (2t, t, 3t) \Rightarrow d\vec{r} = (2dt, dt, 3dt)$$

$$W_1 = \int_0^1 dt \{ 2 \cdot 3 \cdot 4t^2 + 2 \cdot 2t \cdot 3t - t + 3 \cdot 3t \} = \int_0^1 dt [24t^2 + 12t^2 - t + 9t] =$$

$$= \int_0^1 dt [36t^2 + 8t] = \left[12t^3 + 4t^2 \right]_0^1 \Rightarrow W_1 = 16$$

$$ii) \vec{r} = (2t^2, t, 4t^2 - t) \Rightarrow d\vec{r} = (4tdt, dt, (8t - 1)dt)$$

$$W_2 = \int_0^1 dt \{ 4t \cdot 3 \cdot 4t^4 + 2 \cdot 2t^2 (4t^2 - t) + t + (8t - 1)(4t^2 - t) \} =$$

$$= \int_0^1 dt \{ 48t^5 + 16t^4 - 4t^3 - t + 32t^3 - 8t^2 - 4t^2 + t \} = \int_0^1 dt [48t^5 + 16t^4 + 28t^3 - 12t^2]$$

$$= \left[8t^6 + \frac{16}{5}t^5 + 7t^4 - 4t^3 \right]_0^1 \Rightarrow W_2 = \frac{71}{5}$$

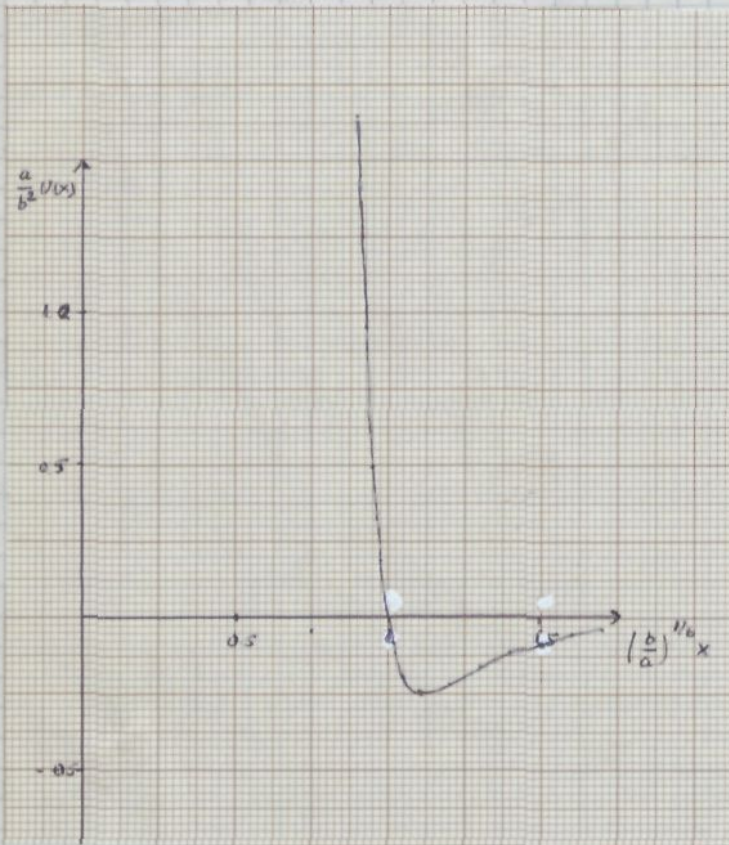
Luego, el campo no es conservativo

35/003

3.- La función energía potencial para la fuerza que actúa entre dos átomos de una molécula diatómica puede expresarse aproximadamente por

$$U(x) = ax^{-12} - bx^{-6}, \quad a, b > 0$$

donde x es la separación entre los átomos. 1) Calcular el punto de equilibrio estable, 2) Suponiendo que uno de los átomos está en reposo y que el otro se mueve sobre el eje Ox , describir cualitativamente los movimientos posibles. 3) Calcular la energía necesaria para romper la molécula.



$$c) \quad \frac{dU(x)}{dx} = 0$$

$$-12ax^{-13} + 6bx^{-7} = 0$$

$$x_0 = (2a/b)^{1/6}$$

$$U(x_0) = -\frac{b^2}{4a}$$

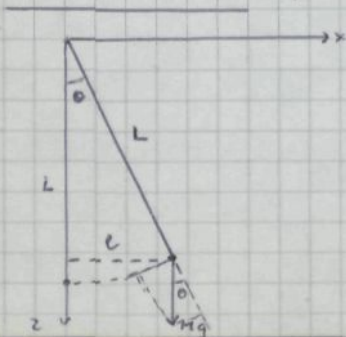
iii) La energía necesaria para romper la molécula es $b^2/4a$.

iv)

$$V(x) = \frac{a}{b^2} U(x) = \frac{1}{y^{12}} - \frac{1}{y^6}$$

$$y = \left(\frac{a}{b}\right)^{1/6} x$$

4.- Un bloque que pesa 2240 N está suspendido del extremo de una cuerda de 12.2 m de largo. El bloque es empujado lateralmente a una distancia de 1.22 m de la vertical y sostenido en esta posición. 1) ¿Cuál es la fuerza que se necesita para mantenerlo en esta posición? 2) ¿Se hace trabajo para sostenerlo en este sitio? 3) ¿Se hizo trabajo para moverlo lateralmente? ¿Cuál cantidad? 4) ¿Efectúa algún trabajo sobre el bloque la tensión del cable?



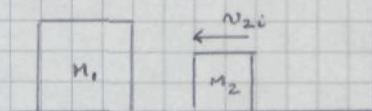
$$1) \quad \tan \theta = \frac{l}{L} = \frac{1.22}{12.2} = 0.1 \quad \Rightarrow \quad \sin \theta = \frac{0.1}{11.01} \quad \cos \theta = \frac{1}{11.01}$$

$$\vec{F} = (Mg \sin \theta \cos \theta, -Mg \sin \theta \sin \theta) = (221.8, -22.18) \text{ N}$$

2) y 4) NO

$$3) \quad W = MgL(1 - \cos \theta)$$

5.- Un bloque de masa M_1 está en reposo en una mesa sin rozamiento muy larga, uno de cuyos extremos termina en una pared. Otro bloque de masa M_2 está colocado como en la figura con velocidad v_{2i} . Suponiendo que todos los choques sean



completamente elásticos obtenemos M_2 en función de M_1 , para que ambos bloques se muevan con la misma velocidad después que M_2 haya chocado una vez con M_1 y una vez con la pared, supuesta ésta de masa infinita.

Choque de M_2 con M_1 sean $\leftarrow v_1$ y $\rightarrow v_2$ las velocidades de estas masas después del choque

$$\left. \begin{aligned} M_1 v_1 - M_2 v_2 &= M_2 v_{2i} \\ \frac{1}{2} M_1 v_1^2 + \frac{1}{2} M_2 v_2^2 &= \frac{1}{2} M_2 v_{2i}^2 \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} v_1 &= \frac{2 M_2}{M_1 + M_2} v_{2i} \\ v_2 &= \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} v_{2i} \end{aligned}$$

Al chocar con la pared su velocidad pasa a ser $\leftarrow v_2$ y en tanto $v_1 = v_2$ exige

$$2M_2 = M_1 - M_2 \quad \Rightarrow \quad M_2 = M_1 / 3$$

6.- Una bola de masa m y velocidad v pasa a través de la lenteja de un péndulo, de masa M y longitud L inicialmente en reposo, saliendo con velocidad $v/2$. ¿Cuál es el menor valor de v para que el péndulo describa una circunferencia completa?

Conservación del momento $m v = M V + \frac{1}{2} m v \quad \Rightarrow \quad V = \frac{m}{2M} v$

$$K = \frac{1}{2} M V^2 = 2 M g L \quad v = \frac{4 M}{m} \sqrt{g L}$$

7.- Desde una altura de 2.74 m del platillo de una balanza se dejan caer pequeñas esferas que rebotan elásticamente contra el platillo, esto es las partículas rebotan hacia arriba con la misma velocidad. Si cada partícula tiene una masa de 114 g y los choques ocurren a razón de 32 esferas por segundo. ¿Cuál es la lectura de la balanza?

La velocidad de las esferas de masa m que caen desde una altura h es $v = \sqrt{2gh}$ y su momento es $p = m \sqrt{2gh}$. Si chocan n esferas por segundo el momento transmitido al platillo de la balanza por segundo es $P = 2 m n \sqrt{2gh}$ y esta es la fuerza que actúa sobre el platillo.

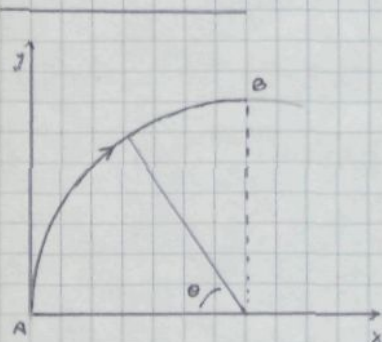
$$P = 2 \times 32 \text{ s}^{-1} \times 114 \text{ g} \sqrt{2 \times 9.81 \text{ cm s}^{-2} \times 274 \text{ cm}} = 5.3495 \times 10^6 \text{ dinas} = 53.495 \text{ N}$$

35/003

8.- Una partícula de masa $M = 1 \text{ Kg}$ se mueve bajo la acción de un campo de fuerzas

$$\vec{F} = (\alpha x y, \beta y, 0) \quad , \quad \alpha = 10 \text{ N m}^{-2} \quad , \quad \beta = 30 \text{ N m}^{-1}$$

Determinar el trabajo realizado para pasar del punto $(0, 0, 0)$ al punto $(1 \text{ m}, 1 \text{ m}, 0)$ a lo largo de un círculo de radio 1 m y de centro en el punto de coordenadas $(1 \text{ m}, 0, 0)$ siguiendo el camino más corto



A = punto inicial , B = punto final

$$\left. \begin{aligned} \text{Camino} \quad x &= R(1 - \cos \theta) \\ y &= R \sin \theta \end{aligned} \right\} \begin{aligned} R &= 1 \text{ m} \\ A \Rightarrow \theta &= 0 \quad , \quad B \Rightarrow \theta = \pi/2 \end{aligned}$$

$$dx = R \sin \theta d\theta \quad , \quad dy = R \cos \theta d\theta$$

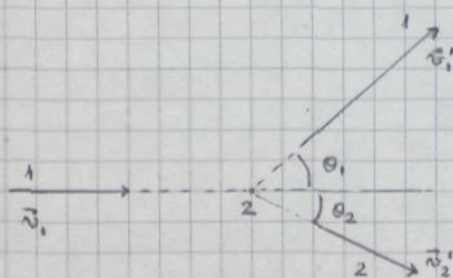
$$W = \int_0^{\pi/2} d\theta [\alpha R \sin \theta R(1 - \cos \theta) R \sin \theta + R \cos \theta \beta R \sin \theta] =$$

$$= \alpha R^3 \int_0^{\pi/2} d\theta \sin^2 \theta - \alpha R^3 \int_0^{\pi/2} d\theta \sin^2 \theta \cos \theta + R^2 \beta \int_0^{\pi/2} d\theta \cos \theta \sin \theta$$

$$= \alpha R^3 \frac{\pi}{4} - \alpha R^3 \frac{1}{3} \sin^3 \theta \Big|_0^{\pi/2} + R^2 \beta \frac{1}{2} \sin^2 \theta \Big|_0^{\pi/2}$$

$$W = \alpha R^3 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} \right) + \beta R^2 \frac{1}{2} \Rightarrow W = 19.52 \text{ J}$$

9.- Una partícula α entra en una cámara que contiene hidrógeno atómico. La partícula α tiene una energía cinética inicial de $3.0 \times 10^4 \text{ eV}$. Choca elásticamente con el núcleo de un átomo de hidrógeno. El átomo de hidrógeno se puede considerar que está en reposo antes del choque. La masa del protón es 0.25 veces la masa de la partícula α . i) ¿Cuál es el mayor ángulo posible que puede desviarse la partícula α ? Si tiene lugar esta desviación máxima ¿en qué dirección retrocede el protón? ii) Para la desviación máxima de la partícula α , encontrar la energía de retroceso del protón



$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

$$m_1 v_1 = m_1 v_1' \cos \theta_1 + m_2 v_2' \cos \theta_2$$

$$0 = m_1 v_1' \sin \theta_1 - m_2 v_2' \sin \theta_2$$

Conservación de
energía - momento

De las dos últimas

$$m_2^2 v_2'^2 = (m_1 v_1 - m_1 v_1' \cos \theta_1)^2 + m_1^2 v_1'^2 \sin^2 \theta_1 \Rightarrow$$

$$m_2^2 v_2'^2 = m_1^2 v_1'^2 + m_2^2 v_2'^2 - 2 m_1^2 v_1 v_1' \cos \theta_1 \quad \text{y sustituyendo en la primera}$$

$$m_1 m_2 v_1'^2 = m_1 m_2 v_1'^2 + m_1^2 v_1'^2 + m_2^2 v_2'^2 - 2 m_1^2 v_1 v_1' \cos \theta_1$$

$$\cos \theta_1 = \frac{1}{2 m_1 v_1 v_1'} \left\{ (m_1 - m_2) v_1'^2 + (m_1 + m_2) v_2'^2 \right\}$$

$$\frac{d \cos \theta_1}{d v_1'} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1'^2 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1^2$$

Si $m_2 \geq m_1$, entonces todos los ángulos son posibles. En nuestro caso $m_2 < m_1$, y sólo son posibles $0 \leq \theta_1 \leq \theta_{\max}$

$$\cos \theta_{1, \max} = \frac{1}{m_1} \sqrt{m_1^2 - m_2^2} \quad \Rightarrow \quad v_1' = \sqrt{\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}} v_1$$

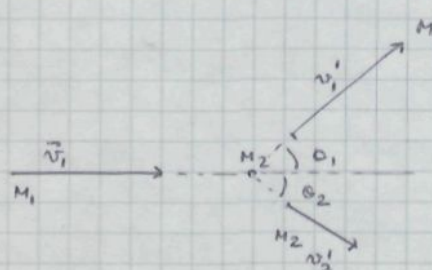
$$v_2' = \sqrt{\frac{2 m_1}{m_1 + m_2}} v_1, \quad \sin \theta_2 = \sqrt{\frac{m_1 - m_2}{2 m_1}}$$

En nuestro caso $m_1 = 4 m_2 \Rightarrow \cos \theta_{1, \max} = \frac{\sqrt{15}}{4} \Rightarrow \theta_{1, \max} = 14^\circ 28' 39.04''$

$$v_1' = \sqrt{\frac{3}{5}} v_1, \quad v_2' = \sqrt{\frac{8}{5}} v_1, \quad \sin \theta_2 = \sqrt{\frac{3}{8}}, \quad \theta_2 = 37^\circ 45' 40.47''$$

$$E_2' = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_1'^2 = \frac{2 m_2}{m_1 + m_2} E_1 = \frac{2}{5} E_1, \quad E_2' = 1.2 \times 10^4 \text{ eV}$$

10. Un cuerpo de masa $M_1 = 1.00 \text{ kg}$, se mueve con una velocidad $v_1 = 1.00 \text{ m s}^{-1}$ y choca con un segundo cuerpo de masa $M_2 = 2.00 \text{ kg}$, que está en reposo. El ángulo entre la trayectoria final y la inicial del cuerpo de masa M_1 es $\theta_1 = 65^\circ$. Calcular las velocidades finales de ambos cuerpos.



$$M_1 v_1 = M_1 v_1' \cos \theta_1 + M_2 v_2' \cos \theta_2$$

$$0 = M_1 v_1' \sin \theta_1 - M_2 v_2' \sin \theta_2$$

$$\frac{1}{2} M_1 v_1^2 = \frac{1}{2} M_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} M_2 v_2'^2$$

Leyes conservación

momento - energía

De las dos primeras

$$M_2^2 v_2'^2 = (M_1 v_1 - M_1 v_1' \cos \theta_1)^2 + M_1^2 v_1'^2 \sin^2 \theta_1 \Rightarrow v_2' = \frac{M_1}{M_2} \left\{ v_1^2 + v_1'^2 - 2 v_1 v_1' \cos \theta_1 \right\}^{1/2}$$

y sustituyendo en la última

$$M_1 M_2 v_1'^2 = M_1 M_2 v_1'^2 + M_1^2 v_1'^2 + M_1^2 v_1'^2 - 2 M_1^2 v_1 v_1' \cos \theta_1$$

$$v_1' = \frac{1}{M_1 + M_2} \left\{ M_1 v_1 \cos \theta_1 + \sqrt{M_2^2 v_1^2 - M_1^2 v_1^2 \sin^2 \theta_1} \right\}$$

35/003

$$v_1' = \frac{v_1}{M_1 + M_2} \left\{ M_1 \cos \theta_1 + \sqrt{M_2^2 - M_1^2 \sin^2 \theta_1} \right\}$$

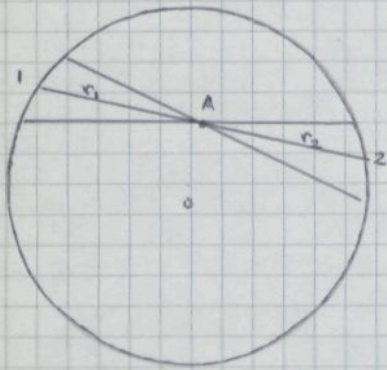
En nuestro caso

$$v_1' = \frac{1}{3} \left\{ \cos \theta_1 + \sqrt{4 - \sin^2 \theta_1} \right\} = 0.7352 \text{ m.s}^{-1}$$

$$v_2' = \frac{1}{2} \left\{ 1 + v_1'^2 - 2v_1' \cos \theta_1 \right\}^{1/2} = 0.4793 \text{ m.s}^{-1}$$

$$\sin \theta_2 = \frac{M_1 v_1' \sin \theta_1}{M_2 v_2'} \Rightarrow \theta_2 = 44^\circ 1' 36.8''$$

11 - Sobre una superficie esférica de radio R hay una distribución homogénea de masa. Demuestran que en un punto situado en el interior el efecto de las fuerzas gravitacionales es nulo.



Supongamos un punto cualquiera A en el que hay una masa m , y la dirección arbitraria 1,2

$$dF_1 = G \frac{m dm_1}{r_1^2}$$

$$dF_2 = G \frac{m dm_2}{r_2^2}$$

$$dm_1 = \sigma d\Omega r_1^2$$

$$dm_2 = \sigma d\Omega r_2^2$$

donde σ es la densidad superficial de masa. Entonces

$$dF_1 = dF_2 = Gm\sigma d\Omega \text{ y el ser opuestas, se cancelan}$$

12 - Calcular $\Delta(1/r)$. Introducción

$$\varphi(r) = e^{-r^2/\sigma}, \quad \sigma > 0$$

y calcular directamente, por integración por partes,

$$I \equiv \int_{\mathbb{R}^3} d^3r \varphi(r) \Delta \frac{1}{r}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} = -x(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{r} = - (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} + 3x^2 (x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}$$

$$\Delta \frac{1}{r} = -\frac{3}{r^3} + \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = 0 \Rightarrow \Delta \frac{1}{r} = 0$$

Este resultado no es probable

en $r=0$. ¿Es válida en $r=0$?

$$I = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r \varphi(r) \Delta \frac{1}{r} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r \varphi(r) \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \frac{1}{r} = \sum_{i=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} d^3r \frac{\partial^2 \varphi(r)}{\partial x_i^2} \frac{1}{r} =$$

$$= \int d^3r \frac{1}{r} \Delta \varphi(r)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \varphi(r) = \frac{d\varphi(r)}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} = + \frac{x}{r} \frac{d\varphi(r)}{dr}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi(r) = + \frac{x^2}{r^2} \frac{d^2 \varphi(r)}{dr^2} + \left(+ \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} \right) \frac{d\varphi(r)}{dr}$$

$$\Delta \varphi(r) = \frac{d^2 \varphi(r)}{dr^2} + \frac{3}{r} \frac{d\varphi(r)}{dr} + \frac{3}{r} \frac{d\varphi(r)}{dr} \Rightarrow \Delta \varphi(r) = \frac{d^2 \varphi(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\varphi(r)}{dr}$$

$$I = 4\pi \int_0^\infty dr r^2 \frac{1}{r} \left\{ \frac{d^2 \varphi(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\varphi(r)}{dr} \right\} =$$

$$= 4\pi \int_0^\infty dr r \left\{ \frac{4r^2}{\sigma^2} - \frac{2}{\sigma} - \frac{2}{r} \frac{2r}{\sigma} \right\} e^{-r/\sigma} =$$

$$= 4\pi \int_0^\infty dr \left\{ \frac{4}{\sigma^2} r^3 - \frac{6}{\sigma} r \right\} e^{-r/\sigma} = 4\pi \left\{ \frac{4}{\sigma^2} \frac{1}{2} \sigma^2 - \frac{6}{\sigma} \frac{\sigma}{2} \right\} = -4\pi$$

Vemos pues que $\Delta(1/r) = 0$ en $r > 0$ y se escribe

$$\Delta \left(\frac{1}{r} \right) = -4\pi \delta(\vec{r})$$

13- A la parte más alta de la atmósfera terrestre llega un flujo de energía electromagnética procedente del Sol que vale $1.388 \times 10^6 \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$. El Sol ha permanecido en el estado actual varios miles de millones de años. ¿Puede provenir esta energía de la energía gravitacional del Sol?

Por argumentos dimensionales la energía gravitacional del Sol es del orden de magnitud

$$U = \frac{GM_\odot^2}{R_\odot} = \frac{6.67 \times 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-2} (1.983 \times 10^{33} \text{ g})^2}{6.96 \times 10^{10} \text{ cm}} = 3.77 \times 10^{48} \text{ erg}$$

$$L_\odot = 1.388 \times 10^6 \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \times 4\pi \times (1.495 \times 10^{13} \text{ cm})^2 = 3.90 \times 10^{33} \text{ erg s}^{-1}$$

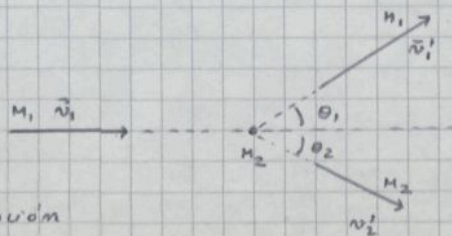
$$\frac{U}{L_\odot} = 9.7 \times 10^{14} \text{ s} = 3.1 \times 10^7 \text{ años} \ll 10^9 \text{ años} \quad \text{No puede ser gravitacional}$$

14- Considerar el choque elástico ($K_i = K_f$)

o inelástico ($K_i > K_f$) de la figura,

donde $M_2 = CM_1$, $C > 0$. Probar que

$|\vec{v}_2' - \vec{v}_1'| \propto |\vec{v}_1|$. Calcular $\vec{v}_1' = \vec{v}_2'$ en función



35/003

de $|\vec{v}_1|$ y $|\vec{v}_2'|$. Usan la fórmula obtenida para probar que 1) Si el choque es elástico y $M_2 > M_1$, las velocidades finales forman un ángulo obtuso. 2) Si el choque es elástico y $M_2 < M_1$, las velocidades forman un ángulo agudo. 3) Si el choque es inelástico y $M_2 \leq M_1$, las velocidades finales forman un ángulo agudo.

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= v_1' \cos \theta_1 + C v_2' \cos \theta_2 \\ 0 &= v_1' \sin \theta_1 - C v_2' \sin \theta_2 \\ \lambda v_1'^2 &= v_1'^2 + C v_2'^2 \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} \lambda &= 1 && \text{choque elástico} \\ 0 &\leq \lambda < 1 && \text{choque inelástico} \end{aligned}$$

De las dos primeras $\cos \theta_1 = \frac{1}{2 v_1 v_1'} [v_1'^2 + v_1'^2 - C^2 v_2'^2]$

De la primera $\cos \theta_2 = \frac{1}{2 C v_1 v_2'} [v_1'^2 - v_1'^2 + C^2 v_2'^2]$

$$\begin{aligned} \cos(\theta_1 + \theta_2) &= \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 = \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \frac{v_1'}{C v_2'} \sin^2 \theta_1 = \\ &= \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \frac{v_1'}{C v_2'} + \frac{v_1'}{C v_2'} \cos^2 \theta_1 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \frac{1}{2 C v_1' v_2'} [v_1'^2 - v_1'^2 - C^2 v_2'^2]$$

$$|\vec{v}_2' - \vec{v}_1'|^2 = v_1'^2 + v_2'^2 - 2 v_1' v_2' \cos(\theta_1 + \theta_2) \Rightarrow |\vec{v}_1' - \vec{v}_2'|^2 = \frac{\lambda - 1 + C \lambda}{C} v_1'^2$$

$$\vec{v}_1' \cdot \vec{v}_2' = \frac{1}{2C} [v_1'^2 - v_1'^2 - C^2 v_2'^2] \Rightarrow$$

$$\vec{v}_1' \cdot \vec{v}_2' = \frac{1}{2C} \{ (1 - \lambda) v_1'^2 + C(1 - C) v_2'^2 \}$$

1) $\lambda = 1$, $C > 1$ $\vec{v}_1' \cdot \vec{v}_2' < 0 \Rightarrow$ ángulo obtuso

2) $\lambda = 1$, $C < 1$ $\vec{v}_1' \cdot \vec{v}_2' > 0 \Rightarrow$ ángulo agudo

3) $\lambda < 1$, $C \leq 1$ $\vec{v}_1' \cdot \vec{v}_2' > 0 \Rightarrow$ ángulo obtuso

15 - Un cuerpo de masa M_1 y velocidad $\vec{v}_1$ choca frontalmente con un cuerpo en reposo de masa M_2 . Las velocidades después del choque son $\vec{v}_1'$ y $\vec{v}_2'$. 1) Calcular $\vec{v}_1'$ y $\vec{v}_2'$ en términos de $\vec{v}_1$. 2) Calcular el cociente de la energía cinética transferida a la masa M_2 y de la energía cinética inicial. 3) ¿Para que valor de M_2 es transferida toda la energía cinética al cuerpo inicialmente en reposo?

1)

$$\vec{v}_1 \rightarrow$$

 $\vec{v}_2$

$$M_1 \vec{v}_1 = M_1 \vec{v}_1' + M_2 \vec{v}_2'$$

$$\frac{1}{2} M_1 v_1^2 = \frac{1}{2} M_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} M_2 v_2'^2$$

$$\vec{v}_1 \parallel \vec{v}_1' \parallel \vec{v}_2'$$

$\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2'$ tienen el mismo sentido

$$M_1 v_1^2 = \frac{1}{M_1} (M_1 v_1 - M_2 v_2')^2 + M_2 v_2'^2 \Rightarrow$$

$$M_1^2 v_1^2 = M_1^2 v_1^2 + M_2^2 v_2'^2 - 2 M_1 M_2 v_1 v_2' + M_1 M_2 v_2'^2$$

$$\vec{v}_2' = \frac{2 M_1}{M_1 + M_2} \vec{v}_1$$

$$\vec{v}_2' = \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} \vec{v}_1$$

2)

$$\eta = \frac{k_2'}{k_1} =$$

$$\eta = \frac{4 M_1 M_2}{(M_1 + M_2)^2}$$

3)

$$\eta = 1 \Rightarrow$$

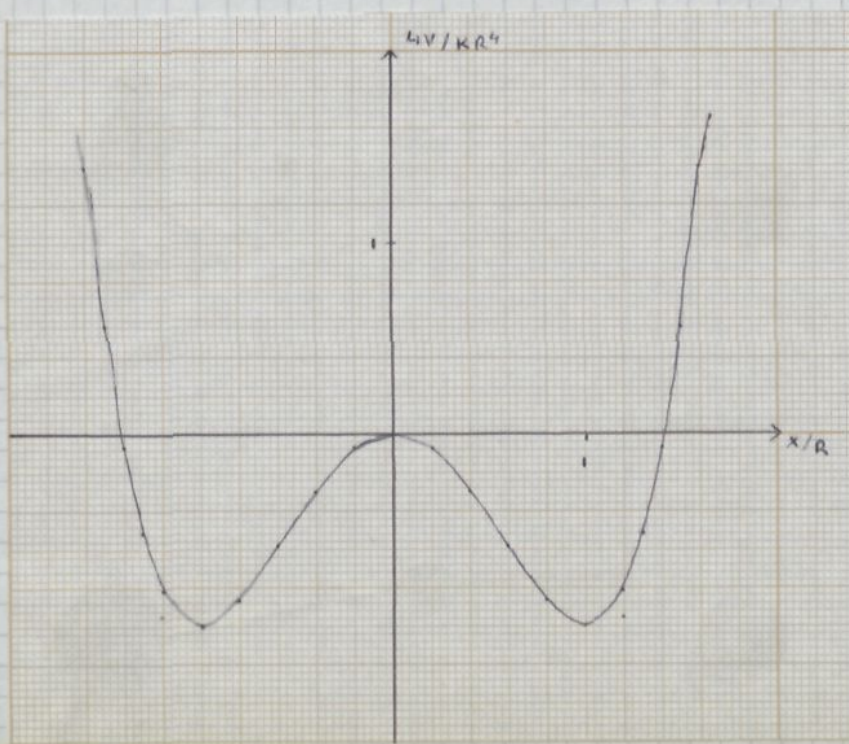
$$4 M_1 M_2 = M_1^2 + M_2^2 + 2 M_1 M_2 \Rightarrow (M_1 - M_2)^2 = 0 \Rightarrow M_2 = M_1$$

16 - Sea un campo de fuerzas unidimensional $F(x) = -Kx^3 + KR^2x$, $R, K > 0$. 1) Calcular el potencial. 2) Determinar los puntos de equilibrio estable e inestable. 3) Suponer que una partícula de masa M se deja en reposo en los puntos i) $x = 3R/2$ y ii) $x = 4R/3$. Describir los movimientos posibles de la partícula en cada caso y calcular los puntos de retorno. 4) En el caso ii) calcular la velocidad máxima.

$$1) F(x) = -Kx^3 + KR^2x \Rightarrow V(x) = \frac{K}{4} x^2 (x^2 - 2R^2) + C. \text{ Podemos tomar } C=0$$

$$V(x) = \frac{K}{4} x^2 (x^2 - 2R^2)$$

$$\frac{dV(x)}{dx} = \left[\left(\frac{x}{R} \right)^2 \left| \left(\frac{x}{R} \right)^2 - 2 \right| \right]$$



$$2) \frac{dV(x)}{dx} = 0$$

$$x=0, x=R, x=-R$$

el primero es inestable y los otros dos estables

$$3) V\left(\frac{3R}{2}\right) = \frac{9}{16} \left(\frac{KR^4}{4} \right)$$

$$V\left(\frac{4R}{3}\right) = -\frac{32}{81} \left(\frac{KR^4}{4} \right)$$

En el primer caso los puntos de

$$\text{retorno son } x_{\pm} = \pm \frac{3}{2} R$$

35/003

En el segundo miembro dados por los valores de $\frac{K}{4} x^2 (x^2 - 2R^2) = -\frac{32}{81} \left(\frac{KR^4}{4} \right)$

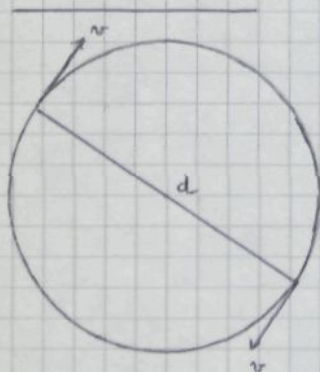
$$x = Rd \quad x^4 - 2x^2 + \frac{32}{81} = 0$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{2}}{3} R, \quad x = \pm \frac{4}{3} R$$

$$4) \quad \frac{1}{2} M v^2 + V(R) = -\frac{32}{81} \frac{KR^4}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} M v^2 = -\frac{32}{81} \frac{KR^4}{4} + \frac{KR^4}{4} = \frac{49}{81} \frac{KR^4}{4}$$

$$v = \frac{7}{9} R^2 \left(\frac{K}{2M} \right)^{1/2}$$

- 17- Una estrella doble o binaria se compone de dos estrellas ligadas por la acción de la gravedad. A partir de estudios espectroscópicos se sabe que 1) El período de revolución alrededor del centro de masas es de 14.4 días 2) La velocidad de cada una de ellas es de 220 km s^{-1} y aproximadamente igual, en módulo, para ambas. De aquí se puede deducir que prácticamente equidistan de su centro de masas. 3) La órbita es circular. A partir de estos datos calcular
- i) La masa reducida del sistema ii) La separación entre ambas estrellas



$$G = 6.6720 \times 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-2} \quad T = 14.4 \text{ días} = 1.24416 \times 10^6 \text{ s.}$$

$$v = 2.2 \times 10^7 \text{ cm s}^{-1}$$

$$T v = \pi d \Rightarrow d = \frac{T v}{\pi} = 8.7126 \times 10^{12} \text{ cm} =$$

Del teorema del virial

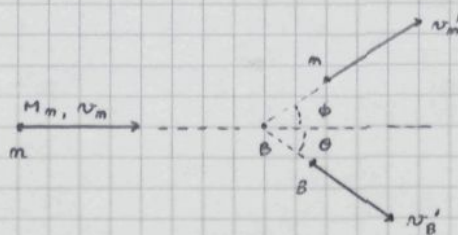
$$\frac{1}{2} M v^2 \times 2 = -\frac{1}{2} \left(-\frac{G M^2}{d} \right)$$

La masa reducida es $\mu = \frac{M}{2} \quad \mu = \frac{d v^2}{G} = \frac{T v^3}{\pi G} \Rightarrow \mu = 6.3202 \times 10^{34} \text{ g.}$

- 18- En 1932, para determinar la masa del neutrón, Chadwick consideró el proceso de colisión elástica de neutrones sobre átomos $m + B \rightarrow B + m$. Logró medir para

un θ fijo que si $B = {}^1_1\text{H}$ $v'_H = 3.3 \times 10^7 \text{ ms}^{-1}$

y si $B = {}^{14}_7\text{N}$ $v'_N = 4.7 \times 10^6 \text{ ms}^{-1}$. ¿Cuál es la masa del neutrón?



Las leyes de conservación del momento y la energía son

$$M_m v_m = M_m v_m' \cos \phi + M_B v_B' \cos \theta$$

$$0 = M_m v_m' \sin \phi - M_B v_B' \sin \theta$$

$$\frac{1}{2} M_m v_m^2 = \frac{1}{2} M_m v_m'^2 + \frac{1}{2} M_B v_B'^2$$

Eliminando ϕ entre las dos primeras ecuaciones

$$M_m^2 v_m'^2 = (M_m v_m - M_B v_B' \cos \theta)^2 + M_B^2 v_B'^2 \sin^2 \theta$$

$$M_m^2 v_m'^2 = M_m^2 v_m^2 + M_B^2 v_B'^2 - 2 M_m M_B v_m v_B' \cos \theta$$

y sustituyendo en la última

$$M_m^2 v_m'^2 = M_m^2 v_m^2 + M_B^2 v_B'^2 - 2 M_m M_B v_m v_B' \cos \theta + M_m M_B v_B'^2 \Rightarrow$$

$$v_B' \{ (M_B + M_m) v_B' - 2 M_m v_m \cos \theta \} = 0$$

La solución $v_B' = 0$ no nos interesa pues corresponde a la ausencia de choque y por tanto

$$v_B' = \frac{2 M_m}{M_m + M_B} v_m \cos \theta$$

Entonces

$$\frac{v_H'}{v_N'} = \frac{M_m + M_N}{M_m + M_H} \Rightarrow M_m = \frac{M_H v_H' - M_N v_N'}{v_N' - v_H'}$$

Como $M_H = 938.79 \text{ MeV}/c^2$ y $M_N = 13.050.51 \text{ MeV}/c^2$

$$M_m = 1073 \text{ MeV}/c^2$$

a comparar con el valor actual $M_m = 939.5731(27) \text{ MeV}/c^2$

19. En el punto 1 un aparato pesado de masa M_1 produce un fotón de frecuencia ν_1 . Un observador en un sistema de coordenadas localmente inercial asociado al aparato nota que la masa del aparato cambia en $c^2 \Delta M_1 = -h \nu_1$. En el punto 2 el fotón es absorbido por un aparato pesado de masa M_2 y esta cambia en $c^2 \Delta M_2 = h \nu_2$ donde ν_2 es la frecuencia del fotón absorbido. El potencial gravitacional en los dos puntos es Φ_1 y Φ_2 respectivamente. Impones la ley de conservación de la energía y encuentra la relación entre ν_2 y ν_1 . R.V Pound y G.A Rebka hicieron esta experiencia, en 1960, colocando el emisor en una torre a 22.6 m sobre la superficie de la Tierra y el absorbente en dicha superficie. Que valor se espera para $\Delta \nu/\nu \equiv (\nu_2 - \nu_1)/\nu_1$.

35/003

La ley de conservación de la energía es

$$c^2 \Delta M_1 + c^2 \Delta M_2 + \Phi_1 \Delta M_1 + \Phi_2 \Delta M_2 = 0$$

pues antes y después de los dos sucesos la energía de los fotones debe ser la misma.

Entonces

$$h(\nu_2 - \nu_1) = -\Phi_1 \Delta M_1 - \Phi_2 \Delta M_2 = \Phi_1 \frac{h\nu_1}{c^2} - \Phi_2 \frac{h\nu_2}{c^2}$$

$$\nu \approx \nu_1 \quad y \quad \frac{\Delta \nu}{\nu} \equiv \frac{\nu_2 - \nu_1}{\nu_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta \nu}{\nu} = -\frac{1}{c^2} (\Phi_2 - \Phi_1) \frac{1}{1 + \Phi_2/c^2}$$

Si es h la altura de la torre, M la masa de la Tierra y R su radio

$$\Phi_1 = -\frac{GM}{R+h} \quad \Phi_2 = -\frac{GM}{R} \quad , \quad \Phi_2/c^2 \ll 1$$

$$\frac{\Delta \nu}{\nu} = +\frac{1}{c^2} \left(\frac{GM}{R} - \frac{GM}{R+h} \right) = \frac{GM}{R^2} \frac{1}{c^2} h = gh/c^2$$

$$Si \quad g = 980 \text{ cm s}^{-2} \quad , \quad h = 2.24 \times 10^3 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta \nu}{\nu} = 2.44 \times 10^{-15}$$

$$\text{El valor hallado por Pound y Rebka es} \quad \frac{\Delta \nu}{\nu} = (2.57 \pm 0.26) \times 10^{-15}$$

20. De acuerdo con el problema anterior si un átomo emite con una frecuencia ν_1 en un campo cuyo potencial gravitacional es Φ_1 , es recibida en un punto con potencial Φ_2 con frecuencia ν_2 tal que ($\nu \approx \nu_1$)

$$\frac{\Delta \nu}{\nu} \equiv \frac{\nu_2 - \nu_1}{\nu_1} = -\frac{1}{c^2} (\Phi_2 - \Phi_1) \frac{1}{1 + \Phi_2/c^2}$$

Si el observador que recibe la radiación está sobre la superficie de la Tierra, estimar $\Delta \nu/\nu$ si el emisor está 1) En la superficie del Sol 2) En una estrella blanca 3) En una estrella de neutrones.

$$\Phi_1 = \frac{GM_1}{R_1} \quad \Phi_2 = \frac{GM_2}{R_2}$$

$$\frac{\Delta \nu}{\nu} = -\frac{G}{c^2} \left(\frac{M_2}{R_2} - \frac{M_1}{R_1} \right) \frac{1}{1 + \frac{G}{c^2} \frac{M_2}{R_2}}$$

$$G = 6.6720 \times 10^{-8} \text{ g}^{-1} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-2} \quad , \quad c = 2.99792458 \times 10^{10} \text{ cm s}^{-1}$$

$$R_2 = 6.367 \times 10^8 \text{ cm} \quad M_2 = 5.997 \times 10^{27} \text{ g} \quad \frac{G}{c^2} \frac{M_2}{R_2} = 6.992 \times 10^{-10}$$

1) Sol $M_1 = 1.989 \times 10^{33} \text{ g}$ $R_1 = 6.6599 \times 10^{10} \text{ cm}$ $\frac{GM_1}{c^2 R_1} = 2.22 \times 10^{-6}$

$$\frac{\Delta v}{v} = - 2.22 \times 10^{-6}$$

2) Enana blanca $M_1 \approx 10^{32} \text{ g}$ $R_1 \approx 6 \times 10^8 \text{ cm}$ $\frac{GM_1}{c^2 R_1} \approx 1 \times 10^{-4}$

$$\frac{\Delta v}{v} = - 1 \times 10^{-4}$$

3) Estrella de neutrones $M_1 \approx 10^{33} \text{ g}$ $R_1 \approx 6 \times 10^6 \text{ cm}$ $\frac{GM_1}{c^2 R_1} \approx 1 \times 10^{-2}$

$$\frac{\Delta v}{v} \approx - 1 \times 10^{-2}$$

21. Calcular la altura máxima de una montaña en la superficie de la Tierra. Provenir de la siguiente forma: considere la montaña de la figura.

Si h es muy grande la energía potencial gravitacional

de la capa superior de espesor x es tan grande que

es capaz de mover una capa de igual espesor en la base

de la montaña y la montaña se hunde. Para que un sólido se mueva es necesario

romper la dislocación de la entosis y esto requiere una energía, por molécula, es del

orden de $E_{\text{erg}} = 0.01 \text{ Ry}$. Suponga que la montaña es de SiO_2 .



Si es B el área de la base de la montaña, entonces

$$\rho B x g h \leq E_{\text{erg}} n \times B \quad \text{donde } n \text{ es el número de moléculas por cm}^3 \text{ y}$$

ρ es la densidad. Si la molécula tiene un peso atómico A entonces $\rho = n A m_p$

y

$$h < \frac{E_{\text{erg}}}{\rho A m_p}$$

$$h < \frac{(3 \times 10^{10})^2 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-2}}{980 \text{ g cm}^{-3} \times 60 \times 938 \times 10^6 \text{ eV}} \times 0.01 \times 13.6 \text{ eV} \Rightarrow$$

$$h < 2.2 \times 10^6 \text{ cm}$$

$$h < 22 \text{ km.}$$

22. Resolver numéricamente la ecuación

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = y(x)$$

$$y(0) = 1$$

$$y(1) = ?$$

por el método de Runge-Kutta de segundo orden.

35/003

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(x, y)$$

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$$

$$k_1 = h f(x_m, y_m), \quad k_2 = h f(x_m + h, y_m + k_1)$$

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2} [y'_m + y'_{m+h}] \Rightarrow y_{m+1} = y_m + h y'_m + \frac{1}{2} h^2 y''_m$$

$$y_m = y_m \left(1 + h + \frac{1}{2} h^2\right)$$

Tomemos $h = 0.1$

$$y(0) = 1$$

$$y(0.1) = 1.105$$

$$y(0.2) = 1.221025$$

$$y(0.3) = 1.349233 \quad \dots \quad y(1) = 2.715080156$$

$$\text{el valor exacto es } y(1) = 2.718281828$$

Tomemos $h = 0.01$

$$y(1) = 2.718236863$$

Tomemos $h = 0.001$

$$y(1) = 2.718281376$$

23. Resolvamos en el mismo método la ecuación

$$\frac{dy(x)}{dx} = xy$$

$$y(0) = 1$$

$$y(0.5) = ?$$

La solución exacta es $y(x) = e^{\frac{1}{2}x^2}$

$$y_{m+1} = y_m + \frac{1}{2} [h x_m y_m + h (x_m + h) (y_m + h x_m y_m)]$$

$$y_{m+1} = y_m \left\{ 1 + h x_m + \frac{1}{2} h^2 + \frac{1}{2} h^2 x_m^2 + \frac{1}{2} h^3 x_m \right\}$$

Si $h = 0.1$

$$y_{m+1} = y_m [1.005 + 0.1005 x_m + 0.005 x_m^2]$$

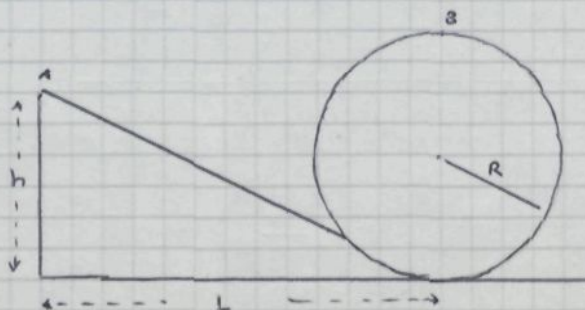
$$x_0 = 0 \quad y_0 = 1 \quad \dots \quad x_1 = 0.1, \quad y_1 = 1.005 \quad ; \quad x_2 = 0.2, \quad y_2 = 1.0201755$$

$$x_3 = 0.3 \quad y_3 = 1.045985950 \quad ; \quad x_4 = 0.4 \quad y_4 = 1.083223039$$

$$y(0.5) = 1.133051289$$

$$\text{exacto } y(0.5) = 1.133148453$$

24. Una bola, de radio despreciable, cae por un plano inclinado que termina en un bucle circular. Se desea calcular la altura mínima desde la que debe soltarse la bola para que pueda girar por el bucle sin caerse.



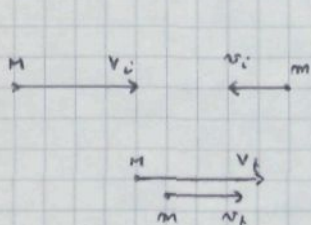
En el punto A la energía de la bola es $E = mgh$ y en el punto B esta energía es

$$mgh = mg2R + \frac{1}{2}mv^2$$

Para que justo no se caiga $v^2/R = g$

$$mgh = 2mgR + \frac{1}{2}mRg \Rightarrow h = \frac{5}{2}R$$

25. Un objeto de masa M se mueve con velocidad V_i y encuentra en su camino un pequeño objeto de masa $m \ll M$ que se mueve en dirección opuesta con velocidad v_i . El choque es perfectamente elástico. Después de este ambos objetos se mueven en el sentido que lo hacia inicialmente el de masa M . ¿Cuál es la velocidad final del objeto pequeño?



$$MV_i - mv_i = MV_f + mv_f$$

$$\frac{1}{2}MV_i^2 + \frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}MV_f^2 + \frac{1}{2}mv_f^2$$

$$M^2V_i^2 + Mmv_i^2 = (MV_i - mv_i - mv_f)^2 + m^2v_f^2$$

$$\cancel{M^2V_i^2} + m^2v_i^2 = \cancel{M^2V_i^2} + m^2v_i^2 + m^2v_f^2 - 2mMV_i v_i - 2mMV_i v_f + 2m^2v_i v_f + m^2v_f^2$$

$$m(M+m)v_f^2 + 2m(mv_i - MV_i)v_f - mv_i(Mv_i - mv_i + 2MV_i) = 0$$

$$v_f = \frac{1}{2(M+m)} [-2(mv_i - MV_i) \pm \sqrt{4(mv_i - MV_i)^2 + 4(M+m)v_i(Mv_i - mv_i + 2MV_i)}]$$

$$v_f = \frac{1}{M+m} [MV_i - mv_i \pm \sqrt{M^2V_i^2 + m^2v_i^2 + 2M^2V_i v_i}]$$

$$v_f = \frac{1}{M+m} [MV_i - mv_i \pm (MV_i + Mv_i)] \quad \text{Solo es negativo + es bueno}$$

$$v_f = \frac{2M}{M+m} V_i + \frac{M-m}{M+m} v_i \Rightarrow v_f = v_i + 2V_i$$

26. En contra la disminución de la energía media de un oscilador amortiguado desde

$$x(t) = A e^{-(\lambda/2m)t} \cos(\omega t + \phi)$$

La energía es

$$E = \frac{1}{2}m \left(\frac{dx(t)}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2(t)$$

35/003

$$\langle E \rangle = \frac{1}{T} \int_0^{t+2\pi/\omega} dt E(t) = \frac{1}{T} \int_0^{t+2\pi/\omega} dt \left[\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \right]:$$

$$= \frac{m}{2T} \int_0^{t+2\pi/\omega} dt [\dot{x}^2 + \omega^2 x^2] = \frac{m}{2T} \int_0^{t+2\pi/\omega} dt \left\{ \left(-\frac{A\lambda}{2m} e^{-(\lambda/2m)t} \cos(\omega t + \delta) - A e^{-(\lambda/2m)t} \omega \sin(\omega t + \delta) \right)^2 \right. \\ \left. + \omega^2 \left(A e^{-(\lambda/2m)t} \cos(\omega t + \delta) \right)^2 \right\}$$

$$= \frac{m}{2T} \int_0^{t+2\pi/\omega} dt e^{-(\lambda/m)t} \left\{ \frac{A^2 \lambda^2}{4m^2} \cos^2(\omega t + \delta) + A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \delta) + \frac{A^2 \lambda}{m} \omega \sin(\omega t + \delta) \cos(\omega t + \delta) \right. \\ \left. + A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \delta) \right\}$$

$$= \frac{m}{2T} A^2 \int_0^{t+2\pi/\omega} dt e^{-(\lambda/m)t} \left\{ \omega^2 + \frac{\lambda \omega}{m} \sin(\omega t + \delta) \cos(\omega t + \delta) + \frac{\lambda^2}{4m^2} \cos^2(\omega t + \delta) \right\}$$

$$= \frac{m A^2}{2T} \int_0^{t+2\pi/\omega} dt e^{-(\lambda/m)t} \left\{ \omega^2 + \frac{\lambda \omega}{4mi} \left[e^{2i(\omega t + \delta)} - e^{-2i(\omega t + \delta)} \right] + \frac{\lambda^2}{16m^4} \left[e^{2i(\omega t + \delta)} + 2 + e^{-2i(\omega t + \delta)} \right] \right\}$$

$$= \frac{m A^2 \omega}{4\pi} \left\{ -\frac{m \omega^2}{\lambda} \left[e^{-(\lambda/m)(t+2\pi/\omega)} - e^{-(\lambda/m)t} \right] + \frac{\lambda \omega}{4mi} \left\{ -\frac{e^{2i\delta}}{\frac{\lambda}{m} - i\omega} \left[e^{-(\lambda/m - 2i\omega)(t+2\pi/\omega)} - e^{-(\lambda/m - 2i\omega)t} \right] \right. \right. \right.$$

$$\left. + e^{-(\lambda/m - 2i\omega)t} \right\} - \frac{\lambda \omega}{4mi} \left\{ -\frac{e^{-2i\delta}}{\frac{\lambda}{m} + i\omega} \left[e^{-(\lambda/m + i\omega 2)(t+2\pi/\omega)} - e^{-(\lambda/m + i\omega 2)t} \right] \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda^2}{16m^4} \left\{ -\frac{e^{2i\delta}}{\frac{\lambda}{m} + 2i\omega} \left[e^{-(\lambda/m - 2i\omega)(t+2\pi/\omega)} - e^{-(\lambda/m - 2i\omega)t} \right] \right\} \right.$$

$$\left. + 2\frac{\lambda^2}{16m^4} \left(-\frac{m}{\lambda} \right) \left[e^{-(\lambda/m)(t+2\pi/\omega)} - e^{-\lambda t/m} \right] + \frac{\lambda^2}{16m^4} \left\{ -\frac{e^{-2i\delta}}{\frac{\lambda}{m} + 2i\omega} \left[e^{-(\lambda/m + 2i\omega)(t+2\pi/\omega)} - e^{-(\lambda/m + 2i\omega)t} \right] \right\} \right\}$$

$$\langle E \rangle = \frac{m \omega A^2}{4\pi} \left\{ \left(\frac{m \omega^2}{\lambda} + \frac{\lambda}{8m^3} \right) \left[1 - e^{-2\pi\lambda/m\omega} \right] e^{-\lambda t/m} + \frac{\lambda \omega}{4i\omega \frac{\lambda}{m} - 2i\omega} \left[1 - e^{-2\pi\lambda/m\omega} \right] \right.$$

$$\left. e^{-\lambda t/m} e^{2i(\omega t + \delta)} + \frac{\lambda \omega}{4i\omega \frac{\lambda}{m} + 2i\omega} \left[1 - e^{-2\pi\lambda/m\omega} \right] e^{-\lambda t/m} e^{-2i(\omega t + \delta)} \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda^2}{16m^4} \frac{1}{\frac{\lambda}{m} - 2i\omega} \left[1 - e^{-2\pi\lambda/m\omega} \right] e^{-\lambda t/m} e^{2i(\omega t + \delta)} + \frac{\lambda^2}{16m^4} \frac{1}{\frac{\lambda}{m} + 2i\omega} \left[1 - e^{-2\pi\lambda/m\omega} \right] e^{-\lambda t/m} e^{-2i(\omega t + \delta)} \right\}$$

$$\langle E \rangle = \frac{m \omega A^2}{4\pi} \left[1 - e^{-2\pi\lambda/m\omega} \right] e^{-\lambda t/m} \left\{ \frac{m \omega^2}{\lambda} + \frac{\lambda}{8m^3} + \frac{\lambda \omega}{2m} \frac{1}{\frac{\lambda^2}{m^2} + 4\omega^2} \left[\frac{\lambda}{m} \sin 2(\omega t + \delta) \right. \right.$$

$$\left. + 2\omega \cos 2(\omega t + \delta) \right] + \frac{\lambda^2}{16m^4} \frac{1}{\frac{\lambda}{m^2} + 4\omega^2} \left[\frac{\lambda}{m} \sin 2(\omega t + \delta) + 2\omega \cos 2(\omega t + \delta) \right] \right\}$$

POTENCIALES CENTRALES

Centro de masas. Consideremos un sistema de N partículas de masas $M_1, M_2, \dots, M_N$ y posiciones $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$, respectivamente. La coordenada centro de masas se define como

$$\vec{R} \equiv \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N M_i \vec{r}_i, \quad M \equiv \sum_{i=1}^N M_i = \text{masa total del sistema} \quad (1)$$

Si en un volumen V hay una distribución de masa caracterizada por la densidad $\rho(\vec{r})$ entonces la masa total es

$$M = \lim_{\Delta^3 r_i \rightarrow 0} \sum_i \Delta^3 r_i \rho(\vec{r}_i) = \int_V d^3 r \rho(\vec{r}) \quad (2)$$

y las coordenadas centro de masas son

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \lim_{\Delta^3 r_i \rightarrow 0} \sum_i \Delta^3 r_i \vec{r}_i \rho(\vec{r}_i) = \frac{1}{M} \int_V d^3 r \vec{r} \rho(\vec{r}) \quad (3)$$

Ecuaciones del movimiento del C.M. Consideremos, para simplificar, el caso discreto

$$\frac{d^2 \vec{R}(t)}{dt^2} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N M_i \ddot{\vec{r}}_i(t) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N \left[\vec{F}_{\text{ext}}^{(i)} + \sum_{j=1}^N {}' \vec{F}_{ji} \right] \quad (4)$$

donde la prima indica que en la suma se debe omitir $j=i$. Para fuerzas newtonianas

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N {}' \vec{F}_{ij} = 0 \quad \text{y entonces}$$

$$M \frac{d^2 \vec{R}(t)}{dt^2} = \vec{F}_{\text{ext}}, \quad \vec{F}_{\text{ext}} \equiv \sum_{i=1}^N \vec{F}_{\text{ext}}^{(i)} \quad (5)$$

Para fuerzas Newtonianas el centro de masas se mueve como un punto en el que está concentrada toda la masa del sistema y sobre el que actúan todas las fuerzas externas. Si el sistema está aislado $\vec{F}_{\text{ext}}^{(i)} = 0$ y entonces el C.M. describe un movimiento rectilíneo y uniforme. Lo mismo sucede con un sistema continuo.

Se puede probar que la ley es muy general, en el sentido de que si el sistema presenta invariancia galileana entonces se puede encontrar para todo sistema aislado un $\vec{R}(t)$, que quizá no coincide con el anterior, que describe un movimiento rectilíneo y uniforme.

Momento angular: Se define el momento angular como

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{p}_i \quad [L] = M L^2 T^{-1} \quad (6)$$

Veamos las ecuaciones del momento

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^N \left[\dot{\vec{r}}_i \times \vec{p}_i + \vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i \right] = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \left[\vec{F}_{\text{ext}}^{(i)} + \sum_{j=1}^N {}' \vec{F}_{ji} \right] \quad (7)$$

35/003

Si las fuerzas son Newtonianas y están dirigidas según la línea que une los dos cuerpos

entonces $\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N'} \vec{r}_{ij} \times \vec{F}_{ji} = 0$ y

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}, \quad \vec{N} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_{ext}^{(i)} = \text{Momento total de las fuerzas externas.} \quad (8)$$

Si el sistema está aislado $\vec{N} = 0$, entonces $\vec{L}$ es conservado.

Si el sistema es invariante bajo rotaciones existe siempre un vector $\vec{L}$, cuya expresión puede diferir de la anterior, que es conservado. También es cierto que en todo proceso de colisión el momento angular es conservado.

Sistema de dos partículas: Consideremos un sistema aislado formado por dos partículas de masas M_1 y M_2 con vectores posición $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$. Entonces

$$M_1 \frac{d^2 \vec{r}_1(t)}{dt^2} = \vec{F}_{21}, \quad M_2 \frac{d^2 \vec{r}_2(t)}{dt^2} = \vec{F}_{12} \quad (9)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Coordenadas Centro de Masas} \\ \text{Coordenadas relativas} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \vec{R} = \frac{M_1 \vec{r}_1 + M_2 \vec{r}_2}{M_1 + M_2} \\ \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{M_2}{M} \vec{r} \\ \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{M_1}{M} \vec{r} \end{array} \quad (10)$$

donde $M = M_1 + M_2$, entonces

$$M_1 \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} + \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_{21}, \quad M_2 \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} - \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_{12} \quad (11)$$

$$\text{Sumando ambas ecuaciones} \quad (M_1 + M_2) \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} \quad (12)$$

Si las fuerzas son Newtonianas el segundo miembro es nulo y por tanto el C.M. describe un movimiento rectilíneo y uniforme. Entonces de (11)

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \quad , \quad \mu \equiv \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} = \text{masa reducida} \quad \vec{F} \equiv \vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \quad (13)$$

Notar i) si $M_1 \gg M_2 \Rightarrow \mu \approx M_2$, ii) si $M_1 = M_2$ entonces $\mu = M_1/2$

$$\text{Invariancia traslacional: Esto implica que } \vec{F} = \vec{F}(\vec{r}) \Rightarrow \mu \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{F}[\vec{r}(t)] \quad (14)$$

y por tanto el problema de dos cuerpos, una vez separada el movimiento del C.M., ha quedado reducido al de un sólo cuerpo.

Fuerzas centrales: $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$, entonces el problema a resolver es

$$\left. \begin{array}{l} \mu \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = -\vec{\nabla} V[\vec{r}(t)] \\ + \text{seis condiciones iniciales.} \end{array} \right\} \quad (15)$$

Conservación de la energía: Definimos la energía E como

$$\frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 + V(\vec{r}) = E \quad (1)$$

Veamos que E es constante

$$\frac{dE}{dt} = \mu \dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} + \frac{dV}{dr} = \mu \dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla} V(\vec{r}) = \dot{\vec{r}} [\mu \ddot{\vec{r}} + \vec{\nabla} V(\vec{r})] = 0 \quad \text{Q.E.D.}$$

Conservación del momento angular: El momento angular total es

$$\vec{L}_T = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 \quad (2)$$

y es conservado. Definamos ahora el momento angular con relación al C.M. que denominaremos $\vec{L}$

$$\vec{L} \equiv (\vec{r}_1 - \vec{R}) \times \vec{p}_1 + (\vec{r}_2 - \vec{R}) \times \vec{p}_2 = \vec{L}_T - \vec{R} \times (\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \vec{L}_T - M \vec{R} \times \dot{\vec{R}} \quad (3)$$

pero $\vec{R} \times \dot{\vec{R}} = d\vec{R} \times d\vec{R} = 0$ y por tanto $\vec{L}$ es también conservado por otro parte

$$\vec{L} = \frac{M_2}{M} \vec{r} \times M_1 \dot{\vec{r}}_1 + \frac{M_1}{M} \vec{r} \times M_2 \dot{\vec{r}}_2 = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \vec{r} \times (\dot{\vec{r}}_1 - \dot{\vec{r}}_2) \Rightarrow$$

$$\vec{L} = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \quad (4)$$

Resumen: En un sistema newtoniano aislado de dos partículas que interactúan mediante fuerzas centrales el centro de masas describe un movimiento rectilíneo y uniforme y todo el problema queda reducido a estudiar el movimiento relativo que viene descrito por la ecuación

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = -\vec{\nabla} V[\vec{r}(t)] \quad (5)$$

y existen, al menos, dos cantidades conservadas

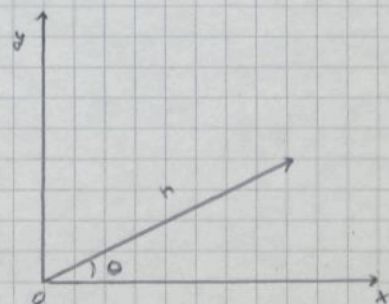
$$\frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 + V(\vec{r}) = E \quad (\text{Energía}) \quad (6)$$

$$\mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{L} \quad (\text{Momento angular}) \quad (7)$$

Notar que E y $\vec{L}$ son cuatro constantes de las 6 necesarias para resolver el problema.

Movimiento

i) Si $\vec{L} \equiv 0$ entonces $\vec{r} \parallel \dot{\vec{r}}$ y la partícula describe un movimiento unidimensional y como todas las movimientos unidimensionales queda totalmente determinado por la ley de conservación de la energía.



35/003

v) $\vec{L} \neq 0$. Siempre podemos elegir un sistema de coordenadas en que $\vec{L} = (0, 0, L)$ con $L > 0$ y entonces $\vec{r}(t)$ esta en el plano Oxy . Por la simetría del problema es útil introducir coordenadas polares

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= r(t) \cos \theta(t) \\ y(t) &= r(t) \sin \theta(t) \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= \dot{r}(t) \cos \theta(t) - r(t) \dot{\theta}(t) \sin \theta(t) \\ \dot{y}(t) &= \dot{r}(t) \sin \theta(t) + r(t) \dot{\theta}(t) \cos \theta(t) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

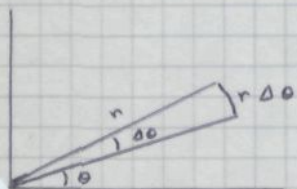
$$\frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) \quad , \quad \vec{r} \times \mu \dot{\vec{r}} = (0, 0, \mu r^2 \dot{\theta}) \quad (9)$$

y las leyes de conservación anteriores son

$$\frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \mu r^2 \dot{\theta}^2 + V(r) = E \quad , \quad \mu r^2 \dot{\theta} = L \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r) = E \quad , \quad \mu r^2 \dot{\theta} = L \quad (10)$$

Ley de áreas (segunda ley de Kepler)



El área barrida por unidad de tiempo por el radio vector es

$$A = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{L}{2\mu} \quad (11)$$

y permanece constante. El área barrida por unidad de tiempo

se denomina velocidad areolar. Esta ley es válida para cualquier potencial central

$V(r)$, pues dice simplemente que el momento angular es conservado.

Conservación de la energía. Esta ley se puede escribir

$$\frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r) = E$$

$$\frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 = \text{Energía cinética radial} \geq 0$$

(12)

$$\frac{L^2}{2\mu r^2} = \text{barrera centrífuga} \geq 0 \quad , \quad V(r) = \text{potencial}$$

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r) = \text{potencial efectivo}$$

$E =$ Energía total del movimiento relativo

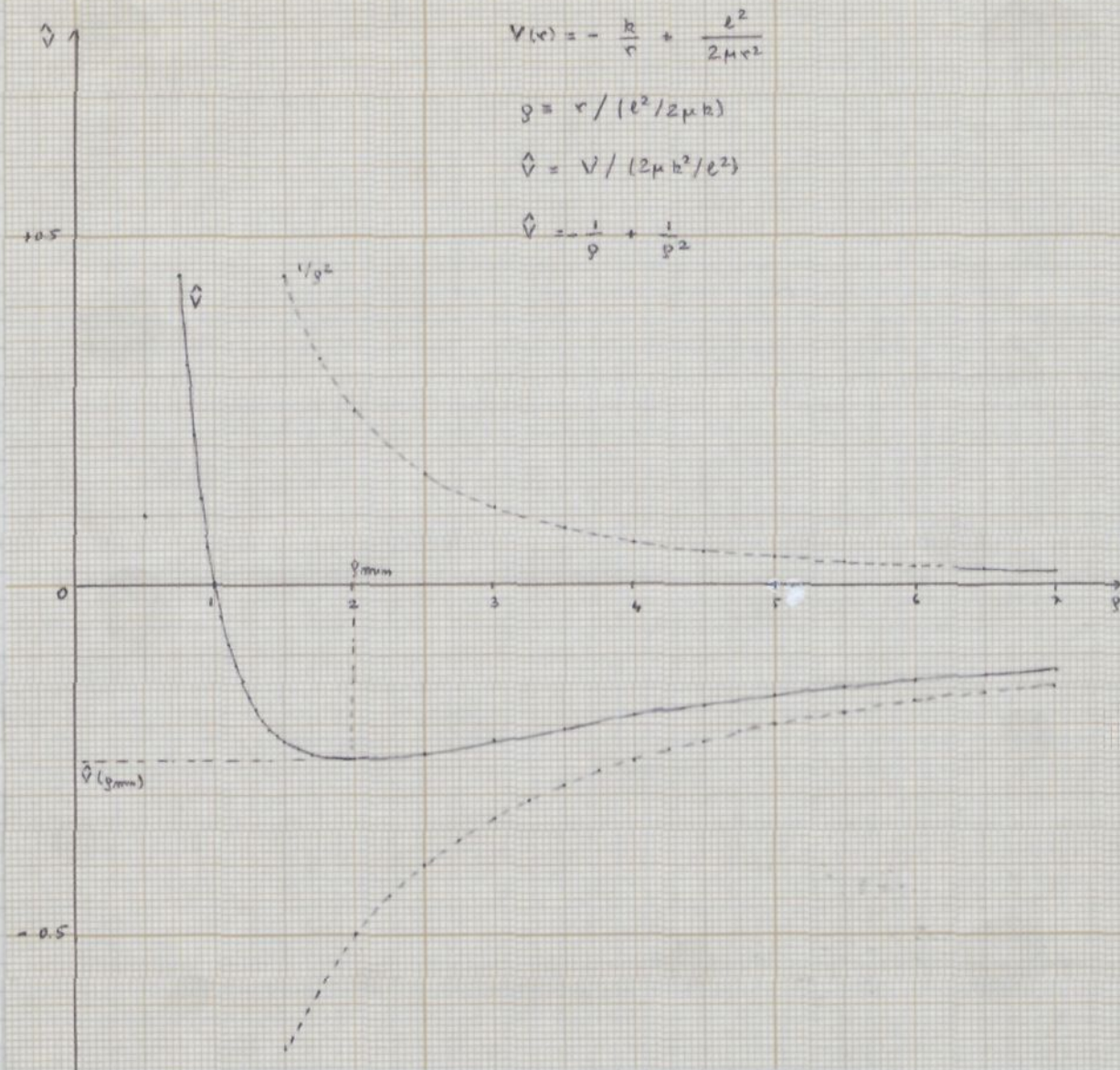
Como hicimos en el caso del péndulo esta ecuación nos permite, en principio,

determinar $r(t)$ por simple integración y una vez hecho esto determinar $\theta(t)$

usando la ley de conservación del momento angular.

Descripción cualitativa: Antes de hacer esto para un $V(r)$ dado queremos dar

una descripción cualitativa del movimiento para el caso en que



$$V(r) = -\frac{k}{r} + \frac{l^2}{2\mu r^2}$$

$$\rho \equiv r / (l^2 / 2\mu k)$$

$$\hat{V} \equiv V / (2\mu k^2 / l^2)$$

$$\hat{V} = -\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho^2}$$

$$V(r) \equiv -\frac{k}{r}, \quad k = GM_1 M_2 > 0$$

(1)

y en tanto

$$V_{ef}(r) = -\frac{k}{r} + \frac{l^2}{2\mu r^2}$$

(2)

Para simplificar el análisis introducimos

$$\rho \equiv \frac{2\mu k}{l^2} r, \quad \hat{V}(\rho) = \frac{l^2}{2\mu k^2} V_{ef}(r)$$

(3)

$$\hat{E} \equiv \frac{l^2}{2\mu k^2} E$$

(4)

con lo que se introducen

$$z \equiv \frac{l^3}{4\mu k^2} \varphi$$

(5)

y $\hat{\rho} \equiv d\rho/dz$ entonces

35/003

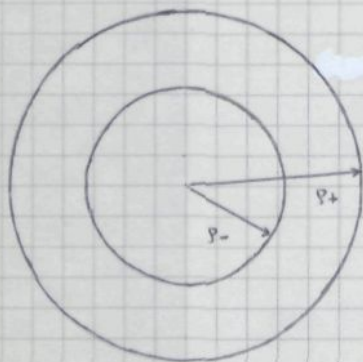
$$\dot{p}^2 + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} = \hat{E}, \quad \hat{V}_1 = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} \quad (6)$$

Calculamos $d\hat{V}/dp = 0 \Rightarrow p_{\min} = 2 \quad \hat{V}(p_{\min}) = -1/4$

1) $\hat{E} < -1/4$. Entonces $\dot{p}^2 < 0$ y esto no puede ser.

2) $\hat{E} = -1/4$. Entonces $p = p_{\min} = 2$, $\dot{p} = 0$, $\dot{\theta} = 1/2$. La trayectoria es un círculo recorrido con velocidad constante.

3) $0 > \hat{E} > -1/4$. Entonces $p_- \leq p \leq p_+$ donde $p_{\pm}$ son las soluciones de $\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} = \hat{E}$



$$p_{\pm} = -\frac{1}{2\hat{E}} \left[1 \pm \sqrt{1 + 4\hat{E}} \right] > 0 \quad (7)$$

La cantidad $\epsilon = \sqrt{1 + 4\hat{E}} < 1$ se llama excentricidad.

Notar que $\dot{\theta} > 0$ impone condiciones sobre la forma de recorrido de las órbitas. Veremos más adelante que las órbitas son cerradas y son precisamente elipses. Solo para

los potenciales $1/r$, r^2 las órbitas son todas cerradas.

4) $\hat{E} = 0$. La partícula se mueve en $p \in [2, \infty)$, $\epsilon = 1$ y vemos que las órbitas son parabólicas.

5) $\hat{E} > 0$. La partícula se mueve en la zona $\left[\frac{1}{2\hat{E}} (\epsilon - 1), \infty \right)$, $\epsilon > 1$ y se probará que las órbitas son hipérbolas.

Trayectoria. Vamos a dar las trayectorias $p = p(\theta)$.

$$\frac{dp}{d\tau} = - \left\{ \hat{E} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} \right\}^{1/2}$$

El signo ha sido elegido por conveniencia. Se fija así el sentido del recorrido.

Además $\frac{d\theta}{d\tau} = \frac{1}{p^2}$ y se obtiene

$$\frac{dp}{d\theta} = \frac{dp}{d\tau} \frac{d\tau}{d\theta} = \frac{1}{p^2} \frac{dp}{d\tau} \Rightarrow \frac{1}{p^2} \frac{dp}{d\theta} = - \left\{ \hat{E} - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p} \right\}^{1/2} \quad (8)$$

Si hacemos

$$u = \frac{1}{p} \quad (9)$$

entonces

$$\frac{dp}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{u} \right) = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \Rightarrow \frac{du}{d\theta} = \sqrt{-u^2 + u + \hat{E}} \quad (10)$$

y con condiciones de contorno adecuadas la trayectoria obtenida al integrar es

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2} [1 - e \cos \theta]$$

(4)

Esta es la ecuación de una cónica en coordenadas polares y por tanto hemos probado la segunda ley de Newton. Pasemos a "construcciones"

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$2 = \sqrt{x^2 + y^2} \left[1 - e \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right] \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 2 + ex \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 = 4 + e^2 x^2 + 4ex \Rightarrow (1 - e^2)x^2 + 4ex + y^2 = 4$$

Si $e = 1$ $\frac{1}{4} y^2 - x = 1$ (Parábola)

Si $e \neq 1$ $\frac{(x - \frac{2e/(1-e^2)})^2}{4/(1-e^2)^2} + \frac{y^2}{4/(1-e^2)} = 1$

Si $e < 1$ se trata de una elipse y si $e > 1$ de una hipérbola.

Planetas. Las principales características de los planetas son

PLANETA	MASSA g.	SEMIJE MAYOR Km	e	INCLINACION ELLIPTICA	PERIODO s.	SEMIJE MAYOR UNIDADES REL DE LA TIERRA	LEY DE BOOE	m
MERCURIO	3.28×10^{26}	5.79×10^7	0.206	$7^\circ 0'$	7.605×10^6	0.387	0.400	0
VENUS	4.865×10^{27}	1.082×10^8	0.007	$3^\circ 24'$	1.941×10^7	0.723	0.700	1
LA TIERRA	5.977×10^{27}	1.496×10^8	0.017	$0^\circ 0'$	3.1558×10^7	1.000	1.000	2
MARTE	6.396×10^{26}	2.279×10^8	0.093	$1^\circ 51'$	5.933×10^7	1.523	1.600	3
JUPITER	1.897×10^{30}	7.78×10^8	0.048	$1^\circ 18'$	3.743×10^8	5.200	5.200	5
SATURNO	5.682×10^{29}	1.427×10^9	0.056	$2^\circ 29'$	9.296×10^8	9.539	10.000	6
URANO	8.667×10^{28}	2.870×10^9	0.047	$0^\circ 46'$	2.651×10^9	19.184	19.600	7
NEPTUNO	1.052×10^{29}	4.496×10^9	0.009	$1^\circ 46'$	5.200×10^9	30.05	38.80	8
PLUTON	3×10^{26} (?)	5.910×10^9	0.247	$17^\circ 8'$	7.817×10^9	39.50	77.20	9

Ley de Booe $d = \frac{3.2^{m-1} + 4}{10}$

Para $m=0$ $2^{m-1} = 0$.

$M_0 = 1.898 \times 10^{33}$ gr.

$m=4$ $d = 2.800$ Asteroides.

Tercera ley de Kepler. Este astrónomo calcula T^2/a^3 para todos los planetas y encuentra siempre el mismo valor y así dedujo empíricamente que $T^2/a^3 = k$, donde T es el periodo y a el semije mayor de la elipse. "Los cuadrados de los periodos son proporcionales a los cubos de los semije mayores". Reamón como deducir esta ley:

35/003

En las unidades utilizadas se toma semieje mayor $\hat{a} = \frac{2}{1-e^2}$

semieje menor $\hat{b} = \frac{2}{1-e^2}$

El area de la elipse es $\hat{A} = \pi \hat{a} \hat{b} = \frac{4\pi}{(1-e^2)^{3/2}}$

Ademas la velocidad angular, en estas unidades, es $1/2$ y por tanto el periodo es

$$\frac{\hat{A}}{\dot{T}} = \frac{8\pi}{(1-e^2)^{3/2}} \Rightarrow \dot{T}^2 = \frac{64\pi^2}{(1-e^2)^3} = 8\pi^2 \hat{a}^3$$

y en unidades normales

$$T^2 = \frac{4\pi^2 \mu}{R} a^3$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G(M_\odot + M)} a^3 \quad (2)$$

Para todos los planetas $M \ll M_\odot$ y por tanto la ley queda probada

Planetas: i) Los antiguos conocieron solo Mercurio, Venus, La Tierra, Marte, Júpiter y Saturno

ii) Urano fué descubierta por Herschel en el siglo XVIII

iii) En 1846 Urbain Jean Joseph Leverrier en Francia y John Couch Adams en Inglaterra decidieron, independientemente, que las pequeñas discrepancias observadas en la órbita de Urano de la predicha por la teoría de Newton eran debidas a la presencia de un planeta más lejano, cuya órbita calcularon. Leverrier mandó su predicción al observatorio de Potsdam y Johann Gottfried Galle encontró el planeta Neptuno en la posición predicha, al mismo día en que recibía la carta

iv) Siguiendo un método análogo Percival Lowell demostró la existencia de Plutón y su predicción fué confirmada, en 1930, por Clyde W. Tombaugh.

v) Dos hechos muy notables son aparentes: En primer lugar todos los planetas giran alrededor del Sol en el mismo sentido y en segundo lugar, salvo en el caso de Plutón, las órbitas de los planetas yacen, prácticamente, en un mismo plano. Estos son dos puntos claves para entender el mecanismo de formación de los planetas. Otra clave importante es el hecho de que los cuatro primeros planetas están compuestos de elementos tales como silicio, hierro, magnesio, etc. con densidades que oscilan entre 4 y 6 g cm^{-3} . Los otros planetas son ricos en hidrógeno y helio con densidades que oscilan entre 0.75 y 1.6 g cm^{-3} . Estos hechos son, básicamente, explicados por la teoría de la evolución de los planetas que dio, en 1943, el físico alemán Carl von Weizsäcker. En dos palabras: El Sol y los planetas se formaron por condensación a partir de una nube de gas y polvo que era químicamente

homogénea.

vi) Órbitas reales. Hemos dicho que los planetas describen órbitas elípticas alrededor del Sol y hemos demostrado esto usando la teoría de la gravitación de Newton. En la práctica esto no es totalmente cierto. Por ejemplo, consideremos el planeta Mercurio. Si solo existieran Mercurio y el Sol esperaríamos, según Newton, que la órbita fuera una elipse, pero los demás planetas, en particular Júpiter, se encargan de perturbar su movimiento y se puede demostrar que el efecto es inusual y el de los restantes planetas causan un movimiento del perihelio de $5557.62 (20)''/\text{siglo}$. El valor calculado difiere del observado en $43.11 (55)''/\text{siglo}$, suponiendo que el Sol sea esférico. La mecánica Newtoniana es incapaz de explicar esta discrepancia. Por otra parte la teoría de la gravitación de Einstein predice una precesión adicional de $43.03''/\text{siglo}$, lo cual restablece el acuerdo teoría-experimento. He dado el caso de Mercurio pues debido a su alto valor de e y ser el más cercano al Sol es donde el efecto es mayor. En la Tierra el efecto de la relatividad general es solo de $3.84''/\text{siglo}$, frente a un valor experimental de $(5.0 \pm 1.2)''/\text{siglo}$.

Temperatura del Sol. Supongamos que sean M y R la masa y el radio del Sol. Su energía gravitacional es $U = U(G, M, R)$ y por argumentos dimensionales su orden de magnitud es

$$U \approx - \frac{GM^2}{R} \quad (1)$$

(Un cálculo exacto, suponiendo densidad constante, da $U = -(3/5) GM^2/R$). El principio de equipartición de la energía nos dice que la energía media por átomo es $\langle K \rangle = 3 k_B T / 2$, $k_B = 1.38 \times 10^{-6} \text{ erg K}^{-1}$. Si en el Sol hay N átomos la energía cinética media es $\langle K \rangle = 3 N k_B T_m / 2$ donde T_m es la temperatura media del Sol. El teorema del virial nos dice $\langle K \rangle = - \langle V \rangle / 2 \approx GM/R^2$, luego

$$T_m \approx \frac{2 GM}{3 R k} \frac{M}{N} \quad (2)$$

Si suponemos que el Sol es hidrógeno (en realidad solo el 85% es H y el resto casi todo He), $M/N \approx M_H \approx 1.67 \times 10^{-24} \text{ g}$. y

$$T_m \approx 1.5 \times 10^7 \text{ K} \quad (3)$$

En realidad en el centro $T \gg T_m$ y en la superficie $T \approx 6 \times 10^3 \text{ K}$. Las altas temperaturas centrales son las que permiten que el Sol sea una estrella.

- 1.- En la molécula de NH_3 , los tres H forman un triángulo equilátero de lado $1.628 \times 10^{-10} \text{ m}$. El N ocupa el vértice de la pirámide regular y dista $1.014 \times 10^{-10} \text{ m}$ de cada H. Suponiendo que esta configuración es estática, determinan la posición del centro de masas.

Supongamos que los H están en el plano $z=0$ y que el N está en $(0,0,L)$. Sea l la distancia entre dos hidrógenos entonces las posiciones de los H son por ejemplo

$$(0, \frac{2\sqrt{3}}{6}l, 0), \quad (\pm \frac{1}{2}l, -\frac{\sqrt{3}}{6}l, 0)$$

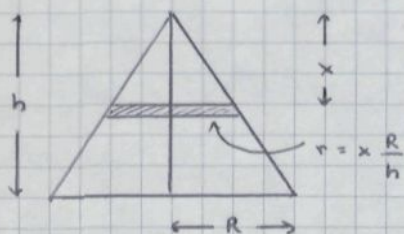
Entonces las coordenadas del centro de masas son

$$x=0, \quad y=0, \quad z = \frac{M_N}{3M_H + M_N} L$$

es

$$x=0, \quad y=0, \quad z = 0.835 \text{ \AA}$$

- 2.- Hallar el C.M. de las siguientes figuras tridimensionales supuestas homogéneas 1) Cono de altura h y radio de la base R . 2) Esfera de radio R con un núcleo esférico de radio $r < R$, cuyo centro dista de la primera esfera en $d \leq R-r$

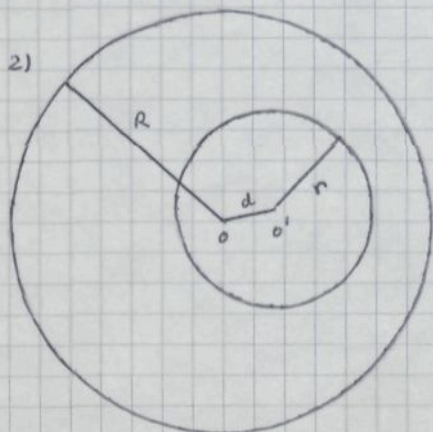


$$1) \quad V = \frac{1}{3} \pi R^2 h \quad \rho = \frac{M}{V}$$

$$x_{cm} = \frac{1}{M} \int_0^h dx \pi r^2 \rho x = \frac{\pi \rho}{M} \int_0^h dx \frac{R^2}{h^2} x^3 = \frac{\pi \rho R^2}{M h^2} \frac{1}{4} h^4$$

$$x_{cm} = \frac{3}{4} h$$

El C.M. está sobre el eje y dista de la base $h/4$.



Si O es el origen de coordenadas, el centro de masas de la esfera grande es $(0,0,0)$. Siempre se pueden elegir los ejes coordenados de forma que el centro de masas de la pequeña sea $(0,0,d)$. Sus masas son

$$M = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho, \quad m = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$$

Luego las coordenadas del C.M. son $(0,0,z)$ con

$$z = \frac{1}{\frac{4}{3} \pi \rho (R^3 - r^3)} \left(-\frac{4}{3} \pi r^3 \rho d \right) \Rightarrow z = -d \frac{r^3}{R^3 - r^3}$$

35/003

- 3.- En el sol se produce energía a través del proceso $d+d \rightarrow \alpha$, principalmente. ¿Cuál es la energía mínima del deuterón en el sistema centro de masas para que los deuterones se puedan acercar a la distancia de 2 fm e iniciarse la reacción? ¿A qué temperatura corresponde esta energía?

La repulsión electrostática entre 2 deuterones a 2 fm es

$$V = \frac{e^2}{d} = \frac{K e^2}{d} = \frac{147.32858 \text{ MeV fm}}{2 \text{ fm} \cdot 137.03604} = 0.720 \text{ MeV}$$

y cada uno de ellos debe llevar una energía 0.360 MeV. Como $\langle K \rangle = \frac{3}{2} k_B T$ con

$$k_B = 8.61735 \times 10^{-8} \text{ MeV K}^{-1} \text{ entonces}$$

$$3 k_B T = 0.720 \text{ MeV} \Rightarrow T = 2.79 \times 10^9 \text{ K}$$

- 4.- ¿A qué altura sobre el suelo hay que colocar una masa de 12 kg para que tenga la misma energía potencial, con respecto al suelo, que otra de masa de 1000 Ton colocada a 10 m sobre el suelo?

M_T = masa de la Tierra, R = Radio de la Tierra

$$V(h) = - \frac{G M M_T}{R+h} + \frac{G M M_T}{R}$$

$$- \frac{G M_1 M_T}{R+h_1} + \frac{G M_1 M_T}{R} = - \frac{G M_2 M_T}{R+h_2} + \frac{G M_2 M_T}{R} \Rightarrow$$

$$h_1 = \frac{M_1}{\frac{M_1}{R} - \frac{M_2}{R} + \frac{M_2}{R+h_2}} - R \Rightarrow h_1 = \frac{M_2 R h_2}{M_1 R + (M_1 - M_2) h_2}$$

$$M_1 = 12 \text{ kg} \quad M_2 = 10^6 \text{ kg} \quad h_2 = 10 \text{ m} \quad R = 6.4 \times 10^6 \text{ m} \Rightarrow h_1 = 958 \text{ Km}$$

- 5.- Un satélite recorre una órbita circular de radio R cuyo centro coincide con el de la Tierra y que se halla en el plano ecuatorial. ¿Cuál debe ser R para que el satélite esté siempre sobre el mismo punto del Ecuador?

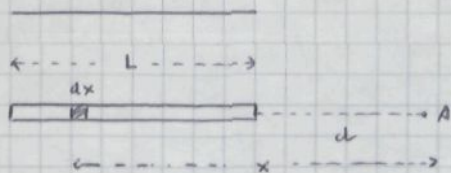
$$\frac{m v^2}{R} = \frac{G m M_T}{R^2} \quad T = \frac{2\pi R}{v} \Rightarrow R^3 = \frac{G M_T T^2}{4\pi^2}$$

$$R = \left(\frac{G M_T T^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} \quad G = 6.6720 \times 10^{-8} \text{ cgs} \quad M_T = 5.97 \times 10^{27} \text{ g}$$

$$T = 8.6 \times 10^4 \text{ s} \Rightarrow R = 42164 \text{ Km}$$

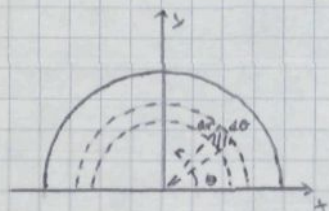
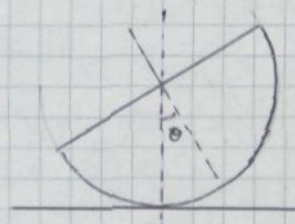
6 - En la prolongación de una varilla delgada,

homogénea de longitud L y masa M hay un punto material A de masa m , atraído por la varilla según la ley de Newton. Hállese la fuerza que la varilla ejerce sobre el punto A .



$$F = G m \rho \int_d^{d+L} dx \frac{1}{x^2} = \frac{G m M}{d(d+L)} \quad \rho \equiv M/L$$

7 - Un semicilindro homogéneo de masa M y radio R puede oscilar, sin deslizarse, en una superficie horizontal. Encuentra su energía potencial en términos del ángulo θ . Supón $|\theta| < \pi/2$.



Sea L el lado del cilindro. Su volumen es $V = \frac{1}{2} \pi R^2 L$ y su densidad $\rho = \frac{2M}{\pi R^2 L}$. Calculemos las coordenadas del CM.

Entonces $x_{CM} = 0$ y

$$y_{CM} = \frac{1}{M} \int_0^R \int_0^\pi dr r d\theta \rho r \sin \theta = L \rho \frac{1}{M} \int_0^R dr r^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta =$$

$$= \frac{1}{M} L \rho \frac{1}{3} R^3 2 = \frac{2}{3} L \frac{2M}{\pi R^2 L} R^3 = \frac{4}{3\pi} R$$

En tanto

$$V(\theta) = V(0) + \frac{4 R M g}{3\pi} (1 - \cos \theta)$$

8 - Dos cuerpos de masas M_1 y M_2 se hallan aislados e interactúan gravitacionalmente. Suponiendo que la órbita es circular comprueba que

$$\left\langle \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 \right\rangle = - \frac{1}{2} \left\langle \frac{G M_1 M_2}{r} \right\rangle = -E \quad (\text{Teorema del virial})$$

donde μ es la masa reducida y $\vec{r}$ la coordenada relativa.

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 - \frac{G M_1 M_2}{r} &= E \\ \mu r^2 \dot{\theta} &= \ell \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 + \frac{\ell^2}{2\mu r^2} - \frac{G M_1 M_2}{r} &= E \\ \dot{\theta} &= \frac{\ell}{\mu r^2} \end{aligned} \right\}$$

Si la órbita es circular $\dot{r} = 0$ y $E r^2 + G M_1 M_2 r - \ell^2 / 2\mu = 0$ debe tener una raíz única y por tanto

$$G^2 M_1^2 M_2^2 + 4 E \ell^2 / 2\mu = 0$$

$$R = - \frac{G M_1 M_2}{2E}$$

35/003

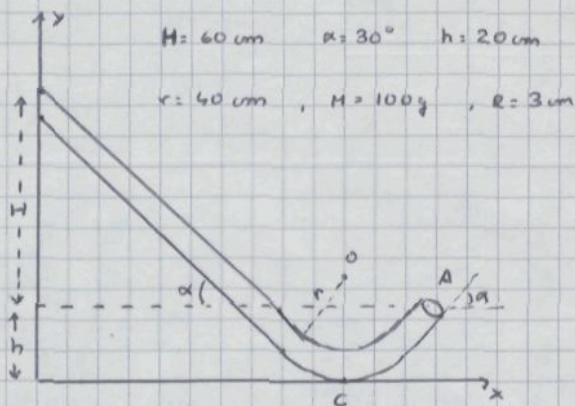
De aquí

$$l^2 = -\mu \frac{G^2 M_1^2 M_2^2}{2E}, \quad \dot{\theta} = \frac{4E^2}{GM_1 M_2} \sqrt{-\frac{1}{2E\mu}}$$

Entonces

$$K = \frac{l^2}{2\mu R^2} = -E, \quad v = -\frac{GM_1 M_2}{R} = -2E$$

1 - Una esfera homogénea de Radio R y masa M baja rodando sin resbalar por el interior de un tubo de altura H que forma un ángulo α con la horizontal. El extremo inferior del tubo se curva con un radio r y la bola describe un arco circular de altura h .



$$H = 60 \text{ cm} \quad \alpha = 30^\circ \quad h = 20 \text{ cm}$$

$$r = 40 \text{ cm}, \quad M = 100 \text{ g}, \quad R = 3 \text{ cm}$$

Cuando la bola llega al extremo A sale al

exterior y cae al suelo. Calcular 1) La velocidad del C.d.m. de la bola en A 2) La velocidad de rotación en torno del C.d.m. de la bola en A, 3) La fuerza que ejerce sobre la superficie interior del tubo en C. 4) La distancia del extremo A a que caera la bola 5) La altura máxima de la bola después de salir por A.

1) El momento de inercia de la bola alrededor de su centro es $I = \frac{2}{5} MR^2$ esto es

$$I = 360 \text{ g cm}^2.$$

$$\frac{1}{2} M v_A^2 + \frac{1}{2} I \omega_A^2 + M g h = M g (H+h) \Rightarrow \frac{1}{2} M v_A^2 + \frac{1}{2} \frac{2}{5} M R^2 \omega_A^2 = M g H$$

$$\text{Como } v_A = \omega_A R \quad \frac{7}{10} M v_A^2 = M g H \Rightarrow v_A = \sqrt{\frac{10}{7} g H}$$

$$\text{Si } g = 982 \text{ cm s}^{-2} \Rightarrow v_A = 290.12 \text{ cm s}^{-1}$$

$$2) \quad \omega_A = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{10}{7} g H} = 96.71 \text{ s}^{-1}$$

$$3) \text{ Como en 1) } v_C = \sqrt{\frac{10}{7} g (H+h)}$$

$$F = M g + \frac{M}{r} v_C^2 = M g + \frac{10}{7} \frac{M}{r} g (H+h) \Rightarrow F = M g \left\{ 1 + \frac{10}{7} \frac{H+h}{r} \right\}$$

$$F = 3.787 \times 10^5 \text{ dinas}$$

4) La trayectoria es

$$x = v_A \cos \alpha t$$

$$y = h + v_A \sin \alpha t + \frac{1}{2} g t^2$$

} tomando el origen de x en A.

$$y=0 \Rightarrow t_0 = \frac{1}{g} v_A \sin \alpha \left\{ 1 + \sqrt{1 + \frac{2hg}{v_A^2 \sin^2 \alpha}} \right\} \Rightarrow t_0 = 0.3978 \text{ s}$$

$$x_0 = (v_A \cos \alpha) t_0 \Rightarrow x_0 = 99.956 \text{ cm}$$

$$5) \frac{1}{2} M v_A^2 \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} I \omega_A^2 + M g y_{\max} = \frac{1}{2} M v_A^2 + \frac{1}{2} I \omega_A^2 + M g h$$

$$M g y_{\max} = M g h + \frac{1}{2} M v_A^2 \sin^2 \alpha \Rightarrow y_{\max} = h + \frac{1}{2g} v_A^2 \sin^2 \alpha \quad y_{\max} = 20.714 \text{ cm.}$$

10. Consideremos una galaxia de simetría esférica y cuya masa está distribuida de acuerdo con una densidad $\rho(r)$. El movimiento de las estrellas en la galaxia es estacionario. ¿Cuál es la velocidad de una estrella que esté a una distancia R del centro? Si $\rho(r)=0$ para $r > r_0$, determinar la velocidad para $R > r_0$, en términos de la masa total de la galaxia.

La masa contenida a la esfera de radio R es $M(R) = 4\pi \int_0^R dr r^2 \rho(r)$

$$\frac{G M(R)}{R^2} = \frac{v^2(R)}{R} \Rightarrow v(R) = \left\{ \frac{G}{R} M(R) \right\}^{1/2}$$

$$v(R) = \left\{ \frac{4\pi G}{R} \int_0^R dr r^2 \rho(r) \right\}^{1/2}$$

Si $R > r_0$ entonces

$$v(R) = \left\{ \frac{G M}{R} \right\}^{1/2}$$

donde M es la masa total de la galaxia

11) Calcular la fuerza de atracción Tierra-Sol y Tierra-Luna. Comparar sus intensidades

$$M_T = 5.997 \times 10^{27} \text{ g}$$

$$M_L = 7.363 \times 10^{25} \text{ g}$$

$$M_\oplus = 1.989 \times 10^{33} \text{ g.}$$

$$d_{TL} = 3.84 \times 10^{10} \text{ cm}$$

$$d_{TS} = 1.50 \times 10^{13} \text{ cm}$$

$$G = 6.672 \times 10^{-8} \text{ c.g.s.}$$

$$F_{TL} = 4.998 \times 10^{25} \text{ dinas}$$

$$F_{TS} = 3.532 \times 10^{27} \text{ dinas}$$

$$F_{TS} / F_{TL} = 177.$$

12. La excentricidad de la órbita de la Tierra es $e = 0.0167$. Encuentra la relación entre la velocidad máxima y mínima de su órbita.

Para un potencial central $r\ddot{\theta} = \frac{L}{mr}$

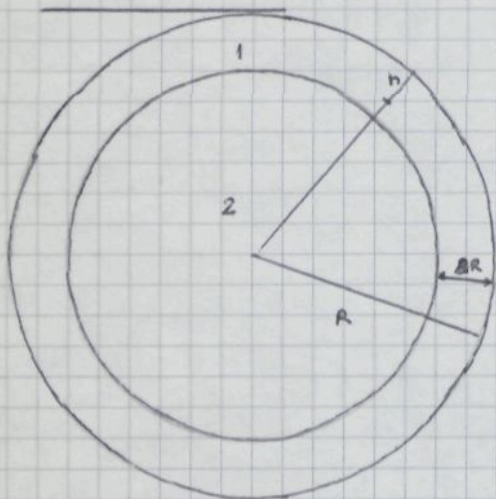
y $\frac{r_{\max}}{r_{\min}} = \frac{1+e}{1-e} \Rightarrow$

35/003

$$\frac{v_{max}}{v_{min}} = \frac{r_{max}}{r_{min}} = \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}$$

$$\frac{v_{max}}{v_{min}} = 1.03396$$

13. Supongase que la Tierra es una esfera de radio $R = 6.367 \times 10^8 \text{ cm}$ y de masa $M = 5.997 \times 10^{27} \text{ g}$. Supongase que en la corteza, de un espesor de $\Delta R = 30 \text{ km}$, la densidad es constante y vale $\rho = 3 \text{ g cm}^{-3}$. Estudien la variación de g al descender en un pozo hecho en la corteza.



Debemos que $\rho_1 = 3 \text{ g cm}^{-3}$ y la masa de esta zona es

$$M_1 = \frac{4\pi}{3} \rho_1 [R^3 - (R - \Delta R)^3]$$

$$= \frac{4\pi}{3} \rho_1 [3R^2 \Delta R - 3R \Delta R^2 + \Delta R^3]$$

$$= 4\pi \rho_1 R^2 \Delta R \left\{ 1 - \frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta R^2}{3R^2} \right\}$$

$$M_1 = 4.5632 \times 10^{25} \text{ g}$$

$$\text{y } M_2 = 5.9524 \times 10^{27} \text{ g}$$

La aceleración de la gravedad es

$$g(h) = \frac{GM_2}{(R-h)^2} + G \frac{4\pi}{3} \rho_1 [(R-h)^3 - (R-\Delta R)^3] \frac{1}{(R-h)^2}$$

$$g(h) = \frac{G}{(R-h)^2} \left\{ M - \frac{4\pi}{3} \rho_1 [R^3 - (R-\Delta R)^3 - (R-h)^3 + (R-\Delta R)^3] \right\}$$

$$g(h) = \frac{G}{(R-h)^2} \left\{ M + \frac{4\pi}{3} \rho_1 [3R^2 h - 3R h^2 + h^3] \right\}$$

Como $h \ll R$

$$g(h) = \frac{G}{R^2} \left(1 + \frac{2h}{R} \right) M \left\{ 1 - \frac{4\pi}{3} \rho_1 \frac{1}{M} 3R^2 h \right\}$$

$$g(h) = \frac{GM}{R^2} \left(1 + \frac{2h}{R} - 4\pi \rho_1 \frac{R^3}{M} \frac{h}{R} \right)$$

$$g(h) = g(0) \left[1 + (2 - 1.6226) \frac{h}{R} \right]$$

es decir varía linealmente con R

$$g(h) = g(0) \left\{ 1 + 5.928 \times 10^{-10} \frac{h}{\text{cm}} \right\}$$

13. Consideremos un satélite en órbita alrededor de la Tierra. Supongamos que se intenta reducir su velocidad golpeándolo con un gran cohete que se mueve con una velocidad que tiene sentido contrario a la del satélite. ¿Se logra el fin perseguido?

No. Después del drástico choque la energía del satélite disminuye y empezará a caer sobre la Tierra. Eventualmente se colocará en una órbita más cercana a la Tierra, y por tanto su velocidad orbital será más elevada que antes.

14. Dar una solución cuantitativa al problema anterior.

Supongamos que inicialmente el satélite de masa M_S gira en órbita estacionaria con velocidad v_S ; entonces la distancia al centro de la Tierra R_S es

$$\frac{G M_S M_{\oplus}}{R_S^2} = \frac{M_S v_S^2}{R_S} \Rightarrow R_S = \frac{G M_{\oplus}}{v_S^2}$$

Supongamos que el cohete de masa M_C y velocidad v_C choca puntualmente con el satélite y queda inmovilizado en él. Inicialmente la energía del sistema es

$$E_i = \frac{1}{2} M_C v_C^2 + \frac{1}{2} M_S v_S^2 - \frac{G M_S M_{\oplus}}{R_S} = \frac{1}{2} M_C v_C^2 - \frac{1}{2} M_S v_S^2$$

En el estado final

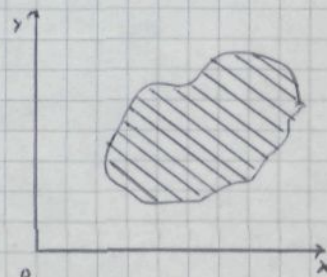
$$E_f = -\frac{1}{2} (M_S + M_C) v_S'^2$$

y por tanto igualmente

$$v_S'^2 = \frac{M_S v_S^2 - M_C v_C^2}{M_S + M_C} < v_S^2$$

Notar que si $M_S v_S^2 < M_C v_C^2$ entonces el satélite caerá sobre la Tierra.

15. Consideremos la lámina plana homogénea de masa M y área A . La lámina está en el plano Oxy . El eje x es la abscisa. En un punto de masa de la lámina está en un punto de coordenadas (x_c, y_c) . Supongamos que la lámina gira alrededor del eje Ox engendrando un sólido de revolución. Demostrar que su volumen es $V = 2\pi A y_c$. (Teorema de Pappus).

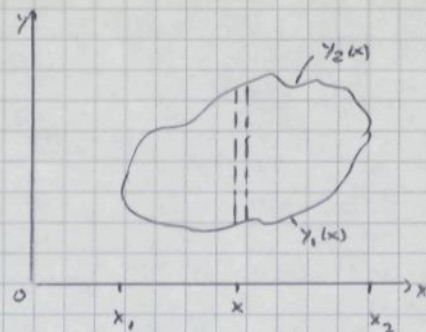


35/003

La densidad superficial de masa es $\sigma = A/M$ y la coordenada y_c viene dada por

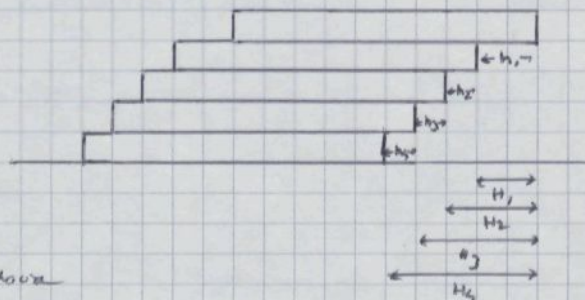
$$y_c = \frac{\int_{x_1}^{x_2} dx \left(\frac{y_1 + y_2}{2} \right) \sigma (y_2 - y_1)}{\int_{x_1}^{x_2} dx \sigma (y_2 - y_1)}$$

$$\Rightarrow y_c = \frac{\frac{1}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} dx \pi (y_2^2 - y_1^2) dx}{\int_{x_1}^{x_2} dx (y_2 - y_1)} = \frac{V/2\pi}{A} \Rightarrow V = 2\pi A y_c$$



16. Considerar un conjunto de tablones rectangulares, homogéneos e idénticos, de longitud L . Inicialmente están puestos exactamente el uno sobre el otro y empezando por el de más arriba los numeramos 1, 2, 3, ... 1) El tablón 1 se mueve en su dirección longitudinal, sin que pueda llegar a caer ¿cuál es la cantidad máxima que puede sobresalir? 2) Una vez hecho esto se mueve de la misma forma el tablón 2 ¿cuál es la máxima cantidad que puede sobresalir? 3) El procedimiento se repite para los N primeros tablones ¿cuánto sobresale el tablón N sobre el $N+1$?

1) El peso W_1 del tablón 1 actúa en su punto medio. Para que el tablón 1 esté en equilibrio traslacional, el tablón dos debe aplicar una fuerza neta de magnitud W_1 hacia arriba sobre el tablón 1. Como los tablones no se adhieren, el tablón 1 no puede estar en equilibrio rotacional a no ser que su punto medio esté sobre el tablón 2. Entonces puede sobresalir como mucho $h_1 = H_1 = L/2$



2) Por un razonamiento similar sabemos que el centro de masa del sistema formado por los tablones 1+2 debe estar sobre el 3. Entonces

$$\frac{h_2 + (h_2 + h_1)}{2} = \frac{L}{2} \Rightarrow h_2 = \frac{L}{4}, \quad H_2 = \frac{3}{4} L$$

$$3) \frac{1}{N} [h_N + (h_N + h_{N-1}) + \dots + (h_N + h_{N-1} + \dots + h_2 + h_1)] = \frac{L}{2} \Rightarrow$$

$$N h_N + (N-1) h_{N-1} + \dots + 2 h_2 + h_1 = \frac{N L}{2}$$

$$h_N = \frac{L}{2N} \Rightarrow H_N = \frac{L}{2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$$

17. Se lanza un satélite desde la superficie de la Tierra habiendo un lanzamiento horizontal con una velocidad de 10 km/s . 1) Aplicar las leyes de la conservación del momento angular y de la energía para encontrar la distancia máxima del satélite sobre la superficie terrestre. 2) ¿Cuál sería esta distancia si el cohete se lanzara con la misma velocidad verticalmente y hacia arriba? Comenta la diferencia.

1) Cons. Mom. angular $M v_1 r_1 = M v_2 r_2$

Cons. Energi. $\frac{1}{2} M v_1^2 - \frac{G M M_{\oplus}}{r_1} = \frac{1}{2} M v_2^2 - \frac{G M M_{\oplus}}{r_2}$

con $r_1 = R_{\oplus}$

$\Rightarrow v_2 = \frac{r_1}{r_2} v_1$

$\frac{1}{2} v_1^2 - \frac{G M_{\oplus}}{r_1} = \frac{1}{2} \frac{r_1^2}{r_2^2} v_1^2 - \frac{G M_{\oplus}}{r_2}$

$\frac{1}{2} v_1^2 \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}\right) = \frac{G M_{\oplus}}{r_1} \left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right) \Rightarrow \frac{1}{2} v_1^2 \left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right) = \frac{G M_{\oplus}}{r_1} \Rightarrow 1 + \frac{r_1}{r_2} = \frac{2 G M_{\oplus}}{r_1 v_1^2}$

$r_2 = \frac{R_{\oplus}}{\frac{2 G M_{\oplus}}{v_1^2 R_{\oplus}} - 1}$

$h = R_{\oplus} \left\{ \frac{1}{\frac{2 G M_{\oplus}}{v_1^2 R_{\oplus}} - 1} - 1 \right\}$

$G = 6.67259 \times 10^{-8} \text{ g}^{-1} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-2}, \quad M_{\oplus} = 5.965 \times 10^{27} \text{ g}, \quad R_{\oplus} = 6.36746 \times 10^8 \text{ cm}$

$v_1 = 10^4 \text{ cm s}^{-1}$

$h = 1.9085 \times 10^9 \text{ cm.}$

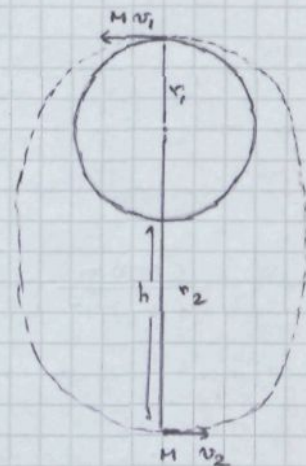
2) En este caso $v_2 = 0$.

$\frac{1}{2} M v_1^2 - \frac{G M M_{\oplus}}{r_1} = \frac{1}{2} M \cdot 0 - \frac{G M M_{\oplus}}{r_2} \Rightarrow r_2' = R_{\oplus} \left\{ \frac{1}{1 - \frac{v_1^2 R_{\oplus}}{2 G M_{\oplus}}} \right\}$

$h' = R_{\oplus} \left\{ \frac{1}{1 - \frac{v_1^2 R_{\oplus}}{2 G M_{\oplus}}} - 1 \right\}$

$h' = 2.5453 \times 10^9 \text{ cm}$

En el segundo caso la partícula asciende mas alto pues la energía total cinética es la misma y en el segundo caso toda ella se convierte en potencial, mientras que en el primero hay también energía cinética.



35/003

18. Un planeta de masa M tiene un satélite en una órbita de radio R . La densidad del satélite es ρ_s . Demuestran que el satélite no queda destruido por las fuerzas gravitacionales solo si R es mayor que el llamado límite de Roche

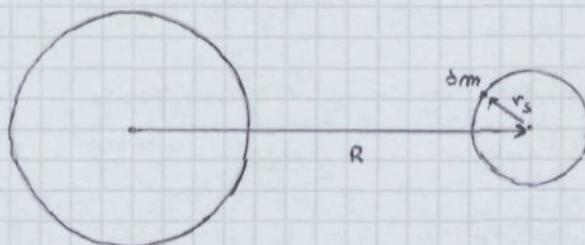
$$R_r = \left(\frac{3}{2\pi} \right)^{1/3} \left(\frac{M}{\rho_s} \right)^{1/3}$$

Suponer el satélite homogéneo, pequeño y que no gire

La fuerza gravitacional sobre un elemento de masa δm en la super-

ficie del satélite es, en el punto más cercano al planeta,

$$\delta \vec{F} = - \left\{ \frac{GM \delta m}{(R - r_s)^2} - \frac{Gm_s \delta m}{r_s^2} \right\} \hat{R}$$



La misma masa situada en el centro del satélite es atraída con una fuerza

$$\delta \vec{F}' = - \frac{GM \delta m}{R^2} \hat{R}$$

y para que el satélite no quede destruido se debe tener $\delta \vec{F}' - \delta \vec{F} < 0 \Rightarrow$

$$- \frac{GM \delta m}{R^2} + \frac{GM \delta m}{(R - r_s)^2} - \frac{Gm_s \delta m}{r_s^2} < 0$$

$$\frac{m_s}{r_s^2} > M \left\{ \frac{1}{(R - r_s)^2} - \frac{1}{R^2} \right\}$$

Si $r_s \ll R$

$$\frac{m_s}{r_s^2} > \frac{2Mr_s}{R^3} \Rightarrow R > \left(\frac{2Mr_s^3}{m_s} \right)^{1/3}$$

y como $m_s = \frac{4\pi}{3} \rho_s r_s^3$

$$R > \left(\frac{3}{2\pi} \right)^{1/3} \left(\frac{M}{\rho_s} \right)^{1/3} = R_r$$

19. Un satélite de masa despreciable con relación a la Tierra tiene una altura mínima de 655 Km y una máxima de 4044 Km. Compuendo los datos sobre la Tierra sobre la Tierra determinar su período

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G(M_E + M_s)} a^3$$

$$a = R_T + \frac{1}{2} (6.55 \times 10^7 + 4.044 \times 10^8) = 8.71696 \times 10^8 \text{ m}$$

$$M_s \ll M_E = 5.965 \times 10^{27} \text{ g}$$

$$G = 6.67259 \times 10^{-8} \text{ g}^{-1} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-2}$$

$$T = 8.1054 \times 10^3 \text{ s} = 135.09 \text{ min} = 2.2515 \text{ h.}$$

20. Dos satélites de la Tierra con masas M_1 y M_2 ($M_1, M_2 \ll M_E$) están ligados por una cuerda sin masa de longitud L y describen órbitas circulares con radio R_1 y $R_2 \equiv R_1 + L$. Determinar el periodo de giro y la tensión de la cuerda.

La fuerza

$$-M_1 \omega^2 R_1 = -\frac{GM_E M_1}{R_1^2} + F$$

$$-M_2 \omega^2 R_2 = -\frac{GM_E M_2}{R_2^2} - F$$

donde F es la tensión de la cuerda. Sumando

$$\omega^2 (M_1 R_1 + M_2 R_2) = GM_E \left(\frac{M_1}{R_1^2} + \frac{M_2}{R_2^2} \right) \Rightarrow \omega^2 = \frac{GM_E}{R_1^2 R_2^2} \left(\frac{M_1 R_2^2 + M_2 R_1^2}{M_1 R_1 + M_2 R_2} \right)$$

y el periodo $T = 2\pi/\omega$ es

$$T = \frac{2\pi R_1 R_2}{\sqrt{GM_E}} \sqrt{\frac{M_1 R_1 + M_2 R_2}{M_1 R_2^2 + M_2 R_1^2}}$$

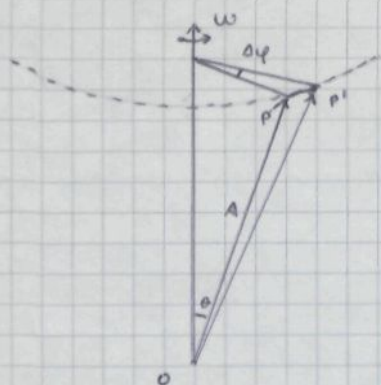
La tensión es

$$F = M_2 R_2 \omega^2 - \frac{GM_E M_2}{R_2^2} = \frac{GM_E M_2}{R_1^2 R_2} \left(\frac{M_1 R_2^2 + M_2 R_1^2}{M_1 R_1 + M_2 R_2} \right) - \frac{GM_E M_2}{R_2^2}$$

$$= \frac{GM_E M_2}{R_1^2 R_2^2} \frac{1}{M_1 R_1 + M_2 R_2} (M_1 R_2^3 + M_2 R_1^2 R_2 - M_1 R_1^3 - M_2 R_1^2 R_2)$$

$$F = \frac{GM_E M_1 M_2}{R_1^2 R_2^2} \frac{R_2^3 - R_1^3}{M_1 R_1 + M_2 R_2}$$

SISTEMAS DE REFERENCIA EN ROTACION.



Sea S un sistema de referencia inercial y S' un sistema de referencia que gira respecto al primero con una velocidad angular constante $\vec{\omega}$. En el instante t el vector representativo del punto P es $\vec{A} \equiv \vec{OP}$. Si este punto es solidario con el sistema que gira su posición en el instante $t + \Delta t$, visto desde S , es $\vec{OP}'$ y el cambio visto por S , debido únicamente a

la rotación es

$$\vec{PP}' = \vec{OP}' - \vec{OP}$$

$$|\vec{PP}'| = |\vec{A}| \sin \theta \Delta \varphi = |\vec{A}| \omega \sin \theta \Delta t, \quad \vec{PP}' = (\vec{\omega} \times \vec{A}) \Delta t \quad (1)$$

Claramente el observador S' veía el punto en reposo. Supongamos ahora que el punto P se mueva con relación a S' y que en el intervalo Δt se desplace, con relación a S' , una cantidad $\vec{\Delta A}_{S'}$. Entonces el observador solidario con S ve un desplazamiento total

$$\vec{\Delta A}_S = \vec{\Delta A}_{S'} + (\vec{\omega} \times \vec{A}) \Delta t \quad (2)$$

Luego las velocidades de cambio de un vector $\vec{A}$, cualquiera, visto desde S y desde S' están relacionadas por la ecuación

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right)_S = \left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{S'} + \vec{\omega} \times \vec{A} \quad (3)$$

a) $\vec{A} \equiv \vec{r}$

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_S \equiv \vec{v} = \text{velocidad real de } P \text{ observada desde } S$$

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{S'} \equiv \vec{v}' = \text{velocidad aparente de } P \text{ observada desde } S'$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (4)$$

b) $\vec{A} \equiv \vec{v}$

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right)_S \equiv \vec{a} = \text{aceleración real de } P \text{ observada desde } S$$

$$\left(\frac{d\vec{v}'}{dt} \right)_{S'} \equiv \vec{a}' = \text{aceleración aparente de } P \text{ observada desde } S'$$

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right)_S = \left(\frac{d\vec{v}'}{dt} \right)_{S'} + \vec{\omega} \times \vec{v}, \quad \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right)_{S'} = \left(\frac{d\vec{v}'}{dt} \right)_{S'} + \vec{\omega} \times \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{S'} = \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}'$$

luego

35/003

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times [\vec{r}' + (\vec{\omega} \times \vec{r})] =$$

$$= \vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{r}' + \vec{\omega} (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) - \vec{r} \omega^2 \quad (5)$$

Ecuación del movimiento: Para el observador S , una partícula de masa M , bajo la acción de unas fuerzas reales $\vec{F}$ describiendo un movimiento calculable e independiente de

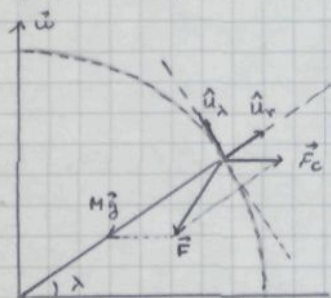
$$\vec{F} = M\vec{a} \quad (6)$$

por ser S inercial. El observador solidario con S' verá

$$\vec{F}' = M\vec{a}' \quad (7)$$

$$\vec{F}' = \vec{F} - \underbrace{2M\vec{\omega} \times \vec{r}'}_{\text{Fuerza de Coriolis}} - \underbrace{M\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}_{\text{Fuerza centrífuga}}$$

Ejemplo: Consideremos una partícula en reposo respecto a la superficie de la Tierra



en un punto de latitud λ . Entonces se halla sujeto a una fuerza

$$\vec{F} = -Mg\hat{r} - M[\vec{\omega}(\vec{r} \cdot \vec{\omega}) - \omega^2 \vec{r}] \quad (8)$$

pues la aceleración de Coriolis no actúa por hallarse la partícula en reposo. Sus componentes son

$$\left. \begin{aligned} F_r &= -Mg - M\omega^2 r \sin^2 \lambda + M\omega^2 r \\ F_\lambda &= -M\omega^2 r \sin \lambda \cos \lambda \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} F_r &= -Mg + M\omega^2 r \cos^2 \lambda \\ F_\lambda &= -M\omega^2 r \sin \lambda \cos \lambda \end{aligned} \right\}$$

Ejemplo: Caída de los gnomes. Supongamos un sistema de ejes S' solidarios con la Tierra con $O'x'$ en la dirección Este y $O'y'$ según la vertical del lugar. La ecuación del movimiento según $O'x'$ es

$$M \frac{d^2 x'(t)}{dt^2} = 2M\omega v' \cos \lambda$$

En buena aproximación $v' = gt$

$$\frac{d^2 x'}{dt^2} = (2\omega g \cos \lambda) t \Rightarrow \frac{dx'}{dt} = (\omega g \cos \lambda) t^2 \quad \text{si la velocidad inicial es nula}$$

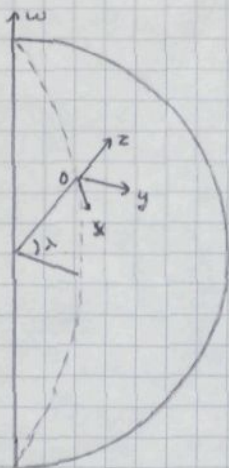
$$x' = \frac{1}{3} (\omega g \cos \lambda) t^3 \quad \text{si } x'(0) = 0. \quad \text{El tiempo de caída desde una altura } h \text{ es}$$

$$t \approx (2h/g)^{1/2} \quad \text{y por tanto la desviación hacia el Este es } d = \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{\omega \cos \lambda}{\sqrt{g}} h^{3/2}$$

$$\omega = 2\pi/86400 = 7.2722 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}, \quad g = 981 \text{ cm s}^{-2}, \quad \lambda = 45^\circ \quad h = 5 \times 10^3 \text{ cm}$$

$$\text{impli cam } d = 0.557 \text{ cm}$$

- 1 - Una partícula con una velocidad inicial de 50 ms^{-1} con respecto a la Tierra se dirige hacia el Sur a 45° de la latitud Norte. 1) calcular la aceleración centrífuga de la partícula, 2) calcular la aceleración de Coriolis, 3) Repetir el problema para la posición de 45° de latitud Sur



Tomemos unos ejes $Oxyz$ tales que $Ox =$ hacia el Sur, $Oy =$ hacia el Este
 $Oz =$ radial.

$$\vec{\omega} = (-\omega \cos \lambda, 0, \omega \sin \lambda)$$

$$\vec{v}' = (v', 0, 0) \quad \vec{r} = (0, 0, R)$$

$$\vec{a}_{\text{cen}} = -2\vec{\omega} \times \vec{v}' \quad \vec{a}_{\text{centr}} = -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$\vec{a}_{\text{cen}} = (0, -2\omega v' \sin \lambda, 0)$$

$$\vec{a}_{\text{centr}} = (-\omega^2 R \sin \lambda \cos \lambda, 0, \omega^2 R \cos^2 \lambda)$$

$$\omega = 7.2722 \times 10^{-5} \text{ rad/s} \quad R = 6.4 \times 10^6 \text{ m} \quad v' = 5 \times 10^4 \text{ m/s}$$

$$\lambda = 45^\circ$$

$$\vec{a}_{\text{cen}} = (-1.692, 0, +1.692) \text{ m/s}^2$$

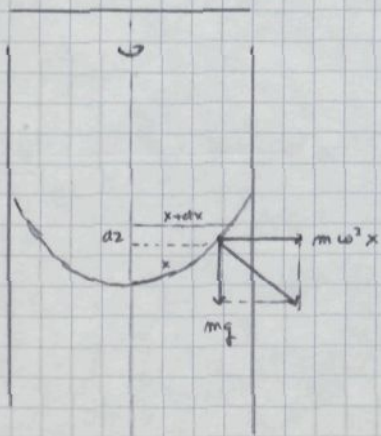
$$\vec{a}_{\text{centr}} = (0, -5.142, 0) \text{ m/s}^2$$

$$\lambda = -45^\circ$$

$$\vec{a}_{\text{cen}} = (+1.692, 0, +1.692) \text{ m/s}^2$$

$$\vec{a}_{\text{centr}} = (0, +5.142, 0) \text{ m/s}^2$$

2. Un depósito cilíndrico de radio $R = 3.1305 \text{ m}$ contiene un líquido. Si lo hacemos girar a velocidad de su eje con una velocidad $\omega = 10 \text{ rad/s}$, calcúlase la diferencia de nivel que toma el líquido entre el centro y los bordes.



En semejanza de triángulos

$$\frac{dx}{dz} = \frac{m\omega^2 x}{mg} \Rightarrow \frac{dx}{dz} = \frac{g}{\omega^2} \frac{1}{x} \Rightarrow x dx = \frac{g}{\omega^2} dz$$

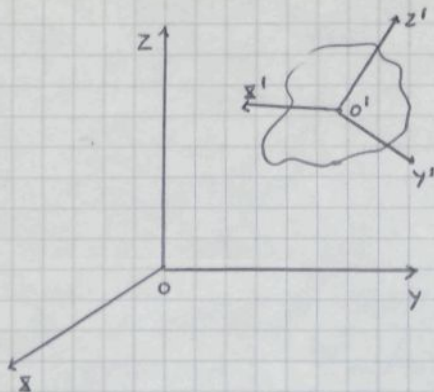
$$\frac{1}{2} x^2 = \frac{g}{\omega^2} z + C \quad \text{para } x=0 \Rightarrow z=0 \Rightarrow C=0$$

$$z = \frac{\omega^2}{2g} x^2$$

Por tanto la diferencia de altura es

$$z = \frac{10^2}{2 \cdot 980} (3.1305)^2 \Rightarrow z = 0.5 \text{ m}$$

CUERPOS RÍGIDOS



Por un cuerpo rígido entendemos un conjunto de puntos materiales, incluso infinitos, tales que la distancia entre dos cualesquiera permanece inalterada en el transcurso del tiempo.

Si se tiene un observador O y un sistema de referencia inercial solidario con él, una forma de caracterizar el movimiento del sólido es dar en todo instante el vector posición

de O', un punto fijo en el sólido, (tres variables) y la orientación de un sistema de referencia O'x'y'z', fijo en el sólido, en relación con Oxyz (tres variables). Es decir que con 6 coordenadas queda totalmente caracterizado el movimiento del sólido.

Momento de inercia. Consideremos un cuerpo sólido formado por N partículas de masas M_α ($\alpha=1, 2, \dots, N$) y de coordenadas $\vec{x}_\alpha$ ($\alpha=1, 2, \dots, N$) y unidas por varillas rígidas inextensibles y sin masa. Se denominará tensor de inercia de este sólido con respecto a un sistema de referencia dado a las cantidades

$$I_{ij} \equiv \sum_{\alpha=1}^N M_\alpha [d_{ij} \vec{x}_\alpha^2 - x_{\alpha i} x_{\alpha j}] \quad , \quad \vec{x}_\alpha^2 \equiv \vec{r}_\alpha^2 \equiv \sum_{k=1}^3 x_{\alpha k} x_{\alpha k} \quad (1)$$

$$I_{11} = \sum_{\alpha=1}^N M_\alpha [x_{\alpha 2}^2 + x_{\alpha 3}^2]$$

Momento de inercia respecto al eje Ox,

$$I_{12} = - \sum_{\alpha=1}^N M_\alpha x_{\alpha 1} x_{\alpha 2}$$

Momento de inercia respecto a los ejes Ox₁ y Ox₂

Si el sólido es continuo

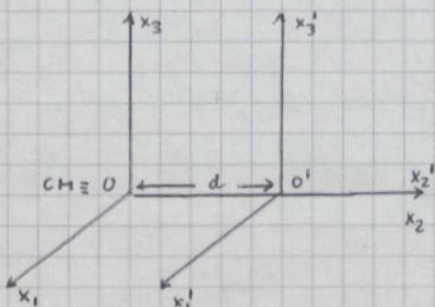
$$I_{ij} \equiv \int_V d^3x \rho(\vec{x}) [d_{ij} \vec{x}^2 - x_i x_j] \quad (2)$$

Propiedades:

1) Es un tensor simétrico de segundo orden: $I_{ij} = I_{ji}$, $\forall i, j$

$$2) \sum_{i=1}^3 I_{i i} = 2 \int_V d^3x \rho(\vec{x}) \vec{x}^2 \quad \text{es un escalar} \quad (3)$$

3) Teorema de Steiner: Consideremos un sistema de referencia centrado en $O \equiv CM$ y otro de centro en O' tal que $OO' = d$, de acuerdo con la figura. ¿Cuál es la relación entre I_{33} y I'_{33} ?



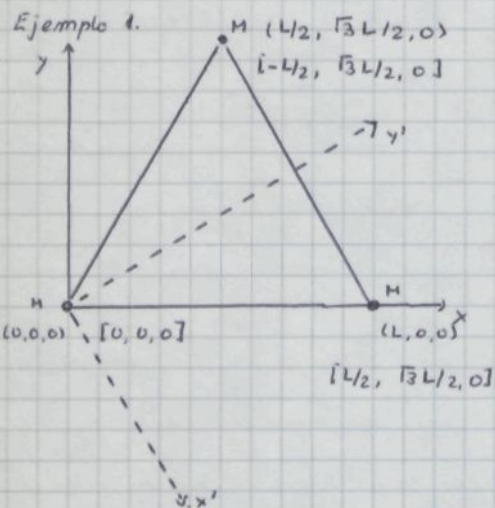
$$\begin{aligned} I'_{33} &= \sum_{\alpha=1}^N M_\alpha [x_{\alpha 1}'^2 + x_{\alpha 2}'^2] = \sum_{\alpha=1}^N M_\alpha [x_{\alpha 1}^2 + (x_{\alpha 2} + d)^2] \\ &= \sum_{\alpha=1}^N M_\alpha [x_{\alpha 1}^2 + x_{\alpha 2}^2] - 2d \sum_{\alpha=1}^N M_\alpha x_{\alpha 2} + d^2 \sum_{\alpha=1}^N M_\alpha \end{aligned}$$

$$I'_{33} = I_{33} + M d^2 \quad (\text{Teorema de Steiner}) \quad (4)$$

35/p03

Evidentemente Ox_3 es cualquier recta que pase por $O \equiv CM$ y sea perpendicular a la dirección de desplazamiento.

- 4) Dado un sólido siempre es posible elegir, al menos, un sistema de referencia sólido con él en el que $I_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Estos son los ejes principales de inercia. En este caso se suele poner $I_{ii} = I_i$.



Momento de inercia respecto a $Oxyz$

$$I_{11} = \frac{3}{4} ML^2, \quad I_{22} = \frac{5}{4} ML^2, \quad I_{33} = 2ML^2 \quad (5)$$

$$I_{12} = -\frac{\sqrt{3}}{4} ML^2, \quad I_{13} = I_{23} = 0$$

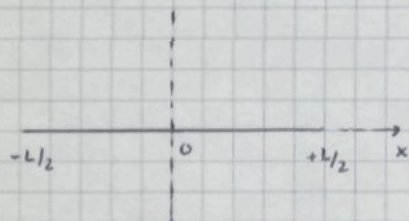
y por tanto no son ejes principales de inercia. Comenzamos $Ox'y'z'$

$$I'_{11} = \frac{3}{2} ML^2, \quad I'_{22} = \frac{1}{2} ML^2, \quad I'_{33} = 2ML^2 \quad (6)$$

$$I'_{12} = I'_{23} = I'_{31} = 0$$

y por tanto son ejes principales de inercia.

Ejemplo 2. Varilla delgada homogénea. Sea L su longitud y M su masa, entonces su densidad lineal es $\rho = L/M = \text{cte.}$



i) Empezamos calculando el momento de inercia alrededor de un eje perpendicular a la misma y que pase por su centro. Evidentemente el centro coincide con el C.M.

$$I = \int_{-L/2}^{+L/2} dx \rho x^2 = \rho \left. \frac{1}{3} x^3 \right|_{-L/2}^{+L/2} = \frac{1}{12} \rho L^3 = I = \frac{1}{12} ML^2 \quad (7)$$

ii) Si se quiere calcular el momento de inercia respecto a un eje paralelo al anterior y que pase a una distancia d del extremo de la varilla, basta aplicar el teorema de Steiner

$$I' = I + M \left(\frac{L}{2} + d \right)^2 = I' = \frac{1}{12} ML^2 + Md(L+d) \quad (8)$$

Ejemplo 3. Momento de inercia de una copa esférica de masa. Sea R_1 el radio de la esfera interior y R_2 el radio de la exterior ($R_2 > R_1$) y $\rho(r)$ la densidad. Todos los sistemas de ejes con centro en el de las esferas son equivalentes y son ejes principales de inercia, pues por simetría $I_{ij} = 0$ si $i \neq j$ y $I_{11} = I_{22} = I_{33} \equiv I$. Entonces de (3)

$$3I = 2 \int d^3x r^2 \rho(r) \quad \Rightarrow \quad I = \frac{8\pi}{3} \int_0^\infty dr r^4 \rho(r)$$

En nuestro caso en el que la esfera es homogénea y $\rho(r) = \rho$

$$I = \frac{8\pi}{3} \rho \frac{1}{5} (R_2^5 - R_1^5) \quad M = \frac{4\pi}{3} \rho (R_2^3 - R_1^3)$$

y por tanto

$$I = \frac{2}{5} M \frac{R_2^5 - R_1^5}{R_2^3 - R_1^3} \quad (1)$$

$$i) \text{ Si } R_2 = R \text{ y } R_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad I = \frac{2}{5} M R^2 \quad (2)$$

ii) Si $R_1 = R_2 = R$ entonces haca $R_1 = R$, $R_2 = R + \epsilon$, $\epsilon \ll R$

$$I = \frac{2}{5} M \frac{(R+\epsilon)^5 - R^5}{(R+\epsilon)^3 - R^3} = \frac{2}{5} M \frac{5R^4\epsilon}{3R^2\epsilon} \Rightarrow I = \frac{2}{3} M R^2 \quad (3)$$

Nota: Es conveniente, y así lo supondremos en lo que sigue, tomar los ejes de referencia ligados al sólido de forma que sean unos ejes principales de inercia.

Momento angular: Sean $(x_{\alpha 1}, x_{\alpha 2}, x_{\alpha 3})$ las coordenadas de la partícula de masa M_α con respecto al sólido en el sistema inercial fijo y $\vec{x}$ las coordenadas de su centro de masa. El momento angular total del sistema es

$$\vec{L} = \sum_{\alpha=1}^N M_\alpha \vec{x}_\alpha \times \dot{\vec{x}}_\alpha \quad (4)$$

Vamos a ver la expresión de $\vec{L}$ si se elige un sistema de coordenadas con centro en el centro de masas. Las coordenadas de las partículas son ahora

$$\vec{y}_\alpha = \vec{x}_\alpha - \vec{x} \quad (5)$$

Entonces

$$\begin{aligned} L_1 &= \sum_{\alpha=1}^N M_\alpha [x_{\alpha 2} \dot{x}_{\alpha 3} - x_{\alpha 3} \dot{x}_{\alpha 2}] = \\ &= \sum_{\alpha=1}^N M_\alpha [(\gamma_{\alpha 2} \dot{y}_{\alpha 3} - \gamma_{\alpha 3} \dot{y}_{\alpha 2}) + \dot{x}_2 \gamma_{\alpha 3} + \dot{x}_3 \gamma_{\alpha 2} - \dot{x}_3 \gamma_{\alpha 2} - \gamma_{\alpha 3} \dot{x}_2 + \dot{x}_2 \dot{x}_3 - \dot{x}_3 \dot{x}_2] = \\ &= \sum_{\alpha=1}^N M_\alpha (\gamma_{\alpha 2} \dot{y}_{\alpha 3} - \gamma_{\alpha 3} \dot{y}_{\alpha 2}) + M (\dot{x}_2 \dot{x}_3 - \dot{x}_3 \dot{x}_2) \end{aligned}$$

Si $\vec{\omega}$ es el vector velocidad angular alrededor de CM, entonces $\dot{\vec{y}}_\alpha = \vec{\omega} \times \vec{y}_\alpha$ y obtenemos

$$\begin{aligned} L_1 &= M (\dot{x}_2 \dot{x}_3 - \dot{x}_3 \dot{x}_2) + \sum_{\alpha=1}^N M_\alpha [\gamma_{\alpha 2} (\omega_1 \gamma_{\alpha 3} - \omega_3 \gamma_{\alpha 1}) - \gamma_{\alpha 3} (\omega_3 \gamma_{\alpha 1} - \omega_1 \gamma_{\alpha 3})] = \\ &= M (\dot{x}_2 \dot{x}_3 - \dot{x}_3 \dot{x}_2) + \sum_{\alpha=1}^N M_\alpha (\gamma_{\alpha 2}^2 + \gamma_{\alpha 3}^2) \omega_1 - \sum_{\alpha=1}^N M_\alpha \gamma_{\alpha 1} \gamma_{\alpha 2} \omega_2 - \sum_{\alpha=1}^N M_\alpha \gamma_{\alpha 3} \gamma_{\alpha 1} \omega_3 = \\ &= M (\dot{x}_2 \dot{x}_3 - \dot{x}_3 \dot{x}_2) + I_{11} \omega_1 + I_{12} \omega_2 + I_{13} \omega_3 \end{aligned}$$

35/003

$$\vec{L} = M (\vec{\bar{x}} \times \dot{\vec{\bar{x}}}) + (\vec{I} \cdot \vec{\omega}) \quad , \quad (\vec{I} \cdot \vec{\omega})_i = \sum_{j=1}^3 I_{ij} \omega_j \quad (6)$$

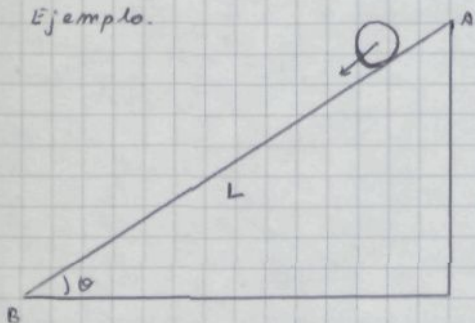
El primer término es el momento angular de un punto con masa M situado en el CM con relación a O . y el segundo es el momento angular referido al C.M.

Energía cinética: Se puede hacer algo análogo para esta cantidad.

$$\begin{aligned} K &= \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{2} M_{\alpha} \dot{\vec{x}}_{\alpha}^2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N M_{\alpha} [(\dot{\bar{x}}_1 + \dot{y}_{\alpha 1})^2 + (\dot{\bar{x}}_2 + \dot{y}_{\alpha 2})^2 + (\dot{\bar{x}}_3 + \dot{y}_{\alpha 3})^2] = \\ &= \frac{1}{2} M \dot{\bar{x}}^2 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N M_{\alpha} (\dot{y}_{\alpha})^2 = \\ &= \frac{1}{2} M \dot{\bar{x}}^2 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N M_{\alpha} [(\omega_2 y_{\alpha 3} - \omega_3 y_{\alpha 2})^2 + (\omega_3 y_{\alpha 1} - \omega_1 y_{\alpha 3})^2 + (\omega_1 y_{\alpha 2} - \omega_2 y_{\alpha 1})^2] = \\ K &= \frac{1}{2} M \dot{\bar{x}}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \omega_i I_{ij} \omega_j \quad (7) \end{aligned}$$

El primer término es la energía cinética de una partícula de masa M colocada en el C.M. y el segundo la energía cinética referida al C.M.

Ejemplo.



Consideremos una esfera homogénea de radio R que rueda sin deslizarse por un plano inclinado de longitud L , que forma un ángulo θ con la horizontal. Se deja libre la bola en A , sin velocidad inicial, ¿cuál será su velocidad en B ?

Una forma de resolver el problema es

$$V_A = M g L \sin \theta \quad , \quad K_A = 0$$

$$V_B = 0 \quad , \quad K_B = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \quad \text{con } I = \frac{2}{5} M R^2 \quad , \quad v = \omega R \Rightarrow$$

$$K_B = \frac{7}{10} M v^2$$

$$\text{Conservación de energía: } \frac{7}{10} M v^2 = M g L \sin \theta \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{10}{7} g L \sin \theta}$$

Otra forma de calcular K_B es teniendo en cuenta que en cada instante la bola gira alrededor del punto de contacto.

$$K_B = \frac{1}{2} I' \omega^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5} M R^2 + M R^2 \right) \omega^2 = \frac{7}{10} M R^2 \omega^2 = \frac{7}{10} M v^2$$

Ejes principales de inercia: Consideremos el movimiento alrededor de $O' \equiv CM$, suponiendo que $O'x'y'z'$ son ejes principales de inercia. Indicaremos por K y $\vec{L}$ la energía cinética y el momento angular relativo. Entonces

$$\vec{L} = I_1 \omega_1 \hat{i} + I_2 \omega_2 \hat{j} + I_3 \omega_3 \hat{k}, \quad K = \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2) \quad (1)$$

de donde

$$K = \frac{1}{2I_1} L_1^2 + \frac{1}{2I_2} L_2^2 + \frac{1}{2I_3} L_3^2 \quad (2)$$

Ecuación del momento. Recordemos que en un sistema inercial $d\vec{L}/dt = \vec{N}$, donde $\vec{N}$ es el momento de las fuerzas externas. El sistema de referencia solidario con el sólido ($O' \equiv CM$ y epicéntrico con uno de sus ejes principales de inercia) no es en general inercial y de acuerdo con lo dicho antes

$$\frac{d\vec{L}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L} = \vec{N} \quad (\text{Ecuaciones de Euler}) \quad (3)$$

donde $\vec{L}$ está observado desde el sistema en rotación y $\vec{\omega}$ es la velocidad angular del sistema en rotación. Explícitamente

$$\begin{aligned} I_1 \frac{d\omega_1}{dt} + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 &= N_1 \\ I_2 \frac{d\omega_2}{dt} + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 &= N_2 \\ I_3 \frac{d\omega_3}{dt} + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 &= N_3 \end{aligned} \quad (4)$$

Nota: Si $\vec{N} = 0$ no es cierto que $\vec{L} = C\vec{\omega}$, pero sí que $\vec{L}^2 = C\omega^2$. En efecto

$$\frac{d\vec{L}^2}{dt} = 2\vec{L} \cdot \frac{d\vec{L}}{dt} = -2\vec{L} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{L}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L}^2 = C\omega^2 \quad \text{si } \vec{N} = 0. \quad (5)$$

Ejemplo: Estudiar el movimiento de una peonza simétrica ($I_1 = I_2 \neq I_3$) libre ($\vec{N} = 0$). Las ecuaciones de Euler implican

$$\frac{d\omega_3}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_3 = C. \quad (6)$$

Además

$$\left. \begin{aligned} I_1 \frac{d\omega_1}{dt} + (I_3 - I_1) \omega_2 \omega_3 &= 0 \\ I_1 \frac{d\omega_2}{dt} + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{Si introducimos } \Omega \equiv \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_3 = C \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\omega_1}{dt} + \Omega \omega_2 &= 0 \\ \frac{d\omega_2}{dt} - \Omega \omega_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad \omega_1 = A \cos \Omega t, \quad \omega_2 = A \sin \Omega t \quad (8)$$

Es decir que el eje de giro precesiona alrededor del eje 3 con un periodo $T = \frac{2\pi}{\Omega}$.

35/003

Aplicación: En una primera aproximación se puede considerar la Tierra como un elipsa de revolución homogénea. En este caso se puede probar que si R_E y R_P son, respectivamente, los radios ecuatorial y polar, y si se elige Ox_3 desde el centro de la Tierra al polo Norte, que

$$\left. \begin{aligned} I_1 = I_2 &= \frac{4}{15} \pi \rho R_E^2 R_P (R_E^2 + R_P^2) \\ I_3 &= \frac{4}{15} \pi \rho R_E^2 R_P (R_E^2 + R_E^2) \end{aligned} \right\} \quad \frac{I_3 - I_1}{I_1} = \frac{R_P^2 - R_E^2}{2R_E^2}$$

$$\left. \begin{aligned} R_P &= 6.35672 \times 10^8 \text{ cm} \\ R_E &= 6.37820 \times 10^8 \text{ cm} \end{aligned} \right\} \quad \frac{I_3 - I_1}{I_1} = -0.00336205$$

$$\omega_3 \approx \omega = \frac{2\pi}{16400} = 7.272205 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1} \quad \Omega = \left| \frac{I_1 - I_2}{I_1} \right| \omega = 2.444952 \times 10^{-7} \text{ s}^{-1}$$

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2.5699 \times 10^7 \text{ s} = 297 \text{ días}$$

Este momento existe y tiene un periodo $T = 420$ días, Newcomb, explicó la diferencia como efecto de la deformación de la Tierra debido a la fuerza centrífuga.

- 1.- Una varilla uniforme de longitud $L = 1.20 \text{ m}$ y masa $M = 6.40 \text{ kg}$ tiene fija en cada uno de sus extremos una pequeña bola de masa $m = 1.06 \text{ kg}$. La varilla solo puede girar en un plano horizontal, alrededor de un eje vertical que pasa por su centro. Se observa que en un cierto instante está efectuando $39.0 \text{ revoluciones s}^{-1}$. Debido al rozamiento del eje queda en reposo después de 32.0 s . Suponiendo un movimiento de rotación con rozamiento constante, calcular: 1) La aceleración angular 2) El momento de rotación retardadora que produce el rozamiento del eje. 3) El trabajo total hecho por el rozamiento del eje 4) El número de revoluciones efectuadas durante los 32.0 s .

$$1) \quad \alpha = - \frac{2\pi \cdot 39.0}{32.0} = - 7.657632 \text{ rad s}^{-2}$$

$$2) \quad I = \frac{1}{12} M L^2 + 2m \frac{L^2}{4} \Rightarrow I = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} M + m \right) L^2 \Rightarrow I = 1.5312 \text{ kg m}^2$$

$$I \frac{d\omega}{dt} = N \Rightarrow N = - 11.72536 \text{ N.m}$$

$$3) \quad \text{La energía cinética inicial es } K = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} 1.5312 \text{ kg m}^2 \frac{(2\pi \cdot 39.0)^2}{\text{s}^2} \Rightarrow$$

$$K = 4.5971 \times 10^4 \text{ Julios} \quad \text{y éste es también el trabajo realizado}$$

$$4) \quad \text{Se tiene que } \omega(t) = \omega_0 + \alpha t \Rightarrow \theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \quad \text{En nuestro caso si } \omega_0$$

es la velocidad angular inicial como el tiempo de parada es $t = - \frac{\omega_0}{\alpha}$ entonces

$$\theta = - \omega_0 \frac{\omega_0}{\alpha} + \frac{1}{2} \alpha \frac{\omega_0^2}{\alpha^2} \Rightarrow \theta = - \frac{1}{2} \frac{\omega_0^2}{\alpha}$$

$$\theta = + \frac{1}{2} \frac{(2\pi \cdot 39.0)^2}{\frac{(2\pi \cdot 39.0)}{32.0}} = \frac{1}{2} 32.0 \cdot 2\pi \cdot 39.0 \Rightarrow \theta = \pi \cdot 32 \times 39$$

$$\text{y el número de vueltas } n = \frac{\theta}{2\pi} \Rightarrow n = 16 \times 39 = 624$$

- 2.- Una cucaracha, de masa m , come, en sentido contrario a las manecillas del reloj, por el borde de un platillo giratorio, montado sobre un eje vertical, de radio R y momento de inercia I . Se desprecia el rozamiento del eje. La velocidad de la cucaracha, con relación a la Tierra, es v . El platillo gira en el sentido de las agujas del reloj con velocidad angular ω_0 . La cucaracha empuja una miga de pan en el borde y, por supuesto, se detiene. ¿Cuál es la velocidad angular del platillo después de que se detenga la cucaracha? ¿Se conserva la energía?

35/003

La conservación del momento angular da

$$I \omega_0 + m R v = (I + m R^2) \omega_f$$

$$\omega_f = \frac{I \omega_0 + m R v}{I + m R^2}$$

La energía cinética inicial y final es

$$K_i = \frac{1}{2} I \omega_0^2 + \frac{1}{2} m v^2$$

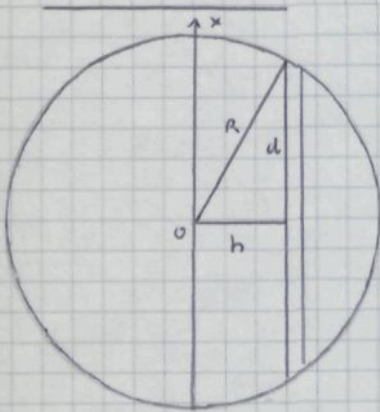
$$K_f = \frac{1}{2} (I + m R^2) \omega_f^2$$

$$\Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2} (I + m R^2) \omega_f^2 - \frac{1}{2} I \omega_0^2 - \frac{1}{2} m v^2 =$$

$$= \frac{1}{2} (I \omega_0 + m R v)^2 \cdot \frac{1}{I + m R^2} - \frac{1}{2} I \omega_0^2 - \frac{1}{2} m v^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{I + m R^2} \left\{ I^2 \omega_0^2 + 2 m R v I \omega_0 + m^2 R^2 v^2 - I^2 \omega_0^2 - I \omega_0^2 m R^2 - m v^2 I - m^2 v^2 R^2 \right\}$$

$$\Delta K = - \frac{1}{2} \frac{m I}{I + m R^2} (\omega_0 R - v)^2$$

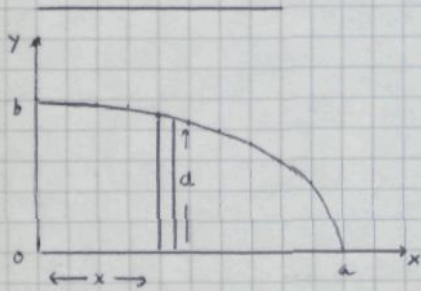
3.- Calcular el momento de inercia de un disco de radio R , altura b y masa m (Supuesto homogéneo) alrededor de un eje que coincide con un diámetro del disco ($b \ll R$)

$$d = \sqrt{R^2 - h^2}$$

$$\rho = \frac{m}{\pi R^2 b}$$

$$I = 2 \int_0^R 2(dh) \rho \int_0^h (R^2 - h^2)^{1/2} h^2 = \frac{4m}{\pi R^2} \int_0^R d h h^2 \sqrt{R^2 - h^2}$$

$$= \frac{4m}{\pi} R^2 \int_0^1 dx x^2 \sqrt{1 - x^2} = \frac{m R^2}{4}$$

5) Calcular el momento de inercia axial para una elipse de semiejes a y b , homogénea

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow d = \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2}$$

$$\text{Densidad superficial } \rho = \frac{m}{\pi a b}$$

$$I = 4 \int_0^a x d \rho x^2 = \frac{4m}{\pi a b} \int_0^a x x^2 b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

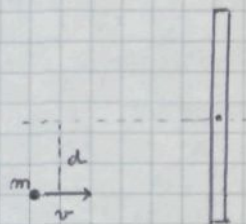
$$= \frac{4m}{\pi} a^2 \int_0^1 dy y^2 \sqrt{1 - y^2} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{m a^2}{4}$$

5. Un tío nino está en reposo y puede girar alrededor de un eje sin rozamiento. Un muchacho corre, siguiendo una trayectoria tangencial a la periferia del tío nino, con una velocidad v , y salta sobre el tío nino. ¿Cuál es la velocidad angular del sistema tío nino - muchacho?

m = masa muchacho, R = radio plataforma, I = momento inercia plataforma.

$$m v R + I \cdot 0 = (I + m R^2) \omega \Rightarrow \omega = \frac{m v R}{I + m R^2}$$

6. Una regla de longitud L descansa sobre una mesa horizontal, sin rozamiento. Su masa es M y puede moverse de cualquier forma sobre la mesa. Un disco de hockey de masa m se va moviendo, como se muestra en la figura, con una velocidad v , y choca elásticamente contra la regla. 1) ¿Qué cantidades se conservan en el choque? 2) ¿Cuál debe ser la masa del disco para que quede en reposo inmediatamente después del choque?



Se conservan momento, momento angular y energía.

Si ω es la rotación alrededor del CM de la varilla, si el disco queda en reposo

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{12} M L^2 \omega^2$$

$$m v d = \frac{1}{12} M L^2 \omega$$

$$m v = M V$$

donde V es la velocidad del C.M. de la varilla después del choque

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2M} m^2 v^2 + \frac{1}{24} M L^2 \left(\frac{12 m v d}{M L^2} \right)^2 \Rightarrow 1 = \frac{m}{M} + \frac{12 m d^2}{M L^2}$$

$$m = \frac{M L^2}{L^2 + 12 d^2}$$

7. La Luna gira alrededor de la Tierra de manera que siempre vemos la misma cara de la Luna. 1) ¿Cómo están relacionados el momento angular de rotación de la Luna alrededor de su eje L_L y el momento angular de rotación de la Luna alrededor de la Tierra L_{LT} ? 2) ¿Cuánto tendríamos que cambiar L_T para que pudiéramos ver toda la superficie de la Luna en un mes?

35/003

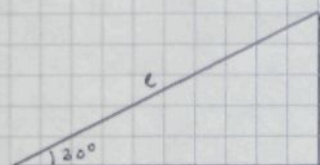
R_L = Radio Luna , R_{LT} = distancia Luna-Tierra

La velocidad angular ω de la Luna respecto a la Tierra es la misma que la velocidad angular de la Luna alrededor de su eje.

$$L_{TL} = M_L R_{TL}^2 \omega^2 \quad , \quad L_L = \frac{2}{5} M_L R_L^2 \omega^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{L_L}{L_{TL}} = \frac{2}{5} \left(\frac{R_L}{R_{LT}} \right)^2$$

Se lograra en toda la superficie en un mes ($\approx$ ciclo lunar) si la velocidad de rotación sobre su eje aumenta o disminuye en una milésima de su valor actual.

8. Una esfera y un cilindro, ambos macizos y homogéneos, ruedan sin deslizarse por un plano inclinado de ángulo $\theta = 30^\circ$. Suponiendo que se abandonan simultáneamente en un cierto nivel de este plano ¿cuál haya más deprisa? ¿Qué distancia hay entre ambos al cabo de 21 s de iniciarse el movimiento?



Esfera $\frac{1}{2} M_E v_E^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5} M_E R^2 \right) \frac{v_E^2}{R^2} - M_E g \ell \cos \theta = 0$

Cilindro $\frac{1}{2} M_C v_C^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} M_C R^2 \right) \frac{v_C^2}{R^2} - M_C g \ell \cos \theta = 0$

$$v_E = \sqrt{\frac{5}{7} \ell g}$$

$$v_C = \sqrt{\frac{2}{3} \ell g} < v_E$$

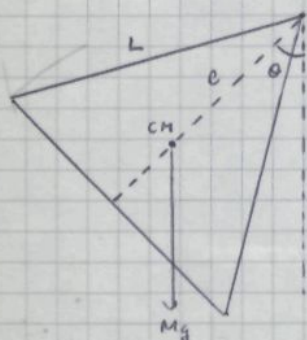
$$a_E = \frac{5}{14} g$$

$$a_C = \frac{1}{3} g$$

$$\Delta \ell = \frac{1}{2} (a_E - a_C) t^2 = \frac{1}{84} g t^2$$

$$\Delta \ell = 51.50 \text{ m.}$$

9. Una lámina homogénea de masa M y en forma de un triángulo equilátero de lado L se cuelga de uno de sus vértices y se deja que realice pequeñas oscilaciones alrededor de su posición de equilibrio. Determinar el periodo de este péndulo.



$$I \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -Mg \ell \sin \theta \approx -Mg \ell \theta$$

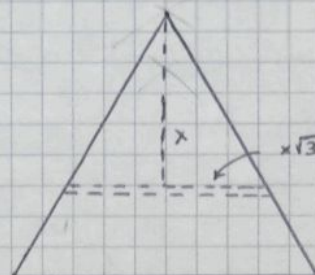
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mg \ell}}$$

Altura $h = \frac{\sqrt{3}}{2} L \Rightarrow \ell = \frac{2}{3} h \Rightarrow \ell = \frac{L}{\sqrt{3}}$

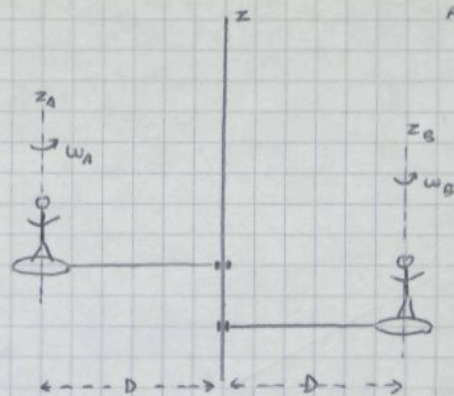
Densidad superficial $\sigma = \frac{M}{\frac{1}{2} L h} \Rightarrow \sigma = \frac{4M}{\sqrt{3} L^2}$

$$I = \int_0^h dx \frac{2}{\sqrt{3}} x \sigma x^2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma \frac{1}{4} h^4 \Rightarrow I = \frac{3}{8} M L^2$$

$$T = 2\pi \left(\frac{3\sqrt{3} L}{8g} \right)^{1/2}$$



10.- Dos plataformas pueden girar libre e independientemente alrededor de un eje común Z . Sobre cada plataforma hay una persona, cada una de masa M . Los ejes Z_A y Z_B , que pasan por el centro de masas, distan D del eje Z . El momento de inercia de cada sistema respecto al eje que pasa por su centro de masas es I . En el instante inicial, ambas plataformas están en posiciones diametralmente opuestas y en reposo. Las personas A y B empiezan a girar alrededor de los ejes Z_A y Z_B con velocidades angulares ω_A y $\omega_B = \omega_A/2$. Determinar el tiempo para que una plataforma alcance la otra.



$$\left. \begin{aligned} I \omega_B &= (I + M D^2) \omega_B' \\ I \omega_A &= (I + M D^2) \omega_A' \end{aligned} \right\} \omega_i' \text{ son las velocidades angulares respecto a } Z$$

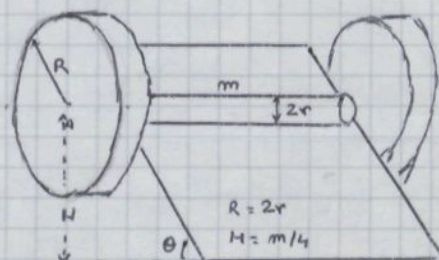
De aquí: $\omega_B' / \omega_A' = \omega_B / \omega_A = 1/2$

El camino recorrido por A es $S_A = \omega_A' D t$ y el de B $S_B = \omega_B' D t$, entonces

$$\omega_A' D t = \omega_B' D t + \pi D \Rightarrow t = \frac{\pi}{(\omega_A' - \omega_B')} = \frac{2\pi}{\omega_A'} = \frac{\pi}{\omega_B'}$$

$$t = \frac{\pi}{\omega_B} \frac{I + M D^2}{I} = \frac{2\pi}{\omega_A} \frac{I + M D^2}{I}$$

11.- El sistema de la figura puede rodar sin deslizarse por el plano inclinado y parte del reposo. Calcular 1) La aceleración del C.M. 2) El coeficiente de rozamiento. 3) La velocidad del C.M. justo antes de que las ruedas grandes toquen el suelo. 4) La velocidad del C.M. justo después que las ruedas grandes toquen el suelo



Empezamos calculando el momento de inercia de un cilindro homogéneo de masa M , altura h y radio D respecto a su eje.

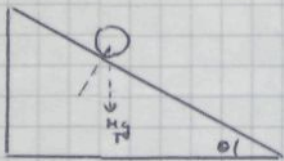
$$I = \int_0^D r^2 2\pi r h dr \rho = 2\pi h \rho \frac{1}{4} D^4, \quad M = \pi D^2 h \rho \Rightarrow I = \frac{1}{2} M D^2$$

la masa total del sistema es $M_T = \frac{m}{4} + \frac{m}{4} + m \Rightarrow M_T = \frac{3}{2} m$

35/003

El momento de inercia del aparato respecto a su eje es

$$I_T = \frac{1}{2} m r^2 + \frac{1}{2} \frac{m}{4} 4r^2 + \frac{1}{2} \frac{m}{4} 4r^2 \Rightarrow I_T = \frac{3}{2} m r^2$$



d) Momento de las fuerzas respecto al punto de contacto

$$(I_T + M_T r^2) \alpha = \frac{3}{2} m g r \sin \theta, \quad \alpha = \frac{g}{2r} \sin \theta$$

donde α es la aceleración del C.M.

2) Momento de las fuerzas respecto al C.M.

$$\frac{3}{2} m r^2 \alpha = \mu \frac{3}{2} m g r \sin \theta \Rightarrow \mu = \frac{1}{2} \tan \theta$$

$$3) V(x) = \frac{3}{2} m g x, \quad K(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} m \right) v^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} m r^2 \right) \frac{v^2}{r^2} = \frac{3}{2} m v^2$$

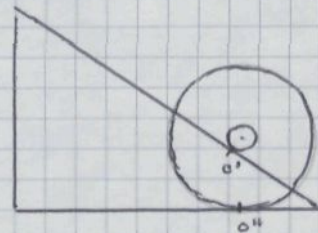
$$\frac{3}{2} m g x + \frac{3}{2} m v^2 = \frac{3}{2} m g H, \quad v = \sqrt{g(H-x)}$$

Justo antes de tocar al suelo

$$v = \sqrt{g(H-2r)}$$

$$4) \text{ Antes de tocar } K = \frac{1}{2} I_{O'} \omega_{O'}^2$$

$$\text{Después de tocar } K = \frac{1}{2} I_{O''} \omega_{O''}^2$$

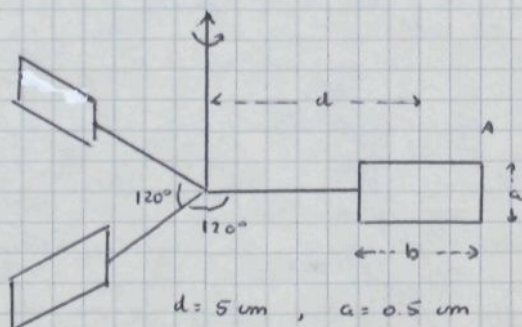


$$\frac{1}{2} 3 m r^2 \omega_{O'}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} m r^2 + \frac{3}{2} m R^2 \right) \omega_{O''}^2 \Rightarrow$$

$$\omega_{O'}^2 = \frac{5}{2} \omega_{O''}^2 \Rightarrow v_{antes}^2 \frac{1}{r^2} = \frac{5}{2} v_{desp}^2 \frac{1}{4r^2} \Rightarrow v_{antes}^2 = \frac{8}{5} v_{desp}^2$$

$$v_{des} = \sqrt{\frac{8}{5} g(H-2r)}$$

12.- Un molino solar se puede imaginar formado por tres placas rectangulares idénticas unidas por barras rígidas iguales (sin masa), de acuerdo con la figura. Cuando una de las placas, digamos la A, se ilumina el sistema



$$d = 5 \text{ cm}, \quad a = 0.5 \text{ cm}$$

$$b = 1 \text{ cm}, \quad m = 0.2 \text{ gr.}$$

gira alrededor del eje central. Suponemos que la placa A, es totalmente absorbente y que la radiación incide normalmente sobre ella. La masa de cada placa es m.

Se sitúa delante de A una fuente luminosa formada por un laser de $\lambda = 5795.6 \text{ Å}$

El flujo de energía es 100 W/cm^2 . El eje de rotación ejerce un momento de

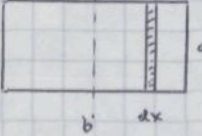
torsión sobre el molino proporcional a su velocidad $M = -k \dot{\theta}$. 1) calcular el mo-

mento de los fotones. 2) calcular la cantidad de momento transferida al molire por unidad de tiempo. 3) calcular el momento de inercia del sistema respecto al eje de giro. Si el "flash" de luz dura 0.4 s 4) calcular la velocidad de rotación del molire, suponiéndolo inicialmente en reposo. 5) escribir la ecuación del momento e integrarla. 6) calcular k para que el recorrido de A sea 2π

$$1) \quad p = \frac{2\pi\hbar}{\lambda} = \frac{2\pi \cdot 1.0545887 \times 10^{-27} \text{ erg}\cdot\text{s}}{5.7956 \times 10^{-5} \text{ cm}} \Rightarrow p = 1.14331 \times 10^{-22} \text{ g cm s}^{-1}$$

$$2) \quad \Delta p = \frac{10^9 \text{ erg}}{s} \cdot \frac{(a \cdot b)}{c} = \frac{10^9 \cdot 0.5}{c} \text{ g cm s}^{-2} \Rightarrow \Delta p = 1.66782 \times 10^{-2} \text{ g cm s}^{-2}$$

3)



$$\sigma = \frac{m}{ab} \quad I_{cm} = \int_{-b/2}^{+b/2} \sigma a dx x^2 = \sigma a \frac{1}{3} x^3 \Big|_{-b/2}^{b/2} = \frac{1}{12} m b^2$$

$$I = m \left(3d^2 + \frac{1}{4} b^2 \right) \Rightarrow I = 15.05 \text{ g cm}^2$$

$$4) \quad I \omega_c = 0 p \cdot 0 t \cdot a \Rightarrow \omega_c = 5.55093 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$$

$$5) \quad I \frac{d\omega}{dt} = -k\omega, \quad \omega = \omega_c e^{-(k/I)t}$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad \theta(t) = \frac{\omega_c I}{k} (1 - e^{-kt/I})$$

$$6) \quad \theta(\infty) = 2\pi = \frac{\omega_c I}{k} \Rightarrow k = \frac{\omega_c I}{2\pi} \Rightarrow k = 1.32721 \times 10^{-3} \text{ g cm}^2 \text{ s}^{-1}$$

13. Una preonza simétrica gira alrededor de su eje de simetría con velocidad angular $\omega_s = 200 \text{ rad s}^{-1}$. Si M es su masa, el momento de inercia alrededor del eje de simetría es $I = M G^2$ con $G = 3.00 \text{ cm}$. La distancia de su centro al centro de masas es $r = 4.00 \text{ cm}$. Calcular la velocidad angular de precesión ω_p alrededor del eje vertical. Suponen que $\omega_p \ll \omega_s$ y comprobar la validez de esta hipótesis

Para el observador inercial $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$

$$\vec{L} = (L \sin \gamma \cos \omega_p t, L \sin \gamma \sin \omega_p t, L \cos \gamma)$$

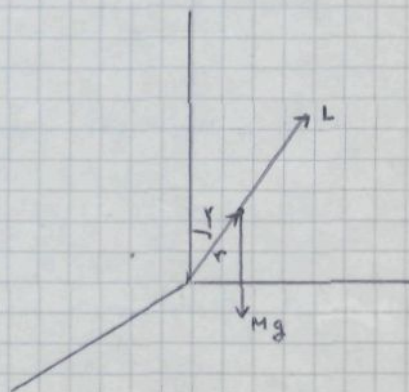
$$\vec{r} = (r \sin \gamma \cos \omega_p t, r \sin \gamma \sin \omega_p t, r \cos \gamma)$$

$$\vec{F} = (0, 0, -Mg)$$

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} = (-Mg r \sin \gamma \sin \omega_p t, Mg r \sin \gamma \cos \omega_p t, 0)$$

Entonces $\omega_p = \frac{r M g}{L}$ como se deduce inmediatamente de la ecuación dada, como

$$L = I \omega_s = M G^2 \omega_s \Rightarrow \omega_p = \frac{r g}{G^2 \omega_s}$$



35/003

$$\omega_p = \frac{r g}{G^2} \frac{1}{\omega_s}$$

Nota que ω_p y ω_s' son independientes de γ

$$\omega_s = 200 \text{ rad s}^{-1} \quad r = 4.00 \text{ cm} \quad G = 3.00 \text{ cm} \quad , \quad g = 980 \text{ cm s}^{-2}$$

$$\omega_p = 2.18 \text{ rad s}^{-1} \ll \omega_s$$

Aquí hemos ignorado el momento angular del CM comparado con $\vec{L}$ que es el momento angular de la pizarra alrededor de su eje de simetría

14. Una pizarra simétrica gira alrededor de su eje de simetría con una velocidad angular $\omega_s = 50 \text{ rad s}^{-1}$. Si M es su masa, el momento de inercia es $I = M G^2$ con $G = 3.00 \text{ cm}$. La distancia de su centro al centro de masas es $r = 4.00 \text{ cm}$. Calcular la velocidad de precesión ω_p , alrededor del eje vertical.

Indiquemos por $\vec{L}_s$ el momento angular alrededor de su eje de simetría.

$$\vec{L}_s = (L_s \sin \gamma \cos \omega_p t, L_s \sin \gamma \sin \omega_p t, L_s \cos \gamma)$$

El C.M. es

$$\vec{r} = (r \sin \gamma \cos \omega_p t, r \sin \gamma \sin \omega_p t, r \cos \gamma)$$

La fuerza es

$$\vec{F} = (0, 0, -Mg)$$

y el momento es $\vec{N} = (-Mg r \sin \gamma \sin \omega_p t, Mg r \sin \gamma \cos \omega_p t, 0)$

La velocidad del centro de masas es $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = (-r \omega_p \sin \gamma \sin \omega_p t, r \omega_p \sin \gamma \cos \omega_p t, 0)$

y el momento angular de precesión es

$$\vec{L}_p = \vec{r} \times M \vec{v} = (-M \omega_p r^2 \sin \gamma \cos \omega_p t, -M \omega_p r^2 \sin \gamma \sin \omega_p t, M \omega_p r^2 \sin^2 \gamma)$$

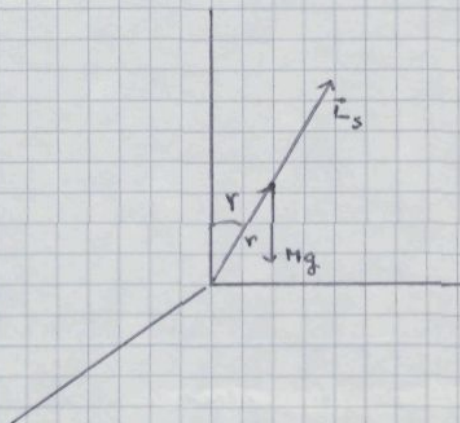
y el momento total $\vec{L} = \vec{L}_s + \vec{L}_p$

$$\vec{L} = ([L_s - M \omega_p r^2 \cos \gamma] \sin \gamma \cos \omega_p t, [L_s - M \omega_p r^2 \cos \gamma] \sin \gamma \sin \omega_p t, [L_s \cos \gamma + M \omega_p r^2 \sin^2 \gamma])$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = (-\omega_p [L_s - M \omega_p r^2 \cos \gamma] \sin \gamma \sin \omega_p t, \omega_p [L_s - M \omega_p r^2 \cos \gamma] \sin \gamma \cos \omega_p t, 0)$$

y con $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N} \Rightarrow Mg r = \omega_p [L_s - M \omega_p r^2 \cos \gamma] \quad M r^2 \cos \gamma \omega_p^2 - L_s \omega_p + M g r = 0$

y con $L_s = I \omega_s = M G^2 \omega_s$



$$M r^2 \cos \gamma \omega_p^2 - M G^2 \omega_s \omega_p + M g r = 0$$

$$r^2 \cos \gamma \omega_p^2 - G^2 \omega_s \omega_p + g r = 0$$

$$\omega_{p\pm} = \frac{1}{2r^2 \cos \gamma} \left[G^2 \omega_s \pm \sqrt{G^4 \omega_s^2 - 4r^2 \cos \gamma g r} \right]$$

$$\omega_{p\pm} = \frac{1}{2r^2 \cos \gamma} \left[G^2 \omega_s \pm \sqrt{G^4 \omega_s^2 - 4g r^3 \cos \gamma} \right]$$

En nuestro caso

$$\omega_{p\pm} = \frac{G^2 \omega_s}{2r^2 \cos \gamma} \left\{ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4g r^3 \cos \gamma}{G^4 \omega_s^2}} \right\}$$

$$G = 3.00 \text{ cm}, \quad \omega_s = 40 \text{ rad s}^{-1}, \quad r = 4.00 \text{ cm}, \quad g = 980 \text{ cm s}^{-2}$$

$$\omega_{p\pm} = \frac{11.25}{\cos \gamma} \left\{ 1 \pm \sqrt{1 - 1.935802 \cos \gamma} \right\}$$

Las raíces son reales solo para $\cos \gamma < 0.516581 \Rightarrow \gamma > 58^\circ 53' 48.36''$. Para γ menores el movimiento es más complicado y no tan cuasiarmónico. Las dos raíces corresponden a frecuencias lenta y rápida.

$$\gamma = 60^\circ$$

$$\omega_{p-} = 18.5 \text{ rad s}^{-1}$$

$$\omega_{p+} = 26.5 \text{ rad s}^{-1}$$

$$\gamma = 70^\circ$$

$$\omega_{p-} = 13.8 \text{ "}$$

$$\omega_{p+} = 52.0 \text{ "}$$

$$\gamma = 80^\circ$$

$$\omega_{p-} = 12.0 \text{ "}$$

$$\omega_{p+} = 117.6 \text{ "}$$

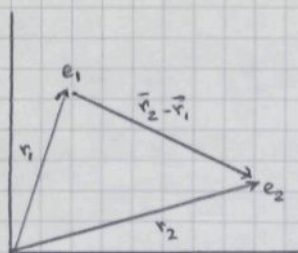
$$\gamma = 90^\circ$$

$$\omega_{p-} = 10.9 \text{ "}$$

$$\omega_{p+} = \infty$$

CARGAS ELÉCTRICAS: CAMPO ELÉCTRICO.

Ley de Coulomb. La fuerza que la carga 2 ejerce sobre la 1 es



$$\vec{F}_{21} = \frac{e_1 e_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = -\vec{\nabla}_1 \frac{e_1 e_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \quad (\text{Ley de Coulomb}) \quad (1)$$

$$V(r) = \frac{e_1 e_2}{r} \quad \text{Energía potencial de interacción} \quad (2)$$

Aditividad: Se supone que la fuerza a que está sometida la partícula 1 en presencia de las partículas 2, 3, ..., N, es

$$\vec{F} = \sum_{j=2}^N \frac{e_1 e_j}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_j|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_j), \quad \vec{F} = -\vec{\nabla}_1 V, \quad V = \sum_{j=2}^N \frac{e_1 e_j}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_j|} \quad (3)$$

Notar que no hemos puesto ningún coeficiente de proporcionalidad en (1) pues siempre se puede englobar en la definición de e .

Campo eléctrico: Consideremos un conjunto de partículas de cargas $e_1, \dots, e_N$ en los puntos $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$ respectivamente y consideremos que en el punto $\vec{r}$ colocamos una partícula de prueba de carga e . La fuerza que actúa sobre ella es

$$\vec{F}(\vec{r}) = e \sum_{i=1}^N \frac{e_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i) \quad (4)$$

La cantidad $\vec{F}(\vec{r})/e$ se llama campo eléctrico debido por el sistema de las N cargas en el punto $\vec{r}$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{j=1}^N \frac{e_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|^3} (\vec{r} - \vec{r}_j) \quad \text{Campo Eléctrico} \quad (5)$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \phi(\vec{r}), \quad \phi(\vec{r}) = \sum_{j=1}^N \frac{e_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} \quad \begin{array}{l} \text{Potencial escalar o} \\ \text{potencial eléctrico} \end{array} \quad (6)$$

En consecuencia $\phi(\vec{r})$ se puede cambiar en una constante aditiva. Volvemos sobre esto.

Unidades: Notar que de las formulas anteriores

$$[e] = M^{1/2} L^{3/2} T^{-1}, \quad [E] = M^{1/2} L^{-1/2} T^{-1}, \quad [\phi] = M^{1/2} L^{1/2} T^{-1} \quad (7)$$

1 statcoulomb $\equiv g^{1/2} \text{cm}^{3/2} \text{s}^{-1} \equiv$ Dos cargas de 1 statcoulomb puestas a la distancia de 1 cm se atraen con una fuerza de una dina.

En el sistema M.K.S la ley de Coulomb se escribe

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e_1 e_2}{r^2} \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \equiv \left(\frac{C}{10^3} \frac{\text{seg}}{m} \right)^2 \times 10^9 \frac{\text{Newton } m^2}{\text{Coulomb}^2} \quad (8)$$

35/003

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = \left(\frac{c}{10^8} \frac{s}{m} \right)^2 \times 10^{18} \left(\frac{3^{1/2} \text{ cm}^{3/2} s^{-1}}{\text{coulomb}} \right)^2 = \left(\frac{c}{10^8} \frac{s}{m} \right)^2 \times 10^{18} \left(\frac{\text{statcoulomb}}{\text{coulomb}} \right)^2 \Rightarrow$$

$$1 \text{ Coulomb} = \left(\frac{c}{10^8} \frac{s}{m} \right)^2 \times 10^9 \text{ statcoulomb} \Rightarrow 1 \text{ Coulomb} = 2.997\,924\,58 \times 10^9 \text{ statcoulomb} \quad (9)$$

Valores

La carga del electrón es $-e = 4.803\,242\,(14) \times 10^{-10} \text{ esu}$

Carga del protón $e_p = -e(1+\delta)$ con $|\delta| < 10^{-21}$ (10)

Dentro de los errores experimentales todas las cargas eléctricas libres son múltiplos enteros de la carga del electrón. Esta propiedad se conoce con el nombre de cuantización de la carga eléctrica. ¿Por qué?

Monopolos magnéticos: Como físico me es extraordinariamente difícil aceptar que la cuantización de la carga eléctrica sea un capricho de la Naturaleza. P. A. M. Dirac, en 1931, se dio cuenta que la existencia de monopolos magnéticos explicaba de forma natural esta regla. Dirac supuso que una partícula podía tener carga eléctrica o carga magnética, pero no ambos tipos simultáneamente. Si se indica por g la carga magnética de un monopolo y por q la carga eléctrica de una partícula, Dirac dedujo que

$$\frac{qg}{\hbar c} = \frac{1}{2} m, \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (\text{Relación de cuantización de Dirac}) \quad (11)$$

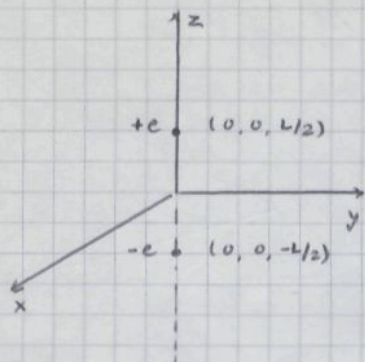
A partir de ella se puede obtener el siguiente resultado: todas las cargas eléctricas deben ser múltiplos enteros de una carga eléctrica elemental y todas las magnéticas lo deben ser de una magnética fundamental g_0 , las cuales a su vez deben satisfacer la condición de cuantización de Dirac. Hasta hoy día no hay ninguna evidencia experimental incontestable de la existencia de monopolos.

¿Hay alguna otra posibilidad de explicar la cuantización de la carga eléctrica? En 1973, se empezaron a formular las teorías de gran unificación, que pretenden dar una teoría unificada de todas las interacciones, salvo la gravitacional. Estos modelos suministran, de forma natural, una explicación de la cuantización de la carga, sin necesidad de introducir monopolos. Sin embargo al año siguiente A. M. Polyakov y G. 't Hooft, independientemente, demostraron que la existencia de monopolos magnéticos era una consecuencia de las teorías de gran unificación. Más aún, las propiedades de estos monopolos pueden ser calculadas si se especifica el modelo de gran unificación usado. En particular en los modelos usuales la masa es del orden de 10^{16} veces la masa del protón.

Ejemplo 1.- Campo creado por una partícula de carga e , puntual, situada en el origen de coordenadas.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{e}{r^3} \vec{r} = \frac{e}{r^2} \hat{r}, \quad \phi(\vec{r}) = + \frac{e}{r} \quad (1)$$

Ejemplo 2. - Dipolo eléctrico



$$\phi(\vec{r}) = e \left\{ [x^2 + y^2 + (z - L/2)^2]^{-1/2} - [x^2 + y^2 + (z + L/2)^2]^{-1/2} \right\} \quad (2)$$

Supongamos $r \gg L$

$$\begin{aligned} [x^2 + y^2 + (z - L/2)^2]^{-1/2} &= [r^2 - zL + L^2/4]^{-1/2} = \\ &= \frac{1}{r} \left\{ 1 - \frac{zL}{r^2} + \frac{L^2}{4r^2} \right\}^{-1/2} \approx \frac{1}{r} + \frac{Lz}{2r^3} + \dots \end{aligned}$$

$$\phi(\vec{r}) = d \frac{z}{r^3}, \quad d \equiv eL = \text{momento dipolar eléctrico} \quad (3)$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \left(\frac{3dxz}{r^5}, \frac{3dyz}{r^5}, -\frac{d}{r^3} \left(1 - \frac{3z^2}{r^2} \right) \right) \quad (4)$$

En general

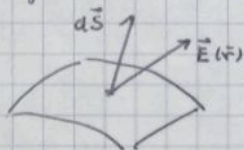
$$\phi(\vec{r}) = \frac{\vec{d} \cdot \vec{r}}{r^3}, \quad \vec{E}(\vec{r}) = -\frac{1}{r^3} \vec{d} + 3 \frac{(\vec{d} \cdot \vec{r})}{r^5} \vec{r} \quad (5)$$

Notar que esta ley de fuerza es muy distinta de la del caso anterior.

Distribución continua. Si se da una distribución continua de carga caracterizada por una densidad de carga $\rho(\vec{r})$ entonces

$$\phi(\vec{r}) = \int_V d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (6)$$

Flujo: Sea una superficie elemental $d\vec{S}$, se llama flujo del campo a través de este elemento de superficie a



$$d\Phi \equiv d\vec{S} \cdot \vec{E}(\vec{r}) \quad (7)$$

y para una superficie arbitraria S

$$\Phi \equiv \int_S d\vec{S} \cdot \vec{E}(\vec{r}) \quad (8)$$

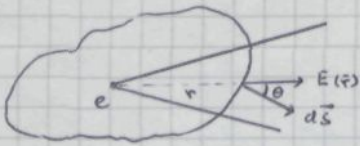
Si la superficie es cerrada $d\vec{S}$ se toma hacia el exterior y siempre se combina $d\vec{S}$ en forma continua.

Ejemplo 1: Sea una carga puntual e situada en el origen de coordenadas y S una esfera de radio R con centro en el origen

$$d\Phi = R^2 d\Omega E = R^2 d\Omega \frac{e}{R^2} = e d\Omega \quad \Rightarrow \quad \Phi = 4\pi e \quad (9)$$

Ejemplo 2. Consideremos una carga puntual e y una superficie de forma arbitraria.

i)



$$d\Phi = \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \frac{e}{r^2} dS \cos \theta = \frac{e}{r^2} \frac{r^2 d\Omega}{\cos \theta} \cos \theta = e d\Omega$$

$$\Phi = 4\pi e$$

ii)



$$d\Phi = -e \frac{dS_1 \cos \theta_1}{r_1^2} + e \frac{dS_2 \cos \theta_2}{r_2^2} = 0$$

$$\Phi = 0.$$

Teorema de Gauss: Sea una superficie cerrada S en cuyo interior hay una carga total Q , entonces

$$\Phi = \int_S d\vec{S} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 4\pi Q \quad (10)$$

Ejemplo 1. Campo creado por una capa esférica. Sea O su centro y $R_1 < R_2$ los radios de las esferas. Supondremos una distribución homogénea de carga. La carga Q y la densidad ρ están relacionadas por

$$Q = \frac{4\pi}{3} \rho (R_2^3 - R_1^3) \quad (11)$$

La simetría esférica implica $\vec{E}(\vec{r}) = E(r) \hat{r}$.

$$i) \quad r < R_1 \Rightarrow 4\pi r^2 E(r) = 0 \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = 0$$

$$ii) \quad R_1 \leq r \leq R_2 \Rightarrow 4\pi r^2 E(r) = 4\pi \frac{4\pi}{3} \rho (r^3 - R_1^3) \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = Q \frac{r^3 - R_1^3}{R_2^3 - R_1^3} \frac{1}{r^2} \hat{r} \quad (12)$$

$$iii) \quad r > R_2 \Rightarrow 4\pi r^2 E(r) = 4\pi Q \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = Q \frac{1}{r^2} \hat{r}$$

Notar la continuidad en $r = R_1$ y $r = R_2$ de $\vec{E}(\vec{r})$.

$$Si \quad R_1 \neq 0 \quad \vec{E}(\vec{r}) = Q \frac{r}{R_1^3} \hat{r} \quad r \leq R_1 \leq R_2 \quad (13)$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = Q \frac{1}{r^2} \hat{r} \quad r > R_2 \leq R_1$$

Si $R_2 = R_1 + \epsilon$, $R_1 = R$, $\epsilon \neq 0$. (Superficie esférica cargada)

$$\vec{E}(\vec{r}) = 0 \quad r < R$$

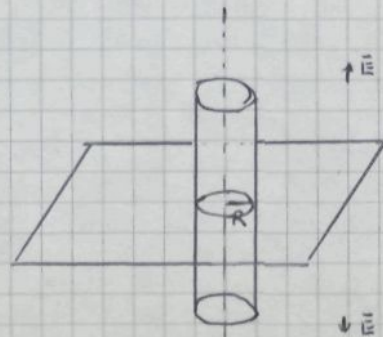
$$\vec{E}(\vec{r}) = Q \frac{1}{r^2} \hat{r} \quad r > R$$

Ejemplo 2. Superficie indefinida cargada uniformemente

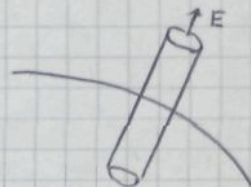
Sea σ = carga por unidad de superficie

$$\pi R^2 E + \pi R^2 E = 4\pi \pi R^2 \sigma$$

$$|\vec{E}(\vec{r})| = 2\pi \sigma$$



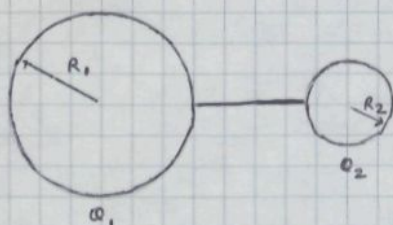
Ejemplo 3.- Campo próximo a la superficie de un conductor. Los conductores son cuerpos en los que los electrones se mueven libremente. Una carga en exceso que se coloque en un conductor aislado se distribuye sobre la superficie del mismo. Al añadir un exceso de carga en un conductor aparece en su interior un campo eléctrico que tiende a redistribuir las cargas de forma que se reduce automáticamente el valor de $\vec{E}$. Al alcanzar la posición de equilibrio $\vec{E} = 0$ en todos los puntos del interior del conductor, y por el teorema de Gauss no pueden quedar cargas libres no compensadas en su interior. Por otra parte $\vec{E}$ en su superficie debe ser perpendicular a dicha superficie, pues de lo contrario existiría una componente tangencial del campo según la superficie que tendería a mover las cargas. En tanto en una situación de equilibrio



$$|\vec{E}| 4\pi r^2 = 4\pi r^2 \sigma \Rightarrow |\vec{E}(\vec{r})| = 4\pi\sigma \quad (1)$$

donde σ es la densidad superficial de carga. Además en un conductor en equilibrio $\phi(\vec{r}) = C$. Si en dos puntos A y B sucediera que $\phi(A) > \phi(B)$ entonces las cargas libres se moverían hacia A o B (según su signo) y se establecerían corrientes, que no deben existir en una situación de equilibrio.

Nota: Veamos que si un conductor se carga el campo eléctrico es más intenso cerca de las partes de mayor curvatura. Consideremos la figura adjunta. Entonces



$$\phi_1 = \frac{Q_1}{R_1}, \quad \phi_2 = \frac{Q_2}{R_2}$$

$$\phi_1 = \phi_2 \Rightarrow \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_1}{R_2} > 1$$

$$\sigma_1 = \frac{Q_1}{4\pi R_1^2}, \quad \sigma_2 = \frac{Q_2}{4\pi R_2^2} \Rightarrow \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{Q_2}{R_2^2} \frac{R_1^2}{Q_1} = \frac{R_1}{R_2} > 1$$

$$|\vec{E}_1| = 4\pi\sigma_1, \quad |\vec{E}_2| = 4\pi\sigma_2 \quad \frac{|\vec{E}_2|}{|\vec{E}_1|} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{R_1}{R_2} \Rightarrow \frac{|\vec{E}_2|}{|\vec{E}_1|} = \frac{R_1}{R_2} > 1 \quad (2)$$

Los campos eléctricos son más intensos cerca de las partes agudas. Paralelamente,

Forma diferencial: Se puede probar que si $\vec{A}(\vec{r})$ es un campo vectorial arbitrario y S una superficie cerrada que engloba el volumen V entonces

$$\int_S d\vec{S} \cdot \vec{A}(\vec{r}) = \int_V dV [\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r})] \quad (\text{Teorema de Gauss}) \quad (3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \text{divergencia de } \vec{A}(\vec{r}).$$

35/003

Ejemplo $\vec{A} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ y V una esfera de radio $R \Rightarrow$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 3 \quad \int_V dV (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = 4\pi R^3$$

$$\vec{A} \cdot d\vec{S} = \hat{r} \cdot R R^2 \hat{r} d\Omega = R^3 d\Omega \quad \int_S d\vec{S} \cdot \vec{A} = 4\pi R^3$$

$$\text{si} \quad \Phi = \int_S d\vec{S} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \int_V dV (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r})) = 4\pi \int_V dV \rho(\vec{r}) \Rightarrow$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 4\pi \rho(\vec{r}) \quad (\text{Ley de Coulomb})$$

(4)

$$\Delta \Phi(\vec{r}) = -4\pi \rho(\vec{r})$$

$$\text{donde} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Energía potencial electrostática:

i) Consideremos un sistema de cargas puntuales $Q_1, \dots, Q_N$ situadas, respectivamente, en los puntos $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$. ¿Cuál es la energía necesaria para establecer esta distribución de cargas? Inicialmente suponemos todo el espacio vacío y todas las cargas infinitamente alejadas. La carga Q_1 se puede llevar a $\vec{r}_1$ sin realizar ningún trabajo. A continuación se lleva la carga Q_2 a $\vec{r}_2$ y debemos hacer un trabajo

$$W_2 = Q_2 \frac{Q_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \quad (5)$$

Para llevar Q_3 a $\vec{r}_3$ debemos hacer el trabajo

$$W_3 = Q_3 \sum_{j=1}^2 \frac{Q_j}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_j|} \quad (6)$$

y así sucesivamente, por lo que el trabajo total que se debe realizar (y por tanto la energía potencial de esta distribución de cargas) es

$$W = \sum_{i=1}^N \sum_{j < i} \frac{Q_i Q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N-1} \frac{Q_i Q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \quad (7)$$

donde la prima indica que $i \neq j$. Notar que $W \geq 0$.

ii) Para una distribución continua se suele definir la energía electrostática como

$$W = \frac{1}{2} \int d^3x \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}) \rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (8)$$

Aquí se ha incluido $x=x'$ y esto nos asegura $W \geq 0$, según tenemos a continuación de donde

$$W = \frac{1}{2} \int d^3x \rho(\vec{x}) \Phi(\vec{x}) = \frac{1}{8\pi} \int d^3x \phi(\vec{x}) [\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x})] = -\frac{1}{8\pi} \int d^3x [\vec{\nabla} \phi(\vec{x})] \cdot \vec{E}(\vec{x}) \Rightarrow$$

$$W = \frac{1}{8\pi} \int d^3x |\vec{E}(\vec{x})|^2$$

(1)

y $|\vec{E}(\vec{x})|^2/8\pi$ es la densidad de energía (energía por unidad de volumen) almacenada en un campo electrostático.

1.- Calcular el campo eléctrico creado por las cargas

$$Q \text{ en } (L/2, L/2, 0)$$

$$-Q \text{ en } (-L/2, L/2, 0)$$

$$Q \text{ en } (-L/2, -L/2, 0)$$

$$-Q \text{ en } (L/2, -L/2, 0)$$

en puntos alejados de las mismas

$$\phi(\vec{r}) = Q \left\{ \left[(x-L/2)^2 + (y-L/2)^2 + z^2 \right]^{-1/2} + \left[(x+L/2)^2 + (y+L/2)^2 + z^2 \right]^{-1/2} \right. \\ \left. - \left[(x+L/2)^2 + (y-L/2)^2 + z^2 \right]^{-1/2} - \left[(x-L/2)^2 + (y+L/2)^2 + z^2 \right]^{-1/2} \right\} =$$

$$= Q \left\{ \left[r^2 - xL - yL + L^2/2 \right]^{-1/2} + \left[r^2 + xL + yL + L^2/2 \right]^{-1/2} \right.$$

$$\left. - \left[r^2 + xL - yL + L^2/2 \right]^{-1/2} - \left[r^2 - xL + yL + L^2/2 \right]^{-1/2} \right\}$$

$$(1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \dots \quad \text{si } x \ll 1$$

$$\text{si } r \gg L$$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{Q}{r} \left\{ 1 + \frac{L}{2r^2} \left(x+y - \frac{1}{2}L \right) + \frac{3L^2}{8r^4} (x^2 + y^2 + 2xy) + \dots \right.$$

$$+ 1 + \frac{L}{2r^2} (-x-y - \frac{1}{2}L) + \frac{3L^2}{8r^4} (x^2 + y^2 + 2xy) + \dots$$

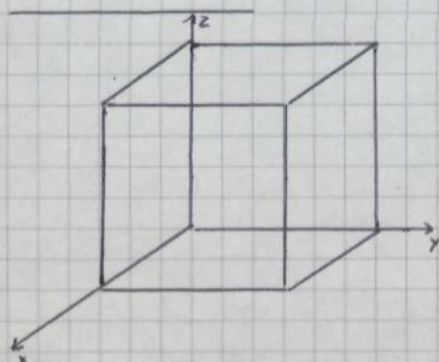
$$- 1 - \frac{L}{2r^2} (-x+y - \frac{1}{2}L) - \frac{3L^2}{8r^4} (x^2 + y^2 - 2xy) + \dots$$

$$- 1 - \frac{L}{2r^2} (x-y - \frac{1}{2}L) - \frac{3L^2}{8r^4} (x^2 + y^2 - 2xy) + \dots \left. \right\} \Rightarrow \phi(\vec{r}) = Q \frac{3L^2 xy}{r^5}$$

$$\phi(\vec{r}) = Q \frac{3L^2 xy}{r^5}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \left(-\frac{3QL^2 y}{r^5} \left(1 - 5 \frac{x^2}{r^2} \right), -\frac{3QL^2 x}{r^5} \left(1 - 5 \frac{y^2}{r^2} \right), +\frac{15QL^2 xyz}{r^7} \right)$$

2.- Considerar un campo eléctrico $\vec{E} = (2x\hat{i} + 3y\hat{j}) \cdot 10^3 \text{ Newton/Coulombio}$ ¿Cuál es el flujo de este campo a través de un tubo de 10 cm de lado y que está situado en la región del espacio delimitada por las partes positivas de los ejes coordenados, vistas paralelas a los ejes y con un recte en el origen



1) Cara inferior $\hat{n} = (0, 0, -1)$, $\phi_1 = 0$

2) Cara superior $\hat{n} = (0, 0, +1)$, $\phi_2 = 0$

3) Cara derecha $\hat{n} = (0, +1, 0)$, $\hat{n} \cdot \vec{E} = 3y = 3L$

$$\phi_3 = 3L^3$$

4) Cara izquierda $\hat{n} = (0, -1, 0)$, $\hat{n} \cdot \vec{E} = -3y = 0$

$$\phi_4 = 0$$

35/003

5) Para frontal $\hat{n} = (1, 0, 0)$, $\hat{n} \cdot \vec{E} = 2x = 2L$ $\phi_5 = 2L^3$

6) Para posterior $\hat{n} = (-1, 0, 0)$ $\hat{n} \cdot \vec{E} = -2x = 0$ $\phi_6 = 0$

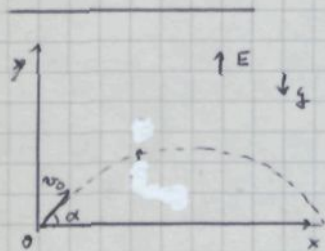
$$\phi = 5L^3 = 5(0.1)^3 = 0.005 \frac{\text{New. m}^2}{\text{Coul}^2}$$

3.- Medidas cuidadosas del campo eléctrico en la superficie de una caja negra indican que el flujo saliente neto a través de la superficie de la caja es $\Phi = 6.0 \times 10^3 \text{ N.m}^2/\text{C}$. 1) ¿Cuál es la carga neta en la caja? 2) Si $\Phi = 0$ ¿podría afirmarse que no hay ninguna carga en su interior?

$$\Phi = \frac{1}{\epsilon_0} Q \Rightarrow Q = \epsilon_0 \Phi = \frac{1}{4\pi \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2}} 6.0 \times 10^3 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}} = 5.31 \times 10^{-8} \text{ C}$$

Sólo puede afirmarse que hay la misma cantidad de carga positiva y negativa

4.- Se lanza un electrón con una velocidad inicial de $3.0 \times 10^5 \text{ m.s}^{-1}$, formando un ángulo ascendente de $\alpha = 30^\circ$ respecto a la horizontal. Existe un campo eléctrico vertical hacia arriba de 10^5 N/C . 1) ¿Cuál es el punto más alto alcanzado por el electrón? 2) ¿Cuánto tiempo tarda en llegar a esta altura? 3) ¿Cuál es su altura?



$$m \frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = -mg - |e|E$$

$$g = 9.81 \text{ m.s}^{-2}$$

$$x(t) = (v_0 \cos \alpha) t$$

$$y(t) = (v_0 \sin \alpha) t - \frac{1}{2} \left(g + \frac{|e|E}{m} \right) t^2$$

$$\frac{|e|E}{m} = \frac{1.6021892 \times 10^{-19} \text{ C}}{9.109534 \times 10^{-31} \text{ kg}} 10^5 \frac{\text{N}}{\text{C}} = 1.759 \times 10^{16} \text{ m.s}^{-2}$$

El efecto gravitacional es despreciable

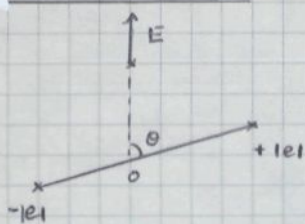
$$v_y(t) = v_0 \sin \alpha - \frac{|e|E}{m} t, \quad v_y = 0 \quad \text{para} \quad t = \frac{m}{|e|E} v_0 \sin \alpha. \quad \text{El valor de } y \text{ correspondiente}$$

$$y = \frac{1}{2} \frac{m}{|e|E} (v_0 \sin \alpha)^2 = 6.40 \times 10^{-7} \text{ m}$$

$$\text{El alcance es } x = 2(v_0 \cos \alpha) t = \frac{m}{|e|E} v_0^2 \sin 2\alpha = 4.43 \times 10^{-6} \text{ m}.$$

5.- Un dipolo de momento $d = 5.0 |e| \text{ \AA}$, donde e es la carga del electrón, se coloca en el interior de un campo eléctrico uniforme de voltaje $E = 4.0 \times 10^4 \text{ N/C}$. ¿Cuál

es el valor del momento ejercido sobre el dipolo cuando i) el dipolo es paralelo al campo eléctrico, ii) El dipolo es perpendicular al campo eléctrico, iii) El dipolo forma un ángulo de 30° con el campo eléctrico? ¿Cuál es la fórmula general.



$$\vec{M} = -|e|\vec{E} \times \frac{\vec{d}}{2|e|} + |e|\vec{E} \times \left(-\frac{\vec{d}}{2|e|}\right) = -\vec{E} \times \vec{d}$$

i) $\vec{M} = 0$

ii) $\vec{M} = (\vec{E}d, 0, 0)$ si $\vec{E} \parallel Oz$ o $\vec{d} \parallel Oy$ $Ed = 3.20 \times 10^{-24} \text{ J}$

iii) $|\vec{M}| = Ed \sin \theta = 1.60 \times 10^{-24} \text{ J}$

6.- Dos cargas positivas iguales Q están en los puntos de coordenadas $(0, a, 0)$ y $(0, -a, 0)$.

1) Calcular el campo eléctrico en los puntos $(x, 0, 0)$ y estudiar su comportamiento para $|x| \gg a$ y $|x| \ll a$. 2) Discutir el resultado obtenido para $|x| \gg a$.

$$\phi(x, 0, 0) = Q \left\{ \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} \right\} \Rightarrow \phi(x, 0, 0) = \frac{2Q}{(x^2 + a^2)^{1/2}}$$

$$\vec{E}(x, 0, 0) = E \hat{x} \quad E = \frac{2Qx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

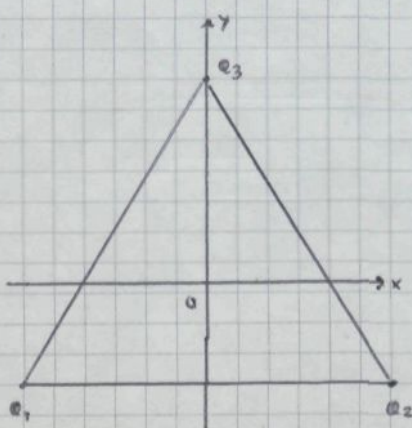
$$|x| \ll a \quad E = \frac{2Qx}{a^3}$$

$$|x| \gg a \quad E = \frac{2Q}{x^2}$$

Era de esperar, pues las dos cargas aparecen como una sola carga, de valor $2Q$, en el origen.

7.- Consideremos tres cargas eléctricas Q_1, Q_2, Q_3 situadas en los vértices de un triángulo equilátero $(-L/2, -\sqrt{3}L/6, 0)$, $(L/2, -\sqrt{3}L/6, 0)$ y $(0, \sqrt{3}L/3, 0)$ respectivamente.

Determinar el potencial $\phi(\vec{r})$ en los distintos puntos del espacio. ¿Es posible elegir Q_1, Q_2, Q_3 de forma que $\phi(r) \sim L^2/r^2$ para $r \gg L$?



$$\phi(\vec{r}) = Q_1 \left\{ (x + L/2)^2 + (y + \frac{\sqrt{3}L}{6})^2 + z^2 \right\}^{-1/2}$$

$$+ Q_2 \left\{ (x - L/2)^2 + (y + \frac{\sqrt{3}L}{6})^2 + z^2 \right\}^{-1/2}$$

$$+ Q_3 \left\{ x^2 + (y - \frac{\sqrt{3}L}{3})^2 + z^2 \right\}^{-1/2}$$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{Q_1}{r} \left\{ 1 + \frac{Lx}{r^2} + \frac{Ly}{\sqrt{3}r^2} + \frac{L^2}{3r^2} \right\}^{-1/2}$$

$$+ \frac{Q_2}{r} \left\{ 1 - \frac{Lx}{r^2} + \frac{Ly}{\sqrt{3}r^2} + \frac{L^2}{3r^2} \right\}^{-1/2}$$

$$+ \frac{Q_3}{r} \left\{ 1 - \frac{2Ly}{\sqrt{3}r^2} + \frac{L^2}{3r^2} \right\}^{-1/2}$$

35/003

$$(1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \dots$$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{Q_1}{r} \left\{ 1 - \frac{Lx}{2r^2} - \frac{Ly}{2\sqrt{3}r^2} \right\} + \frac{Q_2}{r} \left\{ 1 + \frac{Lx}{2r^2} - \frac{Ly}{2\sqrt{3}r^2} \right\} + \frac{Q_3}{r} \left\{ 1 + \frac{Ly}{\sqrt{3}r^2} \right\} + O(L^2/r^3)$$

Entonces

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0, \quad -Q_1 + Q_2 = 0, \quad -Q_1 - Q_2 + 2Q_3 = 0$$

que no tiene solución, salvo $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 0$.

7.- Determinar en todos los puntos del espacio el campo eléctrico creado por la distribución de carga

$$\rho(r) = A(R-r)e^{-r/a} \theta(R-r), \quad A, a \geq 0$$

$$4\pi r^2 E(r) = 4\pi \int_0^r dr r^2 A(R-r)e^{-r/a} \theta(R-r)$$

$$E(r) = \frac{4\pi}{r^2} \int_0^r dr A(R-r)r^2 e^{-r/a} \theta(R-r)$$

$$E(r) = \frac{4\pi A}{r^2} \left\{ R \int_0^r dr r^2 e^{-r/a} \theta(R-r) - \int_0^r dr r^3 e^{-r/a} \theta(R-r) \right\}$$

si $r < R$

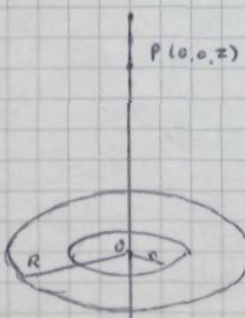
$$E(r) = \frac{4\pi A}{r^2} \left\{ R \left[-\frac{1}{a}r^2 + 2a^2r + 2a^3 \right] e^{-r/a} \Big|_0^r - \left[-\frac{1}{a}r^3 + 3a^2r^2 + 6a^3r + 6a^4 \right] e^{-r/a} \Big|_0^r \right\}$$

$$E(r) = \frac{4\pi A}{r^2} \left\{ 2a^3R - 6a^4 + \left[ar^3 + 3a^2r^2 + 6a^3r + 6a^4 - aRr^2 - 2a^2Rr - 2a^3R \right] e^{-r/a} \right\}$$

si $r > R$

$$E(r) = \frac{4\pi A}{r^2} \left\{ 2a^3R - 6a^4 + \left[a^2R^2 + 4a^3R + 6a^4 \right] e^{-R/a} \right\}$$

9.- Calcular el potencial creado por un disco homogéneo de carga Q y radio R en los puntos del eje



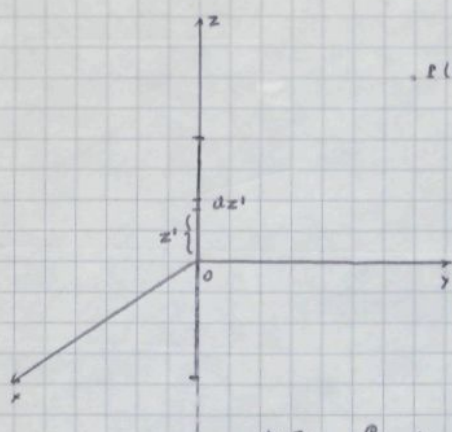
Densidad de carga $\sigma = \frac{Q}{\pi R^2}$

$$d\phi(z) = \frac{2\pi r dr \sigma}{(z^2 + r^2)^{1/2}}$$

$$\phi(z) = \frac{2Q}{R^2} \int_0^R dr \frac{r}{(z^2 + r^2)^{1/2}}$$

$$\phi(z) = \frac{2Q}{R^2} \left\{ (R^2 + z^2)^{1/2} - z \right\}$$

10 - Una varilla muy delgada de longitud L se halla cargada homogéneamente con una carga total Q . Hallar el potencial que crea



$$\phi(x, y, z) = \int_{-L/2}^{+L/2} dz' \frac{1}{[x^2 + y^2 + (z - z')^2]^{1/2}}, \quad \rho = \frac{Q}{L}$$

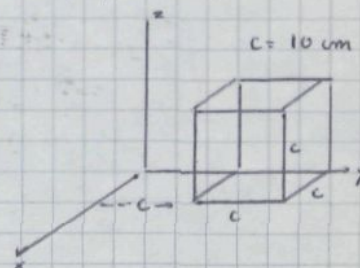
$$\phi(\vec{r}) = \frac{Q}{L} \int_{-L/2}^{+L/2} dz' \frac{1}{[z'^2 - 2zz' + r^2]^{1/2}} = \frac{Q}{L} \ln \left(z' - z + \sqrt{z'^2 - 2zz' + r^2} \right) \Big|_{-L/2}^{L/2}$$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{Q}{L} \ln \left(\frac{[L^2 - 4Lz + 4r^2]^{1/2} + L - 2z}{[L^2 + 4Lz + 4r^2]^{1/2} - L - 2z} \right)$$

11 - Las componentes de un campo eléctrico son

$$E_x = b x^{1/2}, \quad E_y = a e^{-y}, \quad E_z = 0 \quad a = 600 \text{ Volt/m}, \quad b = 800 \text{ Volt/m}^{3/2}$$

donde x e y deben darse en metros. Calcular 1) El flujo Φ que atraviesa el cubo de la figura. 2) La carga total dentro del cubo. 3) La energía electrostática almacenada en su interior.



1) Cara superior: $\hat{n} = (0, 0, 1) \quad \Phi = 0$

Cara inferior: $\hat{n} = (0, 0, -1) \quad \Phi = 0$

Cara izquierda: $\hat{n} = (-1, 0, 0) \quad \vec{E} \cdot \hat{n} = -a e^{-y}, \quad \Phi = -a c^2 e^{-c}$

Cara derecha: $\hat{n} = (1, 0, 0) \quad \vec{E} \cdot \hat{n} = +a e^{-y}, \quad \Phi = +a c^2 e^{-2c}$

Cara delantera: $\hat{n} = (1, 0, 0) \quad \vec{E} \cdot \hat{n} = b x^{1/2}, \quad \Phi = b c^{5/2}$

Cara posterior: $\hat{n} = (-1, 0, 0) \quad \vec{E} \cdot \hat{n} = -b x^{1/2}, \quad \Phi = 0$

$$\Phi = c^2 [b c^{1/2} - a (e^{-c} - e^{-2c})]$$

$$\Phi = 0.1^2 \text{ m}^2 \left\{ 800 \frac{\text{V}}{\text{m}^{3/2}} 0.1^{1/2} \text{ m}^{1/2} - 600 \frac{\text{V}}{\text{m}} (e^{-0.1} - e^{-0.2}) \right\} = 2.013182 \text{ V}\cdot\text{m}$$

2) $\Phi = \frac{4\pi}{4\pi\epsilon_0} Q, \quad Q = \frac{4\pi\epsilon_0}{4\pi} \Phi \quad 1 \text{ V}\cdot\text{m} = 1 \text{ Joule} / 1 \text{ Coulomb}$

$$Q = \frac{1}{4\pi} \frac{C^2}{(2.99792548)^2 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2} 2.013182 \frac{\text{J}\cdot\text{m}}{\text{C}} = 1.782508 \times 10^{-11} \text{ C}$$

3) $\vec{E}^2 = b^2 x + a^2 e^{-2y}$

35/003

$$\int_V d^3x \vec{E}^2 = \int_0^c dx \int_0^{2c} dy \int_0^c dz [b^2 x^2 + a^2 e^{-2y}] = c^2 b^2 \int_0^c dx x^2 + c^2 a^2 \int_0^{2c} dy e^{-2y}$$

$$= \frac{1}{2} c^2 b^2 c^2 + c^2 a^2 \frac{1}{2} [e^{-4c} - e^{-2c}] = \frac{1}{2} c^2 [b^2 c^2 + a^2 (e^{-2c} - e^{-4c})]$$

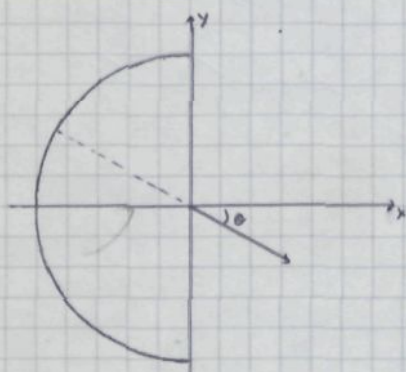
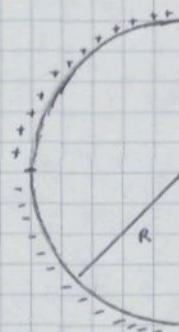
$$= \frac{1}{2} (0.1)^2 \text{ m}^2 \left[800^2 \frac{\text{V}^2}{\text{m}^2} (0.1)^2 \text{ m}^2 + 600^2 \frac{\text{V}^2}{\text{m}^2} (e^{-0.2} - e^{-0.4}) \right] = 299.1393 \text{ V}^2 \text{ m}$$

y la energía es

$$U = \frac{4\pi\epsilon_0}{8\pi} \int_V d^3x \vec{E}^2 = \frac{1}{8\pi} 299.1393 \text{ V}^2 \text{ m} \frac{\text{Coul}^2}{(2.99792458)^2 \times 10^9 \text{ New. m}^2}$$

$$U = 1.324 \times 10^{-9} \text{ Joule}$$

12. Una varilla delgada de material está doblada formando un semicírculo de radio R . En la mitad superior de este semicírculo se encuentra distribuida uniformemente una carga $+Q$ y en la mitad inferior del mismo modo una $-Q$. Calcular el campo eléctrico en el centro del semicírculo.



Densidad $\rho = \frac{2Q}{\pi R}$

$$dE_x^{(+)} = \frac{dQ}{R^2} \cos \theta = \frac{R \rho}{R^2} \cos \theta d\theta = \frac{\rho}{R} \cos \theta d\theta$$

$$dE_y^{(+)} = -\frac{dQ}{R^2} \sin \theta = -\frac{\rho}{R} \sin \theta d\theta$$

$$E_x^{(+)} = \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{\rho}{R} \cos \theta = E_x^{(+)} = \frac{\rho}{R} \Rightarrow E_x^{(+)} = \frac{2Q}{\pi R^2}$$

Por simetría

$$E_x^{(+)} = \frac{2Q}{\pi R^2}$$

$$E_y^{(+)} = -\frac{2Q}{\pi R^2}$$

$$E_x^{(-)} = -\frac{2Q}{\pi R^2}$$

$$E_y^{(-)} = -\frac{2Q}{\pi R^2}$$

$$\vec{E} = -\frac{4Q}{\pi R^2} \hat{j}$$

13. Calcular la energía potencial de un ion positivo en la red bidimensional infinita dada en la figura.



Indiquemos por "a" la constante de la red y por $\pm e$ el valor de las cargas de los iones.

Entonces

$$V = \frac{e^2}{a} \sum_{m=1}^{\infty} V_m$$

donde V_m es la energía potencial ($|Q|=4=1$) de las cargas del cuadrado que posea por el punto de coordenadas $(m,0)$. Entonces

$$V_1 = -4 + \frac{4}{12} = -1.171 \quad 572 \quad 875$$

$$V_2 = +\frac{4}{2} + \frac{4}{24} + 8\left(-\frac{1}{15}\right) = -0.163 \quad 495 \quad 202$$

$$V_3 = -\frac{4}{3} + \frac{4}{36} + 8\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{18}\right) = -0.079 \quad 502 \quad 948$$

$$V_4 = +\frac{4}{4} + \frac{4}{48} + 8\left(-\frac{1}{12} + \frac{1}{20} - \frac{1}{24}\right) = -0.044 \quad 323 \quad 837$$

$$V_5 = -\frac{4}{5} + \frac{4}{60} + 8\left(\frac{1}{20} - \frac{1}{30} + \frac{1}{60} - \frac{1}{80}\right) = -0.028 \quad 349 \quad 614$$

$$\sum_{m=1}^5 V_m = -1.487 \quad 244 \quad 476$$

Esta suma es extraordinariamente en su convergencia. Escribimos

$$\sum_{m=1}^{\infty} V_m = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ V_m + \frac{1}{12m^2} \right\} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{12m^2} = -\frac{\pi^2}{612} + \sum_{m=1}^{\infty} \hat{V}_m$$

$$\hat{V}_m = V_m + \frac{1}{12m^2}$$

Entonces

$$\hat{V}_1 = -0.464 \quad 466 \quad 094$$

$$\hat{V}_6 = -0.000 \quad 032 \quad 026$$

$$\hat{V}_2 = +0.013 \quad 281 \quad 493$$

$$\hat{V}_7 = -0.000 \quad 017 \quad 600$$

$$\hat{V}_3 = -0.000 \quad 935 \quad 528$$

$$\hat{V}_8 = -0.000 \quad 010 \quad 429$$

$$\hat{V}_4 = -0.000 \quad 129 \quad 663$$

$$\hat{V}_9 = -0.000 \quad 006 \quad 557$$

$$\hat{V}_5 = -0.000 \quad 065 \quad 343$$

$$\hat{V}_{10} = -0.000 \quad 004 \quad 324$$

Si

$$S_N = -\frac{\pi^2}{612} + \sum_{m=1}^N \hat{V}_m$$

entonces

$$S_2 = -1.614 \quad 328 \quad 635$$

$$S_{10} = -1.615 \quad 530 \quad 105$$

35/003

Mediante un simple programa se puede calcular

$$\hat{V}(M, N) = \sum_{m=M}^N \hat{V}_m$$

$$\hat{V}(3, 10) = -0.000201470927$$

$$\hat{V}(11, 20) = -0.000010919371$$

$$\hat{V}(21, 30) = -0.000001184517$$

$$\hat{V}(31, 40) = -0.000000296691$$

$$\hat{V}(41, 50) = -0.000000107207$$

$$\hat{V}(51, 60) = -0.000000047823$$

$$\hat{V}(61, 70) = -0.000000024468$$

$$\hat{V}(71, 80) = -0.000000013797$$

$$\hat{V}(81, 90) = -0.000000008368$$

$$\hat{V}(91, 100) = -0.000000005367$$

$$S_{100} = -1.615542614$$

y mejorando ligeramente la serie

$$V = -\frac{\omega^2}{a} 1.615542628$$

14. Comparar la atracción gravitatoria y la repulsión electrostática entre dos protones

$$M_p = 1.6726485(86) \times 10^{-24} \text{ g}$$

$$|e| = 4.803252(14) \times 10^{-10} \text{ esu}$$

$$G = 6.6720(41) \times 10^{-8} \text{ c.g.s.}$$

$$\frac{|F_g|}{|F_{el}|} = G \frac{M_p^2}{r^2} \frac{1}{e^2} = \frac{G M_p^2}{e^2}$$

$$\approx \frac{|F_g|}{|F_{el}|} = 8.0909(50) \times 10^{-37}$$

15. Deducir el valor de la aceleración de la gravedad en un punto de la Tierra, suponiendo conocidos su masa, radio y el valor de G.

$$M_T = 5.977 \times 10^{27} \text{ g}$$

$$G = 6.6720 \times 10^{-8} \text{ cgs}$$

$$R_T = 6.40 \times 10^8 \text{ cm}$$

$$g = G \frac{M_T}{R_T^2} \quad \Rightarrow \quad g = 977 \text{ cm s}^{-2}$$

16.- Si se sitúa una carga eléctrica en el origen, el potencial escalar debe cumplir

$$\Delta \phi(r) = 0$$

$$\vec{r} \neq 0$$

Calcular $\phi(r)$ en un espacio Euclideo de D dimensiones

Se debe resolver

$$\frac{d^2 \phi(r)}{dr^2} + \frac{(D-1)}{r} \frac{d\phi(r)}{dr} = 0$$

$$\text{Si } u(r) \equiv \frac{d\phi(r)}{dr} \Rightarrow \frac{du(r)}{dr} = -\frac{(D-1)}{r} u(r) \Rightarrow \frac{du(r)}{u(r)} = -\frac{(D-1)}{r} \frac{dr}{r}$$

$$D=1 : u(r) = A \quad \phi(r) = Ar + B$$

$$D \geq 2 : u(r) = A r^{-(D-1)}$$

$$D=2 : \phi(r) = A \ln r + B$$

$$D \geq 3 : \phi(r) = -\frac{A}{D-2} \frac{1}{r^{D-2}} + B$$

Tomemos pues

$$\phi(r) = Ar + B \quad D=1$$

$$\phi(r) = A \ln r + B \quad D=2$$

$$\phi(r) = \frac{A}{r^{D-2}} + B \quad D \geq 3$$

Así se suele definir el potencial electrostático para distintos valores de D .

17. Una esfera conductora fija de radio R y carga $|Q|$ atrae un cuerpo de masa m y carga $-|q|$. ¿Cuál es la velocidad del cuerpo a una distancia $r > R$ del centro de la esfera si parte del reposo a una distancia muy grande?

$$\frac{1}{2} m v^2(r) = \frac{|Q||q|}{r} > 0$$

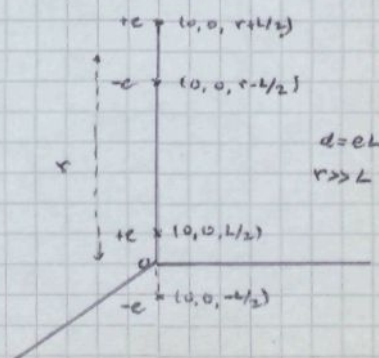
$$v(r) = \sqrt{\frac{2|Q||q|}{mr}}$$

18. Un dipolo eléctrico cuyo momento es de magnitud d está alineado con otro dipolo idéntico. Determinar la magnitud de la fuerza entre los dos dipolos, suponiendo que están muy alejados el uno del otro.

El dipolo centrado en el origen sea un campo

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{1}{r^3} \vec{d} + 3 \frac{(\vec{d} \cdot \vec{r})}{r^5} \vec{r}$$

que en los puntos del eje Oz está según este eje y vale en un punto de coordenadas $(0, 0, z)$



35/003

$$E(z) = -\frac{1}{z^3} d + \frac{2d}{z^3} = \frac{2d}{z^3}$$

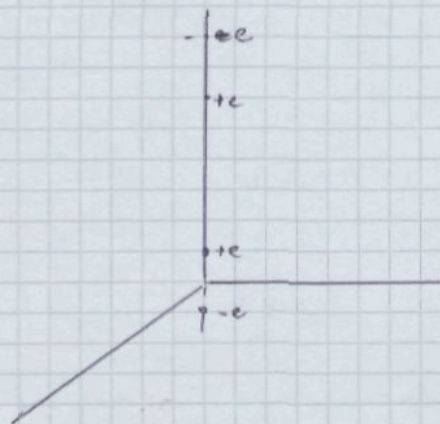
La fuerza segun D2 es

$$F = -\frac{2de}{(r-L/2)^3} + \frac{2de}{(r+L/2)^3} = \frac{2de}{r^3} \left(-\frac{1}{(1-L/2r)^3} + \frac{1}{(1+L/2r)^3} \right) =$$

$$= \frac{2de}{r^3} \left(-1 - \frac{3}{2} \frac{L}{r} + 1 - \frac{3L}{2r} \right) = -\frac{6Lde}{r^4}$$

$$F = -\frac{6d^2}{r^4}$$

Por otra parte si:



$$F = +\frac{2de}{(r-L/2)^3} - \frac{2de}{(r+L/2)^3} = \frac{2de}{r^3} \left(\frac{1}{(1-L/2r)^3} - \frac{1}{(1+L/2r)^3} \right) =$$

$$= \frac{2de}{r^3} \left(1 + 3 \frac{L}{2r} - 1 + 3 \frac{L}{2r} \right) = \frac{2de}{r^3} \frac{6L}{2r}$$

$$F = +\frac{6d^2}{r^4}$$

17. Consideremos un gas perfecto de electrones, es decir un conjunto de N electrones encerrados en un volumen V y en el que despreciamos la interacción. Debido al principio de exclusión de Pauli se puede probar que en el volumen $d^3x d^3p / (2\pi\hbar)^3$ caben solo dos electrones (uno en cada estado de spin). En el estado de menor energía tienden a llenarse los momentos más bajos, es decir todos los estados con $p \leq p_F$ están ocupados y los restantes libres. 1) Hallar el momento de Fermi p_F en función de $n \equiv N/V$. 2) Determinar la energía media por electrón.

$$N = \int_V d^3x \int_{|p| \leq p_F} d^3p \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{2V}{(2\pi\hbar)^3} \int_{|p| \leq p_F} d^3p = \frac{2V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{4\pi}{3} p_F^3$$

$$p_F = (3n^2 \hbar^3 m)^{1/3}$$

$$\langle E \rangle = \frac{1}{N} \int_V d^3x \int_{|p| \leq p_F} d^3p \frac{p^2}{2m_0} \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{1}{m} \frac{2}{2m_e (2\pi\hbar)^3} 4\pi \int_0^{p_F} p^4 dp = \frac{1}{m} \frac{2}{2m_e (2\pi\hbar)^3} 4\pi \frac{1}{5} p_F^5$$

$$= \frac{1}{10 n^2} \frac{1}{m m_e \hbar^3} p_F^5$$

$$\langle E \rangle = \frac{3^{5/3} n^{4/3}}{10} \frac{\hbar^2}{m_e} m^{2/3}$$

$$p_F = (3n^2 \hbar^3 m)^{1/3} \Rightarrow \langle E \rangle = \frac{3^{5/3} n^{4/3}}{10} \frac{\hbar^2}{m_e} m^{2/3}$$

28. En un cuerpo pequeño, en el que las fuerzas gravitacionales son despreciables, la energía media calculada en el problema anterior debe venir compensada por la energía electrostática de atracción entre los electrones y los núcleos. Estas últimas son del orden de $e^2 n^{1/3}$ ¿cual es la densidad típica?

La densidad típica de electrones es $\langle E \rangle \simeq e^2 n^{1/3} \Rightarrow \frac{\hbar^2}{m_e} n^{2/3} \simeq e^2 n^{1/3}$

$$n \simeq \frac{e^6 m_e^3}{\hbar^6} = \frac{c^3 m_e^3 \alpha^3}{\hbar^3} \quad \text{y por tanto la densidad es}$$

$$\rho \simeq m_p \left(\frac{c m_e}{\hbar} \right)^3 \alpha^3$$

$$\rho \simeq 2.9 \times 10^7 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \alpha^3 \Rightarrow \rho \simeq 11 \text{ g cm}^{-3}$$

35/003

34. Una nube de gas hidrógeno se contrae debido a la atracción gravitacional y se puede probar que esta alcanza una temperatura máxima de

$$k_B T_{\max} \approx m_e c^2 \left(\frac{N}{N_0} \right)^{4/3}$$

donde m_e es la masa del electrón, N es el número de protones en la nube y $N_0 \equiv$

$\approx \alpha_6^{-3/2} = 2.2042(20) \times 10^{57}$. Para que se puedan iniciar procesos de fusión es necesario

que la temperatura del gas sea $k_B T \approx 5 \cdot 10^{-3} m_e c^2$. Calcular la masa que debe tener la

nube para que de lugar a una estrella. Comparar esta masa con la del Sol.

Para que se forme una estrella, es necesario para que tengan lugar procesos de fusión,

$N \geq N_{\min}$ tal que

$$m_e c^2 \left(\frac{N_{\min}}{N_0} \right)^{4/3} = 5 \cdot 10^{-3} m_e c^2$$

$$N_{\min} = 4.1 \times 10^{55}$$

y su masa es

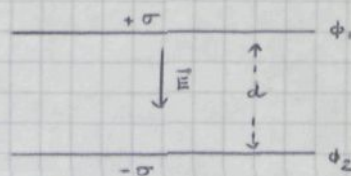
$$M_{\min} = N_{\min} m_p \Rightarrow M_{\min} = 7 \times 10^{31} \text{ g.}$$

y en $M_\odot$

$$M_{\min} = \frac{1}{30} M_\odot$$

CONDENSADORES

Consideremos dos placas metálicas separadas por una distancia pequeña comparada con su tamaño. Supongamos que sobre las placas se han distribuido cargas iguales y opuestas. Sea Q la carga total de la placa positiva, entonces la densidad superficial de carga es $\sigma = Q/A$, donde A es el área de una de las placas. El campo entre las dos placas es $E = 4\pi\sigma$ y cero al exterior del sistema. La diferencia de potencial entre las dos placas es:



$$\phi = \phi_1 - \phi_2 = \text{Voltaje} = \text{Trabajo para llevar la unidad de carga positiva de una armadura (placa) a la otra} = Ed = 4\pi\sigma d = \frac{4\pi Q}{A} d \quad (1)$$

Notar que $\phi \propto Q$, entonces definimos

$$\text{Capacidad de este condensador } C \equiv \frac{Q}{\phi} \quad [C] = L \quad (2)$$

$$\text{Condensador plano } C = \frac{A}{4\pi d} \quad (3)$$

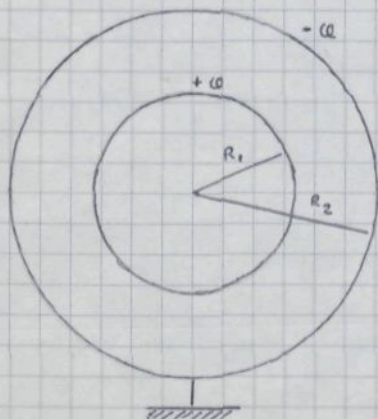
$$\text{Unidades: En el sistema M.K.S. resulta } C \equiv \epsilon_0 \frac{A}{d} \quad (4)$$

$$1 \text{ faradio} = \frac{1 \text{ Coulomb}}{1 \text{ Volt.}}$$

$$A: 1 \text{ m}^2, \quad d: 1 \times 10^{-3} \text{ m} \quad C = \frac{1}{4\pi \times 9 \times 10^{-9}} \frac{\text{Coul}^2}{\text{New. m}^2} \frac{1 \text{ m}^2}{1 \times 10^{-3} \text{ m}} = 8.8 \times 10^{-9} \text{ faradios}$$

Es una unidad muy grande.

Condensador esférico: Cuando se comunica una carga $+Q$ a la esfera interna aparece otro igual y opuesta en la exterior.



$$\phi = \int_{R_1}^{R_2} d\vec{r} \cdot \vec{E} = \int_{R_1}^{R_2} dr \frac{Q}{r^2} = -\frac{Q}{r} \Big|_{R_1}^{R_2} \Rightarrow \phi = Q \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$C = \frac{Q}{\phi} \Rightarrow C = \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \quad (5)$$

$$\text{Si } R_2 \gg R_1 \Rightarrow C = R_1 \quad (6)$$

y esta última cantidad se denomina capacidad de una esfera.

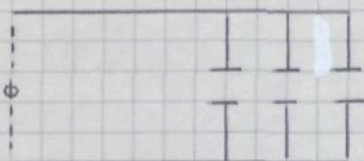
Condensador cilíndrico: Dos cilindros coaxiales de longitud L y radios $R_1 < R_2$, con $L \gg R_1, R_2$.

$$\phi = \int_{R_1}^{R_2} d\vec{r} \cdot \vec{E} = \left| \begin{array}{l} \text{ Gauss } 2\pi r L E = 4\pi Q \\ E = \frac{2Q}{LE} \end{array} \right| = \frac{2Q}{L} \int_{R_1}^{R_2} dr \frac{1}{r} = \frac{2Q}{L} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$C = \frac{L}{2} \frac{1}{\ln(R_2/R_1)}$$

Asociación de condensadores

i) En paralelo

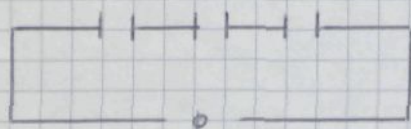


$$Q_i = \Phi C_i$$

$$Q = \sum_i Q_i = \Phi \sum_i C_i = \Phi C$$

$$C = \sum_i C_i \quad (8)$$

ii) En serie



$$\Phi_i = \frac{Q}{C_i}$$

$$\Phi = \sum_i \Phi_i = Q \sum_i \frac{1}{C_i} = \frac{Q}{C}$$

$$\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i} \quad (9)$$

Energía de un condensador: Supongamos que en un instante dado sea Φ la diferencia de potencial entre las dos placas de un condensador y Q la carga de cada una de ellas. Si hacemos pasar la carga a un valor $Q+dQ$ necesitaremos realizar un trabajo $dW = \Phi dQ$. La energía necesaria para cargar un condensador es pues

$$W = \int_0^Q \Phi dQ = \frac{1}{C} \int_0^Q Q dQ = \frac{1}{2C} Q^2 = \frac{1}{2} C \Phi^2 = \frac{1}{2} Q \Phi \quad (10)$$

Consideremos un condensador plano

$$W = \frac{1}{2} E \Phi^2 = \frac{1}{2} \frac{A}{4\pi d} E^2 d^2 = (Ad) \left(\frac{1}{8\pi} E^2 \right) \quad (11)$$

Como (Ad) es el volumen del condensador, la energía almacenada en él mismo es $\bar{E}^2/8\pi$, que es la expresión deducida antes.

Dielectricos: Un material no conductor, como por ejemplo el agua o la madera, se denomina dieléctrico. Faraday descubrió que cuando el espacio entre las dos armaduras de un condensador se llena de un dieléctrico, la capacidad del mismo aumenta. Supongamos que un condensador de capacidad C_0 se conecta a una pila que establece entre sus armaduras una diferencia de potencial Φ_0 y les da una carga $Q_0 = C_0 \Phi_0$.

i) Si a continuación se desconecta la pila y se inserta un dieléctrico entre las dos armaduras, llenando todo el espacio entre ellas, la diferencia de potencial se observa que disminuye a un valor $\Phi = \Phi_0 / \epsilon$, $\epsilon > 1$, y como la carga de las armaduras no cambia la capacidad aumenta a $C = \epsilon C_0$. La constante ϵ , característica del dieléctrico, se denomina constante dieléctrica.

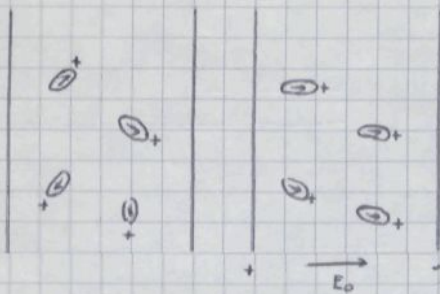
ii) Si se inserta el dieléctrico sin desconectar la pila ésta seguirá suministrando más

carga para mantener la misma diferencia de potencial $Q = \epsilon Q_0$ y por tanto $C = \epsilon C_0$.

Campo eléctrico. Como $\phi \propto E_0$ se tiene que

$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon} \vec{E}_0$$

(1)



Se puede entender este resultado en términos de la polarización molecular del dieléctrico. Si las moléculas del dieléctrico son polares, es decir, presentan momentos dipolares permanentes, éstos momentos están originalmente distribuidos al azar. En presencia del campo existente entre las placas estos momentos dipolares experimentan la acción

de un par y tienden a alinearse en la dirección del campo. Los dipolos eléctricos alineados producen un campo eléctrico adicional cuyo sentido es opuesto al del campo original; el campo original $\vec{E}_0$ se reduce así a un valor $\vec{E} = \vec{E}_0 / \epsilon$. Incluso en el caso en que las moléculas del dieléctrico no sean polares, aparecen en ellas momentos dipolares inducidos que, en mismo grado, producen un efecto análogo.

Valores de ϵ : Algunos valores típicos de ϵ son

Aire $\epsilon = 1.00059$

Vidrio (pyrex) $\epsilon = 5.6$

Papelera $\epsilon = 2.3$

Papelina $\epsilon = 7.$

Agua $\epsilon = 80.$

El efecto del dieléctrico es doble: i) Aumenta la capacidad del condensador ii) Aumenta la resistencia de ruptura. En el aire si se establece una diferencia de potencial mayor que 3 kV/mm el aire se ioniza y conduce y esto pone un límite a la diferencia de potencial entre las dos placas. En vidrio, por ejemplo, esta diferencia de potencial es de 14 kV/mm.

1. - Un condensador de láminas plano-paralelas de área A y separación d se carga hasta una diferencia de potencial ϕ y luego se desconecta de la fuente de carga. Las placas se separan entonces hasta que su distancia final es $2d$. En función de A , d y ϕ hallar las expresiones que nos dan: 1) la nueva capacidad. 2) la nueva diferencia de potencial. 3) la nueva energía almacenada. 4) ¿cuánto trabajo se necesita para variar la separación de las placas desde d hasta $2d$?

Indiquemos por primas las nuevas cantidades $A' = A$, $d' = 2d$, $Q' = Q$

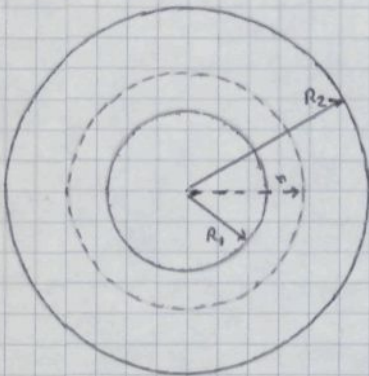
$$1) \quad C = \frac{A}{4\pi d}, \quad C' = \frac{A'}{4\pi d'} = \frac{A}{8\pi d} = \frac{1}{2} C$$

$$2) \quad \phi = \frac{Q}{C}, \quad \phi' = \frac{Q'}{C'} = 2 \frac{Q}{C} = 2\phi, \quad \phi' = \frac{8\pi d Q}{A}$$

$$3) \quad W = Ad \frac{1}{8\pi} E^2 = \frac{Ad}{8\pi} \frac{\phi^2}{d^2}, \quad W' = \frac{A'd' \phi'^2}{8\pi d'^2} = \frac{A 2d \phi^2 4}{8\pi 4d^2} = \frac{2Ad}{8\pi} \frac{\phi^2}{d^2} = 2W$$

$$3) \quad \Delta W = W' - W = W = \frac{Ad}{8\pi} \frac{\phi^2}{d^2}$$

2. - Dado un condensador cilíndrico de longitud L , carga Q , y radios $R_1 < R_2$, hallar el campo eléctrico en un punto cualquiera entre las dos armaduras y también la densidad de energía. Hallar la energía total almacenada en el condensador. Suponer $L \gg R_2$.



$$R_1 < r < R_2$$

$$E 2\pi r L = 4\pi 2\pi R_1 L \sigma$$

$$\sigma = \frac{Q}{2\pi R_1 L}$$

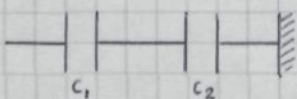
$$E = \frac{2Q}{rL}$$

$$\text{Densidad de energía} \quad dW = \frac{1}{8\pi^2} \frac{4Q^2}{r^2 L^2} = \frac{Q^2}{2\pi L^2} \frac{1}{r^2}$$

$$W = L \int_{R_1}^{R_2} dr 2\pi r \frac{Q^2}{2\pi L^2} \frac{1}{r^2} \Rightarrow W = \frac{Q^2}{L} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$\text{Notar que } W = \frac{1}{2} Q \cdot C$$

3. - Dos condensadores de capacidades $C_1 = 3\mu F$ y $C_2 = 2\mu F$ están conectados en serie. La armadura libre del más pequeño está conectada a tierra. Si la armadura libre del grande se carga a un potencial de 200V, determinen la diferencia de potencial en el pequeño y la energía almacenada en él.



$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow C = \frac{6}{5} \mu F$$

$$\phi = \frac{Q}{C} \Rightarrow Q = \phi C = 200V \frac{6}{5} \mu F = 240 \mu C$$

35/003

$$\phi_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q}{C_1} = \frac{240 \mu C}{2 \mu F} = 120 V$$

$$W = \frac{1}{2} \phi_1 Q_1 = \frac{1}{2} \phi_1 Q = \frac{1}{2} 120 V \cdot 240 \mu C = W = 1.44 \times 10^{-2} J$$

4.- Un condensador de $C_1 = 2 \mu F$ se carga con una diferencia de potencial $\phi_1 = 50 V$ y otro de $C_2 = 3 \mu F$ con $\phi_2 = 100 V$. Ambos condensadores se conectan o combinación en paralelo. ¿Que relación existe entre las energías almacenadas por ambos condensadores antes y después de la conexión? ¿Que ha ocurrido con la pérdida de energía?

Antes: $Q_1 = \phi_1 C_1 = 100 \mu C$

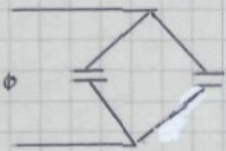
$Q_2 = \phi_2 C_2 = 300 \mu C$

$W_1 = \frac{1}{2} C_1 \phi_1^2 = 2.5 \times 10^{-3} J$

$W_2 = \frac{1}{2} C_2 \phi_2^2 = 1.5 \times 10^{-2} J$

$W = W_1 + W_2 = 1.75 \times 10^{-2} J$

Después



$C' = C_1 + C_2 = 5 \mu F$

$\phi'_1 = \phi'_2 = \phi$

$Q' = Q_1 + Q_2 = 400 \mu C$

$\phi' = \frac{Q'}{C'} = 80 V$

$W' = \frac{1}{2} 5 \mu F (80 V)^2 = 1.60 \times 10^{-2} J$

La energía perdida se convierte en calor en los cables de la conexión.

5.- Las placas de un condensador plano tienen $A = 20 \text{ cm}^2$ de superficie y están separadas una distancia $d = 0.5 \text{ cm}$. La diferencia de potencial inicial entre las placas es $\phi_0 = 2000 V$, pero cuando se introduce un dieléctrico con $\phi = 1000 V$. Calcular
1) La capacidad inicial, 2) La carga del condensador, 3) La capacidad final, 4) La constante dieléctrica

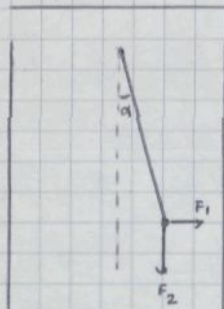
1) $C_0 = \frac{\epsilon_0 A}{d} = \frac{8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m} \cdot 20 \times 10^{-4} \text{ m}^2}{5 \times 10^{-3} \text{ m}} = C_0 = 3.537 \times 10^{-12} F$

2) $Q_0 = C_0 \phi_0 = 7.074 \times 10^{-9} C$

3) $C = \frac{Q}{\phi} = \frac{Q_0}{\phi} = 7.074 \times 10^{-12} F$

4) $\epsilon = 2$

- 6.- A um condensador plano vertical se le aplica $\phi = 3 \times 10^4 \text{ V}$ y entre las armaduras se le coloca um pêndulo eléctrico de esferilla metálica de radio $r = 1 \text{ mm}$ y densidad $\rho = 10 \text{ g cm}^{-3}$, cargado a 1740 V . Calcúlese la inclinación del pêndulo si la distancia entre las armaduras es $d = 20 \text{ cm}$.



El campo es $E = \frac{\phi}{d} = \frac{3 \times 10^4 \text{ V}}{20 \text{ cm}} = \frac{3 \times 10^4}{20} \frac{\text{V}}{\text{cm}} = 1500 \frac{\text{V}}{\text{cm}}$

la carga de la esfera es $Q = \phi r = \frac{1740}{300} 0.1 \text{ es} = 0.58 \mu\text{es}$

Massa de la esfera $M = \frac{4}{3} \pi 0.1^3 10 \text{ es} = 0.04189 \text{ es}$

$F_1 = Q E = 2.90 \text{ es}$

$\tan \alpha = \frac{F_1}{F_2} = 0.07057$

$F_2 = M g = 41.09 \text{ es}$

$\alpha = 4^\circ 2'$

- 7.- Se tiene um condensador plano formado por dos placas rectangulares de $10 \times 15 \text{ cm}$ separadas por una capa de mica de 1 mm de espesor, constante dieléctrica $\epsilon = 6$ y rigidez dieléctrica de 120 kV/cm . Calcúlese la máxima carga que admite el condensador

El máximo voltaje es $\phi_{\text{max}} = \frac{120 \text{ kV}}{\text{cm}} 0.1 \text{ cm} = 12000 \text{ V} = 50 \mu\text{es}$

$C = \epsilon \frac{S}{4\pi d} = 6 \frac{10 \times 15}{4\pi 0.1} \Rightarrow C = 716.20 \text{ cm}$

$Q_{\text{max}} = C \phi_{\text{max}}$

$Q_{\text{max}} = 2.8648 \times 10^4 \text{ es} = 9.55 \mu\text{C}$

- 8.- N gotas idénticas de mercurio de forma esférica se cargan simultaneamente al mismo potencial ϕ . Las gotas se unen y se forma una única gota. ¿Qual es el potencial de la nueva gota?

Sea r el radio de las gotas pequeñas. Entonces el radio de la gota grande R es

$\frac{4\pi}{3} R^3 = \frac{4\pi}{3} N r^3 \Rightarrow R = N^{1/3} r$

La carga de cada gota pequeña es $Q = C \phi = r \phi$

La gota grande tiene una carga $NQ = N r \phi$ y su potencial es

$\phi' = \frac{NQ}{R} = \frac{N r \phi}{N^{1/3} r} \Rightarrow \phi' = N^{2/3} \phi$

CORRIENTES.

Densidad de corriente $\vec{J}(\vec{r}; t)$. Si los extremos de un conductor se conectan a una batería, se establece un campo eléctrico en su interior. Este campo $\vec{E}$ actuará sobre los electrones libres del metal y les dará un movimiento en el sentido de $(-\vec{E})$. Lo mismo sucederá con un plasma o en cualquier medio con partículas cargadas libres. Se puede representar el flujo de carga eléctrica a través de una superficie por un vector que da la cantidad de carga que atraviesa la unidad de área en la unidad de tiempo a través de un elemento de superficie perpendicular al flujo de cargas. Si $d\vec{S}$ es un elemento cualquiera de la superficie la carga que lo atraviesa por unidad de tiempo es

$$\vec{J}(\vec{r}; t) \cdot d\vec{S} \quad (1)$$

Velocidad de las cargas: Si en un medio hay partículas libres de carga Q y su número es N por unidad de volumen, bajo la acción del campo eléctrico externo adquieren una velocidad estacionaria $\vec{v}$, pues si bien las partículas son aceleradas por $\vec{E}$ son frenadas por choques (contra los iones de la red en el metal). La cantidad de carga por unidad de volumen es $\rho = QN$ y la intensidad de corriente

$$\vec{J} = \rho \vec{v} = QN \vec{v} \quad (2)$$

Corriente eléctrica: Sea una superficie S , la corriente eléctrica que la atraviesa se define como la carga total que la atraviesa por unidad de tiempo

$$I(t) \equiv \int_S d\vec{S} \cdot \vec{J}(\vec{r}; t) \quad (3)$$

Unidades: En el sistema MKS si la carga se mide en coulomb y el tiempo en segundos, la intensidad viene dada en amperes.

Conservación de la carga eléctrica: Una de las leyes fundamentales de la Física es la de la conservación de la carga eléctrica. Veamos como puede formularse. Sea S una superficie cerrada y V el volumen en su interior, entonces

$$\int_S d\vec{S} \cdot \vec{J}(\vec{r}; t) = - \frac{dQ(t)}{dt} \quad (4)$$

y

$$Q(t) = \int_V d^3r \rho(\vec{r}; t) \quad (5)$$

Entonces

$$\int_S d\vec{S} \cdot \vec{j}(\vec{r}; t) = - \int_V d^3r \frac{\partial \rho(\vec{r}; t)}{\partial t} \Rightarrow \int_V d^3r \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}; t) = - \int_V d^3r \frac{\partial \rho(\vec{r}; t)}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}; t) + \frac{\partial \rho(\vec{r}; t)}{\partial t} = 0 \quad (\text{Ecuación de continuidad}) \quad (6)$$

Nota: Por razones históricas, en los metales se toma como dirección de $\vec{j}$ la contraria a la del movimiento de los electrones.

Resistencia: Si entre los extremos de un conductor se aplica una diferencia de potencial Φ y se observa que circula una intensidad de corriente I , entonces se define la resistencia de este conductor como

$$R = \frac{\Phi}{I}, \quad \frac{\text{Volto}}{\text{Ampero}} = \text{Ohmio } (\Omega) \quad (7)$$

R depende tanto del material del conductor como de su forma

Resistividad: Se define de forma que no dependa más que de las características del material y no de su tamaño y forma:

$$\rho = \frac{E}{j} \quad (8)$$

Consideremos una barra conductora y tomemos la relación entre R y ρ . Si la longitud es L y la barra es homogénea y de sección recta constante A , entonces se tiene $E = \Phi / L$, $j = I / A$ y

$$R = \frac{EL}{jA} \Rightarrow R = \rho \frac{L}{A} \quad \rho \text{ en } \Omega \text{m.}$$

Resistividades típicas a 20°C en Ωm

i) Conductores: $\rho_{Ag} = 1.47 \times 10^{-8}$, $\rho_{Cu} = 1.72 \times 10^{-8}$, $\rho_{Fe} = 1.0 \times 10^{-7}$

ii) Semiconductores: $\rho_{Ge} = 0.45$, $\rho_{Si} = 640$

iii) Aislantes: $\rho_{ambas} = 5 \times 10^{14}$, $\rho_S = 10^{15}$, $\rho_{vacuo} = 7.5 \times 10^{17}$

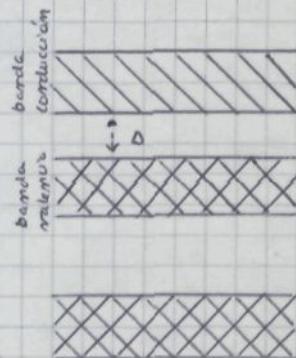
Teoría: Una teoría clásica es incapaz de explicar por qué algunos materiales son aislantes y otros son conductores. Sólo mediante la Mecánica Cuántica es posible entenderlo.

Recordemos lo que sucede en el átomo de hidrógeno: en mecánica clásica el electrón podía tener cualquier energía, mientras que en mecánica cuántica sólo algunos niveles energéticos son permitidos. Más aun en cada nivel no degenerado sólo se puede colocar dos electrones (principio de exclusión de Pauli)

Consideremos ahora una red unidimensional infinita. la mecánica cuántica nos permi-

te probar que el espectro de energías es de bandas: Hay unas bandas de energía permitida separadas por unas zonas (gaps) de energía prohibida, es decir el electrón no puede tener una energía perteneciente a estas últimas zonas. Consideremos ahora este cristal suponiendo que tengo $N \gg 1$ celdas unidad, y que en cada celda unidad hay m iones de carga Z_{el} . Entomus el hecho de que el cristal sea eléctricamente neutro implica que hay $Z_{el}mN$ electrones libres. Por otra parte cada banda permitida estando formada en realidad por N niveles extraordinariamente cercanos y por tanto en cada banda solo pueden colocarse $2N$ electrones.

Supongamos $T=0$ y $Z_{el}m = \text{par}$. Las bandas permitidas de energía más bajas estarán totalmente llenas de electrones y a partir de una determinada energía las otras bandas permitidas estarán totalmente vacías de electrones ($Z_{el}mN/2N = \text{entero}$). La última banda permitida en la que hay electrones suele llamarse banda de valencia y la banda superior inmediata, que está vacía, banda de conducción. Supongamos que se aplica un campo $\vec{E}$. Si este no es demasiado denso los electrones, bajo su acción, no adquieren energía suficiente para poder saltar a la banda de conducción. Como todos los estados de la banda de valencia ya están llenos, el estado cuántico del cristal no puede cambiar cuando se aplica $\vec{E}$. Por tanto este campo no origina un flujo de corriente eléctrica. Esto es lo que sucede con los campos eléctricos usuales.



¿Qué sucede si la temperatura $T > 0$? Algunos de los electrones de la banda de valencia son excitados a la banda de conducción. Se puede probar que el número de electrones que aparecen en la banda de conducción es $\propto \exp(-A\Delta/k_B T)$, Ayo. En un aislante Δ es tan grande que la concentración de electrones en la banda de conducción, y por tanto la corriente eléctrica, es totalmente despreciable hasta la temperatura de fusión. En un semiconductor, Δ es suficientemente pequeño para que haya una concentración significativa de electrones en la banda de conducción. En esta descripción es obvio que la resistencia ρ en los aislantes varía poco con T , mientras que para un semiconductor la resistencia disminuye rápidamente con la temperatura, como así sucede

$$\rho(T) = \rho(293^\circ) [1 + \alpha(T - 293)]$$

(1)

$$\alpha_{Si} = -0.048 \text{ K}^{-1}, \quad \alpha_{Ge} = -0.075 \text{ K}^{-1}$$

Notese además que de la banda de valencia han desaparecido un cierto número de electrones (los que han pasado a la banda de conducción) y por tanto los electrones de esta también tienen una cierta movilidad que también contribuye a la co-

fuente eléctrica.

Más aún en aislantes y semiconductores la magnitud Δ tiene una influencia muy importante sobre otras propiedades del cristal tales como el color ii) en el diamante $\Delta = 5.6$ eV. Los fotones de la luz visible tienen energías entre 1.7 y 3.1 eV, que es menor que Δ , y por tanto un electrón de la banda de valencia no puede absorber uno de estos fotones y toda la luz visible puede atravesar el cristal y este resulta incoloro. iii) En el azufre $\Delta = 2.4$ eV y por tanto al ser iluminado con luz visible puede absorber los fotones con $h\nu > 2.4$ eV, por lo cual desaparecen los fotones de la parte roja - azul del espectro y el cristal será amarillento, como así sucede.

Consideremos ahora el caso $Zm = \text{impar}$ ($NZm/2N = \text{semi-impar}$). Entonces la banda de valencia está llena y la banda de conducción está llena solo hasta la mitad a $T=0$. La alta concentración de electrones en la banda de conducción asegura que este material es un buen conductor.

Cristales tridimensionales. La situación es totalmente análoga salvo el hecho de que existe la posibilidad de que las bandas de conducción y de valencia se superpongan en parte. Esto significa que incluso a $T=0$ habrá algunos electrones en los niveles más bajos de la banda de conducción y niveles no llenos en la banda de valencia, que tengan energías más altas. Así por ejemplo en el arsénico hay un número impar de electrones (33) y cristaliza con dos átomos en la celda unidad. Si no existiera el ferromagnetismo que acabamos de mencionar sería un aislante, pero en este caso las bandas de valencia y de conducción se solapan y aparece una resistividad relativamente pequeña. En algunas ocasiones se habla entonces de semi-metales.

Superconductores. Hay muchos metales en los que existe una temperatura T_c (temperatura crítica), tal que, para $T < T_c$ la resistividad es $\rho = 0$. Este ferromagnetismo fue descubierto por H. Kammerling - Onnes, en 1911. Vió que en el mercurio al llegar a $T_c = 4.2$ K la resistividad caía bruscamente a cero. La explicación de este ferromagnetismo fue dada en 1957 por Bardeen, Cooper y Schrieffer, la famosa teoría BCS de la superconductividad. Durante muchos años en todos los superconductores T_c era de unos pocos grados Kelvin. En 1986 se produjo una revolución en este campo al descubrirse compuestos con T_c relativamente altos $T_c \approx 100$ K y después, lo cual es un hecho de consecuencias tecnológicas impresionantes.

Ley de Ohm: En muchos materiales sucede que la intensidad de corriente es proporcional al campo eléctrico, es decir, el cociente de valores de la densidad

de corriente y del campo eléctrico es independiente de la intensidad de este último

$$\rho = \frac{E}{j} = \frac{1}{\sigma} \Rightarrow R = \frac{\Phi}{I} = \frac{1}{\sigma} \quad \forall \Phi, I \quad (1)$$

Esta ley no es cierta, evidentemente, en semiconductores. Una "explicación" de la misma es: Un electrón en el seno de un campo eléctrico $\vec{E}$ es acelerado.

Sin embargo al cabo de un cierto tiempo el electrón choca con uno de los iones de la red y queda parado. Olvidándonos de las velocidades aleatorias de los electrones debidas a la temperatura. Supongamos que el electrón, después de chocar con el ión, queda en reposo. Bajo la acción de $\vec{E}$ el electrón adquiere una aceleración $Q_e E / m_e$ y si τ es el tiempo medio entre choques, la velocidad media del electrón es

$$v = \frac{1}{2} \frac{(Q_e E)}{m_e} \tau \quad (2)$$

y en tanto

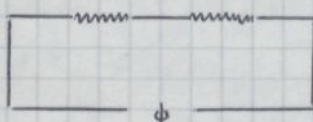
$$j = \frac{1}{2} \frac{Q_e^2 N \tau}{m_e} E \quad (3)$$

y por tanto $j \propto E$ y

$$\rho = \frac{2 m_e}{N Q_e^2 \tau} \quad (4)$$

Asociación de resistencias:

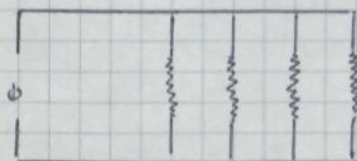
c) En serie



$$I = \frac{\Phi_i}{R_i} \Rightarrow \Phi_i = I R_i$$

$$\Phi = \sum \Phi_i = I \sum R_i = I R \Rightarrow R = \sum_i R_i \quad (5)$$

a) En paralelo



$$\Phi = I_i R_i$$

$$I = \sum I_i = \Phi \sum_i \frac{1}{R_i} = \Phi \frac{1}{R} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{R} = \sum_i \frac{1}{R_i} \quad (6)$$

Ley de Joule: Supongamos que entre dos puntos de un conductor se establece una diferencia de potencial Φ y se produce una corriente de intensidad I . En el tiempo dt se mueve a través de la sección recta del conductor una carga $dQ = I dt$ y esta carga disminuye su energía en $dU = \Phi dQ = I \Phi dt$, apareciendo ésta en forma de calor. La velocidad con la que aparece la energía calorífica es

$$P = \frac{dU}{dt} = I \Phi \quad (\text{potencia}) \quad (7)$$

y suponiendo válida la ley de Ohm

$$P = I \Phi = I^2 R = \frac{\Phi^2}{R}$$

U en joules, t en seg, P en watt.

1.- Un acelerador usa un haz de protones de $E=20.0$ MeV y de forma cilíndrica con radio $r=2$ mm. La corriente de este haz es $I=1.0$ mA. El haz choca contra un blanco metálico y es absorbido por él. ¿Cuál es la densidad de protones en el haz? ¿Cuántos protones chocaron contra el blanco en $T=10$ minutos? Si el blanco está inicialmente descargado, expresar la carga en función del tiempo.

$$E = \frac{1}{2} M v^2 \quad \text{donde } M \text{ y } v \text{ son la masa y velocidad del protón.}$$

$$v = (2E/M)^{1/2}, \quad I = A j = A q N v = \pi r^2 q N v$$

siendo q la carga del protón y N el número de protones por unidad de volumen

$$N = \frac{I}{\pi r^2 q v} \Rightarrow N = \frac{I}{\pi r^2 q} \frac{1}{c} \sqrt{\frac{Mc^2}{2E}}$$

$$N = \frac{1.0 \times 10^{-3} \text{ A}}{\pi (2 \times 10^{-3} \text{ m})^2 \cdot 1.6021892 \times 10^{-19} \text{ C}} \cdot \frac{1}{2.99792458 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}} \sqrt{\frac{938.2746 \text{ MeV}}{2 \times 20 \text{ MeV}}}$$

$$N = 8.024 \times 10^{12} \text{ protones / cm}^3$$

En un tiempo T chocan con el blanco $W = N v A T = N v \pi r^2 T$

$$W = \frac{I T}{q} = 3.745 \times 10^{18} \text{ protones}$$

y

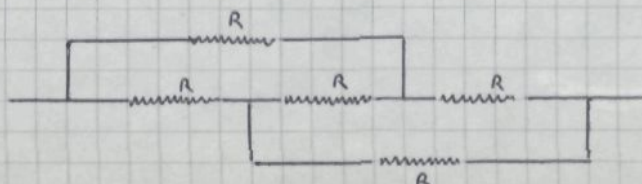
$$Q(t) = q_p W = \frac{I q_p}{q_p} t = I t = 1.0 \times 10^{-3} \left(\frac{\text{C}}{\text{seg}} \right) \text{ coulomb}$$

2.- Una correa de un acelerador de Van der Graaf transporta una densidad de carga superficial de $5 \mu\text{C/m}^2$. La correa tiene una anchura de 0.5 m y se mueve a 20 m s^{-1} . ¿Qué corriente transporta? Si esta carga la de forma a un potencial de 10^5 V ¿Cuál es el menor valor de la potencia del motor para accionar la correa?

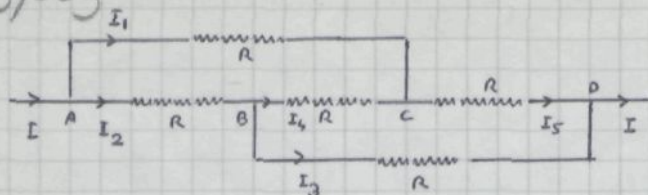
$$I = (\text{densidad superficial}) \times (\text{anchura}) \times (\text{velocidad}) = 5 \mu\text{C m}^{-2} \cdot 0.5 \text{ m} \cdot 20 \text{ m s}^{-1} = 50 \mu\text{A}$$

$$P = \frac{Q}{t} \cdot \phi = 50 \mu\text{A} \times 10^5 \text{ V} = 5 \text{ watts}$$

3.- Hallar la resistencia equivalente al circuito



35/003



$$\phi = R I$$

$$I_2 = I - I_1$$

$$I_4 = I - I_1 - I_3$$

$$I_5 = I - I_3$$

$$\phi_A - \phi_B = R(I - I_1)$$

$$\phi_B - \phi_C = R(I - I_1 - I_3)$$

$$\phi_C - \phi_D = R(I - I_3)$$

$$\phi_A - \phi_C = R I_1$$

$$\phi_B - \phi_D = R I_3$$

$$\phi_A - \phi_B = R I - \phi_A + \phi_C$$

$$\phi_B - \phi_C = R I - \phi_A + \phi_C - \phi_B + \phi_D$$

$$\phi_C - \phi_D = R I - \phi_B + \phi_D$$

$$\Rightarrow 2\phi_A - 2\phi_D = 2RI \Rightarrow \phi_A - \phi_D = RI$$

$$2\phi_A - \phi_B - \phi_C = RI$$

$$\phi_A + 2\phi_B - 2\phi_C - \phi_D = RI$$

$$\phi_B + \phi_C - 2\phi_D = RI$$

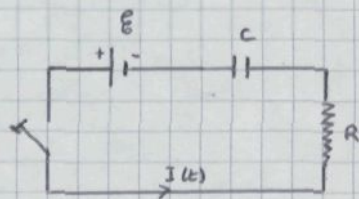
Luego la resistencia equivalente es R

4.- Calcular $I(t)$ para un circuito como el de la

figura sabiendo que $R = 10 \Omega$, $C = 100 \mu F$,

$\mathcal{E}$ = fuerza electromotriz de la pila = 50 V., resistencia

interna de la pila $r = 1 \Omega$ y que el condensador está descargado cuando se cierra el circuito.



En el tiempo dt se mueve una carga $dQ = I(t) dt$, El trabajo hecho por la fuente ($\mathcal{E} dQ$) debe ser igual a la energía que aparece como calor por efecto Joule en el tiempo dt ($I^2(R+r) dt$), más el aumento de la cantidad de energía W que se almacena en el condensador ($d(Q^2/2C)$)

$$\mathcal{E} dQ = I^2(R+r) dt + d\left(\frac{Q^2}{2C}\right) \Rightarrow \mathcal{E} I(t) dt = I^2(t)(R+r) dt + \frac{1}{2C} 2Q(t) I(t) dt \Rightarrow$$

$$\mathcal{E} = (R+r) I(t) + \frac{1}{C} Q(t) = (R+r) \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C} Q(t) = \mathcal{E}$$

$$\frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C(R+r)} Q(t) = \frac{\mathcal{E}}{R+r}, \quad \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C(R+r)} Q(t) = 0 \quad Q(t) = A e^{-t/C(R+r)}$$

$$\frac{dA}{dt} e^{-t/C(R+r)} - A \frac{1}{C(R+r)} e^{-t/C(R+r)} + \frac{A}{C(R+r)} e^{-t/C(R+r)} = \frac{\mathcal{E}}{R+r} \quad A = \mathcal{E} C e^{t/C(R+r)}$$

$$Q(t) = A e^{-t/C(R+r)} + \mathcal{E} C \quad \text{Si } Q(0)=0 \text{ entonces}$$

$$Q(t) = \mathcal{E} C [1 - e^{-t/C(R+r)}]$$

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R+r} e^{-t/C(R+r)}$$

$$I(t) = \frac{50}{11} \text{ amp exp} \left(-909.1 t/s \right)$$

$$1 \text{ Far. } 1 \Omega \approx 1 s$$

5.- Se dispone de tres bombillas de 100 V y 10, 50 y 200 W, respectivamente. ¿Qué es lo que ocurre si montadas en serie se conectan a la red de 300 V?

Recordemos $R = \phi^2 / P$ y en tanto las resistencias son

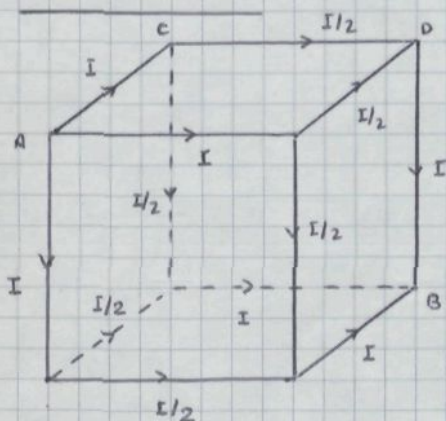
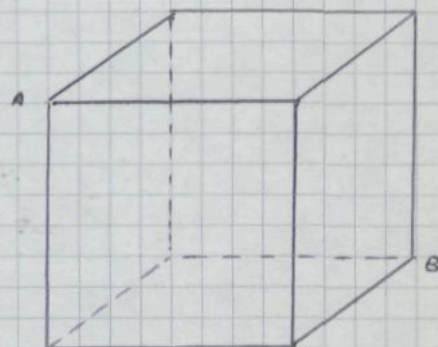
$$R_1 = 1000 \Omega, \quad R_2 = 200 \Omega, \quad R_3 = 50 \Omega$$

y las intensidades nominales de funcionamiento son ($I = W / \phi$)

$$I_1 = 0.1 \text{ A}, \quad I_2 = 0.5 \text{ A}, \quad I_3 = 2 \text{ A}.$$

Al conectarlas en serie $R = \sum R_i = 1250 \Omega$ y la intensidad sera $I = \phi / R = 0.24 \text{ A}$. La bombilla 2 luera' debilmente, la 3 casi nada y la 1 muchisimo durante un breve periodo; despues se fundira' y no luera' ninguno de las tres.

6.- Dose piezas idénticas de alambre, cada una de las cuales tiene una resistencia R , se colocan de la forma indicada en la figura. ¿Cuál es la resistencia entre A y B?

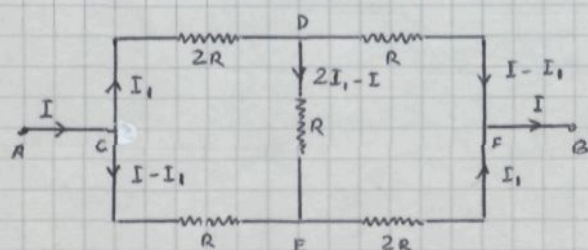
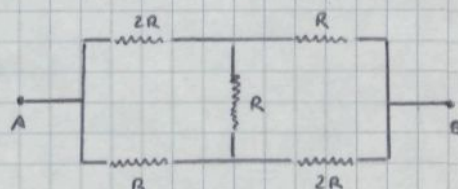


$$\left. \begin{aligned} \phi_A - \phi_C &= IR \\ \phi_C - \phi_D &= \frac{I}{2} R \\ \phi_D - \phi_B &= IR \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\phi_A - \phi_B = IR + \frac{1}{2} IR + IR = \frac{5}{2} RI$$

Luego la resistencia entre A y B es $5R/2$

7.- ¿Cuál es la resistencia entre A y B en el circuito de la figura.



$$\left. \begin{aligned} \phi_C - \phi_D &= 2RI_1 \\ \phi_D - \phi_F &= R(I - I_1) \\ \phi_C - \phi_E &= R(I - I_1) \\ \phi_D - \phi_E &= R(2I_1 - I) \\ \phi_E - \phi_F &= I_1 2R \end{aligned} \right\}$$

$$\phi_A - \phi_B = R_{eq} I = \phi_C - \phi_F$$

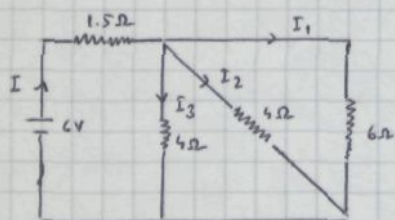
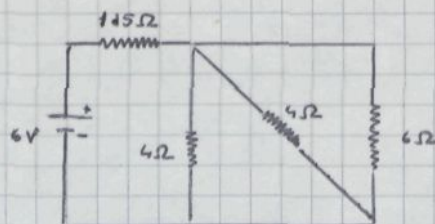
35/003

Eligiendo arbitrariamente $\phi_D = 0 \Rightarrow \phi_E = \frac{1}{5} RI$, $\phi_C = \frac{4}{5} RI$, $\phi_F = -\frac{2}{5} RI$

y por tanto

$$R_T = \frac{7}{5} R$$

- 8.- La batería del circuito de la figura tiene una resistencia despreciable. 1) Hallar la corriente que pasa por cada resistencia. 2) Hallar la potencia producida en la batería.



Las resistencias de 4Ω y la de 6Ω se pueden sustituir por una de

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \Rightarrow R = \frac{3}{2} \Omega$$

y toda la resistencia externa es

$$R_T = \frac{3}{2} + 1.5 \Rightarrow R_T = 3 \Omega$$

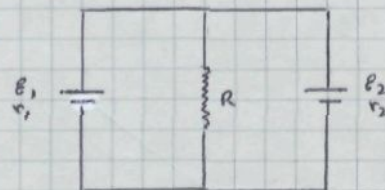
por lo cual $I = \frac{6}{3} \Rightarrow I = 2 A$. Entonces $I_1 + 2I_2 = 2$, $I_3 = I_2$ y además

$$I_1 \cdot 6 = I_2 \cdot 4 \Rightarrow$$

$$I_1 = 0.5 A, \quad I_2 = \frac{3}{4} A, \quad I_3 = \frac{3}{4} A \quad y \quad I = 2 A.$$

La potencia es $P = I \phi \Rightarrow P = 12 W$.

9. Considerar el circuito de la figura siendo fijas las voltajes $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ de las baterías y las resistencias internas r_1 y r_2 , determinar R para que la potencia disipada en esta resistencia sea máxima.



$$I = I_1 + I_2, \quad \mathcal{E}_1 = I_1 r_1 + IR, \quad \mathcal{E}_2 = I_2 r_2 + IR$$

$$\text{de donde} \quad I = \left(\frac{\mathcal{E}_1}{r_1} + \frac{\mathcal{E}_2}{r_2} \right) / \left(1 + \frac{r_1}{R} + \frac{r_2}{R} \right)$$

$$\text{la potencia es} \quad P = I^2 R$$

$$P = \left(\frac{\mathcal{E}_1}{r_1} + \frac{\mathcal{E}_2}{r_2} \right)^2 \frac{R}{\left(1 + \frac{r_1}{R} + \frac{r_2}{R} \right)^2}$$

$$y \quad \frac{dP}{dR} = 0 \Rightarrow R = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$$

CAMPOS MAGNÉTICOS

Magnetismo: Ciertos pedros (magnetita) atraen pedazos de hierro. La palabra magnetismo viene de la región de Magnesia, en el Asia Menor, lugar en que hoy magnetita. Durante muchos siglos las experiencias de magnetismo se limitaban al estudio de imanes permanentes. Se sabe que ya en el SXII se usaba la brújula y en el año 1600, William Gilbert descubrió la razón de que un imán se oriente en el campo magnético terrestre: la Tierra es un imán permanente. En 1820, Oersted descubrió que las corrientes eléctricas pueden producir campos magnéticos y esto es el inicio de la teoría electromagnética moderna.

Campo magnético $\vec{B}$ ($\equiv$ inducción magnética). De la misma forma que en el espacio cercano a una carga eléctrica aparece un campo eléctrico, en las cercanías de un imán o de una corriente eléctrica aparece un campo magnético.

Fuerza de Lorentz. En presencia de un campo eléctrico $\vec{E}$ y de un campo magnético $\vec{B}$ sobre una partícula de prueba, de carga Q , actúa una fuerza

$$\vec{F} = Q \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} \right) \quad (\text{Fuerza de Lorentz}) \quad (1)$$

Esta fórmula nos da una definición operacional de $\vec{B}$.

Unidades: $[\vec{B}] = [\vec{E}] = M^{1/2} L^{-1/2} T^{-1}$. Si $\vec{B}$ en gauss, Q en stat-coulomb, $\vec{E}$ en stat-volt cm^{-1} entonces $\vec{F}$ en dinas

En el MKS $\vec{F} = Q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ $Q = \text{coulombs}$, $\vec{v} = m s^{-1}$ $\vec{B}$ tesla $= 10^4$ Gauss $\Rightarrow F$ Newton

Veamos 1 tesla $= 10^4$ gauss. Si $Q = 1$ coulomb, $v = 1 m/s$ $\vec{B} = 1$ tesla $\Rightarrow F = 1$ Newton

$$\vec{B} = x \text{ gauss} \quad 10^5 \text{ g cm sec}^{-2} = 3 \times 10^9 \text{ stat coulomb} \frac{100 \text{ cm/s}}{3 \times 10^{10} \text{ cm/s}^{-1}} \times \text{tesla} = x = 10^4$$

Ejemplo: $\vec{B} = (0, 0, B)$, $\vec{E} = 0$ ¿cuál es la trayectoria de la partícula?

$$\begin{aligned} M \dot{\vec{v}} &= Q \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \Rightarrow \left. \begin{aligned} M \frac{dv_x}{dt} &= \frac{Q}{c} B v_y \\ M \frac{dv_y}{dt} &= -\frac{Q}{c} B v_x \\ M \frac{dv_z}{dt} &= 0 \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

$$v_x = C_1 \cos \left(\frac{QB}{Mc} t + \varphi \right) \quad v_y = -C_1 \sin \left(\frac{QB}{Mc} t + \varphi \right) \quad , \quad v_z = C_2 \quad (2)$$

donde C_1 , C_2 y φ se deben determinar de las condiciones iniciales.

i) Notar que $\vec{v}^2 = \text{cte}$. Este resultado es totalmente general

$$M \frac{d\vec{v}^2}{dt} = 2M \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 2\vec{v} \cdot Q \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right) = 2Q \vec{v} \cdot \vec{E} \Rightarrow$$

35/003

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} M \vec{v}^2 \right) = q \vec{v} \cdot \vec{E}$$

(3)

Sólo los campos eléctricos son capaces de aumentar la energía cinética.

ii) De (2)

$$x(t) = C_1 \frac{CM}{qB} \sin \left(\frac{qB}{CM} t + \varphi \right) + C_3, \quad y(t) = C_1 \frac{CM}{qB} \cos \left(\frac{qB}{CM} t + \varphi \right) + C_4, \quad z(t) = C_2 t + C_5 \quad (4)$$

Si $C_2 = 0$ entonces el movimiento es un círculo en el plano $z = C_5$ de radio

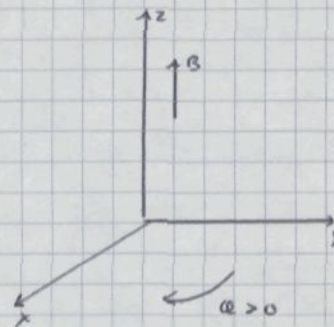
$C_1 \frac{CM}{qB}$ centrado en (C_3, C_4, C_5) y recorre con un periodo

$$T = \frac{2\pi CM}{|qB|} \quad (5)$$

y velocidad angular

$$\omega = \frac{|qB|}{MC} \quad (\text{frecuencia ciclotrón}) \quad (6)$$

El sentido de giro viene determinado por el signo de la carga.



Fuerza sobre un elemento de corriente. Las corrientes eléctricas en el seno de campos magnéticos experimentan fuerzas, según demostró Ampère en una serie de experimentos.

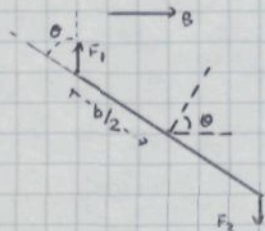
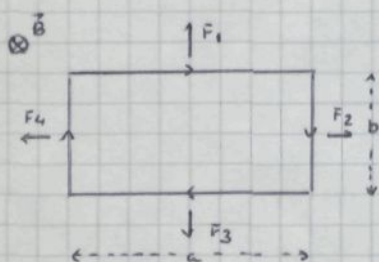
Sea $d\vec{\ell}$ un elemento de conductor recorrido por una corriente de intensidad I y sea $\vec{v}$ la velocidad de las cargas positivas en él. La fuerza sobre una carga es $\vec{F} =$

$= \frac{1}{c} \frac{\vec{I}}{AN} \times \vec{B}$ donde A es la sección recta y N el número de partículas por unidad de volumen.

En $d\vec{\ell}$ hay AN cargas y por tanto la fuerza sobre un elemento de corriente es

$$d\vec{F} = \frac{I}{c} d\vec{\ell} \times \vec{B} \quad (7)$$

Momento de una espira



$$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_3| = \frac{I}{c} a B$$

$$|\vec{F}_2| = |\vec{F}_4| = \frac{I}{c} b B$$

El momento que actúa sobre la espira es

$$|\vec{\tau}| = 2F_1 \frac{b}{2} \sin \theta = \frac{I}{c} B (a b) \sin \theta$$

$$\vec{\tau} = \frac{I}{c} \vec{A} \times \vec{B} \quad (8)$$

donde $\vec{A}$ es el vector área cuyo sentido viene determinado por el de la corriente mediante la regla del tornillo

$$\vec{\mu} \equiv \frac{I}{c} \vec{A} = \text{momento dipolar magnético}$$

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} \quad (9)$$

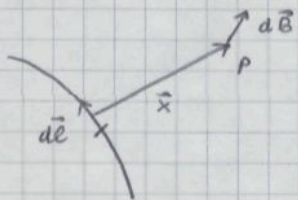
comparar con el caso dipolo eléctrico donde $\vec{\tau} = \vec{d} \times \vec{E}$.

Energía potencial. El trabajo que se debe realizar para girar el dipolo magnético de su posición de energía cero, tomada arbitrariamente para $\theta = \pi/2$, hasta un ángulo θ es

$$U = \int_{\pi/2}^{\theta} d\theta' \tau(\theta') = \mu B \int_{\pi/2}^{\theta} d\theta' \sin\theta' = -\mu B \cos\theta' \Big|_{\pi/2}^{\theta} = -\mu B \cos\theta = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \quad (1)$$

El signo menos indica que el dipolo tiende a orientarse de forma que $\vec{\mu} \parallel \vec{B}$.

Ley de Biot-Savart: Esta ley nos da el campo magnético creado por un elemento de corriente. Sea $d\vec{\ell}$ el elemento de un conductor delgado por el que circula una intensidad I , Ampère demostró experimentalmente que éste crea un campo magnético

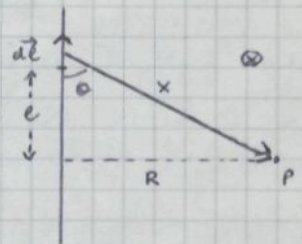


$$d\vec{B} = \frac{I}{c} \frac{d\vec{\ell} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \quad (2)$$

Si se trata de una carga en movimiento $I d\vec{\ell} = q \vec{v}$

$$\vec{B} = \frac{q}{c} \frac{\vec{v} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3} = \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{E} \quad (3)$$

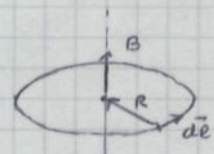
Ejemplo 1.- Conductor indefinido. Nota que los $d\vec{B}$ asociados a los distintos $d\vec{\ell}$ son paralelos



$$|\vec{B}| = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{I}{c} \frac{x d\ell}{x^3} \sin\theta = \left| \begin{array}{l} x \sin\theta = R \\ x = (\ell^2 + R^2)^{1/2} \end{array} \right| = \frac{IR}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} d\ell \frac{1}{(\ell^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{IR}{c} \frac{c}{R^2 (\ell^2 + R^2)^{1/2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{IR}{c} 2 \frac{1}{R^2} \Rightarrow |\vec{B}| = \frac{2I}{cR} \quad (4)$$

Ejemplo 2.- Anillo circular en su centro

$$|\vec{B}| = \frac{I}{c} \int_0^{2\pi R} d\ell \frac{R}{R^3} = \frac{I}{c} \frac{1}{R^2} 2\pi R \Rightarrow |\vec{B}| = \frac{2\pi I}{cR} \quad (5)$$



Ley de Ampère: Consideremos un conductor rectilíneo e indefinido. De acuerdo con (4) podemos escribir

$$2\pi R |\vec{B}| = \frac{4\pi}{c} I \quad (6)$$

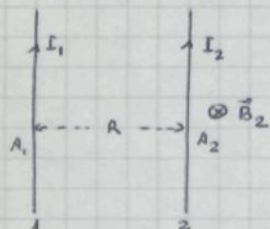
o equivalentemente

$$\oint_C d\vec{\ell} \cdot \vec{B} = \frac{4\pi}{c} I \quad (7)$$

donde C es un círculo de radio R , perpendicular al conductor. Este resultado, como veremos más adelante es totalmente general, siendo C un camino cualquiera.

35/003

Interacción entre dos conductores paralelos. Supongamos dos conductores rectilíneos paralelos conocidos por corrientes estacionarias. En el punto A_2 y debido al conductor 1 se usa un campo



$$|\vec{B}_2| = \frac{2 I_1}{c R}$$

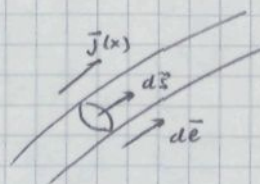
y este produce en el segundo conductor una fuerza $d\vec{F} = \frac{I_2}{c} d\vec{\ell} \times \vec{B}_2$. La fuerza por unidad de longitud es

$$F = \frac{2 I_1 I_2}{c^2 R} \quad (8)$$

La fuerza es atractiva (repulsiva) si las corrientes son paralelas (antiparalelas)

Fuerza total sobre una distribución estacionaria de corrientes

Sea $\vec{J}(\vec{x})$ una distribución estacionaria de corrientes en el seno de un campo magnético estacionario $\vec{B}(\vec{x})$, entonces recordando que



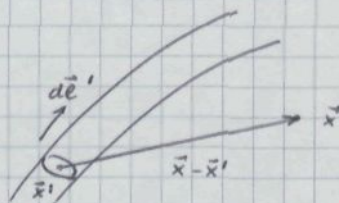
$$d\vec{F} = \frac{1}{c} (I d\vec{\ell}) \times \vec{B} \quad I \equiv \vec{J}(\vec{x}) \cdot d\vec{S}$$

$$d\vec{F} = \frac{1}{c} [\vec{J}(\vec{x}) \cdot d\vec{S}] [d\vec{\ell} \times \vec{B}] = \frac{1}{c} [d\vec{S} \cdot d\vec{\ell}] [\vec{J}(\vec{x}) \times \vec{B}(\vec{x})] \Rightarrow$$

$$\vec{F} = \frac{1}{c} \int_V d^3x \vec{J}(\vec{x}) \times \vec{B}(\vec{x}) \quad (9)$$

Campo creado por una distribución estacionaria de corrientes

$$d\vec{B}(\vec{x}) = \frac{1}{c} \frac{(I d\vec{\ell}') \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = \frac{1}{c} \frac{\vec{J}(\vec{x}') \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} d^3x'$$



$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{1}{c} \int_V d^3x' \vec{J}(\vec{x}') \times \frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \quad (10)$$

Como $\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = - \frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$ entonces

$$\left(\vec{\nabla} \times \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right)_i = \epsilon_{ijk} \nabla_j J_k(\vec{x}') \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = - \epsilon_{ijk} J_k(\vec{x}') \frac{(\vec{x} - \vec{x}')_j}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = \left(\vec{J}(\vec{x}') \times \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \right)_i \Rightarrow$$

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{1}{c} \vec{\nabla} \times \int_V d^3x' \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (11)$$

Notar que esto implica

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{x}) = 0 \quad (\text{Ley de Ampere}) \quad (12)$$

que es el análogo a la ley de Gauss y donde el seno del segundo miembro corresponde a la ausencia de monopolos.

Ley de Ampère: Se tiene que

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}) &= \frac{1}{c} \vec{\nabla} \times \left\{ \vec{\nabla} \times \int_V d^3x' \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right\} = \\ &= \frac{1}{c} \vec{\nabla} \cdot \int_V d^3x' \vec{J}(\vec{x}') - \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \frac{1}{c} \int_V d^3x' \vec{J}(\vec{x}') \nabla^2 \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \\ &= \frac{1}{c} \vec{\nabla} \cdot \int_V d^3x' [\vec{\nabla}' \cdot \vec{J}(\vec{x}')] \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \frac{1}{c} \int_V d^3x' \vec{J}(\vec{x}') [-4\pi \delta(\vec{x} - \vec{x}')] \Rightarrow \\ \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}) &= \frac{4\pi}{c} \vec{J}(\vec{x})\end{aligned}\quad (1)$$

Sea ahora un circuito cerrado C y una superficie S sustentada por él, entonces

$$\begin{aligned}\int_S d\vec{S} \cdot [\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x})] &= \frac{4\pi}{c} \int_S d\vec{S} \cdot \vec{J}(\vec{x}) \Rightarrow \\ \int_C d\vec{\ell} \cdot \vec{B}(\vec{x}) &= \frac{4\pi}{c} I\end{aligned}\quad (2)$$

Experimento de Faraday (1831). El hecho de que puedan inducirse corrientes eléctricas mediante campos magnéticos fue descubierta de forma simultánea e independiente por Michael Faraday y Joseph Henry. Todas sus experiencias pueden resumirse mediante una expresión sencilla llamada ley de Faraday. Sea un circuito C y sea S una superficie sustentada por él. Si la espira C se halla en una región del espacio en la que hay un campo magnético $\vec{B}(\vec{x}; t)$, entonces el flujo de este campo a través de la espira es

$$\Phi(t) = \int_S d\vec{S} \cdot \vec{B}(\vec{x}; t)\quad (3)$$

que es independiente de S . Si el flujo se modifica, entonces aparece en el circuito una fuerza electromotriz inducida

$$\mathcal{E}(t) = - \frac{1}{c} \frac{d\Phi(t)}{dt}\quad (4)$$

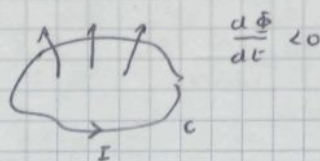
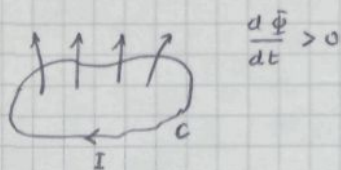
Recordemos que la fuerza electromotriz (f.e.m.) es el trabajo realizado por una carga unidad positiva para un campo eléctrico cuando la carga se lleva a lo largo del circuito.

$$\mathcal{E}(t) = \int_C d\vec{\ell} \cdot \vec{E}(\vec{x}; t)\quad (5)$$

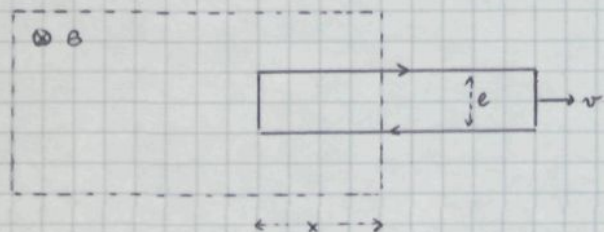
Si $\vec{E}$ fuera electrostático, la integral anterior sería nula por qué el campo conservativo. Evidentemente una variación de $\Phi(t)$ se puede lograr por muchas medidas: Moviendo la espira en un campo $\vec{B}(\vec{x})$; manteniéndola fija y acercándola un imán; ...

35/003

Ley de Lenz: Una consecuencia inmediata es que la corriente inducida que aparece lo hace en un sentido tal que tiende a oponerse a la causa que la produce



Corriente inducida en una espira. El flujo empujado en la espira es



$$\Phi(t) = B l x \quad dx/dt = v$$

$$\mathcal{E} = - \frac{1}{c} B l \frac{dx}{dt} = - \frac{B l v}{c}$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} \Rightarrow I = \frac{B l v}{c R} \quad (6)$$

Formulación alternativa de la ley de Faraday. Un campo magnético variable crea un campo eléctrico que es el causante de la fuerza electromotriz inducida

$$\oint_C d\vec{\ell} \cdot \vec{E}(\vec{x}; t) = - \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S d\vec{S} \cdot \vec{B}(\vec{x}; t) \Rightarrow$$

$$\int_S d\vec{S} \cdot \left\{ \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}; t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}(\vec{x}; t)}{\partial t} \right\} = 0 \quad \forall S \text{ fija}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}; t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}(\vec{x}; t)}{\partial t} = 0 \quad (\text{Ley de Faraday}) \quad (7)$$

Inductancia: En electrodinámica hemos visto que la resistencia de un circuito caracteriza la relación entre el voltaje aplicado y la corriente que se produce. Consideremos una bobina recorrida por una corriente I entonces aparece un campo magnético $\vec{B}$ y un flujo Φ . Se llama inductancia, L , a

$$L = \frac{\Phi}{I} \quad (8)$$

Otra definición equivalente es

$$\mathcal{E} = - \frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{L}{c} \frac{dI}{dt} \Rightarrow L = - \frac{c \mathcal{E}}{dI/dt} \quad (9)$$

Ejemplo. Consideremos un solenoide rectilíneo de longitud l con n espiras por unidad de longitud y sea Φ el flujo que atraviesa una espira y A el área de una de ellas. Entonces

$$L = \frac{n l \Phi}{I} = \frac{n l B A}{I}$$

Procedamos al cálculo del campo B creado por I . Consideremos un elemento circular con n espiras en unidad de longitud y sea R el radio del círculo. La ley de Ampere da

$$2\pi R B = \frac{4\pi}{c} I n 2\pi R \Rightarrow B = \frac{4\pi}{c} n I \quad (1)$$

que no depende de R y por tanto también es válido en el caso anterior. Entonces

$$L = \frac{4\pi}{c} n^2 \ell A \quad (2)$$

que depende solo de las características geométricas del solenoide.

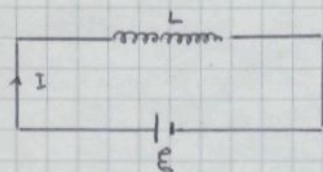
Densidad de energía. Vimos que la densidad de energía asociada a un campo eléctrico es

$$w = \frac{1}{8\pi} \vec{E}^2 \quad (3)$$

y comprobemos su validez para un condensador. Similarmenete cuando hay un campo magnético

$$w = \frac{1}{8\pi} \vec{B}^2 \quad (4)$$

Comprobemos con un ejemplo la validez de (4). Consideremos una bobina rectilínea que



forma parte del circuito de la figura. Sea I la corriente que circula. La energía que suministra la pila al circuito en un tiempo dt es $E I dt$. Esto se consume en desarrollar

calor en el conductor (efecto Joule $R I^2 dt$) y en crear un flujo magnético en el solenoide, siendo este $I d\Phi/c$ y como $\Phi = L I$ entonces $I d\Phi/c = L I dI/c$. Entonces si inicialmente la corriente es nula la energía que se consume en el solenoide para lograr que pase una corriente I es

$$W = \int_0^I dI' \frac{L I'}{c} = \frac{L}{2c} I^2 \quad (5)$$

de donde

$$W = \frac{1}{2c} \frac{4\pi}{c} n^2 \ell A \left(\frac{c B}{4\pi n} \right)^2 = \frac{1}{8\pi} (\ell A) B^2 \quad (6)$$

que es el resultado deseado. En general

$$dw = \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) dv. \quad (7)$$

1. Un protón se dispersa desde el origen de coordenadas con $v = 10^6 \text{ m s}^{-1}$ en una dirección que está en el plano $y=0$ y que forma un ángulo de 37° respecto al eje horizontal Ox . Hay un campo magnético $B = 0.2$ Tesla paralelo al eje Ox . Describir el movimiento del protón ($\vec{g}=0$).

$$Q = 4.803242 \times 10^{-10} \text{ esu}, \quad \vec{B} = (2 \times 10^3, 0, 0) \text{ gauss}, \quad Mc^2 = 938.2796 \text{ MeV}$$

$$1 \text{ MeV} = 1.6021892 \times 10^{-6} \text{ erg}, \quad c = 2.99792458 \times 10^{10} \text{ cm s}^{-1}$$

$$\vec{x}(0) = (0, 0, 0) \quad \vec{v}(0) = (v \cos \alpha, 0, v \sin \alpha) \times 10^6 \text{ cm s}^{-1} \quad \alpha = 37^\circ$$

$$\left. \begin{aligned} M \frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{Q}{c} \vec{v} \times \vec{B} \\ M \frac{dv_x}{dt} &= 0 \\ M \frac{dv_y}{dt} &= \frac{QB}{c} v_z \\ M \frac{dv_z}{dt} &= -\frac{QB}{c} v_y \end{aligned} \right\} \begin{aligned} v_x(t) &= C_1 \\ v_y(t) &= C_2 \cos\left(\frac{QB}{Mc} t + \varphi\right) \\ v_z(t) &= -C_2 \sin\left(\frac{QB}{Mc} t + \varphi\right) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= C_1 t + C_3 \\ y(t) &= C_2 \frac{Mc}{QB} \sin\left(\frac{QB}{Mc} t + \varphi\right) + C_4 \\ z(t) &= C_2 \frac{Mc}{QB} \cos\left(\frac{QB}{Mc} t + \varphi\right) + C_5 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} C_1 &= v \cos \alpha & C_3 &= 0 \\ \varphi &= \pi/2 & C_4 &= \frac{Mc}{QB} v \sin \alpha \\ C_2 &= -v \sin \alpha & C_5 &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{QB}{Mc} = \frac{4.803242 \times 10^{-10} \text{ esu} \cdot 2 \times 10^3 \text{ gauss}}{938.2796 \text{ MeV} \cdot 1.6021892 \times 10^{-6} \text{ erg MeV}^{-1}} = \frac{9.606484 \times 10^{-7} \text{ esu gauss}}{1.50430352 \times 10^{-6} \text{ erg}} = 6.386 \times 10^{-1} \text{ s}^{-1}$$

$$C_1 = 7.9864 \times 10^7 \text{ cm s}^{-1}, \quad C_2 = 6.0182 \times 10^7 \text{ cm s}^{-1}, \quad C_3 = 3.1413 \text{ cm}$$

$$x(t) = 7.9864 \times 10^7 \text{ cm} \frac{t}{s}$$

$$y(t) = 3.1413 \text{ cm} \left\{ 1 - \cos\left(1.9158 \times 10^7 \frac{t}{s}\right) \right\}$$

$$z(t) = 3.1413 \text{ cm} \sin\left(1.9158 \times 10^7 \frac{t}{s}\right)$$

2. Un electrón es acelerado a través de una diferencia de potencial de $\phi = 10^3 \text{ V}$ y dirigido hacia una región entre dos placas paralelas separadas una distancia $d = 0.02 \text{ m}$, con una diferencia de voltaje entre ellas de $\phi' = 10^2 \text{ V}$. Si el electrón entra moviéndose perpendicularmente al campo eléctrico $\vec{E}$ entre las placas ¿qué campo magnético B , perpendicular tanto a la trayectoria del electrón como a $\vec{E}$, será necesario para que el electrón se traslade en línea recta?

$$\vec{E} = (0, 0, E), \quad \vec{v} = (v, 0, 0), \quad \vec{B} = (0, B, 0)$$

35/003

$$M \frac{d\vec{v}}{dt} = Q (\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B})$$

$$M \frac{d\vec{v}}{dt} = 0$$

$$M \cdot 0 = 0$$

$$M \cdot 0 = Q E + \frac{Q}{c} \vec{v} \times \vec{B}$$

$$B = - \frac{E c}{v}$$

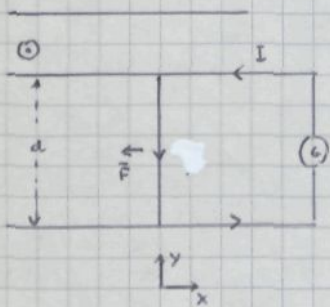
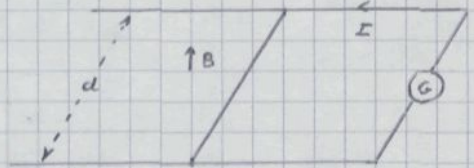
$$\frac{v}{c} = \sqrt{\frac{2E}{Mc^2}} = \sqrt{\frac{2 \times 10^3 \text{ eV}}{0.511 \times 10^6 \text{ eV}}} = 0.062561$$

$$E = \frac{100}{0.02} = 5 \times 10^3 \text{ Volt } m^{-1}$$

$$E = 5 \times 10^3 \frac{1}{300} \frac{1}{100} \text{ m.s.} \times 0.16666 \text{ m.s.}$$

$$B = - 2.6651 \text{ gauss}$$

3. Un alambre metálico de masa M se desliza sin fricción sobre dos rieles separados una distancia d . La rúa está colocada en un campo uniforme $\vec{B}$ vertical. Una corriente constante I sale del generador G a un riel, sigue por el alambre y regresa por el otro riel. Encuentra la velocidad $\vec{v}$ del alambre en función del tiempo, suponiendo que inicialmente está en reposo.



$$M \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{I}{c} \vec{d} \times \vec{B}$$

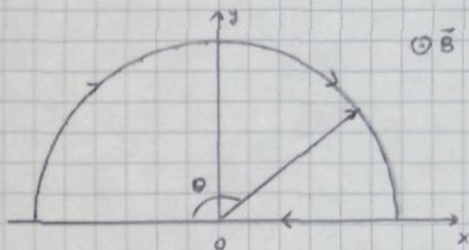
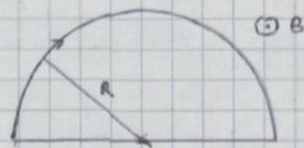
$$\vec{d} = (0, -d, 0) \quad \vec{B} = (0, 0, B)$$

$$\vec{d} \times \vec{B} = -dB \hat{i}$$

$$M \frac{dv}{dt} = -\frac{I}{c} dB$$

$$\vec{v} = - \frac{IBd}{cM} t \hat{i}$$

4. Encuentra la fuerza total debida al campo magnético B sobre el arco semicircular de la figura.



⊙ $\vec{B}$

$$\vec{B} = (0, 0, -B)$$

1) Diámetro $d\vec{e} = (-dx, 0, 0)$

$$d\vec{F}_1 = \frac{I}{c} d\vec{e} \times \vec{B} = - \frac{BI}{c} dx \hat{j}$$

$$\vec{F}_1 = - \frac{2BIR}{c} \hat{j}$$

2) Semicirculo $x = R \cos \theta$

$dx = -R \sin \theta d\theta$

$y = R \sin \theta$

$dy = R \cos \theta d\theta$

$$d\vec{F}_2 = \frac{I}{c} d\vec{e} \times \vec{B} = \frac{I}{c} R d\theta (-B \cos \theta \hat{i} + B \sin \theta \hat{j})$$

$$\vec{F}_2 = \frac{IRB}{c} \int_0^\pi d\theta (-\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}) = \frac{IRB}{c} (-\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j})_0^\pi = + \frac{2IRB}{c} \hat{j}, \quad \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$$

5. Una espira cuadrada, de lado L , transporta una corriente I . Encuentra el campo magnético en el centro de la espira.

$$d\vec{B} = \frac{I}{c} \frac{d\vec{e} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

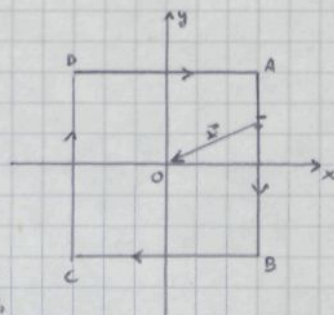
c) AB : $d\vec{e} = (0, -dy, 0)$ $\vec{r} = (-\frac{L}{2}, -y, 0)$

$$\vec{B} = -\frac{I}{c} \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{L}{2} dy \hat{k} \frac{1}{(L^2/4 + y^2)^{3/2}} = -\frac{IL}{c} \hat{k} \int_0^{L/2} dy \frac{1}{(y^2 + L^2/4)^{3/2}}$$

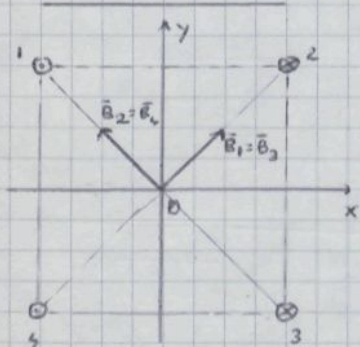
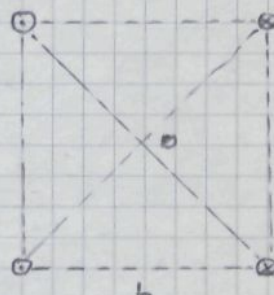
$$= -\frac{IL}{c} \hat{k} \left\{ \frac{1}{L^2/4} y + \frac{1}{(L^2/4 + y^2)^{1/2}} \right\}_0^{L/2} = -\frac{2\sqrt{2} I}{cL} \hat{k}$$

El campo total es por simetría

$$\vec{B} = -\frac{8\sqrt{2} I}{cL} \hat{k}$$



6. Cuatro alambres de cobre largos están colocados paralelamente entre sí, formando un cuadrado de lado $L = 20 \text{ cm}$. Se hace pasar por cada alambre una corriente $I = 20 \text{ A}$ en las direcciones mostradas en la figura. Determina $\vec{B}$ en el centro del cuadrado.



La distancia de O a cada alambre es $d = L/\sqrt{2}$ y por tanto para cada alambre

$$|\vec{B}_i| = \frac{2I}{cd} = \frac{2\sqrt{2} I}{cL}$$

y el campo total es

$$\vec{B} = \hat{j} 4 \frac{2\sqrt{2} I}{cL} \cos \frac{\pi}{4} \Rightarrow \vec{B} = \frac{8I}{cL} \hat{j}$$

$$L = 20 \text{ cm}, \quad c = 2.99792458 \times 10^{10} \text{ cm s}^{-1}, \quad I = 20 \times 2.99792458 \times 10^9 \frac{\text{cm coulomb}}{\text{s}}$$

$$\vec{B} = 0.8 \hat{j} \text{ gauss.}$$

- 7.- Por un conductor de radio $R = 0.5 \text{ cm}$ circula una corriente de $I = 100 \text{ A}$, uniformemente distribuida. Calcula B en todos los puntos del espacio y representa B como función de la distancia al conductor.

$$\int d\vec{e} \cdot \vec{B} = \frac{4\pi}{c} I$$

$$2\pi r B(r) = \frac{4\pi}{c} I \left\{ \frac{\pi r^2}{\pi R^2} B(r-r) + B(r-r) \right\}$$

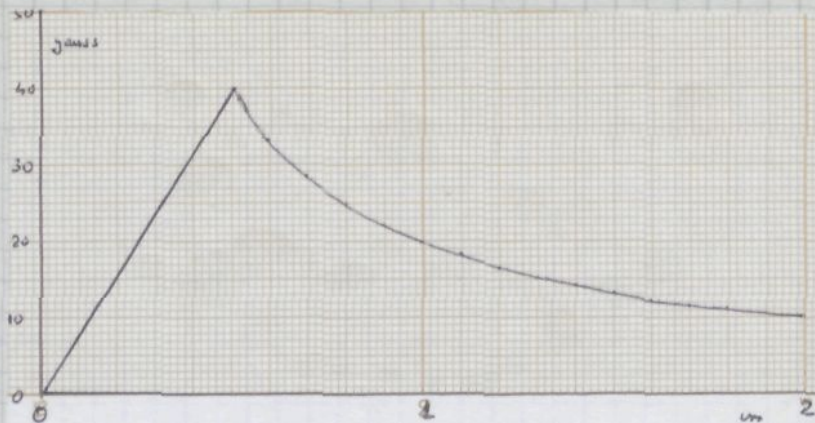
35/003

$$B(r) = \frac{2I}{c} \left\{ \frac{r}{R^2} \Theta(R-r) + \frac{1}{r} \Theta(r-R) \right\}$$

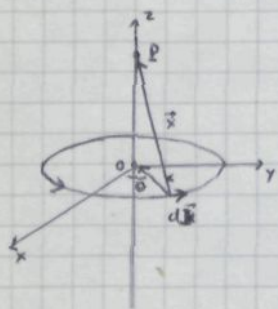
$$\frac{2I}{c} = 20 \text{ ga. cm}^{1/2} \text{ s}^{-1} = 20 \text{ gauss cm.}$$

$$B(r) = 20 \text{ gauss cm} \left\{ \frac{r}{R^2} \Theta(R-r) + \frac{1}{r} \Theta(r-R) \right\}$$

$$R = 0.5 \text{ cm}$$



8. Calcular el campo magnético creado por una espira circular, de radio R , por la cual circula una corriente I , en un punto situado sobre el eje de simetría.



$$P = (0, 0, z)$$

$$x^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow x = R \cos \theta$$

$$y = R \sin \theta$$

$$\vec{r} = (-R \cos \theta, -R \sin \theta, z)$$

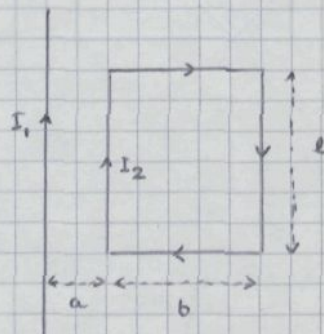
$$d\vec{l} = (-R \sin \theta d\theta, +R \cos \theta d\theta, 0)$$

$$d\vec{B} = \frac{I}{c} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3} = \frac{I}{c} \frac{d\theta}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \left\{ z R \cos \theta \hat{i} + z R \sin \theta \hat{j} + R^2 \hat{k} \right\}$$

$$\vec{B} = \frac{I}{c} \frac{2\pi}{(R^2 + z^2)^{3/2}} R^2 \hat{k}$$

$$\vec{B} = \frac{2\pi I}{c} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k}$$

9. La figura muestra un alambre muy largo que transporta una corriente $I_1 = 30 \text{ A}$. La que circula por la espira rectangular es $I_2 = 2 \text{ A}$. Calcular la fuerza resultante sobre la espira. Tomar $a = 1.0 \text{ cm}$, $b = 8.0 \text{ cm}$, $l = 30 \text{ cm}$.



El campo creado por la corriente del alambre indefinido es en $x=0$

$$\vec{B} = \left(-\frac{2I_1}{cy}, 0, 0 \right)$$

Además

$$d\vec{F} = \frac{I}{c} d\vec{l} \times \vec{B}$$

$$AB : F_1 = \int_0^l \frac{I_2}{c} (0, d\ell, 0) \times \left(-\frac{2I_1}{ca}, 0, 0 \right) = -\frac{2I_1 I_2}{c^2 a} \int_0^l d\ell \hat{j} = -\frac{2I_1 I_2 l}{c^2 a} \hat{j}$$

$$BC : F_2 = \int_a^{a+b} \frac{I_2}{c} (0, d\ell, 0) \times \left(-\frac{2I_1}{c\ell}, 0, 0 \right) = \frac{2I_1 I_2}{c^2} \int_a^{a+b} d\ell \frac{1}{\ell} \hat{k} = \frac{2I_1 I_2}{c^2} \ln \frac{a+b}{a} \hat{k}$$

$$\text{CD } \vec{F}_3 = + \frac{2 I_1 I_2 \ell}{c^2 (a+b)} \hat{j}, \quad \text{DA } \vec{F}_4 = - \frac{2 I_1 I_2}{c^2} \ln \frac{a+b}{a} \hat{j}$$

y por tanto

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^4 \vec{F}_i = \frac{2 I_1 I_2 \ell}{c^2} \left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{a+b} \right) \hat{j}$$

$$\vec{F} = - \frac{2 I_1 I_2 \ell b}{c^2 a (a+b)} \hat{j}$$

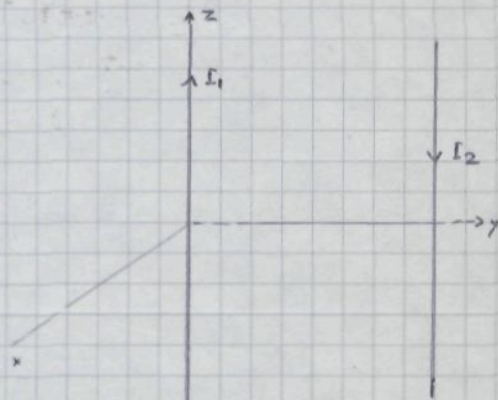
$$\vec{F} = - 2 \frac{30 \times 3 \times 10^9 \times 2 \times 3 \times 10^9 \times 30 \times 8}{3 \times 10^{10} \times 3 \times 10^{10} \times 1 (1+8)} \hat{j} = \vec{F} = -32 \hat{j} \text{ dinas}$$

10. Dos largos conductores son paralelos y están fijos a una distancia $d = 10 \text{ cm}$. Por el primero circula una corriente de $I_1 = 30 \text{ A}$ y por el segundo uno de $I_2 = 40 \text{ A}$. Las corrientes son de sentidos opuestos. Determinar: 1) El valor de $\vec{B}$ en una línea del plano de los dos conductores, paralela a ellos y a igual distancia de ambos. 2) Idem si la línea está a 5 cm del primero y a 15 cm del segundo. 3) ¿Cuál es la fuerza que por unidad de longitud actúa sobre un conductor paralelo a ambos, en su plano y a igual distancia de ambos y por el que circula una corriente $I_3 = 5 \text{ A}$ en el sentido de I_1 .

Sea el punto P de coordenadas $(0, y, 0)$. El campo creado es

$$\vec{B} = - \frac{2 I_1}{c y} \hat{i} - \frac{2 I_2}{c (d-y)} \hat{i}$$

$$\vec{B} = - \frac{2}{c} \left(\frac{I_1}{y} + \frac{I_2}{d-y} \right) \hat{i}$$



$$1) \quad y = d/2 \quad \vec{B} = - \frac{4 (I_1 + I_2)}{c d} \hat{i} \Rightarrow \vec{B} = - \frac{4 \times 70 \times 3 \times 10^9}{3 \times 10^{10} \times 10} \hat{i} \Rightarrow \vec{B} = -2.8 \hat{i} \text{ gauss}$$

$$2) \quad y = -d/2 \quad \vec{B} = \frac{4 (3I_1 - I_2)}{3 c d} \hat{i} \quad \vec{B} = + \frac{2}{3} \hat{i} \text{ gauss}$$

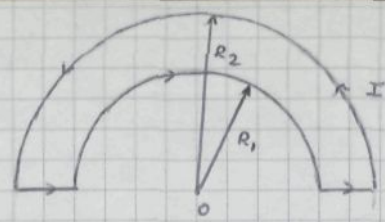
$$3) \quad d\vec{F} = \frac{I}{c} d\vec{e} \times \vec{B}$$

$$\vec{F} = \frac{I_3}{c} (0, 0, 1) \times \left(- \frac{4 (I_1 + I_2)}{c d}, 0, 0 \right) = - \frac{4 I_3 (I_1 + I_2)}{c^2 d} \hat{j}$$

$$\vec{F} = -1.4 \hat{j} \text{ dinas}$$

35/003

11. Calcular el campo magnético creado en O por el circuito de la figura



$$d\vec{B} = \frac{I}{c} \frac{d\vec{\ell} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

1) Arco exterior $x = R_2 \cos \theta$ $y = R_2 \sin \theta$

$$d\vec{\ell} = (-R_2 \sin \theta d\theta, R_2 \cos \theta d\theta, 0)$$

$$\vec{r} = (-R_2 \cos \theta, -R_2 \sin \theta, 0)$$

$$\vec{B} = \frac{I}{c} \int_0^\pi d\theta \frac{1}{R_2^3} R_2^2 \hat{k} =$$

$$\vec{B} = \frac{I\pi}{cR_2} \hat{k}$$

2) Arco interior $\vec{B} = - \frac{I\pi}{cR_1} \hat{k}$

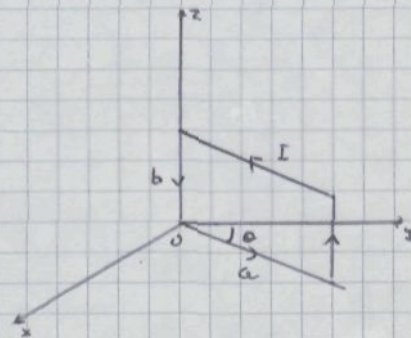
Los trozos rectilíneos no producen campo en O.

$$\vec{B} = - \frac{I\pi}{c} \frac{R_2 - R_1}{R_2 R_1} \hat{k}$$

12. Calcular el campo magnético creado en un solenoide de $N=100$ espiras/cm al un culca en el una corriente de $I=2A$.

$$B = \frac{4\pi}{c} n I = \frac{4\pi}{3 \times 10^{10}} 10^2 2 \times 3 \times 10^9 \Rightarrow B = 251.33 \text{ gauss}$$

13. Una bobina de $N=50$ espiras tiene forma rectangular con $a=6.0 \text{ cm}$ y $b=8.0 \text{ cm}$. y por ella circula una corriente $I=2.0 A$. Esta orientación como se indica en la figura y gira alrededor del eje OZ. 1) Si los conductores contenidos en el plano Oxy forman un ángulo



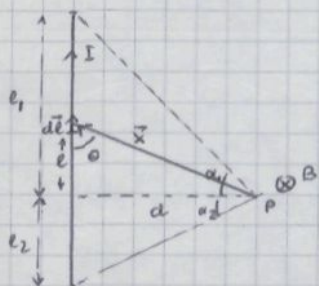
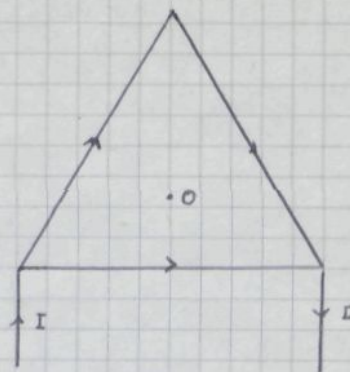
$\theta=37^\circ$ con el eje Oy ¿qué ángulo forma el vector unitario normal $\hat{n}$ a ellas en el plano Oxy? 2) ¿cuál es el momento de la bobina? 3) Hallar el par o momento de fuerzas sobre la bobina cuando existe un campo magnético $\vec{B} = 1.5 \hat{j} \text{ Tesla}$.

1) $\hat{n} = \cos \theta \hat{i} - \sin \theta \hat{j}$

2) $\vec{\mu} = \frac{I}{c} \vec{A} = \frac{I}{c} abN \hat{n} \Rightarrow \mu = 480 \hat{n} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$

3) $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} = \frac{I}{c} abNB \sin \theta \hat{k} \Rightarrow \vec{\tau} = 575 \hat{k} \text{ dinas} \times \text{cm}$

14. Un triángulo equilátero está formado por un alambre de resistencia uniforme. Su lado tiene longitud L y está dispuesto como en la figura. El punto O es la intersección de las tres medianas. Calcular el campo creado en O por la corriente que circula por cada uno de los lados del triángulo y también el campo creado por la corriente de los tres lados en O .

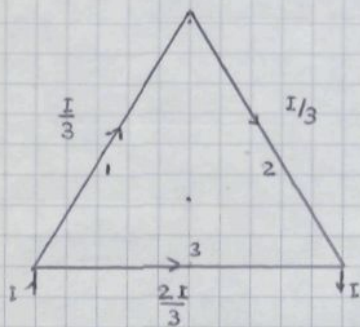


$$d\vec{B} = \frac{I}{c} \frac{d\vec{e} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

$$|\vec{B}| = \frac{I}{c} \int_{-l}^{+l} dl \frac{\sin \theta}{r^2} = \frac{I}{c} \int_{-l}^{+l} dl \frac{1}{(d^2 + l^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{I}{c} \frac{l}{d^2 (d^2 + l^2)^{1/2}} \Big|_{-l}^{+l} = \frac{I}{dc} \left\{ \frac{l_1}{(d^2 + l_1^2)^{1/2}} + \frac{l_2}{(d^2 + l_2^2)^{1/2}} \right\}$$

$$|\vec{B}| = \frac{I}{dc} [\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2]$$



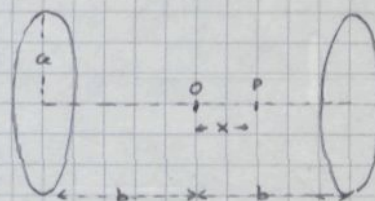
Sea $\hat{k}$ un vector unitario en $\odot$

$$d = \frac{\sqrt{3}}{6} L \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 60^\circ \quad \sin \alpha_i = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\vec{B}_1 = \frac{2I}{Lc} \hat{k}, \quad \vec{B}_2 = \frac{2I}{Lc} \hat{k}, \quad \vec{B}_3 = -\frac{4I}{Lc} \hat{k}$$

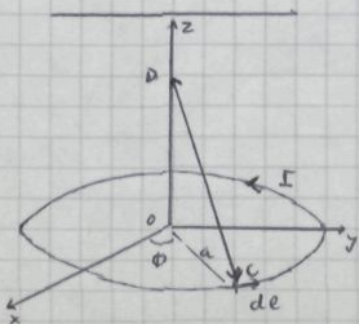
$$\vec{B} = \sum_{i=1}^3 \vec{B}_i = 0$$

15. Consideremos dos conductores circulares paralelos, ambos de radio a . Por cada uno de ellos circula una corriente I , ambas en el mismo sentido. Calcular el campo magnético $B(P)$ en el punto P . Calcular



$$A(x) = \frac{B(P) - B(O)}{B(O)}$$

Si $x^2 \ll a^2 + b^2$, desarrollar $A(x)$ en potencias de x y determinar la relación que debe existir entre a y b para que $A(x)$ no tenga términos ni lineales ni cuadráticos en x



$$d\vec{B} = \frac{I}{c} \frac{d\vec{e} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

$$C = (a \cos \phi, a \sin \phi, 0) \quad B = (0, 0, z)$$

$$\vec{r} = (-a \cos \phi, -a \sin \phi, z) \quad |\vec{r}| = (z^2 + a^2)^{1/2}$$

$$d\vec{e} = (-a \sin \phi d\phi, a \cos \phi d\phi, 0)$$

35/003

$$d\vec{B} = \frac{I}{c} \frac{a d\phi}{(a^2+z^2)^{3/2}} (z \cos\phi \hat{i} + z \sin\phi \hat{j} + a \hat{k})$$

$$\vec{B} = \int_0^{2\pi} d\vec{B} \quad B = \frac{2\pi I}{c} \frac{a^2}{(a^2+z^2)^{3/2}} \hat{k}$$

Entonces

$$\vec{B}(x) = \frac{2\pi I a^2}{c} \left\{ \frac{1}{[a^2 + (b+x)^2]^{3/2}} + \frac{1}{[a^2 + (b-x)^2]^{3/2}} \right\}$$

$$\vec{B}(0) = \frac{4\pi I a^2}{c} \frac{1}{[a^2 + b^2]^{3/2}}$$

$$\Delta(x) = \frac{1}{2} (a^2 + b^2)^{3/2} \left\{ \frac{1}{[a^2 + (b+x)^2]^{3/2}} + \frac{1}{[a^2 + (b-x)^2]^{3/2}} \right\} - 1$$

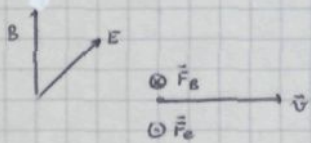
$$(a^2 + b^2)^{3/2} [a^2 + (b+x)^2]^{-3/2} = (a^2 + b^2)^{3/2} [a^2 + b^2 + 2bx + x^2]^{-3/2} = \left[1 + \frac{2b}{a^2 + b^2} x + \frac{1}{a^2 + b^2} x^2 \right]^{-3/2}$$

$$= 1 - \frac{3}{2} \frac{2b}{a^2 + b^2} x + \frac{3}{2} \frac{1}{a^2 + b^2} x^2 + \frac{15}{8} \frac{4b^2}{(a^2 + b^2)^2} x^2 + \dots$$

$$= 1 - \frac{3b}{a^2 + b^2} x + \frac{3(4b^2 - a^2)}{2(a^2 + b^2)^2} x^2 + \dots$$

$$\Delta(x) = \frac{3(4b^2 - a^2)}{(a^2 + b^2)^2} x^2 + \dots \quad \Rightarrow \quad a = 2b$$

16. Un haz de electrones se mueve en el seno de un campo eléctrico $E = 1.5 \times 10^5 \text{ V/m}$ y un campo magnético de $B = 3.0 \times 10^{-3} \text{ T}$, perpendicular al eléctrico. Ambos son perpendiculares al haz. ¿Cuál debe ser la velocidad de los electrones del haz para que este no se desvíe?



$$E = \frac{v}{c} B$$

$$\frac{v}{c} = \frac{E}{B}$$

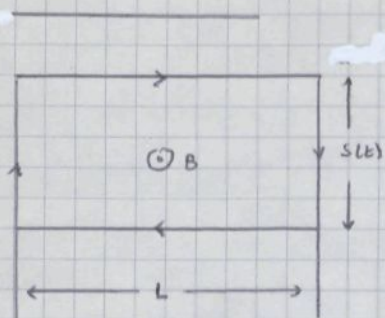
$$E = 1.5 \times 10^5 \frac{1}{300} \frac{1}{100} \text{ volt} = 5 \text{ volt}$$

$$B = 3.0 \times 10^{-3} 10^4 \text{ gauss} = 30 \text{ gauss}$$

$$\frac{v}{c} = \frac{1}{6}$$

17. Una guillotina tiene una hoja de anchura $L = 1 \text{ m}$ y una masa $M = 1 \text{ Kg}$ y cae hacia la cabeza de la víctima desde una altura considerable. Un campo magnético intenso de 1.0 Wb/m^2 está dirigido hacia afuera del papel en la región del espacio en que está la guillotina. La hoja y el vástago al sistema forman un circuito con una resistencia de $R = 10^{-2} \Omega$. A pesar de que la hoja cae muy rápidamente cuando no hay ningún campo magnético, ahora parece que se desliza tan lentamente hacia abajo.

que no hará daño a la víctima. 1) ¿En qué cae tan lentamente? 2) ¿Cuál es la velocidad máxima que adquirirá? 3) Calcular el espacio recorrido en los $T = 10$ s iniciales. 4) Calcular la energía cinética K de la guillotina en este instante 5) Discutir la conservación de la energía en el sistema



$$B = 1.0 \text{ Wb m}^{-2}, \quad M = 1 \text{ kg} \quad R = 10^{-2} \Omega \quad L = 1 \text{ m}$$

$$M \frac{dv(t)}{dt} = Mg - F_H(t)$$

donde $F_H(t)$ es la fuerza debida a $\vec{B}$

$$F_H = BL I(t) \frac{1}{c}$$

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}(t)}{R} = \frac{1}{R} \frac{1}{c} \frac{d\Phi(t)}{dt} = \frac{1}{Rc} \frac{d}{dt} BL s(t) = \frac{L}{Rc} B v(t) \Rightarrow M_F = \frac{B^2 L^2 v(t)}{Rc^2}$$

$$M \frac{dv(t)}{dt} = Mg - \frac{L^2 B^2}{Rc^2} v(t) \quad \frac{dv(t)}{dt} = - \frac{L^2 B^2}{RMc^2} v(t) + g$$

$$v(t) = \frac{MRc^2}{L^2 B^2} g \left\{ 1 - e^{-L^2 B^2 t / RMc^2} \right\}$$

$$s(t) = \frac{MRc^2}{L^2 B^2} g t - g \frac{M^2 R^2 c^4}{L^4 B^4} \left(1 - e^{-L^2 B^2 t / RMc^2} \right)$$

$$v(\infty) = \frac{MRc^2}{L^2 B^2} g$$

$$\frac{MRc^2}{L^2 B^2} = 10^3 g \frac{10^{-2}}{9 \times 10^{11} \text{ cm}} \frac{9 \times 10^{20} \text{ cm}^2}{\text{s}^2} \frac{1}{10^4 \text{ cm}^2} \frac{1}{1 \times 10^8} \frac{\text{cm s}^2}{g} = 10^{-2} \text{ s}$$

$$g = 982 \text{ cm s}^{-2}$$

$$s = 9.82 \text{ cm} \frac{t}{s} - 0.0982 \text{ cm} \left(1 - e^{-\frac{t}{10^{-2} \text{ s}}} \right)$$

$$2) \quad v(\infty) = 9.82 \text{ cm/s}$$

$$3) \quad s(10 \text{ s}) = 98.10 \text{ cm}$$

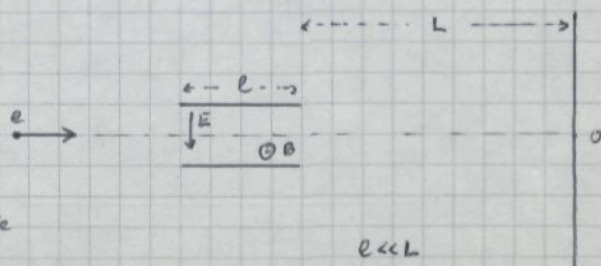
$$4) \quad K = \frac{1}{2} M v^2, \quad v(10 \text{ s}) = 9.82 \text{ cm s}^{-2} \quad K = 4.8216 \times 10^{-4} \text{ erg}$$

18. A finales del siglo pasado J.J. Thomson

midio la velocidad 10^8 m/s donde -10^8 es

la carga del electrón y m_e su masa, mediante

el aparato de la figura. Un haz de electrones se



35/003

hacia posar entre las placas de longitud l y llega a una pantalla a distancia $L \gg l$.

El campo eléctrico y magnético entre las placas están situados como se indica en la figura. En ausencia de campos el punto de impacto es 0 y cuando se ponen

los campos el punto de impacto se desvía $d_{ee}(E)$ y $d_{mg}(B)$. Thomson encontró

que para $E = 1.0 \times 10^4 \text{ N/C}$, $B/c = 3.6 \times 10^{-4} \text{ N/amp.m}$, $l = 0.05 \text{ m}$ y $L = 11.1 \text{ m}$

entonces $d_{ee} = 0.07 \text{ m}$ y $d_{mg} = 0.07 \text{ m}$. Determinar $1/m_e$.

Supongamos que sean m_e , $-|e|$ y v la masa, carga y velocidad del electrón. Si actúa una fuerza F perpendicular a la dirección inicial del movimiento, estas adquieren una aceleración $a = F/m_e$ y por tanto una velocidad transversal

$$v_{\text{per}} = t a = \frac{F}{m_e} t$$

donde t es el tiempo que se hallan sometidas a esta fuerza $t \approx l/v$, y por tanto

$$v_{\text{per}} = \frac{F l}{m_e v}, \quad v_{\text{per}} \ll v$$

Después de dejar esta zona las partículas tardan en llegar a la pantalla un tiempo

$T = L/v$ y por tanto se desplazan del punto 0 en una cantidad $d = T v_{\text{per}}$

$$d = \frac{F l L}{m_e v^2}$$

$$1) \text{ campo eléctrico } F = |e| E \quad \Rightarrow \quad d_{ee} = \frac{|e| E l L}{m_e v^2}$$

$$2) \text{ caso magnético } F = |e| \frac{v}{c} B \quad \Rightarrow \quad d_{mg} = \frac{|e| B v l L}{m_e v^2}$$

Entonces

$$\frac{|e|}{m_e} = \frac{E c^2}{B^2 l L} \frac{d_{mg}}{d_{ee}}$$

$$E = 1.0 \times 10^4 \text{ N/C} = 0.333 \text{ g}^{1/2} \text{ cm}^{-1/2} \text{ s}^{-1}$$

$$B = 3.6 \text{ g}^{1/2} \text{ cm}^{-1/2} \text{ s}^{-1}$$

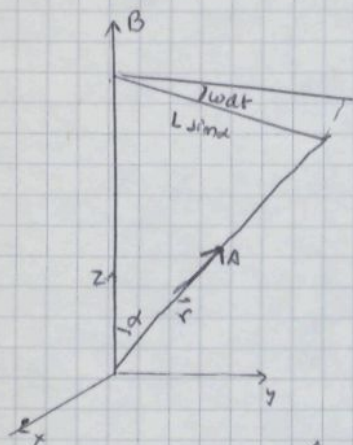
$$\frac{|e|}{m_e} = \frac{2.94 \times 10^{17} \text{ g}^{1/2} \text{ cm}^{3/2} \text{ s}^{-1}}{\text{g}}$$

a comparar con el valor actual

$$\frac{|e|}{m} = 5.272764(31) \times 10^{17} \text{ g}^{1/2} \text{ cm}^{3/2} \text{ s}^{-1}$$

19- Una varilla conductora delgada de longitud L , fija por un extremo, gira, con velocidad angular constante ω , en el seno de un campo magnético constante $\vec{B}$ que forma un ángulo α con la varilla. $\vec{B}$ coincide con el eje de giro.

1) Determinar el módulo del campo eléctrico en la varilla en función de la distancia al extremo fijo. ¿Cómo varía la dirección del campo eléctrico con el tiempo? 2) Determinar el potencial eléctrico en la varilla y comprobar que, aplicando la ley de Faraday, se obtiene la misma diferencia de potencial para los extremos de la varilla.



$$\vec{r} = r \hat{r} \quad \hat{r} = \sin\alpha \sin\omega t \hat{i} + \sin\alpha \cos\omega t \hat{j} + \cos\alpha \hat{k}$$

Si en el punto A hay una carga Q entonces la fuerza magnética que actúa es

$$\vec{F}_m = Q \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} = \frac{Q}{c} \left\{ \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{B} \right\} =$$

$$= \frac{Q}{c} B r \omega \sin\alpha (\cos\omega t \hat{i} + \sin\omega t \hat{j})$$

$$\hat{F}_m \cdot \hat{r} = \frac{Q}{c} B r \omega \sin^2\alpha$$

Entonces como la fuerza eléctrica debe equilibrar esta

$$\vec{E} = - \frac{1}{c} B r \omega \sin^2\alpha \hat{r}$$

$$\gamma \quad \frac{d\vec{E}}{dt} = + \frac{1}{c} B r \omega^2 \sin^2\alpha (\sin\omega t \hat{i} - \cos\omega t \hat{j})$$

Además

$$d\phi = -\vec{E} \cdot d\vec{r} = + \frac{1}{c} B r \omega \sin^2\alpha dr \quad \Rightarrow \quad \phi = + \frac{1}{2c} B \omega L^2 \sin^2\alpha$$

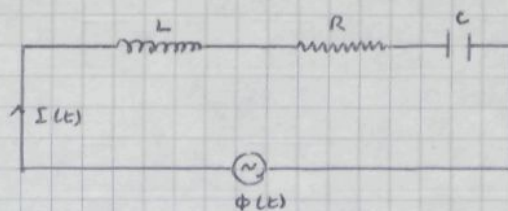
$$\text{El flujo es} \quad \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{B}{2} L^2 \sin^2\alpha \omega \quad \mathcal{E} = - \frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{2c} B L^2 \omega \sin^2\alpha$$

CORRIENTES ALTERNAS

Es frecuente el uso de corrientes alternas, que son corrientes cuyo sentido cambia

usualmente de forma periódica. Estas co-

rrientes se producen en circuitos como el dado en la figura en el que



$$\Phi(t) = \Phi_0 \cos(\omega t + \delta) \quad (1)$$

La frecuencia $\nu = 2\pi/\omega$ es en Europa de $\nu = 50$ Hertz. Si ω no es extraordinariamente elevada los efectos de radiación pueden despreciarse y entonces igualando las caídas de potencial

$$\frac{L}{C} \frac{dI(t)}{dt} + RI(t) + \frac{1}{C} Q(t) = \Phi(t) \Rightarrow$$

$$\frac{L}{C} \frac{d^2 I(t)}{dt^2} + R \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C} I(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt} \quad (2)$$

Si elegimos $\Phi(t)$ como en (1) y $\delta = 0$ entonces

$$\frac{L}{C} \frac{d^2 I(t)}{dt^2} + R \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C} I(t) = -\Phi_0 \omega \sin \omega t \quad (3)$$

$L=0$. Empezamos considerando que no hay autoinducción

$$\frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{RC} I(t) = -\frac{\Phi_0 \omega}{R} \sin \omega t \quad (4)$$

Solución de la ecuación homogénea $\frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{RC} I(t) = 0$

$$I(t) = A e^{-t/RC} \quad (5)$$

Solución particular de la inhomogénea

$$I(t) = A(t) e^{-t/RC}, \quad \dot{A}(t) = -\frac{\omega \Phi_0}{R} \sin \omega t e^{t/RC}$$

$$\dot{A}(t) = -\frac{\omega \Phi_0}{2iR} \left\{ e^{(1/RC + i\omega)t} - e^{(1/RC - i\omega)t} \right\}$$

$$A(t) = -\frac{\omega \Phi_0}{2iR} \left\{ \frac{1}{\frac{1}{RC} + i\omega} e^{(1/RC + i\omega)t} - \frac{1}{\frac{1}{RC} - i\omega} e^{(1/RC - i\omega)t} \right\}$$

$$A(t) e^{-t/RC} = -\frac{\omega \Phi_0}{2iR} \left\{ \frac{1}{\frac{1}{RC} + i\omega} e^{(1/RC + i\omega)t} - \frac{1}{\frac{1}{RC} - i\omega} e^{(1/RC - i\omega)t} \right\} \quad (6)$$

35/003

$$A(t) e^{-t/RC} = -\frac{\omega \phi_0}{2iR} \frac{1}{1/R^2 C^2 + \omega^2} \left\{ \left(\frac{1}{RC} - i\omega \right) e^{i\omega t} + \left(\frac{1}{RC} + i\omega \right) e^{-i\omega t} \right\}$$

$$A(t) e^{-t/RC} = \frac{\phi_0}{\frac{1}{R^2 C^2} + \omega^2} \left\{ \frac{\omega^2}{R} \sin \omega t - \frac{\omega}{R^2 C} \cos \omega t \right\}$$

y en tanto la solución general es

$$I(t) = A e^{-t/RC} + \frac{\phi_0}{\frac{1}{R^2 C^2} + \omega^2} \left\{ \frac{\omega^2}{R} \sin \omega t - \frac{\omega}{R^2 C} \cos \omega t \right\}, \quad L=0 \quad (7)$$

En el caso general es usual introducir

$$\text{Impedancia } Z = \left\{ R^2 + \left(\omega \frac{L}{C} - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right\}^{1/2} \quad (8)$$

$$\text{Reactancia } X = \omega \frac{L}{C} - \frac{1}{\omega C} \quad (9)$$

y en términos de estas cantidades

$$I(t) = A e^{-t/RC} + \frac{\phi_0}{Z} \left\{ \frac{R}{Z} \cos \omega t + \frac{X}{Z} \sin \omega t \right\}$$

o equivalentemente

$$I(t) = A e^{-t/RC} + \frac{\phi_0}{Z} \cos(\omega t + \alpha) \quad (10)$$

$$\cos \alpha = \frac{R}{Z}, \quad \sin \alpha = -\frac{X}{Z}$$

La corriente $A \exp(-t/RC)$ es una corriente transiente y el resto es una corriente sinusoidal. Esta segunda parte es idéntica para $L \neq 0$. La impedancia juega un papel análogo a la resistencia pero $I(t) = \phi(t)/Z$ solo si $\alpha = 0$. En el caso general se toma $|\alpha| \leq \pi/2$.

Resonancia: La corriente estacionaria, para un circuito dado, tiene un máximo de ϕ_0/Z que depende de ω . Esta cantidad es máxima cuando $Z = R$ es decir para la frecuencia resonante

$$\omega_R = \frac{1}{\sqrt{(L/C)G}} \quad (11)$$

Así en ejemplo si $\phi_0 = 250 \text{ V}$, $L = 0.100 \text{ H}$, $C = 10.0 \mu\text{F}$, $R = 25.0 \Omega$ la intensidad máxima de la corriente estacionaria es

$$I_0 = \frac{\phi_0}{Z} = \frac{250}{\sqrt{625 + \left(0.1 \omega - \frac{10^5}{\omega} \right)^2}} \text{ A.} \quad \omega_R = 10^3 \text{ rad/s} \quad (12)$$