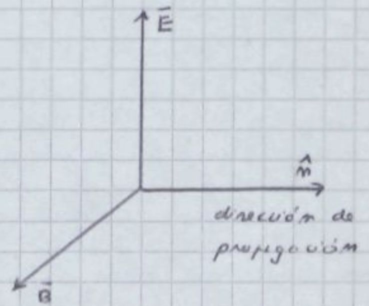
ONDAS

Movimiento ondulatorio: Se puede considerar como un transporte de energía y momento desde un punto del espacio a otro sin transporte de materia. En las ondas mecánicas, tales como la ondas en el agua, las ondas de una cuerda o las ondas sonoras, la energía y el momento se transportan por una perturbación del medio que se propaga gracias a sus propiedades elásticas. Por otra parte, en las ondas electromagnéticas, la energía y el momento son transportados por los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ que se pueden propagar incluso en el vacío.

Tipos de ondas: Se distinguen dos tipos principales de ondas

i) Ondas longitudinales: En ellas la perturbación tiene lugar en la misma dirección de la propagación. Un ejemplo de este tipo de ondas son las ondas acústicas en cualquier fluido elástico.



ii) Ondas transversales: La perturbación tiene lugar en un plano perpendicular al de propagación. Ejemplos pueden ser: ondas de superficie en líquidos; en los medios elásticos dotados de rigidez en los que intervienen efectos de cizalladura permiten la propagación de ondas transversales. En ausencia de tales efectos sólo las longitudinales son posibles. Otro ejemplo de ondas transversales son las electromagnéticas en las que $\vec{E}$, $\vec{B}$ y la dirección de propagación están relacionadas de la forma indicada en la figura

Descripción matemática: En un punto del espacio (x, y, z) y en un instante de tiempo t la perturbación viene dada por $\xi = \xi(x, y, z; t)$, donde ξ puede ser la perturbación longitudinal o representar cada una de las componentes de la transversal. En un instante t_0 el conjunto de puntos (x, y, z) que forman una superficie continua y que vienen determinados por $\xi(x, y, z; t_0) = cte$ se denominan frentes de onda.

Ondas planas: De momento nos limitaremos a considerar una onda que se propaga en la dirección Ox. Las ondas planas vienen dadas por

$$\xi = \xi_0 \cos(kx \mp \omega t + \phi) \qquad (1)$$

k = número de ondas, ω = pulsación, ϕ = fase, ξ_0 = amplitud.

1) Longitud de onda: Es la distancia mínima entre dos puntos consecutivos de iguales características vibracionales

$$\xi_0 \cos[k(x+\lambda) - \omega t + \phi] = \xi_0 \cos[kx - \omega t + \phi] \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \qquad \text{(longitud de onda)} \qquad (2)$$

2) Período T : Intervalo mínimo de tiempo para que el estado vibracional de un punto se repita

$$\xi_0 \cos[kx - \omega(t+T) + \phi] = \xi_0 \cos[kx - \omega t + \phi] \Rightarrow$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \text{(período)} \qquad (3)$$

3) La frecuencia se define como

$$\nu = \frac{1}{T} \qquad \text{(frecuencia)} \Rightarrow \nu = \frac{\omega}{2\pi} \qquad (4)$$

4) Velocidad de propagación. Considérese que durante un tiempo Δt una fuente emite ondas de frecuencia ν. En este tiempo el número de ondas generadas es $N = \nu \Delta t$. La primera onda generada recorre una distancia $v \Delta t$, donde v es su velocidad de propagación. El cociente de $v\Delta t$ y $\nu \Delta t$ es la longitud de onda

$$\lambda = \frac{v}{\nu} \quad , \quad \lambda = vT \quad , \quad v = \frac{\omega}{k} \qquad (5)$$

Notar que una forma alternativa de escribir la onda es

$$\xi = \xi_0 \cos[k(x - vt) + \phi] \qquad (6)$$

5) Ecuación de ondas. Notar que

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -k^2 \xi \quad , \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -k^2 v^2 \xi \Rightarrow$$

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0 \qquad (7)$$

que es, como ya se comentó, la ecuación de ondas en 1+1 dimensión.

Ondas planas. En general

$$\xi = \xi_0 \cos[\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t + \phi] \qquad (8)$$

Superficies de onda : $\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t_0 + \phi = cte. \Rightarrow$ planos

$\vec{k}$ es el vector número de ondas y es perpendicular a la superficie de onda ~~y~~ e indica la dirección de propagación.

Principio de superposición: Es un hecho experimental que para muchas clases de ondas (ondas electromagnéticas en el vacío, ondas usuales de pequeña amplitud, ...) cuando en un punto del espacio coinciden varias perturbaciones ondulatorias de la misma clase, entonces la perturbación resultante no es más que la suma algebraica de las distintas perturbaciones.

Interferencia: Un típico efecto debido al principio de superposición es el fenómeno de interferencia de ondas. Consideremos dos ondas

$$\xi_1 = \xi_0 \cos[kx - \omega t + \phi_1] \quad , \quad \xi_2 = \xi_0 \cos[kx - \omega t + \phi_2] \qquad (1)$$

entonces en un punto del espacio se produce una perturbación

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = \xi_0 \{ \cos[kx - \omega t + \phi_1] + \cos[kx - \omega t + \phi_2] \}$$

Teniendo en mente que $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ se obtiene

$$\xi = 2\xi_0 \cos\frac{\delta}{2} \cos[kx - \omega t + \phi_1 + \tfrac{1}{2}\delta] \qquad \delta \equiv \phi_2 - \phi_1 \qquad (2)$$

que es una nueva onda plana de la misma frecuencia y longitud de onda, con desfase $\phi_1 + \frac{1}{2}\delta$ y amplitud $(2\xi_0 \cos(\delta/2))$. Notar que

i) $\delta = 0$. Interferencia constructiva: las ondas están en fase y la onda resultante tiene amplitud doble

ii) $\delta = \pi$. Interferencia destructiva. Las ondas están en oposición de fase y $\xi = 0$

Nota: Démonos cuenta de que es más cómodo que trabajar con senos y cosenos hacerlo con exponenciales

$$\xi_1 = \xi_0 e^{+i(kx - \omega t + \phi_1)} \quad , \quad \xi_2 = \xi_0 e^{i(kx - \omega t + \phi_2)} \qquad (3)$$

donde se sobreentiende que para reproducir (1) debemos tomar partes reales. Entonces

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = \xi_0 [e^{i(kx - \omega t + \phi_1)} + e^{i(kx - \omega t + \phi_1 + \delta)}] =$$

$$= \xi_0 e^{i(kx - \omega t + \phi_1 + \delta/2)} [e^{-i\delta/2} + e^{i\delta/2}] = 2\xi_0 \cos\frac{\delta}{2} e^{i(kx - \omega t + \phi_1 + \delta/2)}$$

que es el resultado hallado antes.

Nota. Una causa común para la existencia de desfasajes entre dos ondas es una diferencia en la longitud del trayecto que han de recorrer dos ondas desde la fuente S hasta alcanzar el punto A. Si es Δx la diferencia de la longitud de las dos trayectorias entonces la diferencia de fase en A es

$$\Delta\phi = k\Delta x = 2\pi\frac{\Delta x}{\lambda} \qquad (4)$$

Interferencia: Consideremos ahora la superposición de dos ondas de la misma clase y de la misma amplitud pero con valores de k y ω distintos

$$\xi_i = \xi_0 \cos(k_i x - \omega_i t) \qquad i = 1, 2 \qquad (5)$$

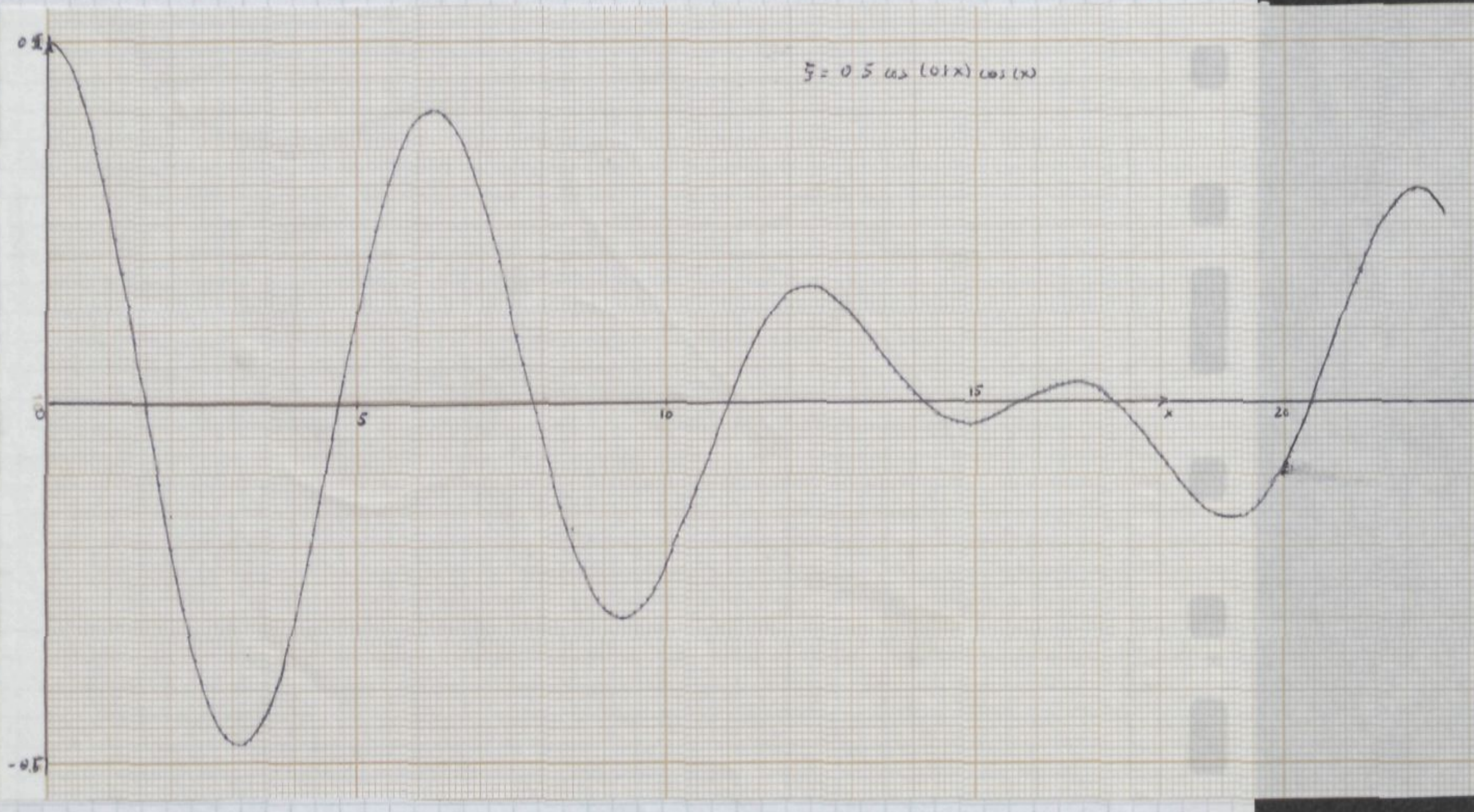
Entonces

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2\xi_0 \cos\left(\frac{1}{2}\Delta k \cdot x - \frac{1}{2}\Delta\omega t\right)\cos\left(\bar{k}x - \bar{\omega}t\right)$$

$$\bar{k} = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \quad , \quad \bar{\omega} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) \quad , \qquad (6)$$

$$\Delta k = k_2 - k_1 \quad , \quad \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$$

Si suponemos que $\Delta k \ll \bar{k}$ y $\Delta\omega \ll \bar{\omega}$ entonces la onda $\cos(\bar{k}x - \bar{\omega}t)$ tiene longitud de onda y periodo muy parecidos a la onda original, pero se halla modulada por $\cos[(\Delta k x - \Delta\omega t)/2]$ que es de longitud de onda y periodo mucho mayor.



Velocidad de fase: Es la velocidad de la onda resultante

$$v_f = \frac{\bar{\omega}}{\bar{k}}$$

y es casi la misma que la de las ondas individuales.

Velocidad de grupo: Es la velocidad de la envolvente

$$v_g = \frac{\Delta \omega}{\Delta k} \tag{1}$$

Análisis armónico: Hasta aquí hemos considerado ondas planas o superposición de un par de éstas. Hay ocasiones en que interesa trabajar con ondas periódicas de forma no sinusoidal. Entonces se puede usar el siguiente teorema: Sea $f(x)$ una función suficiente bien comportada y periódica

$$f(x+\lambda) = f(x) \tag{2}$$

entonces, casi por doquier,

$$f(x) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\frac{2\pi m x}{\lambda} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin\frac{2\pi m x}{\lambda}$$

$$a_0 = \frac{1}{\lambda}\int_0^{\lambda} dx\, f(x) \quad , \quad a_m = \frac{2}{\lambda}\int_0^{\lambda} dx\, f(x)\cos\frac{2\pi m x}{\lambda} \quad , \quad b_m = \frac{2}{\lambda}\int_0^{\lambda} dx\, f(x)\sin\frac{2\pi m x}{\lambda} \tag{3}$$

Esta serie se llama de Fourier.

Ejemplo : $\left.\begin{array}{ll} f(x) = 1 & 0 \le x \le 1 \\ f(x) = -1 & 1 \le x \le 2 \end{array}\right\}$ con $\lambda = 2$

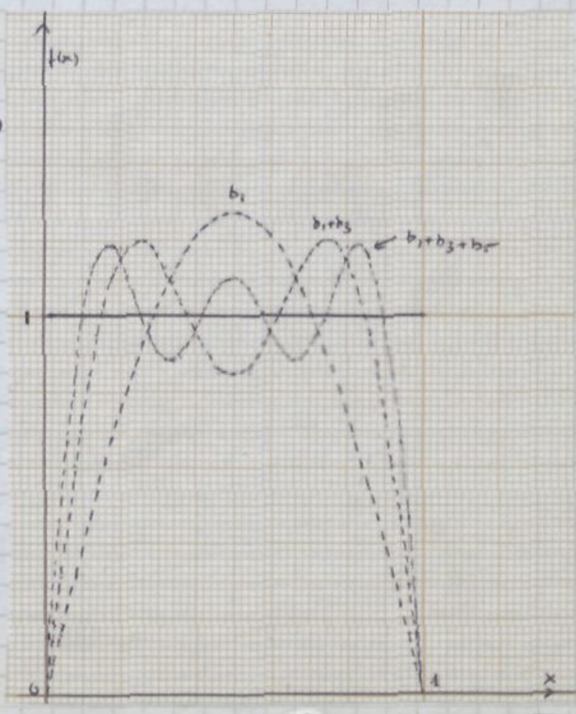
$$a_0 = 0$$

$$a_m = \frac{2}{\lambda}\left\{\int_0^1 dx \cos m\pi x - \int_1^2 dx \cos m\pi x\right\} = 0$$

$$b_m = \frac{2}{\lambda}\left\{\int_0^1 dx \sin m\pi x - \int_1^2 dx \sin m\pi x\right\} = \frac{2}{m\pi}\left[1 - (-1)^m\right] \tag{4}$$

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4}{\pi}\,\frac{1}{2m+1}\sin(2m+1)\pi x \tag{5}$$

En la figura adjunta se representan los tres primeros términos de la serie



36/001

Transformada de Fourier. Si $f(x)$ es suficientemente regular admite una descomposición como superposición infinita de ondas planas

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, \hat{f}(k)\, e^{ikx} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x)\, e^{-ikx} \tag{6}$$

Si queremos que $f(x) = f^*(x)$ basta exigir que $\hat{f}^*(-k) = \hat{f}(k)$.

Paquetes de ondas: Se llama así a una onda de la forma

$$\xi(x;t) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, f(k)\, e^{+i[kx - \omega(k)t]} \tag{7}$$

es decir una superposición infinita de ondas planas con número de ondas k y pulsación $\omega = \omega(k)$; esta función $\omega = \omega(k)$ se llama relación de dispersión.

Propiedades: Veamos algunas propiedades de los paquetes de ondas

1) Supongamos que

$$\xi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, f(k)\, e^{ikx} \quad , \quad f(k) = \begin{cases} 1 & |k| \leq \Delta k/2 \\ 0 & |k| \geq \Delta k/2 \end{cases}$$

entonces

$$\xi(x,0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{1}{x}\, \sin\frac{\Delta k . x}{2} \tag{8}$$

Entonces $\xi(x,0)$ es importante sólo si $\Delta k . x \lesssim 1$. Esta relación es totalmente general: si queremos producir un pulso muy localizado en el espacio es necesaria la superposición de un gran número de ondas con números de ondas distintos: $\Delta k \simeq 1/\Delta x$, donde Δx es el tamaño del paquete. Notar además que si Δk es pequeño entonces $\Delta\omega \simeq v\,\Delta k$ donde v es la velocidad de propagación; entonces

$$\Delta\omega\, \Delta t \simeq v\, \Delta k\, \Delta t \simeq \Delta x\, \Delta k \simeq 1 \tag{9}$$

Las relaciones

$$\Delta x . \Delta k \simeq 1 \quad , \quad \Delta t . \Delta\omega \simeq 1 \tag{10}$$

son válidas para todo pulso de ondas.

Estas relaciones son de particular importancia en la teoría de comunicaciones y en mecánica cuántica. Como la información no puede transmitirse mediante una onda plana que no tiene ni principio ni fin, la transmisión de pulsos breves implica la necesidad de poder producir amplios espectros de frecuencias.

En Mecánica Cuántica, el estado de una partícula se describe mediante un paquete de ondas cuya anchura refleja la incertidumbre en la posición de la partícula Δx. Los momentos posibles de la partícula son $p = \hbar k$, donde k son los números de onda que forman el paquete. Entonces

$$\Delta x \cdot \Delta p \simeq \hbar \qquad \text{(Relación de indeterminación de Heisemberg)} \qquad (1)$$

2) Velocidad de fase y de grupo: En un medio cualquiera existe una ley de dispersión $\omega = \omega(k)$. Se llama velocidad de grupo de un paquete a la velocidad con la que se mueve el paquete como un todo y se puede ver que vale

$$v_g = \frac{d\,\omega(k)}{dk} \qquad (2)$$

Por otra parte cada onda que compone el paquete tiene una k y una $\omega = \omega(k)$ y se mueve con la llamada velocidad de fase

$$v_f = \frac{\omega(k)}{k} \qquad (3)$$

Notar que

$$v_g = \frac{d}{dk}\left[v_f\, k \right] = v_f + k\,\frac{dv_f}{dk} \qquad (4)$$

Si i) $v_f = cte \Rightarrow v_g = v_f$: medio no dispersivo

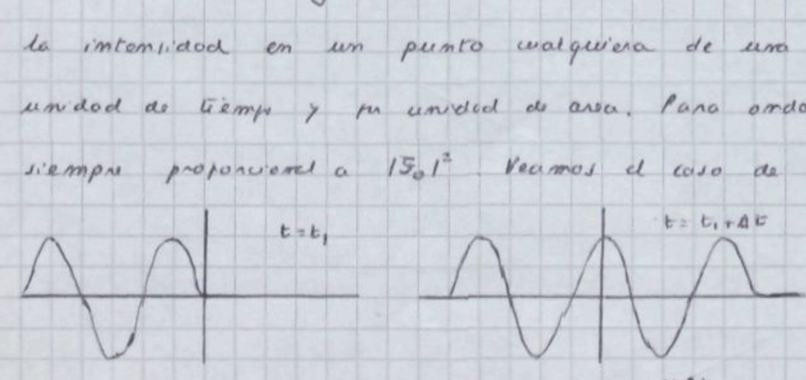
ii) $v_f \neq cte \Rightarrow v_g \neq v_f$: medio dispersivo

El nombre de medio no dispersivo es debido a que

$$\xi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, f(k)\, e^{i(kx-\omega t)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, f(k)\, e^{ik(x - v_f t)} = \xi(x - v_f t, 0) \qquad (5)$$

es decir el paquete de ondas se propaga sin deformarse.

Intensidad: El transporte de energía por una onda se escribe ordinariamente en función de la intensidad de onda, definida como la potencia media a la cual transmite la onda energía por unidad de área normal a la dirección de propagación. Es decir, la intensidad en un punto cualquiera de una onda es la energía incidente media por unidad de tiempo y por unidad de area. Para ondas planas la intensidad de onda es siempre proporcional a $|\xi_0|^2$. Veamos el caso de una onda que viaja por una cuerda.



Sea ω su pulsación. La energía de un segmento de cuerda de masa Δm tiene la misma forma que la energía de un oscilador armónico

36/001

y por tanto

$$\Delta E = \frac{1}{2} \Delta m \, \omega^2 \xi_0^2 \qquad (6)$$

Si ρ es la densidad lineal de la cuerda, la densidad lineal de energía es $\mathcal{E} = \frac{1}{2} \rho \, \omega^2 \xi_0^2$ y la intensidad es por tanto

$$I = \frac{1}{2} \rho v \omega^2 \xi_0^2 \qquad (7).$$

Polarización: Este es un fenómeno típico de las ondas transversales. Consideremos una onda que se propague según Ox, entonces la vibración más general es

$$\xi_y(x;t) = \xi_{0y} \cos[kx - \omega t + \phi_y] \quad , \quad \xi_z(x;t) = \xi_{0z} \cos[kx - \omega t + \phi_z] \qquad (8)$$

Consideremos ahora el lugar geométrico de $\vec{\xi} = (\xi_y, \xi_z)$

$$\xi_y = \xi_{0y} \cos[kx - \omega t + \phi_y] \quad , \quad \xi_z = \xi_{0z} \cos[kx - \omega t + \phi_y + \delta] \qquad \delta \equiv \phi_z - \phi_y \qquad (9)$$

$$\Rightarrow \frac{\xi_y}{\xi_{0y}} = \cos[kx - \omega t + \phi_y] \quad , \quad \frac{\xi_z}{\xi_{0z}} = \cos[kx - \omega t + \phi_y]\cos\delta - \sin[kx - \omega t + \phi_y]\sin\delta \Rightarrow$$

$$\frac{\xi_y}{\xi_{0y}} = \cos[kx - \omega t + \phi_y] \quad , \quad \frac{\xi_z}{\xi_{0z}} - \frac{\xi_y}{\xi_{0y}}\cos\delta = -\sin\delta \sin[kx - \omega t + \phi_y] \Rightarrow$$

$$\frac{\xi_y}{\xi_{0y}}\cos\delta - \frac{\xi_z}{\xi_{0z}} = \sin[kx - \omega t + \phi_y]\sin\delta \quad , \quad \frac{\xi_y}{\xi_{0y}}\sin\delta = \cos[kx - \omega t + \phi_y]\sin\delta$$

Elevando estas dos últimas expresiones al cuadrado y sumándolas se obtiene

$$\frac{\xi_y^2}{\xi_{0y}^2} + \frac{\xi_z^2}{\xi_{0z}^2} - 2\frac{\xi_y}{\xi_{0y}}\frac{\xi_z}{\xi_{0z}}\cos\delta = \sin^2\delta \qquad (10)$$

El lugar geométrico de (ξ_y, ξ_z) es pues, en general, una elipse que se denomina elipse de polarización.

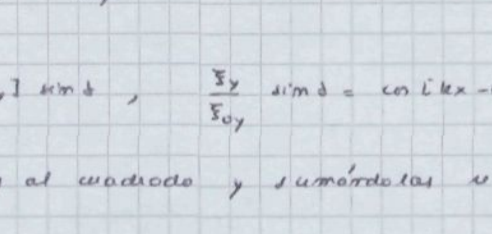
$$\frac{\xi_y^2}{\xi_{0y}^2} + \frac{\xi_z^2}{\xi_{0z}^2} - 2\frac{\xi_y}{\xi_{0y}}\frac{\xi_z}{\xi_{0z}}\cos\delta = \sin^2\delta \qquad \delta \equiv \phi_z - \phi_y \qquad (11)$$

$$\xi_i(x;t) = \xi_{0i}\cos[kx - \omega t + \phi_i] \qquad i = y, z$$

Casos particulares

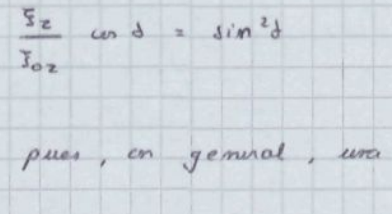
1) $\delta = 0$ $\quad \left(\frac{\xi_y}{\xi_{0y}} - \frac{\xi_z}{\xi_{0z}}\right)^2 = 0$

Luz polarizada rectilíneamente



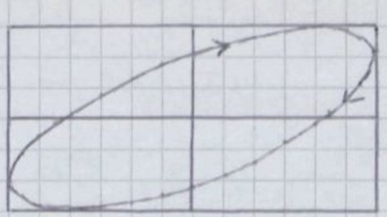
2) $\delta = \pi$ $\quad \left(\frac{\xi_y}{\xi_{0y}} + \frac{\xi_z}{\xi_{0z}}\right)^2 = 0$

Luz polarizada rectilíneamente



3) $0 < \delta < \pi$

Luz elípticamente polarizada dextrogira



4) $\pi < \delta < 2\pi$

Luz elípticamente polarizada levogira

5) Si $E_{0x} = E_{0y}$ y $\delta = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ $E_y^2 + E_z^2 = E_0^2$

es decir, luz circularmente polarizada.

Las ondas que son producidas por una fuente única acostumbran a estar polarizadas, pero no sucede así si, como es habitual, muchas fuentes puntuales forman la fuente considerada. Por ejemplo si consideramos la luz, una onda luminosa está normalmente originada por millones de átomos que se desexcitan de forma independiente. El campo eléctrico correspondiente a una onda que se propague según Ox se puede descomponer en cada instante en E_y, E_z, pero la diferencia de fase δ será una función muy variable con t y no habrá efecto neto de polarización. Esto es debido a que no existe, en general, ninguna correlación entre los $\vec{E}$ producidos por los distintos átomos. Si se desea tener luz polarizada se deberá de alguna forma producir, como veremos más adelante, a polarizarla.

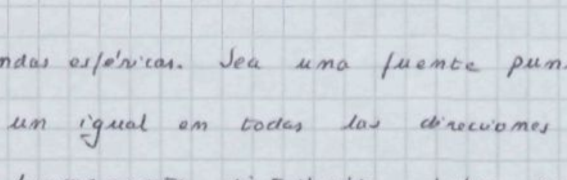
Ondas esféricas. Sea una fuente puntual y admitamos que la energía se dispersa por un igual en todas las direcciones. A una distancia r, la energía se halla uniformemente distribuida sobre una superficie esférica de radio r y área $4\pi r^2$ y por tanto su intensidad disminuye como $1/r^2$. Podemos pues escribir

$$E(\vec{r}, t) = \frac{E_0}{r} \cos\left[kr - \omega t + \phi \right] \qquad (1)$$

Para estas ondas esféricas los frentes de onda son las esferas $kr - \omega t + \phi = cte$. Dos esferas correspondientes a dos máximos sucesivos tienen radios que difieren en $2\pi/k = \lambda$.

Efecto Doppler.

1) Consideremos en primer lugar el efecto Doppler que se produce en ondas sonoras. Consideremos un problema unidimensional. Sean u_S y u_R las velocidades de la fuente S y el receptor R con relación al aire, que es el medio conductor de las ondas sonoras. Sea ν la frecuencia y $T = 1/\nu$ el período de la onda emitida. Para facilitar la discusión supondremos que se emiten breves pulsos separados por el tiempo T. Sea v la velocidad de propagación de la onda en el aire. Supongamos que en el instante $t=0$ se emite un pulso P_1 y en el instante $t=T$



36/001

un segundo pulso P_2. Durante el tiempo T el pulso P_1 recorre una distancia vT y la fuente una distancia $u_s T$. Por tanto la distancia $P_1 P_2$ que es la longitud de onda efectiva λ' es

$$\lambda' = (v - u_s) T = \frac{v - u_s}{\nu} \qquad (2)$$

La velocidad de los dos pulsos relativa al receptor es $v - u_R$ y por tanto el intervalo de tiempo entre la llegada de P_1 y P_2 a R es

$$T' = \frac{\lambda'}{v - u_R} = \frac{1}{\nu} \frac{v - u_s}{v - u_R} \Rightarrow \nu' = \nu \frac{1 - u_R/v}{1 - u_s/v} \qquad (3)$$

Se ha supuesto implícitamente que $u_R, u_s < v$, de lo contrario aparecen fenómenos tales como ondas de choque, que no discutiremos aquí.

1) Fuente en reposo y receptor en movimiento $(u_s = 0, u_R = u)$

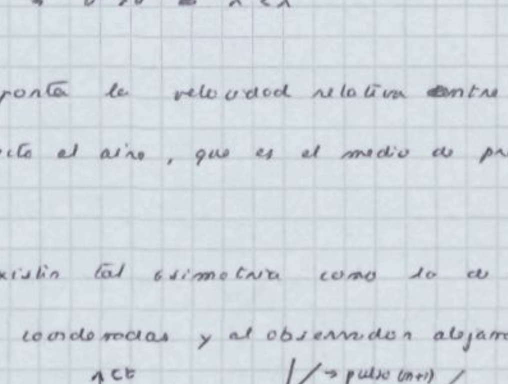
$$\nu' = \nu \left(1 - \frac{u}{v}\right) \qquad \begin{array}{ll} u > 0 & \text{alejandose} \Rightarrow \nu' < \nu \Leftrightarrow \lambda' > \lambda \\ u < 0 & \text{acercandose} \Rightarrow \nu' > \nu \Leftrightarrow \lambda' < \lambda \end{array} \qquad (4)$$

2) Fuente en movimiento y receptor en reposo $(u_s = u, u_R = 0)$

$$\nu' = \frac{\nu}{1 + \frac{u}{v}} \qquad \begin{array}{ll} u > 0 & \text{alejandose} \Rightarrow \nu' < \nu \Leftrightarrow \lambda' > \lambda \\ u < 0 & \text{acercandose} \Rightarrow \nu' > \nu \Leftrightarrow \lambda' < \lambda \end{array} \qquad (5)$$

Notar que en el caso considerado no sólo importa la velocidad relativa entre S y R sino también la velocidad absoluta con respecto al aire, que es el medio de propagación.

2) La luz se propaga en el vacío y no puede existir tal asimetría como la de (4) y (5). Consideraremos la fuente en el origen de coordenadas y al observador alejandose a una velocidad u.



Observador en reposo con la fuente.

$$x_1 = c t_1 = x_0 + u t_1 \quad , \quad x_2 = c(t_2 - mT) = x_0 + u t_2$$

$$\Rightarrow t_2 - t_1 = \frac{mcT}{c - u} \quad , \quad x_2 - x_1 = \frac{mcTu}{c - u}$$

¿Que ve el observador S' solidario con el receptor?

$$t_2' - t_1' = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \left\{ (t_2 - t_1) - \frac{u}{c^2}(x_2 - x_1) \right\} = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \left\{ \frac{mcT}{c - u} - \frac{u^2}{c^2} \frac{mcT}{c - u} \right\}$$

y en este periodo S' recibe m señales con lo cual el periodo que el observará será

$$T' = \frac{t_2' - t_1'}{m} = \frac{1}{m} \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \frac{mcT}{c - u} \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \Rightarrow T' = T \frac{1}{1 - u/c} \sqrt{1 - u^2/c^2}$$

Así pues

$$T' = T\sqrt{\frac{1+u/c}{1-u/c}} \qquad \nu' = \nu\sqrt{\frac{1-u/c}{1+u/c}} \qquad (1)$$

$$\lambda' = cT' = \lambda\sqrt{\frac{1+u/c}{1-u/c}}$$

y en particular

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda'-\lambda}{\lambda} = \left(\frac{1+u/c}{1-u/c}\right)^{1/2} - 1 \qquad (2)$$

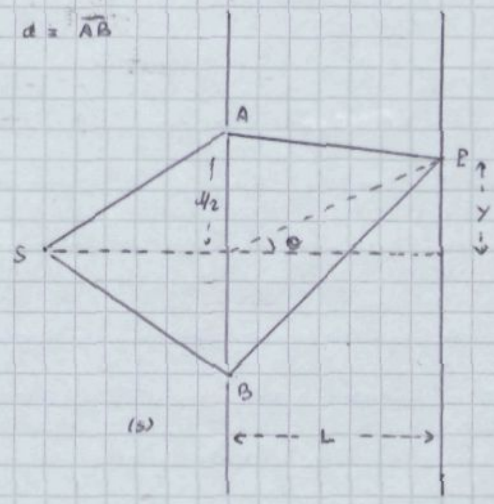
$u>0$ alejándose $\Delta\lambda/\lambda > 0 \Rightarrow \lambda' > \lambda$ corrimiento hacia el rojo (3)

$u<0$ acercándose $\Delta\lambda/\lambda < 0 \Rightarrow \lambda' < \lambda$ corrimiento hacia el azul

Notar

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \underset{u/c \to 0}{\simeq} \frac{u}{c} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2} + \frac{1}{2}\frac{u^3}{c^3} + \cdots \qquad (4)$$

Experiencia de Young: Es una de las experiencias más típicas para detectar el fenómeno de las interferencias. Consideremos la fuente luminosa S. Admitiremos que las ondas pasan por los agujeros A y B y se superponen en P con la misma intensidad. En esta aproximación las ondas que llegan a P son



$$\xi_A = \xi_0 \sin(\omega t + \phi) \quad , \quad \xi_B = \xi_0 \sin(\omega t + \phi + \delta) \qquad (5)$$

Procedamos a calcular δ:

$$\overline{AP} = \left[L^2 + \left(\frac{d}{2} - y\right)^2\right]^{1/2} \qquad \overline{BP} = \left[L^2 + \left(\frac{d}{2} + y\right)^2\right]^{1/2}$$

$$\overline{BP} - \overline{AP} = \left[L^2 + y^2 + dy + d^2/4\right]^{1/2} - \left[L^2 + y^2 - dy + d^2/4\right]^{1/2} =$$

$$= \sqrt{L^2+y^2}\left\{\left[1 + \frac{dy}{L^2+y^2} + \frac{d^2}{4(L^2+y^2)}\right]^{1/2} - \left[1 - \frac{dy}{L^2+y^2} + \frac{d^2}{4(L^2+y^2)}\right]^{1/2}\right\} \overset{L \gg d}{=}$$

$$= \sqrt{L^2+y^2}\left\{1 + \frac{dy}{2(L^2+y^2)} + \frac{d^2}{8(L^2+y^2)} - 1 + \frac{dy}{2(L^2+y^2)} - \frac{d^2}{8(L^2+y^2)} + \cdots\right\} = \frac{dy}{\sqrt{L^2+y^2}}$$

$$= d\sin\theta \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{2\pi d \sin\theta}{\lambda} \qquad (6)$$

La onda en P es pues

36/001

$$\xi = \xi_A + \xi_B = 2\xi_0 \cos\frac{\delta}{2}\sin\left(\omega t + \phi + \frac{1}{2}\delta\right) \qquad (7)$$

La intensidad que se registra en P es

$$I = \frac{1}{T}\int_0^T dt\, |\xi(t)|^2 = 4\xi_0^2 \cos^2\frac{\delta}{2}\;\frac{1}{T}\int_0^T dt\, \sin^2(\omega t + \phi + \tfrac{1}{2}\delta) =$$

$$= 4\xi_0^2\cos^2\frac{\delta}{2}\;\frac{1}{T\omega}\int_0^{\omega T} dx\, \sin^2 x = 4\xi_0^2 \cos^2\frac{\delta}{2}\;\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dx\,\sin^2 x = 4\xi_0^2\cos^2\frac{\delta}{2}\;\frac{1}{2\pi}\,\pi$$

$$I = 2\xi_0^2 \cos^2\left\{\frac{\pi}{\lambda}\, d\sin\theta\right\} \qquad (8)$$

Máximos de intensidad $\quad \frac{\pi}{\lambda} d\sin\theta = n\pi \Rightarrow d\sin\theta = n\lambda \quad n=0,1,2,\ldots$

La diferencia en longitud de los caminos es un multiplo entero de λ

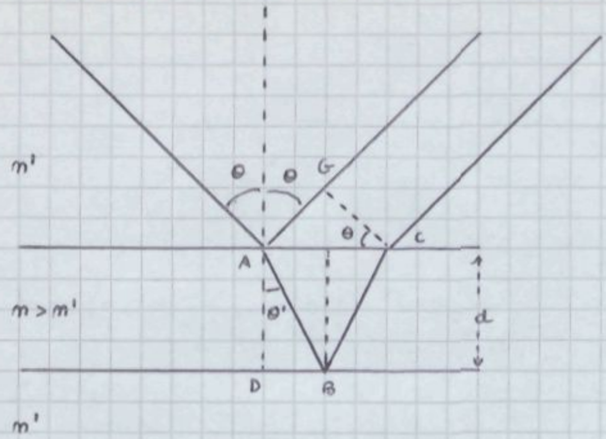
Mínimos de intensidad $\quad \frac{\pi}{\lambda} d\sin\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow d\sin\theta = (n+1/2)\lambda \quad n=0,1,2,\ldots$

La diferencia en longitud de los caminos es un multiplo semientero de λ.

En la aproximación usada para deducir (8) los máximos son todos de $I = 2\xi_0^2$ y los mínimos de $I=0$. En realidad esto no es así pues la onda que recorre mayor camino tiene una amplitud menor y al superponerse los máximos son cada vez más debiles a medida que n crece y los mínimos cada vez menos acusados a medida que n crece, de forma que, en el mejor de los casos, se ven solo unas pocas franjas de interferencia.

Coherencia. ¿Cuando se produce el diagrama de interferencias anterior? Para que el razonamiento anterior sea cierto es necesario que la diferencia de fases sea constante en el tiempo. Si la fuente única es substituida por dos fuentes muy próximas no se producirán, en general, fenómenos de interferencia. Solo aparecerán estos si ambas fuentes están en fase o tienen una diferencia de fase constante en el tiempo y en este caso se dice que las fuentes son coherentes. Pongamos por ejemplo una vela en A y otra en B. Cada vela, que podemos considerar puntual a escala macroscópica, está formada por millones de átomos. Como es imposible predecir el tiempo exacto en que un átomo particular se desexcita la fase fluctúa aleatoriamente. Se producen muchas fluctuaciones en el valor de $\delta(t)$ que cambia en intervalos del orden de 10^{-8} s. y lo único que se mide es el promedio temporal de (8) y las figuras de interferencia desaparecen.

Interferencias en láminas delgadas. Otro fenómeno fácilmente observable son las interferencias cuando la luz incide sobre una lámina delgada. Consideremos la situación representada en la figura



La diferencia de caminos ópticos es

$$\Delta = n\,(\overline{AB} + \overline{BC}) - n'\,(AG) \qquad (1)$$

Recordad que la velocidad de propagación de la luz en un medio material de índice de refracción n es $v = \frac{c}{n}$ y que la longitud de onda en el medio λ' comparada con la del vacío λ es $\lambda' = vT = \frac{1}{n}\lambda$ y $k' = nk$ y por esto hemos multiplicado los caminos geométricos por su índice de refracción. Recordemos además que

$$\frac{\sin\theta}{n} = \frac{\sin\theta'}{n'} \qquad (\text{Ley de Snell}) \qquad (2)$$

De aquí

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \frac{d}{\cos\theta'} \quad , \quad \overline{AG} = \overline{AC}\sin\theta = 2\overline{AB}\sin\theta'\sin\theta = 2d\,\frac{\sin\theta'}{\cos\theta'}\sin\theta .$$

$$\Delta = n\,\frac{2d}{\cos\theta'} - n'\,2d\,\frac{\sin\theta'}{\cos\theta'}\sin\theta = \frac{2dn}{\cos\theta'}\left(1 - \frac{n'}{n}\sin\theta\sin\theta'\right) = \frac{2dn}{\cos\theta'}\left(1 - \sin^2\theta'\right)$$

$$\Delta = 2dn\cos\theta' \qquad (3)$$

Sería de esperar que si $2dn\cos\theta' = N\lambda$, $N = 0,1,2 \ldots$ apareciera interferencia constructiva. En realidad esto no es así pues, se puede probar, que cuando la luz se refleja en el punto A hay un cambio de fase de π por ser $n > n'$, mientras que no hay tal cambio de fase en B pues la reflexión es de un medio de n a n' con $n > n'$. La condición de interferencia constructiva es pues

$$2dn\cos\theta' = (2N+1)\,\frac{\lambda}{2} \quad , \; N = 0, 1, 2, \ldots \qquad (4)$$

Si una película delgada se ilumina con luz blanca al mirarla se ven irisaciones debido a que para algunos colores, según el espesor y el ángulo de observación, tienen interferencia destructiva y otros constructiva.

Propagación de ondas: La descripción de la propagación de una onda es muy simple si es monocromática y no encuentra obstrucciones en su camino. El análisis de Fourier hace que tampoco existan problemas para ondas no monocromáticas. En particular una onda esférica puede describirse, como ya se ha comentado antes, mediante

$$\xi(r,t) = \frac{\xi_0}{r}\cos(kr - \omega t + \phi) \qquad (5)$$

36/001

para todo valor de $r \geq 0$ y t, con tal de que se mueva a través de un espacio homogeneo y sin obstáculos. En este caso los frentes de onda son

$$r = \frac{\omega}{k} t + cte$$

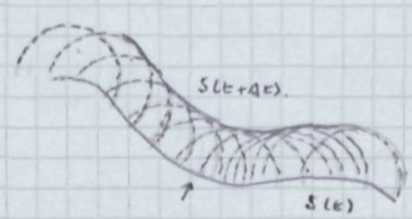
y se mueven hacia adelante radialmente. En el caso de ondas planas que se mueven en la dirección $\bar{k}$ se tiene

$$\xi(\bar{x}; t) = \xi_0 \cos(\bar{k}\bar{x} - \omega t + \phi)$$

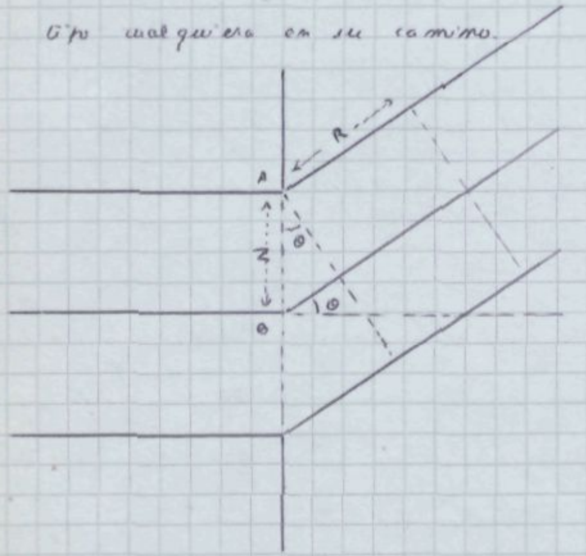
y los frentes de onda son planos perpendiculares a $\bar{k}$.

La situación es mucho más complicada en el momento en que la onda encuentra obstaculos en su camino. Se puede obtener la solución deseada resolviendo la ecuación de propagación de la onda con las condiciones de contorno adecuadas, pero esto es demasiado complicado para hacerlo aquí.

Principio de Huygens (Christiam Huygens 1629-1695). Supongamos que en el instante t el frente de ondas sea $S(t)$. Se supone que cada punto de $S(t)$ emite ondas esféricas en la dirección de propagación de la onda unicamente. Al cabo de un tiempo Δt, la superficie del centro de ondas $S(t+\Delta t)$ es la envolvente de las ondas esféricas emitidas.



Difracción: Este fenómeno es caracteristico de todo tipo de ondas. Se produce cuando una parte de un frente de ondas se ve limitado por un obstáculo o abertura de tipo cualquiera en su camino.



Consideremos una rendija indefinida de anchura d perpendicular al plano del papel. Sea la onda incidente

$$\xi = \xi_0 \cos(kx - \omega t) \qquad (6)$$

La onda elemental emitida por un intervalo dz alrededor del punto B de coordenada z tiene la forma

$$d\xi = \frac{\xi_0 \, dz}{d} \frac{1}{r} \cos(kr - \omega t) \qquad (7)$$

$$r \equiv R + z \sin\theta$$

Entonces la amplitud total es

$$\xi = \frac{\xi_0}{d}\int_0^d dz\,\frac{1}{r}\cos(kr-\omega t) = \frac{\xi_0}{d}\int_0^d \frac{dz}{R+z\sin\theta}\cos[kR+kz\sin\theta-\omega t] \simeq \quad (R\gg d)$$

$$\simeq \frac{\xi_0}{dR}\int_0^d dz\cos[\Delta+k(z-d/2)\sin\theta] \qquad \Delta\equiv k\left(R+\frac{d}{2}\sin\theta\right)-\omega t$$

$$= \frac{\xi_0}{dR}\int_{-d/2}^{+d/2} dz\cos[\Delta+kz\sin\theta] =$$

$$= \frac{\xi_0}{dR}\left\{\cos\Delta\int_{-d/2}^{+d/2} dz\cos[kz\sin\theta] - \sin\Delta\int_{-d/2}^{+d/2} dz\sin[kz\sin\theta]\right\}$$

$$= \frac{\xi_0}{dR}\cos\Delta\,\frac{1}{k\sin\theta}\sin[kz\sin\theta]\Big|_{-d/2}^{+d/2} \Rightarrow$$

$$\xi = \frac{\xi_0}{R}\,\frac{\sin\frac{kd\sin\theta}{2}}{\frac{kd\sin\theta}{2}}\cos\left[k\left(R+\frac{d}{2}\sin\theta\right)-\omega t\right] \tag{1}$$

Luego la intensidad será el valor medio del cuadrado de (1) en un periodo y por tanto

$$I = \frac{\xi_0^2}{2R^2}\,\frac{\sin^2\left[\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta\right]}{\left[\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta\right]^2}$$

Para $\theta=0$ hay un máximo (máximo principal)

$$I = I_{max}\,\frac{\sin^2\left[\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta\right]}{\left[\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta\right]^2} \tag{2}$$

$$I_{max} \equiv \frac{\xi_0^2}{2R^2}$$

Mínimos : Aparecen mínimos de intensidad cuando $\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta = m\pi$, $m=\pm1,\pm2,\ldots$

$$\sin\theta = m\frac{\lambda}{d}, \quad m=\pm1,\pm2,\ldots \tag{3}$$

Máximos : $\frac{dI}{d\delta}=0 \qquad \delta = \frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}\delta = \delta$ con $\delta\neq 0$

$$y(\delta) = \delta - \operatorname{tg}\delta = 0.$$

Las soluciones son

$$\delta_1 = 4.493409$$

$$\delta_2 = 7.725252 \tag{4}$$

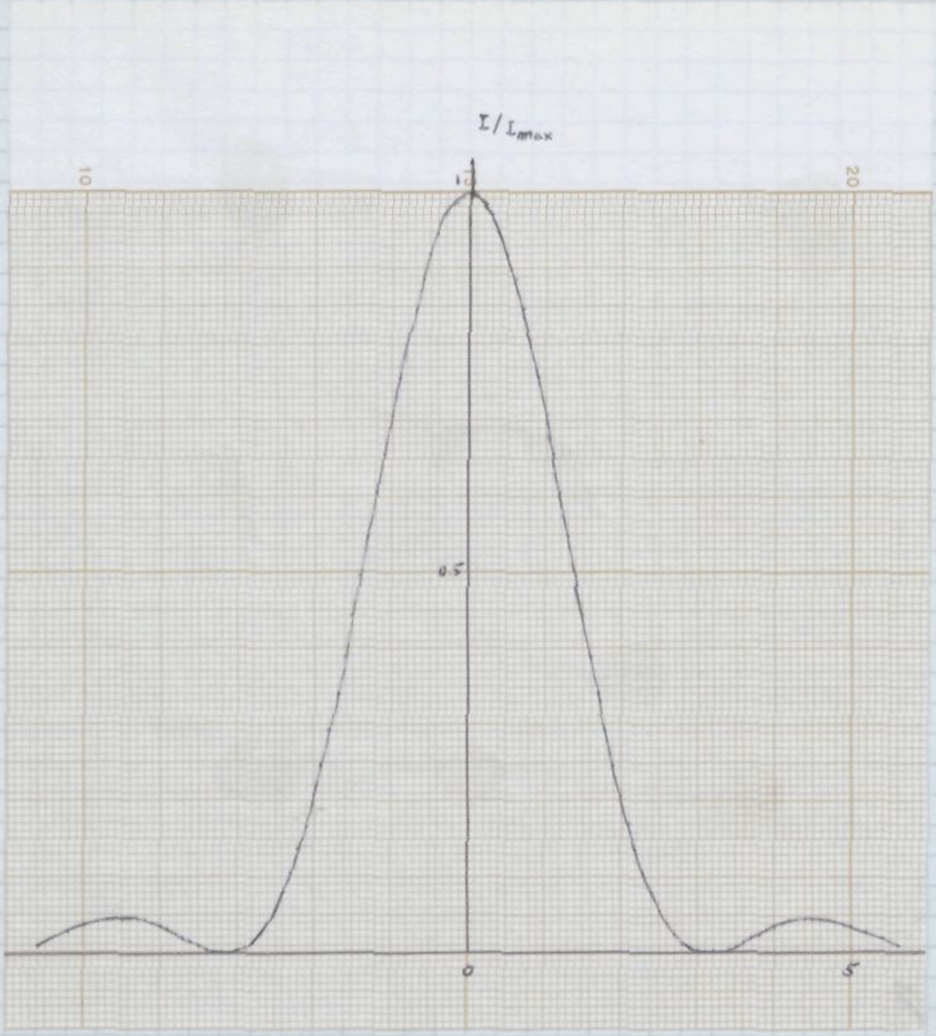
$$\delta_3 = 10.904122$$

$$\delta_m = \frac{\pi}{2}(2m+1)\left\{1-\left(\frac{2}{\pi(2m+1)}\right)^2+\ldots\right\}$$

36/001

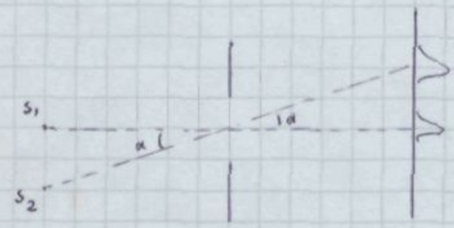
$$\frac{I_1}{I_{max}} = 0.047190 \quad , \quad \frac{I_2}{I_{max}} = 0.016480 \quad , \quad \frac{I_3}{I_{max}} = 0.008340$$

$$\frac{I_m}{I_{max}} = \frac{4}{\pi^2 (2m+1)^2} \left\{ 1 - \frac{8}{\pi^2 (2m+1)^2} + \cdots \right\} \tag{5}$$



Poder de resolución: Em el caso anterior el hecho de que existe la difracción hace que un punto de en una pantalla una imagen de un tamaño

$$\sin\theta \simeq \frac{\lambda}{d} \tag{6}$$



Entonces dos luces puntuales se podrán separar si

$$\sin\alpha \simeq \frac{\lambda}{d} \tag{7}$$

Si la abertura fuera circular entonces

$$\sin\alpha \simeq 1.22 \frac{\lambda}{d} \tag{8}$$

esto pone fuertes límites en el poder de resolución a los aparatos.

Rayos: Se puede indicar la dirección de propagación de una onda, que no encuentra obstáculos, dibujando rayos que sean perpendiculares a los frentes de onda. En una onda plana la energía en la vecindad de un punto de un frente de onda se mueve en línea recta perpendicularmente a dicho frente, de un modo análogo a como lo haría un chorro de partículas a lo largo de la dirección en que se mueven los rayos. Si la onda, de longitud de onda λ, choca con una barrera con una abertura mucho mayor que λ, la onda, en buena aproximación, se propaga aún a lo largo de líneas rectas a través de la abertura, como un chorro de partículas clásicas, excepto que se presentará cierta difracción en los bordes de la abertura. Esta descripción de una onda plana mediante rayos perpendiculares a sus frentes de onda se denomina aproximación de rayos. En el caso de las ondas de luz esta aproximación constituye la llamada óptica geométrica. Esta aproximación es válida en tanto que la parte del frente de ondas considerado sea grande en comparación con λ, en cuyo caso pueden ignorarse los fenómenos de difracción. Si por otra parte la abertura no es mucho mayor que λ o si estamos interesados en la región del espacio correspondiente a unas pocas longitudes de onda de un obstáculo, la difracción es muy importante y la aproximación de rayos deja de ser útil. Si tenemos una onda de longitud de onda λ y una serie de obstáculos y aberturas de tamaño característico d entonces la aproximación de rayos es buena si

$$\lambda << d \qquad (1)$$

1) Luz visible $\lambda \simeq 5 \times 10^{-5}$ cm, como la mayor parte de objetos, que nos rodean, tienen $d >> \lambda$, la aproximación de rayos es sumamente útil y mejora al disminuir λ.

2). Las ondas sonoras audibles tienen frecuencias entre 20 y 20.000 Hz y como la velocidad de propagación del sonido en el aire es $\sim$ 330 m/s las longitudes de onda varían entre 16.5 m y 1.65 cm y en la vida usual la aproximación de rayos es mala. La flexión de las ondas sonoras alrededor de las esquinas es una experiencia común.

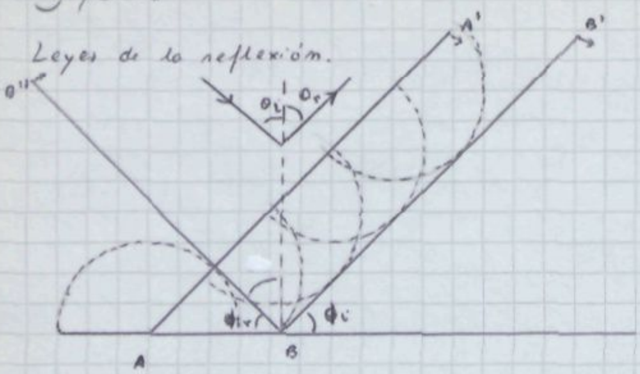
3) Materia. Una partícula lleva una onda asociada de longitud de onda

$$\lambda = \frac{h}{p} \qquad (2)$$

Como h es muy pequeña, incluso para partículas λ resulta ser pequeña y es difícil observar los efectos ondulatorios, pues la aproximación de rayos es extraordinariamente buena. Clinton J. Davisson y Lester H. Germer fueron los primeros en observar interferencias con electrones, en 1927.

35/001

Leyes de la reflexión.

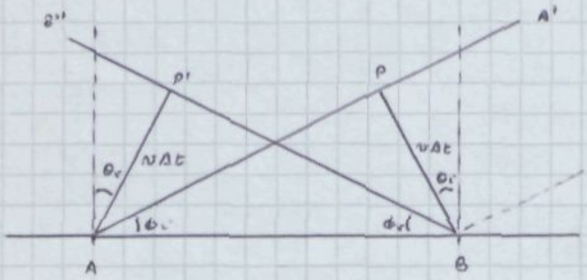


$\theta_i = \theta_r$

θ_i = ángulo de incidencia

θ_r = ángulo de reflexión.

La igualdad de estos ángulos es consecuencia de la igualdad de los triángulos APB y BP'A

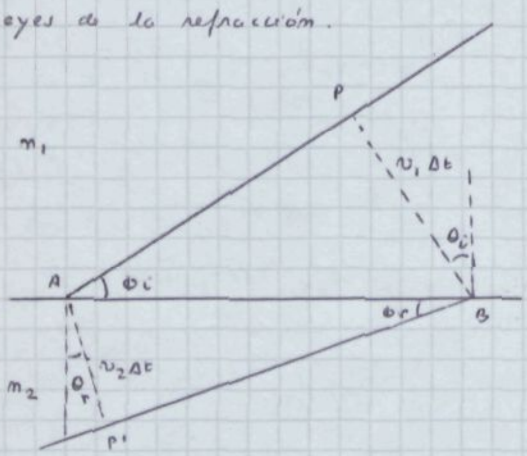


Deducida la ley es mas fácil trabajar con rayos

La ley fundamental es pues

$$\theta_i = \theta_r \qquad (3)$$

Leyes de la refracción.

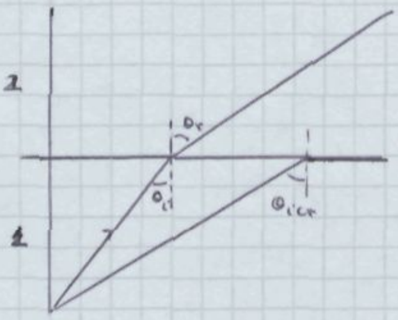


$\phi_i = \theta_i \quad , \quad \phi_r = \theta_r \qquad v_i = \frac{c}{n_i} \quad i=1,2$

$\sin\phi_i = \frac{v_1\,\Delta t}{AB} \qquad \sin\phi_r = \frac{v_2\,\Delta t}{AB}$

$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{c}{n_1}\,\frac{n_2}{c}$

$$n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_r \qquad \text{(Ley de Snell)} \qquad (4)$$



Reflexión total

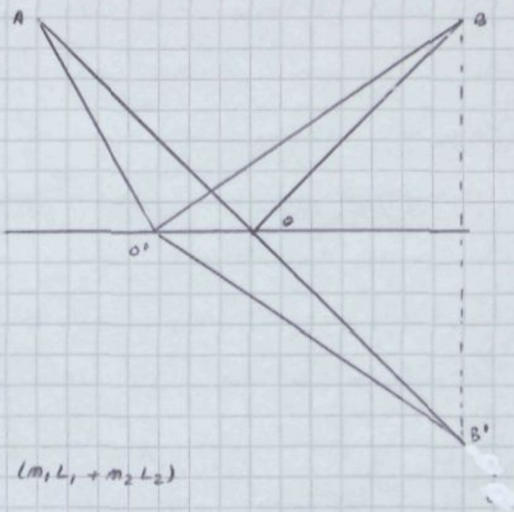
Sea $n_1 > n_2 \Leftrightarrow v_1 < v_2$ El ángulo de incidencia crítico θ_{icr} se determina imponiendo que $\theta_r = \pi/2$

$$n_1 \sin\theta_{icr} = n_2 \Rightarrow \sin\theta_{icr} = \frac{n_2}{n_1} < 1 \qquad (5)$$

Los rayos con $\theta_i < \theta_{icr}$ son parcialmente reflejados y parcialmente transmitidos y aquellos con $\theta_i > \theta_{icr}$ son totalmente reflejados

Principio de Fermat. En el S. XVII Fermat enunció un principio para determinar el camino seguido por la luz entre dos puntos: El trayecto que recorre la luz al moverse de un punto al otro punto es tal que el tiempo empleado en dicho recorrido es estacionario, cuando se compara con trayectos próximos a él. Se puede también decir que los caminos ópticos sean estacionarios pues $v = c/n$.

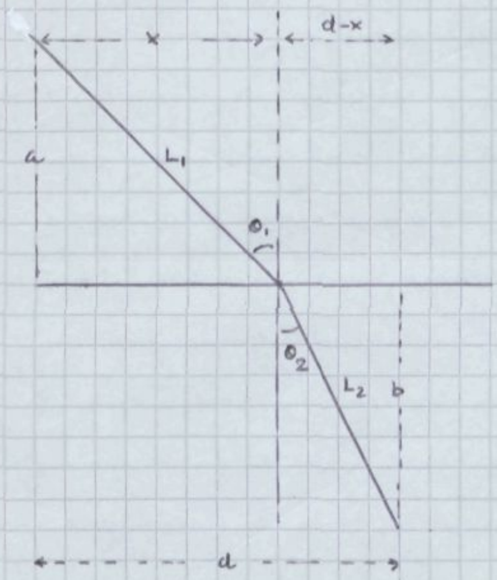
Leyes de la reflexión.



$AOB = AOB'$ $\qquad AO'B \neq AO'B' > AOB'$

El camino es pues $AOB \Rightarrow \theta_i = \theta_r$

Leyes de la refracción



$$t = \frac{L_1}{v_1} + \frac{L_2}{v_2} = \frac{1}{c}(n_1 L_1 + n_2 L_2)$$

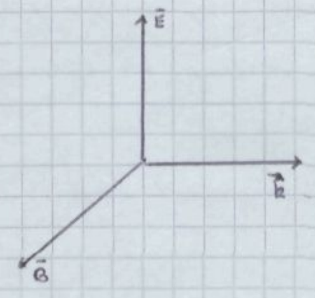
$$L_1 = \sqrt{a^2 + x^2} \qquad L_2 = \sqrt{b^2 + (d-x)^2}$$

$$\frac{dt}{dx} = 0 \Rightarrow n_1 \frac{dL_1}{dx} + n_2 \frac{dL_2}{dx} = 0$$

$$\frac{dL_1}{dx} = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \sin\theta_1 \ , \qquad \frac{dL_2}{dx} = -\frac{d-x}{L_2} = -\sin\theta_2$$

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \qquad (1)$$

Luz polarizada. Para las ondas electromagnéticas ya hemos dicho que se puede poner que $\vec{E}$ y $\vec{B}$ vibran en planos perpendiculares al de propagación. Además $|\vec{E}| = |\vec{B}|$ y $\vec{k} = \lambda(\vec{E} \times \vec{B})$, $\lambda > 0$. Por definición el plano determinado por $\hat{k}$ y $\vec{E}$ se llama plano de polarización. Si $\vec{k} \parallel Ox$, entonces en un instante cualquiera



$$E_y(x;t) = E_{0y}\cos(kx - \omega t)$$
$$E_z(x;t) = E_{0z}\cos(kx - \omega t + \delta) \qquad (2)$$

Si la dirección de $\vec{E}$ es siempre paralela a una línea fija en el espacio se dice que la luz está polarizada linealmente y esto exige que $\delta = 0, \pi$. Si δ es una constante entonces se habla de luz polarizada elípticamente, en general. Si δ es una función del tiempo la luz no está polarizada.

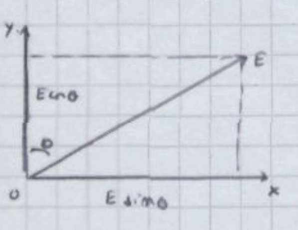
La radiación procedente de un átomo está siempre polarizada, pero en general las fuentes luminosas se componen de un número muy grande de átomos que actúan independientemente y la luz resultante no está polarizada.

Hay cuatro métodos usuales de producir luz polarizada.

1) Absorción: Un método usual de obtener luz polarizada es el de absorción en una lámina de un material comercial denominado polaroide, inventado por E. H. Land en 1938.

36/001

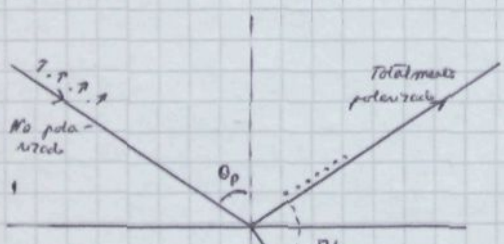
Este material contiene moléculas de un hidrocarburo de cadena larga que se alinean cuando la lámina se deforma en una dirección durante el proceso de fabricación. A frecuencias ópticas estas cadenas se hacen conductoras, cuando la lámina se introduce en una disolución que contiene yodo. Cuando la luz incide con su vector $\vec{E}$ paralelo a las cadenas, se establecen corrientes eléctricas a lo largo de las mismas y se absorbe la energía luminosa. Si el campo eléctrico es perpendicular a las cadenas se transmite la luz. La dirección perpendicular a las cadenas se denomina eje de transmisión. Consideremos un haz luminoso en la dirección Ox incidente sobre un polaroide que tiene Oy como eje de transmisión. En valor medio, la mitad de la luz incidente tiene su vector $\vec{E}$ en la dirección Oy y la mitad en la dirección Ox, si el haz incidente no está polarizado. Así pues se transmite la mitad de la intensidad y la luz transmitida está polarizada linealmente con su vector $\vec{E}$ en la dirección Oy. Supóngase que tenemos un segundo trozo de polaroide cuyo eje de transmisión forma un ángulo θ con el primero. Entonces sólo se transmite $E\cos\theta$ y por tanto la intensidad transmitida es



$$I = I_0 \cos^2\theta \qquad (3)$$

siendo I_0 la intensidad entre los dos polaroides. Esta es la llamada ley de Malus (E.L. Malus 1775-1812). Se aplica a dos elementos polarizantes cualesquiera cuyas direcciones de transmisión formen, entre sí, un ángulo θ.

2) Reflexión. Cuando la luz no polarizada se refleja en una superficie plana, por ejemplo la que separa el aire y el vidrio, la luz reflejada está parcialmente polarizada. El grado de polarización depende del ángulo de incidencia y de los índices de refracción de ambos medios. Cuando el ángulo de incidencia es tal que los rayos reflejado y refractado son perpendiculares entre sí, la luz reflejada está completamente polarizada. Este resultado fue descubierto experimentalmente por Sir David Brewster en 1812.



$$n_1 \sin\theta_p = n_2 \sin\theta_2 \qquad \theta_2 = \pi - \theta_p - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \theta_p \Rightarrow \sin\theta_2 = \cos\theta_p$$

$$n_1 \sin\theta_p = n_2 \cos\theta_p \Rightarrow \operatorname{tg}\theta_p = \frac{n_2}{n_1} \qquad \text{(Ley de Brewster)} \qquad (4)$$

Cristales de gafas polaroides pueden ser muy eficaces para eliminar el deslumbramiento

3) Dispersión

4) Birrefringencia.

1. La función de onda correspondiente a una onda estacionaria en una cuerda fija en ambos extremos es $\xi(x,t) = 0.5 \sin 0.025x \cos 500t$, estando ξ y x dados en centímetros y t en segundos. Hallar la velocidad y la amplitud de las ondas móviles cuya combinación da como resultado la onda estacionaria ¿Cuál es la distancia entre nodos sucesivos en la cuerda? ¿Cuál es la longitud más corta posible de la cuerda?

$\xi_1 = \xi_0 \sin(kx - \omega t)$, $\xi_2 = \xi_0 \sin(kx + \omega t)$

$\xi = \xi_0 \{ \sin(kx - \omega t) + \sin(kx + \omega t) \} = 2\xi_0 \sin kx \cos \omega t$

$\xi_0 = 0.25$ cm , $k = 0.025\ \text{cm}^{-1}$, $\omega = 500\ s^{-1}$, $v = \frac{\omega}{k} = 2\times10^4\ \text{cm}\ s^{-1}$

Distancia entre nodos mínima $d = \frac{\pi}{k} \Rightarrow d = 1.2566\times10^2$ cm.

Longitud mínima de la cuerda d.

---

2. Una cuerda fija en un extremo solamente, está vibrando en su modo fundamental. La función de ondas es $\xi = 0.02\ \text{cm} \sin(2.36\ \text{cm}^{-1} x) \cos(377\ s^{-1} t)$ 1) ¿Cuál es la longitud de onda? 2) ¿Cuál es la velocidad de las ondas transversales de la cuerda?

$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2.36}$ cm $= 2.6624$ cm $\qquad v = \frac{377}{2.36} = 1.5975\times10^2\ \text{cm}\ s^{-1}$

---

3. Dos ondas sonoras de frecuencias $\nu_1 = 500$ Hz y $\nu_2 = 505$ Hz se mueven a $v = 340\ m\,s^{-1}$, a lo largo del eje x, en el aire. La amplitud de desplazamiento de cada onda es ξ_0. Escribir las funciones de onda $\xi_1(x;t)$ y $\xi_2(x;t)$ para cada onda, admitiendo que están en fase cuando $x=0$ $t=0$ y escribir $\xi(x,t)$ para la onda resultante. Calcular las velocidades de fase y de grupo de esta onda.

$\omega_i = 2\pi\nu_i$, $\lambda_i = v\frac{1}{\nu_i}$ $\qquad \xi_i = \xi_0 \cos(k_i x - \omega_i t)$ $\qquad k_i = \frac{2\pi}{\lambda_i} = \frac{2\pi}{v}\nu_i = \frac{\omega_i}{v}$

$\xi = \xi_1 + \xi_2 = \{ \xi_0 \cos(k_1 x - \omega_1 t) + \xi_0 \cos(k_2 x - \omega_2 t) \} =$

$= 2\xi_0 \cos\left(\frac{k_1 - k_2}{2}x - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \cos\left(\frac{k_1 + k_2}{x}x - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)$

$\xi = 2\xi_0 \cos\left[4.6200\times10^{-2}\ \text{cm}^{-1} x - 15.708\ s^{-1} t\right] \cos\left[9.3324\times10^{-2}\ \text{cm}^{-1} x - 3.1573\times10^{+3}\ s^{-1} t\right]$

$v_f = \frac{\omega_i}{k_i} = 340\ m\,s^{-1}$ $\qquad v_g = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} = 340\ m\,s^{-1}$

35/001

4. Dos fuentes sonoras oscilan en fase con una frecuencia de 100 Hz. En un punto a 5.00 m de una de ellas y a 5.85 m de la otra, la amplitud del sonido procedente de cada punto separadamente es A. 1) ¿Cuál es la diferencia de fase de la onda sonora procedente de ambas fuentes en dicho punto? 2) ¿Cuál es la amplitud de la onda resultante en dicho punto?

$\nu = 100$ Hz , $v = 3.40 \times 10^4$ cm s^{-1} , $\lambda = \frac{v}{\nu} = 340$ cm

$\delta = \frac{d_2 - d_1}{\lambda} 2\pi = 1.5708$ rad. $= \frac{\pi}{2}$, $\xi_0 = 2A \cos\frac{\delta}{2} = 2A \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} A$

---

5. Una fuente sonora, de frecuencia 1080 vibraciones/seg, se mueve hacia la derecha con una velocidad de 32.9 m s^{-1} con relación al suelo. A su derecha se encuentra una superficie reflectora que se mueve hacia la izquierda con una velocidad de 65.8 m s^{-1} con relación al suelo. Tomando como velocidad del sonido en el aire 329 m s^{-1}, encontrar 1) la longitud de onda del sonido emitido en el aire por la fuente 2) El número de ondas que por segundo llegan a la superficie reflectora. 3) la velocidad de las ondas reflejadas 4) la longitud de onda de las ondas reflejadas.

$\nu = 1080$ s^{-1} , $v = 329$ m s^{-1} $u_s = 32.9$ m s^{-1} $u_R = -65.8$ m s^{-1}

1) $\lambda' = (v - u_s) T = \frac{329 - 32.9}{1080}$ m $= 0.2742$ m.

2) $\nu' = \nu \frac{1 - u_R/v}{1 - u_s/v} = 1080 \frac{329 + 65.8}{329 - 32.9}$ s^{-1} $= 1440$ s^{-1}

3) Esto es una propiedad del medio y por tanto $v = 329$ m s^{-1}

4) $\lambda' = v T' = 329/1440$ m $= 0.2285$ m

---

6. Nuestro Universo se halla en un estado de expansión. Una nebulosa que está a una distancia d se aleja de nosotros a una velocidad v tal que

$$d = \frac{c}{H} \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$$

$H = 75$ Km s^{-1} Megaparsec^{-1} , $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} - 1$

Si $\Delta\lambda/\lambda = 2$, hallar v y d.

$\sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}} - 1 = 2$, $\frac{1+v/c}{1-v/c} = 9 \Rightarrow \frac{v}{c} = \frac{4}{5}$

$d = \frac{c}{H}\, 2 = \frac{2.c}{75}$ Km^{-1} s Megaparsec $= 7.9945\times10^{3}$ Megaparsec

$d = \frac{a}{2\sin(1/2'')} = 3.086\times10^{18}$ cm $=$ 3.26 años luz

$d = 2.6062\times10^{6}$ años luz

---

7. En un experimento de la doble rendija de Young se utiliza luz amarilla de sodio. La distancia entre las ranuras y la pantalla es $L = 100$ cm, y la distancia entre las ranuras $d = 0.023$ cm. Sabiendo que la separación entre la primera y tercera franjas de interferencia es 0.5 cm, calcular la longitud de onda de la luz empleada.

Sabemos que los máximos se producen $d\sin\theta = m\lambda$. En nuestro caso

$m = 2$, $\sin\theta = \frac{0.5\text{ cm}}{L} = 5\times10^{-3}$

$\lambda = \frac{0.023\times5\times10^{-3}}{2} \Rightarrow \lambda = 5750$ Å

---

8. En un dispositivo de doble rendija de Young las rendijas se encuentran separadas $d = 0.1$ mm y las franjas se observan a distancias de 50 cm. Cuando el sistema se sumerge en un líquido se encuentra que la distancia entre franjas se reduce en un factor 0.7. Hallar el índice de refracción del líquido

---

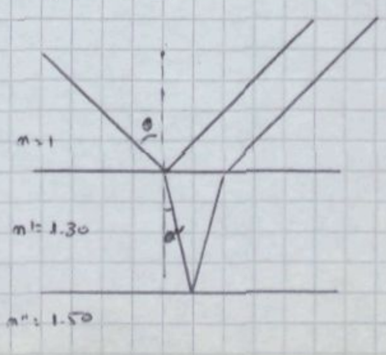
En el vacío la distancia entre el primer máximo y el pico central es $d\sin\theta = \lambda$ y en el líquido $d\sin\theta' = \lambda'$ $\Rightarrow$

$$\frac{\lambda'}{\sin\theta'} = \frac{\lambda}{\sin\theta} \Rightarrow \lambda' = \lambda\frac{\sin\theta'}{\sin\theta} = 0.7\lambda$$

$$\lambda = vT = \frac{c}{n}T \Rightarrow \frac{1}{n} = 0.7 \qquad n = \frac{1}{0.7} \Rightarrow n = 1.4286$$

---

9. Se utiliza una capa muy fina de un material transparente con un índice de refracción de 1.30 como recubrimiento antireflectante en la superficie de vidrio de índice de refracción 1.50. ¿Cuál deberá ser el espesor para que la película no refleje la luz de 6000 Å, si la incidencia es normal?



Notar que la diferencia de camino óptico es $\Delta = 2dn'\cos\theta'$ y hay un cambio de fase de π en cada punto de reflexión por lo cual la condición de interferencia es

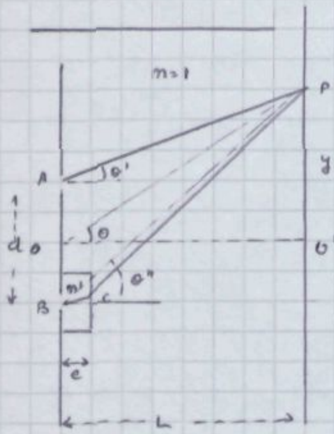
$$\frac{2\pi}{\lambda}\, 2 d n' \cos\theta' = 2\pi\,(N + 1/2)$$

$$d = \frac{\lambda\,(N+1/2)}{2 n' \cos\theta'}$$

$\theta' = 0 \quad N = 0 \qquad d = \frac{\lambda}{4n'} = \frac{6000\,Å}{4\times 1.30} \Rightarrow d = 1154\,Å$

---

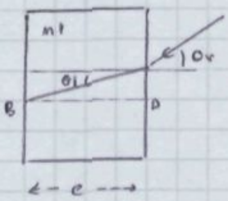
10. En la experiencia de Young se observan franjas en una pantalla utilizando luz de $\lambda = 6500\,Å$. Si en una de las rendijas se interpone una lámina transparente y muy delgada de índice de refracción $n = 1.45$, se observa que el máximo central se desplaza hasta la posición en que antes se encontraba el cuarto máximo. ¿Qué espesor tiene la lámina?



La posición inicial del cuarto máximo corresponde a una diferencia de caminos ópticos de 4λ, $d\sin\theta = 4\lambda \Rightarrow \sin\theta = \frac{4\lambda}{d}$

$y = L\,\mathrm{tg}\,\theta$

La nueva diferencia de caminos dan origen a un cambio de fase



$$\delta = BC\,\frac{2\pi}{\lambda'} + CP\,\frac{2\pi}{\lambda} - BP\,\frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\,(n' BC + n\,CP - n\,BP)$$

$BC\cos\theta_i = e \qquad CP\cos\theta_r = L - e, \quad BP\cos\theta'' = L$

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{n' e}{\cos\theta_i} + \frac{L-e}{\cos\theta_r}\,n - n\,\frac{L}{\cos\theta''}\right)$$

Como los ángulos son muy pequeños $\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(n'e + n(L-e) - nL) \Rightarrow \delta = \frac{2\pi}{\lambda}(n'-n)e$

y por tanto

$$e(n'-n) = 4\lambda \Rightarrow e = \frac{4\lambda}{n'-n} \Rightarrow e = 5.778\times 10^{-4}\ \text{cm.}$$

---

11. Un haz de luz blanca incide normalmente sobre una lámina de espesor $d = 0.4\,\mu m.$, de índice de refracción $n = 1.5$. ¿Qué longitud de onda, de las contenidas en el espectro visible se reforzará en el haz reflejado?

La interferencia constructiva es para λ tales que $2dn = (2N+1)\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{4dn}{2N+1}$

$\lambda = \frac{12000}{N + 1/2}\,Å$ luego $N = 2$ es la única en el visible y $\lambda = 4800\,Å$

---

12. Una onda plana de luz blanca en el aire llega a una película delgada de aceite que cubre una placa de cristal, incidiendo bajo un ángulo de 30°. Se observa una interferencia constructiva para la longitud de onda del violeta en el haz reflejado y para la longitud de onda correspondiente al naranja, no observándose ningún otro máximo para ninguna longitud de onda intermedia. Si el índice de refracción del aceite es 1.30 y el del vidrio 1.48 determinar el espesor de la lámina. ($\lambda_{violeta} = 4000 Å$, $\lambda_{naranja} = 6000 Å$)

Como hay cambio de fase de π en cada reflexión la condición de interferencia constructiva es $2d\, n_{aceite} \cos\theta_{refrac} = N\lambda$

$n_{aire} \sin\theta_{inc} = n_{ac.} \sin\theta_{ref.}$ $\qquad \sin\theta_{ref} = \frac{1}{1.30} \sin 30° \Rightarrow \sin\theta_{ref} = \frac{1}{2.6}$

$\cos\theta_{ref} = \sqrt{1 - \frac{1}{2.6^2}} = \frac{\sqrt{5.76}}{2.6} = 0.923077$

$$\left.\begin{aligned} 2d\cdot 1.3 \cos\theta_r &= N\lambda_v \\ 2d\; 1.3 \cos\theta_r &= (N-1)\lambda_m \end{aligned}\right\} \quad N\lambda_v = (N-1)\lambda_m \Rightarrow 4N = 6(N-1) \qquad N=3$$

$$d = \frac{3 \times 4000 Å}{2 \times 1.3 \times 0.923077} \Rightarrow d = 5000 Å$$

---

13. ¿Cuál es la distancia mínima de separación a que se pueden encontrar dos objetos en la superficie de la Luna para que se vean todavía a simple vista? Supóngase que la pupila del ojo tiene ~~un~~ diámetro de 4 mm, que la longitud de onda efectiva es de 5500 Å y que la distancia Tierra-Luna es de 3.8×10^5 Km

---

$\sin\theta = 1.22 \frac{\lambda}{d}$ $\qquad \lambda = 5500 Å, \quad d = 0.4$ cm.

La distancia y buscada, se expresa en términos de la distancia D de la Tierra a la Luna como

$y = D \sin\theta = 1.22 \frac{D\lambda}{d} \Rightarrow y = 63.745$ Km.

---

14. Dos láminas polaroides tienen sus direcciones polarizantes dispuestas de tal forma que la intensidad de luz transmitida es máxima. ¿Qué ángulo se debe girar una de las láminas para que la intensidad se reduzca a la mitad?

$I = I_0 \cos^2\theta \Rightarrow \cos^2\theta = \frac{1}{2}$ $\qquad \cos\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\qquad \theta = \pm 45°, \pm 135°$

---

15. Un rayo de luz incide sobre la superficie de un líquido de n = 1.50. Si el rayo reflejado está totalmente polarizado ¿Cuál es el ángulo de refracción?

Ley de Brewster $\quad tg\,\theta_p = 1.5 = n \Rightarrow \sin\theta_p = \frac{n}{\sqrt{1+n^2}} \quad \sin\theta_p = \frac{1.5}{\sqrt{3.25}}$

$n \sin\theta_r = 1.\sin\theta_p \qquad \sin\theta_r = \frac{1}{\sqrt{1+n^2}}$

$\theta_r + \frac{\pi}{2} + \theta_p = \pi \qquad \theta_r = -\theta_p + \frac{\pi}{2} \qquad \theta_r = \frac{\pi}{2} - \theta_p = 0.588003$ rad

$\theta_r = 33° \; 41' \; 24.24''$

---

16. Hallar el desarrollo en serie de Fourier de la función periódica

$$f(x) = \begin{cases} 1-4x & 0 \le x \le 1/2 \\ -3+4x & 1/2 \le x \le 1 \end{cases} \qquad f(x+1) = f(x)$$

Representar la contribución de los primeros términos de la serie

---

$$f(x) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos(2\pi m x) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin(2\pi m x)$$

$$a_0 = \int_0^1 dx\, f(x) \quad , \quad a_m = 2\int_0^1 dx\, f(x) \cos 2\pi m x \quad , \quad b_m = 2\int_0^1 dx\, f(x) \sin 2\pi m x$$

$$a_0 = \int_0^{1/2} dx\,(1-4x) + \int_{1/2}^1 dx\,(-3+4x) = [x - 2x^2]_0^{1/2} + [-3x+2x^2]_{1/2}^1 = 0$$

$$a_m = 2\int_0^{1/2} dx\,(1-4x)\cos 2\pi m x + 2\int_{1/2}^1 dx\,(-3+4x)\cos(2\pi m x) =$$

$$= \frac{1}{\pi m}\left\{ \int_0^{\pi m} dy\left(1 - \frac{2}{\pi m}y\right)\cos y - \int_{\pi m}^{2\pi m} dy\left(3 - \frac{2}{\pi m}y\right)\cos y \right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi m}\left\{ \sin y\Big|_0^{\pi m} - 3\sin y\Big|_{\pi m}^{2\pi m} - \frac{2}{\pi m}(\cos y + y\sin y)\Big|_0^{\pi m} + \frac{2}{\pi m}(\cos y + y \sin y)\Big|_{\pi m}^{2\pi m} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi m}\left\{ -\frac{2}{\pi m}(\cos\pi m - 1) + \frac{2}{\pi m}(\cos 2\pi m - \cos\pi m) \right\} = \frac{4}{\pi^2 m^2}\left[1 - (-1)^m\right]$$

$$b_m = \frac{1}{\pi m}\left\{ -\cos y\Big|_0^{\pi m} + 3\cos y\Big|_{\pi m}^{2\pi m} - \frac{2}{\pi m}(\sin y - y\cos y)\Big|_0^{\pi m} + \frac{2}{\pi m}(\sin y - y\cos y)\Big|_{\pi m}^{2\pi m} \right\} = 0$$

$$f(x) = \frac{8}{\pi^2}\left\{ \cos 2\pi x + \frac{1}{3^2}\cos 6\pi x + \frac{1}{25}\cos 10\pi x + \cdots \right\}$$

$$f(x) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2}\cos[(2m+1)2\pi x]$$

Definamos

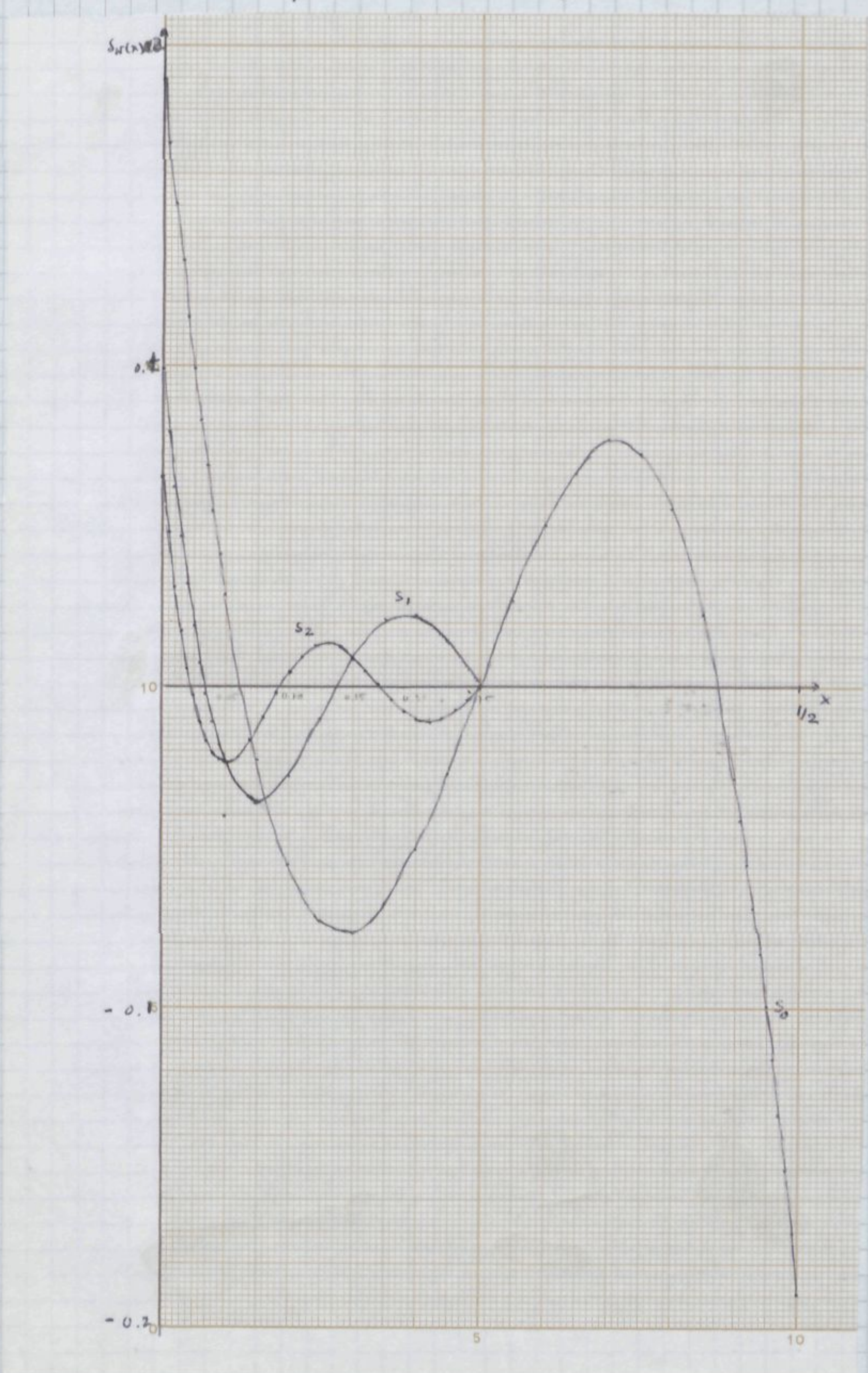
$$S_N(x) = f(x) - \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(2n+1)^2}\cos[(2n+1)2\pi x]$$

En particular

$$S_N(0) = 1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

$S_0(0) = 0.189431$, $S_1(0) = 0.099367$, $S_2(0) = 0.066844$

$S_3(0) = 0.050402$, $S_4(0) = 0.040395$, ...



---

17. Un método antiguo para determinar la velocidad del sonido es el siguiente: se coloca horizontalmente un tubo de vidrio cilíndrico y en su interior se esparce polvo muy fino. Un extremo del tubo se cierra con un pistón que puede ajustarse a un oscilador de frecuencia conocida. El otro extremo se cierra con un pistón cuya posición puede cambiarse. Mientras se hace oscilar el pistón fijo con frecuencia ν, se ajusta la posición

del pistón movil hasta obtener resonancia. En estas condiciones, el polvo se agrupa en montones separados entre sí por una misma distancia. 1) Explicar claramente los motivos de este fenómeno y deducir la relación que liga la frecuencia ν, la distancia d entre dos montones sucesivos y la velocidad v del sonido. 2) ¿Qué valor se obtiene para v si $\nu = 4250\ s^{-1}$ y $d = 4$ cm?

Se establece una onda estacionaria, cuya longitud de onda es $\lambda = 2d$. Como

$\lambda = vT = v/\nu$

$$v = 2d\nu$$

$v = 2 \times 4\,cm \times 4250\ s^{-1} \Rightarrow \quad v = 340\ m s^{-1}$

---

18. Una estrella doble gira alrededor de su centro de masas de modo que una de sus componentes se mueve, en un instante, hacia la Tierra y la otra se aleja de ella. El centro de masas está fijo con respecto a la Tierra. La línea del hidrógeno de longitud de onda $\lambda = 6563$ Å en el laboratorio tiene una longitud de onda $\lambda_1 = 6600$ Å cuando procede de una de las estrellas y $\lambda_2 = 6500$ Å cuando procede de la otra. ¿Cuál es el cociente entre las masas de las estrellas?

La coordenada centro de masas es $\bar{R} = \dfrac{M_1 \bar{r}_1 + M_2 \bar{r}_2}{M_1 + M_2}$ y como $\dot{\bar{R}} = 0$ entonces $v_1 = \dfrac{M_2}{M_1} v_2$

Como $\lambda_1 > \lambda$ ésta es la estrella que se aleja

$$\frac{\lambda_1 - \lambda}{\lambda} = \left(\frac{1 + v_1/c}{1 - v_1/c}\right)^{1/2} - 1 \quad , \quad \frac{\lambda_2 - \lambda}{\lambda} = \left(\frac{1 - v_2/c}{1 + v_2/c}\right)^{1/2} - 1$$

$$v_1/c = \frac{x_1 - 1}{x_1 + 1} \qquad x_1 = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)^2 \qquad\qquad v_2/c = \frac{1 - x_2}{1 + x_2} \qquad x_2 = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda}\right)^2$$

$v_1/c = 0.001\,061\,168 \qquad\qquad v_2/c = 0.009\,645\,339$

y por tanto

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{v_2}{v_1}$$

$$\frac{M_1}{M_2} = 9.089.$$

---

19. Un observador inercial O ve un fenómeno ondulatorio descrito por la ecuación

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi(x;t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \xi(x;t)}{\partial x^2} = 0$$

¿Cuál es la ecuación de ondas para un observador O' cuyas coordenadas están relacionadas con las anteriores por

$$x' = x - Vt \qquad , \qquad t' = t.$$

Sea $\xi(x;t) \equiv \xi(x'+Vt';t') \equiv \xi'(x';t')$

$$\frac{\partial \xi(x;t)}{\partial x} = \frac{\partial \xi'(x';t')}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial \xi'(x';t')}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x} = \frac{\partial \xi'(x';t')}{\partial x'}$$

$$\frac{\partial^2 \xi(x;t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \xi'(x';t')}{\partial x'^2}$$

$$\frac{\partial \xi(x;t)}{\partial t} = \frac{\partial \xi'(x';t')}{\partial x'}(-V) + \frac{\partial \xi'(x';t')}{\partial t'}$$

$$\frac{\partial^2 \xi(x;t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left\{-V\frac{\partial \xi'(x';t')}{\partial x'} + \frac{\partial \xi'(x';t')}{\partial t'}\right\} = (-V)\left\{-V\frac{\partial^2 \xi'(x';t')}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \xi'(x';t')}{\partial x'\partial t'}\right\}$$

$$+\left\{-V\frac{\partial^2 \xi'(x'{;}t')}{\partial x'\partial t'} + \frac{\partial^2 \xi'(x';t')}{\partial t'^2}\right\} = V^2\frac{\partial^2 \xi'(x';t')}{\partial x'^2} - 2V\frac{\partial \xi'(x';t')}{\partial x'\partial t'} + \frac{\partial^2 \xi'(x't')}{\partial t'^2}$$

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi'(x';t')}{\partial t'^2} - \frac{2V}{v^2}\frac{\partial^2 \xi'(x';t')}{\partial x'\partial t'} - \left(1-\frac{V^2}{v^2}\right)\frac{\partial^2 \xi'(x';t')}{\partial x'^2} = 0$$

---

20. Una fuente de ondas de frecuencia ν y un observador se hallan a una distancia fija. Tanto la fuente como el observador están en reposo. Sin embargo el medio en el que se propaga la onda se mueve con una velocidad uniforme $\vec{v}_m$ en una dirección arbitraria. Encontrar la frecuencia ν' recibida por el observador

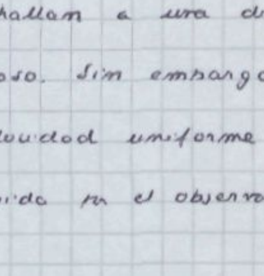
---

$\nu' = \nu$

El hecho fundamental del efecto Doppler (en mecánica Newtoniana) es que la frecuencia recibida difiere de la emitida si y solo si el tiempo necesario para pasar de la fuente al observador es distinto para dos frentes de onda distintos. Como el movimiento del medio es independiente del tiempo, el tiempo de tránsito será el mismo para dos frentes cualesquiera aun cuando $\vec{v}_m(\vec{r})$, mientras $\partial \vec{v}_m / \partial t = 0$.

---

21. La figura muestra un observador O en reposo y una fuente S que se mueve con velocidad constante $\vec{v}_S$ y que emite con frecuencia ν. El medio de propagación esta en reposo con relación a O. La velocidad de propagación de la onda es v. Hallar la frecuencia recibida por O



36/001

La cresta de la onda emitida en el instante indicado en la figura será recibida después de un tiempo $\tau_1 = |\vec{r}_s|/v$. Cuando ha pasado un tiempo T se emite otra cresta y la fuente está alejada del observador $|\vec{r}_s + \vec{v}_s T|$ y por tanto será recibida al cabo de un tiempo $\tau_2 = |\vec{r}_s + \vec{v}_s T|/v$. Por tanto la llegada de las dos crestas sucesivas al observador se produce con un intervalo de tiempo

$$T' = T + (\tau_2 - \tau_1) = T + \frac{1}{v}\left(|\vec{r}_s + \vec{v}_s T| - |\vec{r}_s|\right)$$

y por tanto

$$\nu' = \frac{1}{\frac{1}{\nu} + \frac{1}{v}\left(|\vec{r}_s + \vec{v}_s \frac{1}{\nu}| - |\vec{r}_s|\right)}$$

$|r_s| = r_s$

$$|\vec{r}_s + \vec{v}_s \tfrac{1}{\nu}| = \sqrt{r_s^2 + 2\frac{1}{\nu}\vec{r}_s\cdot\vec{v}_s + \frac{1}{\nu^2}v_s^2}$$

$$\nu' = \nu\left\{1 + \nu\frac{r_s}{v}\left(\sqrt{1 + \frac{2}{\nu}\frac{\vec{r}_s\cdot\vec{v}_s}{r_s^2} + \frac{1}{\nu^2}\left(\frac{v_s}{r_s}\right)^2} - 1\right)\right\}^{-1}$$

si $r_s \gg T v_s$ entonces

$$\nu' = \nu\,\frac{v}{v + \vec{v}_s\cdot\hat{r}_s} \qquad r_s \gg T v_s$$

Si $\vec{v}_s \vec{r}_s = \lambda v_s r_s$ con $\lambda = +1$ alejándose o $\lambda = -1$ acercándose

$$\nu' = \frac{\nu}{1 + \lambda\frac{v_s}{v}} \qquad \lambda = +1 \text{ alejándose}, \quad \lambda = -1 \text{ acercándose}$$

---

22. Un hilo indefinido está situado a lo largo del eje Ox. Para $x<0$ tiene una densidad lineal μ_1 y para $x>0$ una densidad lineal μ_2. El hilo está sujeto a la misma tensión en todos sus puntos. Supongamos que en la región $x<0$ hay una onda incidente $\xi_i = A_i \cos(k_1 x - \omega_1 t)$ que viaja en el sentido de las x crecientes. Al llegar a $x=0$ se produce una onda reflejada $\xi_r = A_r \cos(k_1 x + \omega_1 t)$ y una onda transmitida $\xi_t = A_t \cos(k_2 x + \omega_2 t)$. Recordar que si $\mu_1 < \mu_2$ ($\mu_1 > \mu_2$) entonces $k_1 < k_2$ ($k_1 > k_2$). Estudiar el fenómeno y determinar las amplitudes.

$$\xi_1(x;t) = A_i \cos(k_1 x - \omega_1 t) + A'_r \cos(k_1 x + \omega_1 t) \qquad x<0$$

$$\xi_2(x;t) = A_t \cos(k_2 x - \omega_2 t) \qquad x>0.$$

1) Se debe cumplir

$$\xi_1(0;t) = \xi_2(0;t) \quad , \forall t \quad \Rightarrow \quad A_1 \cos\omega_1 t + A_r \cos\omega_1 t = A_t \cos\omega_2 t \quad \Rightarrow$$

$$\omega_1 = \omega_2 \qquad\qquad A_1 + A_r = A_t \qquad (1)$$

2) Además

$$\left.\frac{\partial \xi_1(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial \xi_2(x;t)}{\partial x}\right|_{x=0} \quad \forall t \quad \Rightarrow \quad k_1 A_i \sin\omega_1 t - A_r k_1 \sin\omega_1 t = A_t k_2 \sin\omega_2 t \Rightarrow$$

$$k_1(A_1 - A_r) = k_2 A_t \qquad (2)$$

Usando (1) para eliminar A_t en (2) $\quad k_2(A_1 + A_r) = k_1(A_1 - A_r)$

$$A_r = A_1 \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}$$

y

$$A_t = A_1 \frac{2k_1}{k_1 + k_2}$$

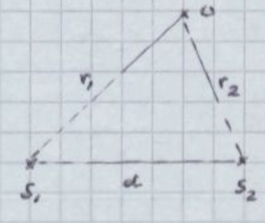
Como A_r y A_t deben ser positivas y si $\omega = \omega_1 = \omega_2$

$$\xi_r = A_1 \left|\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right| \cos(k_1 x + \omega t + \delta_r) \qquad \delta_r = \begin{cases} 0 & \mu_1 > \mu_2 \\ \pi & \mu_1 < \mu_2 \end{cases}$$

$$\xi_t = A_1 \frac{2k_1}{k_1 + k_2} \cos(k_2 x - \omega t)$$

---

23. Dos fuentes S_1 y S_2 de ondas esféricas están separadas por una distancia d.
Cuando sólo funciona S_1 el desplazamiento de O es



$$\xi_1(t) = \frac{C_1}{\sqrt{r_1}} \cos(kr_1 - kvt + \delta_1)$$

y cuando sólo funciona S_2 es

$$\xi_2(t) = \frac{C_2}{\sqrt{r_2}} \cos(kr_2 - kvt + \delta_2)$$

Encontrar el desplazamiento en O cuando actúan ambas fuentes. Encontrar las restricciones sobre r_1 y r_2 para que O no se desplace. Si $C_1 = C_2$ y $\delta_2 = \delta_1 - \pi$ cual es el lugar geométrico de los puntos que no se desplazan

---

36/001

$$\xi(t) = \frac{C_1}{\sqrt{r_1}} \cos(kr_1 - kvt + \delta_1) + \frac{C_2}{\sqrt{r_2}} \cos(kr_2 - kvt + \delta_2)$$

Esto se puede reescribir teniendo en cuenta que

$$A\cos\alpha + B\cos\beta = \frac{1}{2}(A+B)(\cos\alpha + \cos\beta) + \frac{1}{2}(A-B)(\cos\alpha - \cos\beta)$$

Además $\quad \cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \quad , \quad \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

de donde

$$A\cos\alpha + B\cos\beta = (A+B)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - (A-B)\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Entonces

$$\xi(t) = A_+ \cos\theta_+ \cos\theta_- - A_- \sin\theta_+ \sin\theta_-$$

$$A_\pm = \frac{C_1}{\sqrt{r_1}} \pm \frac{C_2}{\sqrt{r_2}} \quad , \quad \theta_+ = \frac{1}{2}k(r_1+r_2) - 2kvt + \frac{1}{2}(\delta_1+\delta_2)$$

$$\theta_- = \frac{1}{2}k(r_1 - r_2) + \frac{1}{2}(\delta_1 - \delta_2)$$

Para que $\xi(t) = 0$ se debe cumplir

$$A_+ \cos\theta_- = 0 \qquad A_- \sin\theta_- = 0$$

como A_+ nunca puede ser nulo se tiene que $\cos\theta_- = 0 \Rightarrow A_- = 0$

$$\left.\begin{aligned} \frac{C_1}{\sqrt{r_1}} &= \frac{C_2}{\sqrt{r_2}} \\ k(r_1 - r_2) + (\delta_1 - \delta_2) &= (2m+1)\pi \qquad m = 0, \pm 1 \pm 2 \ldots \end{aligned}\right\}$$

Consideremos ahora $C_2 = C_1$ y $\delta_2 = \delta_1 - \pi$. Entonces los nodos son puntos en los que

$$\frac{C}{\sqrt{r_1}} = \frac{C}{\sqrt{r_2}} \qquad k(r_1 - r_2) + \pi = (2m+1)\pi \qquad \Rightarrow$$

$$r_2 = r_1 \qquad y \qquad m = 0$$

Luego los nodos están en ~~el~~ plano perpendicular a S_1S_2 y equidistante de ambos

---

INTRODUCCION A LA MENACICA CUÁNTICA

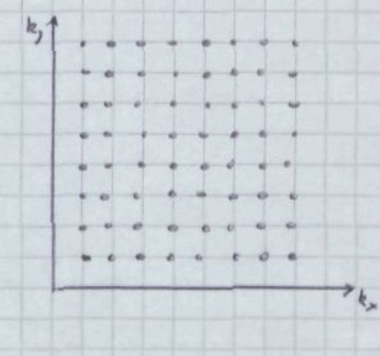
El Cuerpo Negro: Este concepto fué introducido por Kirchoff en 1860, que lo definió como aquel cuerpo que absorbe toda radiación electromagnética que incide sobre él. Mediante argumentos termodinámicos probó que la densidad de energía $u(\nu, T)$, por unidad de volumen y de frecuencia, de la radiación electromagnética en el interior de una cavidad de paredes adiatermas mantenidas a temperatura T, era independiente de la naturaleza de éstas, y su dependencia en ν y T coincidía con la del poder emisivo espectral de un cuerpo negro.

Wien, en 1896, logró probar que

$$u(\nu, T) = \alpha \nu^3 e^{-\beta \nu / T} \qquad \text{(Ley de Wien)} \qquad (1)$$

donde α y β son constantes universales. Experiencias de Paschen y Wanner confirmaron la validez de esta ley para luz visible ($\nu \simeq 10^{15}\ s^{-1}$) y para temperaturas de hasta $T = 4000\ K$. Sin embargo Lummer y Pringsheim, en 1897, al estudiar longitudes de onda mayores ($\nu \simeq 10^{13}\ s^{-1}$) vieron, experimentalmente, que la ley (1) no era correcta.

Lord Rayleigh, en 1900, intentó un nuevo cálculo de $u(\nu, T)$. Su cálculo tenía dos partes:



1) Cálculo del número de modos normales por unidad de volumen y de frecuencia. Consideremos una caja de volumen V muy grande, de forma cúbica y de lado L ($V = L^3$). Una onda estacionaria es

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z)$$

$$k_x = n_x \frac{\pi}{L}, \quad k_y = n_y \frac{\pi}{L}, \quad k_z = n_z \frac{\pi}{L} \qquad n_i = 1, 2, 3, \ldots$$

Cada punto ocupa un volumen $(\pi/L)^3$. Entonces el número de modos normales en el octante de la esfera de radio entre k y $k+dk$ es

$$\frac{4\pi k^2\, dk}{8 \cdot (\pi/L)^3} \qquad (2)$$

y como $k = 2\pi\nu/c$, se tiene que el número de modos normales por unidad de volumen y de frecuencia es

$$N(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \qquad (3)$$

donde se ha añadido un factor multiplicativo 2 para tener en cuenta los dos grados de polarización de la luz.

36/001

2) Supuso además, que para cada uno de estos modos normales, asimilables a osciladores armónicos, la energía media $\langle E(\nu,T)\rangle_{cl}$ podía ser calculada mediante la estadística de Boltzmann

$$\langle E(\nu,T)\rangle_{cl} = \frac{\int_0^\infty dE.\ E.\ e^{-E/k_BT}}{\int_0^\infty dE\ e^{-E/k_BT}} = k_B T \qquad (4)$$

de donde

$$u(\nu,T) = \frac{8\pi\nu^2 k_B T}{c^3} \qquad (\text{Ley de Rayleigh-Jeans})$$

Esta ley daba cuenta de los resultados a bajas frecuencias, pero evidentemente es incorrecta a ν grandes pues da para la energía, por unidad de volumen,

$$\int_0^\infty d\nu\ u(\nu,T) = \infty \qquad (\text{Catástrofe ultravioleta}) \qquad (5)$$

En 1900 Planck, usando métodos termodinámicos, y una hipótesis ad hoc logró encontrar una fórmula de interpolación

$$u(\nu,T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} k_B T \frac{h\nu/k_BT}{e^{h\nu/k_BT}-1} \qquad (\text{Ley de Planck}) \qquad (6)$$

$$k_B = 1.380662\ (44) \times 10^{-17}\ g.\ cm^2\ s^{-2}\ K^{-1}$$

$$\hbar = h/2\pi = 1.0545887\ (57) \times 10^{-27}\ g\ cm^2\ s^{-1}$$

Si $h\nu/k_BT \ll 1 \Rightarrow u(\nu,T) = \frac{8\pi\nu^2 k_B T}{c^3}$ (Ley de Rayleigh-Jeans)

Si $h\nu/k_BT \gg 1 \Rightarrow u(\nu,T) = \frac{8\pi h}{c^3}\nu^3 e^{-h\nu/k_BT}$ (Ley de Wien)

En 1912 el mismo Planck dedujo esta fórmula: Postuló que la energía E de cada modo normal de vibración del campo electromagnético no es una variable continua, sino que únicamente puede tomar los valores

$$E = n h\nu \quad , \quad n = 0, 1, 2 \ldots \qquad (7)$$

entonces

$$\langle E(\nu,T)\rangle_{Planck} = \frac{\sum_{n=0}^\infty n h\nu\, e^{-nh\nu/k_BT}}{\sum_{n=0}^\infty e^{-nh\nu/k_BT}}$$

$$\sum_{n=0}^\infty e^{-nh\nu/k_BT} = \frac{1}{1-e^{-h\nu/k_BT}}$$

$$\sum_{n=0}^\infty nh\nu\, e^{-nh\nu/k_BT} = k_BT^2\frac{d}{dT}\sum_{n=0}^\infty e^{-nh\nu/k_BT} = \frac{h\nu\, e^{-h\nu/k_BT}}{(1-e^{-h\nu/k_BT})^2}$$

Entonces

$$\langle E(\nu,T)\rangle_{Planck} = k_B T \, \frac{h\nu/k_BT}{e^{h\nu/k_BT}-1} \qquad (1)$$

que multiplicada por $N(\nu)$ da

$$u(\nu,T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \, k_B T \, \frac{h\nu/k_BT}{e^{h\nu/k_BT}-1} \qquad (2)$$

1). Si $\bar{u}(\lambda,T)$ indica la densidad de energía por unidad de volumen y de λ entonces

$$\bar{u}(\lambda,T)\, d\bar{\lambda} = u(\nu,T)\, d\nu \qquad , \lambda = \nu/c \qquad (3)$$

y

$$\bar{u}(\lambda,T) = \frac{16\pi^2 c\hbar}{\lambda^5} \, \frac{1}{e^{2\pi\hbar c/\lambda k_BT}-1} \qquad (4)$$

2) Ley de desplazamiento de Wien ¿A qué longitud de onda λ, $\bar{u}(\lambda T)$ presenta un máximo para una T dada

$$\frac{d\bar{u}(\lambda,T)}{d\lambda} = 0 \qquad x = 5(1-e^{-x}) \qquad x \equiv \frac{2\pi\hbar c}{k_B T \lambda_{max}} = 4.965114232$$

$$\lambda_{max}\, T = 0.28978 \text{ cm K} \qquad \text{(Ley de desplazamiento de Wien)} \qquad (5)$$

3) Densidad total de energía por unidad de frecuencia

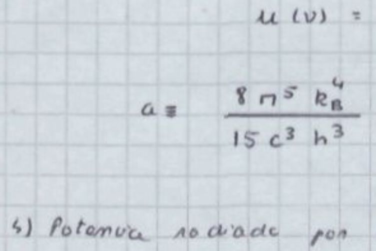
$$u(\nu) \equiv \int_0^\infty d\nu\, u(\nu,T) = \frac{8\pi h}{c^3}\int_0^\infty d\nu \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_BT}-1} = \left| \; x = h\nu/k_BT \; \right|$$

$$= \frac{8\pi k_B^4 T^4}{c^3 h^3}\int_0^\infty dx \frac{x^3}{e^x-1} = \frac{8\pi k_B^4 T^4}{c^3 h^3}\frac{\pi^4}{15} \Rightarrow$$

$$u(\nu) = a\, T^4 \qquad (6)$$

$$a \equiv \frac{8\pi^5 k_B^4}{15 c^3 h^3} = 7.5657(11) \times 10^{-15} \text{ erg cm}^{-3}\text{ K}^{-4} \qquad \text{(Const. Stefan-Boltzmann)}$$

4) Potencia radiada por unidad de área. Como $u(\nu,T)$ es la densidad de energía por unidad de frecuencia y de volumen, entonces $u(\nu,T)/4\pi$ es la correspondiente cantidad por unidad de ángulo sólido. Si en la pared del horno disponemos de un agujero de



área unidad, incide sobre el agujero en la dirección caracterizada por un ángulo (θ,ϕ) dentro de $d\Omega$ una energía

$$\frac{u(\nu,T)}{4\pi}\, d\nu\, c \cos\theta\, d\Omega$$

y por tanto la potencia radiada es

36/001

$$R(\nu,T)\,d\nu = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} d\theta \sin\theta \, \frac{u(\nu,T)}{4\pi} \, c \cos\theta \, d\nu \Rightarrow$$

$$R(\nu,T) = \frac{c}{4} u(\nu,T) \qquad (7)$$

- La potencia total radiada $I(\lambda,T)$ por unidad de area y de longitud de onda es

$$I(\lambda,T) = \frac{c}{4} u(\nu,T) \left|\frac{d\nu}{d\lambda}\right|$$

y como $c = \nu/\lambda$, $|d\nu/d\lambda| = c^2/\lambda$ obtenemos

$$I(\lambda,T) = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5} \frac{1}{e^{ch/\lambda k_B T} - 1} \qquad (8)$$

La potencia radiada por unidad de area es

$$I(T) = \int_0^\infty d\lambda \, I(\lambda T) = \frac{ac}{4} T^4 \Rightarrow$$

$$I(T) = \sigma T^4$$

(ley de Boltzmann) (9)

$$\sigma = \frac{\pi^2 k_B^4}{60 c^2 \hbar^3} = 5.67032\,(71) \times 10^{-8} \, W \, m^{-2} K^{-4}$$

Consideremos el Sol: este es en muy buena aproximación un cuerpo negro con una luminosidad $L_\odot = (3.90 \pm 0.04) \times 10^{33}$ erg s^{-1} y como $R_\odot = 6.96 \times 10^{10}$ cm $\Rightarrow$

$$I = \frac{L_\odot}{4\pi R_\odot} = 6.41 \times 10^{10} \text{ erg cm}^{-2} s^{-1} = 6.41 \times 10^7 \, W \, m^{-2} s^{-1}$$

$$T_\odot = \left(\frac{I}{\sigma}\right)^4 = 5800 \text{ K.}$$

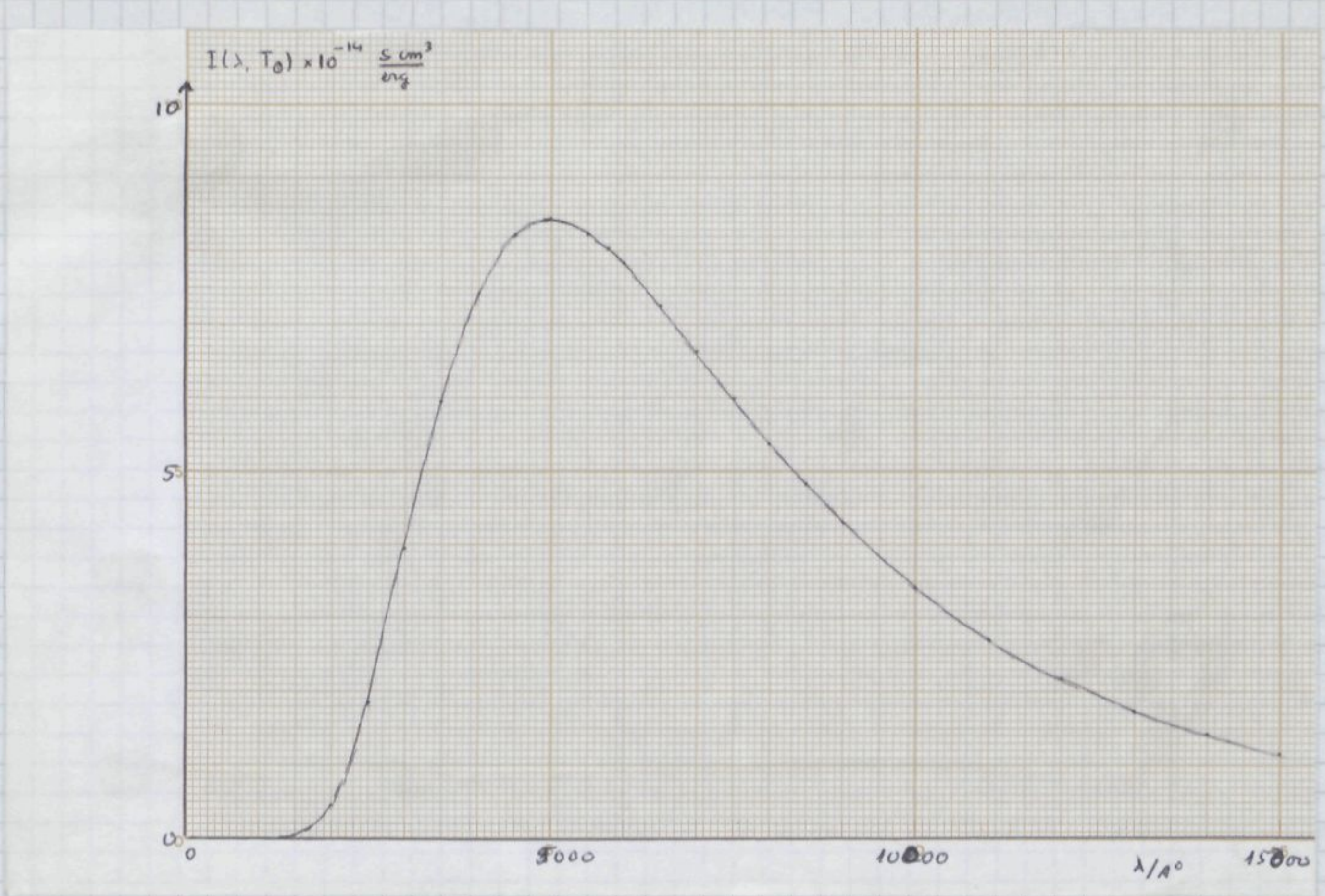
$$\lambda_{max\odot} T_\odot = 0.28978 \text{ cm K} \Rightarrow \lambda_{max\odot} = 5000 \text{ Å}.$$

$$\frac{2\pi c^2 \hbar}{\lambda^5} = 3.74183 \times 10^{35} \text{ erg } s^{-1} \text{cm}^{-3} \left(\frac{\lambda}{Å}\right)^{-5}$$

$$2\pi c \hbar / \lambda k_B T_\odot = 1.438786 \times 10^{8} / T_\odot / (\lambda/Å) = 24807 \left(\frac{\lambda}{Å}\right)^{-1}$$

$$I(\lambda, T_\odot) = 3.74183 \times 10^{35} \text{ erg } s^{-1} \text{cm}^{-3} \frac{1}{(\lambda/Å)^5} \frac{1}{e^{24807/(\lambda/Å)} - 1}$$

y por tanto.



Efecto Fotoeléctrico. A finales del siglo pasado y principios de este los trabajos de un gran número de físicos, entre los que merecen destacarse Hertz, Hallwachs Stoletow y Lenard, demostraron la existencia del llamado efecto fotoeléctrico: Cuando se ilumina una placa metálica con radiación electromagnética el metal emite electrones. Las leyes empíricas que encontraron eran:

i) El número de electrones producidos es proporcional a la intensidad de la radiación incidente.

ii) Para cada metal existe una frecuencia umbral ν_0 de forma que para radiación con $\nu < \nu_0$ no se emiten electrones

iii) La energía cinética máxima de los electrones emitidos es proporcional a $(\nu - \nu_0)$ e independiente de la intensidad de la radiación incidente.

iv) La emisión de electrones es prácticamente instantanea, es decir, aparece y desaparece con la radiación electromagnética sin retraso medible.

Las leyes ii) + iii) son irreconciliables con una teoría ondulatoria de la luz

En 1905 A. Einstein postuló, para explicar este fenómeno, que una radiación monocromática de frecuencia ν se comporta como si consistiera de un número finito de cuantos de energía, localizados e independientes, de magnitud $E = h\nu$. Con esta hipótesis es fácil dar una explicación del efecto fotoeléctrico: Los electrones se encuentran en un metal ocupando distintos estados ligados. Sea $\phi_0 > 0$, la energía de ligadura de los electrones del metal menos ligados ($\phi_0 \equiv$ función de trabajo del metal) y que en general es de unos pocos eV. Al incidir un cuanto de energía sobre el metal parte de su energía se emplea para arrancar el electrón de su estado ligado y el resto aparece como energía cinética del electrón emitido. Entonces la energía cinética máxima es $T_{max} = h\nu - \phi_0 \equiv h\nu - h\nu_0 = h(\nu - \nu_0)$ que corresponde al electrón menos ligado. Existe evidentemente una frecuencia umbral $\nu_0 \equiv \phi_0 / h$, por debajo de la cual es imposible arrancar electrones.

Millikan, en 1916, fue el primero que confirmó el brillante resultado de Einstein al medir h mediante experiencias de efecto fotoeléctrico y comprobar que el valor obtenido coincidía con la constante de Planck de la teoría de la radiación.

Notas

i) La importancia de la teoría de Einstein es enorme y es necesario tener en cuenta que en la citación dada al concedérsele el premio Nobel, en 1922, se dice que el premio se le concede "independientemente del valor que puedan darse finalmente a sus teorías de la relatividad y de la gravitación, si son confirmadas, por sus servicios a la física teórica y especialmente por su descubrimiento de la ley del efecto fotoeléctrico".

ii) Para darse cuenta de la revolución que supone la idea de Einstein citaré que en el escrito que Max Planck, Nernst, Rubens y Emil Warburg prepararon para el Ministerio de Educación para que Einstein pasara a ocupar una plaza en la Academia de Ciencias de Berlín, en 1913, se lee ": En resumen, se puede decir que entre los grandes problemas, tan abundantes en la física moderna, difícilmente hay uno en el que Einstein no haya realizado alguna contribución sobresaliente. Que alguna vez él equivocara el blanco de sus especulaciones como, por ejemplo en su teoría de los cuantos de luz, no puede ser tenido realmente en cuenta contra él".

Efecto Compton: Si bien el efecto era conocido desde antes, fue Compton, en 1921, el que hizo las experiencias cruciales sobre este efecto y estableció las siguientes leyes

i) Al iluminar un cuerpo con rayos X, además de la radiación dispersada, aparece una radiación secundaria

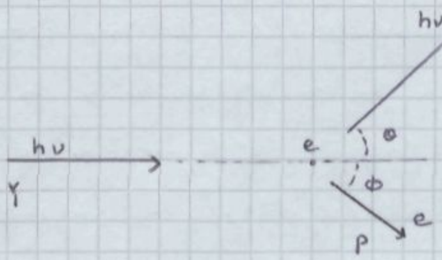
ii) La longitud de onda de la radiación secundaria resulta ser independiente de la substancia usada en el experimento y depende sólo de la longitud de onda de la radiación incidente y del ángulo que formaban las radiaciones incidente y saliente

iii) La longitud de onda de esta radiación secundaria es siempre igual o mayor que la de la radiación incidente.

El propio Compton intentó explicar este fenómeno en el marco de la teoría ondulatoria de la luz y al darse cuenta de que esto no era posible, recurrió a la teoría corpuscular. Supuso que no sólo la luz de frecuencia ν está formada por cuantos de energía $h\nu \equiv E$, sino que estos cuantos tienen un momento p bien determinado

$$E = h\nu \qquad p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{c} \tag{1}$$

El nombre de fotones para los cuantos de luz es debido a Lewis, en 1926. Notar que estas relaciones implican que $m_\gamma = 0$. La energía de los fotones es mucho mayor que la de los electrones en el sólido y pueden considerarse estos últimos en reposo. Compton aplicó al choque elástico electrón-fotón las leyes de conservación del momento y la energía.



$$h\nu + m_e c^2 = h\nu' + \sqrt{m_e^2 c^4 + p^2 c^2}$$
$$\frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c}\cos\theta + p\cos\phi \tag{2}$$
$$0 = \frac{h\nu'}{c}\sin\theta - p\sin\phi$$

$$\Rightarrow \left(\frac{h\nu}{c} - \frac{h\nu'}{c}\cos\theta\right)^2 + \frac{h^2\nu'^2}{c^2}\sin^2\theta = p^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p^2 = \frac{h^2}{c^2}\left(\nu^2 + \nu'^2 - 2\nu\nu'\cos\theta\right) \Rightarrow$$

$$(h\nu + m_e c^2 - h\nu')^2 = m_e^2 c^4 + h^2(\nu^2 + \nu'^2 - 2\nu\nu'\cos\theta) \Rightarrow$$

$$2 m_e c^2 h(\nu - \nu') - 2h^2\nu\nu' = -2h^2\nu\nu'\cos\theta \Rightarrow m_e c^2 h\left(\frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu}\right) = h^2(1-\cos\theta)$$

$$\Delta\lambda \equiv \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}(1-\cos\theta) \geq 0 \tag{3}$$

$$\frac{h}{m_e c} = 2.4263088(40) \times 10^{-10}\ \text{cm.} \qquad \text{(longitud de onda Compton)} \tag{4}$$

La fórmula está en perfecto acuerdo con la experiencia.

Los núcleos del material darán un $\Delta\lambda$ prácticamente inobservable pues en (3) en lugar de m_e deberíamos poner la masa nuclear.

Luz ¿Onda o corpúsculo? Durante muchos años el físico ha tenido como opuestas las nociones de onda y partícula y por tanto las experiencias anteriores plan-

36/001

teaban un serio dilema en el caso de la luz. Para interpretar las experiencias clásicas de interferencia y difracción era necesario considerar el carácter ondulatorio de la radiación electromagnética, mientras que la explicación de los efectos fotoeléctrico y Compton exigían atribuir a la luz un carácter corpuscular. ¿Es la luz onda o corpúsculo? La contestación a ésta pregunta pudo ser dada sólo en la segunda mitad de los años veinte gracias, principalmente, a la interpretación estadística de la mecánica cuántica desarrollada a partir del trabajo fundamental de Born de 1926 y el principio de complementaridad de Bohr de 1927.

Contemplemos ahora la experiencia de Young desde el punto de vista corpuscular, es decir, suponiendo que la fuente luminosa emite fotones, isotrópicamente. Estos fotones no interaccionan prácticamente entre si; si se reduce la intensidad del foco en un determinado factor y se aumenta en el mismo el tiempo de exposición, la distribución de intensidades no cambia. Por otra parte, la evidencia experimental (por ejemplo, el efecto fotoeléctrico) apoya que el fotón se comporta como una partícula indivisible.

De acuerdo con la mentalidad clásica deberíamos aceptar que los fotones tienen unas trayectorias bien definidas y debe pasar por una de las aberturas y los resultados son inexplicables. Por otra parte, hoy día se dispone de contadores de fotones, y en principio puede sustituirse la placa registradora por un mosaico de dichos contadores y hacerse la fuente suficientemente débil para que, al salir un fotón de ella, el anterior ya haya llegado a los contadores. Se observa entonces que la llegada de un fotón queda registrada en un solo contador, que las sucesivas llegadas son erráticas y que el número total de veces que el contador situado en P registra la llegada de un fotón individual es proporcional, para un tiempo de observación suficientemente largo, a la intensidad que habíamos calculado con el modelo ondulatorio

La interpretación estadística de la mecánica cuántica aplicada a este problema se puede formular diciendo que la amplitud de la onda luminosa $\Psi(\vec{x};t)$, no conduce a una distribución continua de energía, sino que $|\Psi(\vec{x};t)|^2$ mide la densidad de probabilidad de que en el instante t el fotón se halle en el punto $\vec{x}$. Así se logran unificar los aspectos ondulatorio y corpuscular de la luz, ninguno de los cuales proporciona una descripción completa de la realidad física, sino que son aspectos complementarios de una única realidad que se hacen más o menos patentes según el tipo de experiencia que se realice.

Para ver otro ejemplo de como el dispositivo experimental puede afectar el que la luz se manifieste como onda o como corpúsculo, consideremos ahora la experiencia de Young, añadiéndole dos monitores, uno situado detrás y en la cercanía de una de las rendijas y el otro detrás y en la cercanía de la otra. El fotón emitido por la fuente dispara uno de los monitores únicamente, con lo que queda constancia de la abertura por la que ha pasado. En este caso desaparecen los fenómenos de interferencia y la intensidad de luz recibida en un tiempo t en un punto de la pantalla es la que se recibiría si se expusiera la placa con una rendija tapada un tiempo $t/2$ y con la otra tapada un tiempo $t/2$.

De todo lo dicho se puede concluir:

i) La probabilidad de un suceso, resultado de un experimento, viene dada por el cuadrado del modulo de un número complejo, que se llama "amplitud de probabilidad".

ii) Si un suceso puede ocurrir de varias formas alternativas indistinguibles, la amplitud de probabilidad es la suma de las amplitudes de probabilidad de cada una de las alternativas

iii) Si se realiza una experiencia que permita decidir cuál de las alternativas tiene lugar, la probabilidad del suceso es la suma de probabilidades de las alternativas distinguibles.

Estructura atómica. A principios del siglo XX aparecen los primeros modelos atómicos: Perrin, Nagaoka, Thomson, ... En 1911 Rutherford hace el análisis de la experiencia, realizada en su laboratorio, de la colisión de partículas α con láminas delgadas de Au. Muchas de las partículas α atravesaban el material sin ser prácticamente desviadas y, sorprendentemente, unas pocas eran desviadas un gran ángulo. Esto le permitió concluir que el átomo tenía un núcleo muy pequeño en el que residía toda la carga positiva y la mayor parte de la masa, alrededor del cual, y a grandes distancias, se movían de alguna forma los electrones.

Consideremos un átomo de hidrógeno: un protón y un electrón. Según la mecánica clásica si la energía relativa del sistema es $E\ (<0)$ el electrón describe una elipse en cuyo foco se halla el protón. La frecuencia del movimiento es

$$\nu = \left(\frac{2|E|^3}{\mu} \right)^{1/2} \frac{1}{\pi e^2} \qquad (1)$$

donde μ es la masa reducida del sistema. De acuerdo con la electrodinámica de

36/001

Maxwell el electrón, que está en movimiento acelerado, emite radiación compuesta por una serie de ondas monocromáticas de frecuencia igual a ν o a uno de sus armónicos. Esto hace que el electrón pierda energía y se produzca la caída hacia el núcleo en un tiempo inferior a 10^{-10} s, originándose una emisión continua de radiación.

En contra de esto se observa, que tras excitar un átomo, aparece un espectro de emisión de líneas de frecuencias bien definidas para las que empíricamente Ritz, en 1908, encontró el principio de combinación: la frecuencia de cualquier línea espectral de un elemento es expresable como la diferencia de dos términos espectrales. Para el H los términos son de la forma R/n^2, donde R es una constante y n un número entero positivo, por lo que las frecuencias posibles son

$$\nu_{m,n} = \frac{R}{n^2} - \frac{R}{m^2} \qquad m > n = 1, 2, 3 \ldots \qquad (2)$$

resultado totalmente imposible de comprender clásicamente. De hecho un maestro de escuela, Balmer, ya había propuesto la relación anterior para el hidrógeno en 1885.

En 1913 Niels Bohr logró dar un modelo al átomo hidrogenoide mediante una serie de hipótesis

i) Un átomo tiene un conjunto discreto de estados estacionarios con energías $E_1, E_2, \ldots$

ii) La emisión y absorción de radiación por un átomo no tiene lugar de una forma continua, como indica la electrodinámica clásica, sino sólo cuando el átomo pasa de un estado estacionario a otro

iii) Al pasar de un estado estacionario E_i a otro $E_j < E_i$ ($E_j > E_i$) se emite (absorbe) un fotón de energía $h\nu = |E_i - E_j|$. Esta fórmula desprecia el retroceso atómico que es despreciable.

iv) Un electrón en un estado estacionario describe una órbita circular con movimiento gobernado por las leyes de la mecánica clásica, pero éstas no son válidas en las transiciones de un estado a otro

v) Las órbitas estacionarias en el átomo vienen determinadas por la condición de que el momento angular orbital del electrón sea un múltiplo entero de $\hbar$.

Apliquemos estas leyes a un átomo hidrogenoide de masa reducida μ y con carga nuclear $Z|e|$. El momento angular de las órbitas estacionarias es $l = n\hbar$ $(n = 1, 2, \ldots)$ y de acuerdo con el teorema del virial $\langle K \rangle = -\langle V \rangle / 2$.

Si a es el radio de la órbita.

$$l = pa = n\hbar \quad \Rightarrow \quad p = n\frac{\hbar}{a} \quad \Rightarrow \quad K = \frac{1}{2\mu}p^2 = \frac{\hbar^2}{2\mu a^2}\,n^2$$

$$V = -\frac{Ze^2}{a} \quad \text{y como} \quad K = -V/2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\hbar^2}{2\mu a^2}\,n^2 = \frac{Ze^2}{a}$$

Radio $$a = \frac{\hbar}{\mu\,(Z\alpha c)}\,n^2 \qquad (1)$$

Energía $$E = -\frac{1}{2}\,\mu\,(Z\alpha c)^2\,\frac{1}{n^2} \qquad (2)$$

Velocidad $$v = (Z\alpha c)\,\frac{1}{n} \qquad (3)$$

Constante de estructura fina $$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = 1/137.036\,04\,(11) \qquad (4)$$

El modelo de Bohr es una mezcla no muy deseable de métodos clásicos y postulados revolucionarios. En realidad ya dijimos que en mecánica cuántica no es posible hablar de órbitas. La mecánica cuántica da los valores de E que se acaban de deducir, pero, como veremos, a y v indican sólo valores medios. Por otra parte n, llamado número cuántico principal, no fija el momento angular. En realidad la mecánica cuántica nos dice que un estado con número cuántico principal n puede tener electrones con momentos angulares $l/\hbar = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

De la expresión (2) se deduce inmediatamente el principio de combinación de Ritz y

$$\nu_{m\to n} = \frac{\mu\,(Z\alpha c)^2}{4\pi\hbar}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right), \quad m > n = 1, 2, 3 \dots \qquad (5)$$

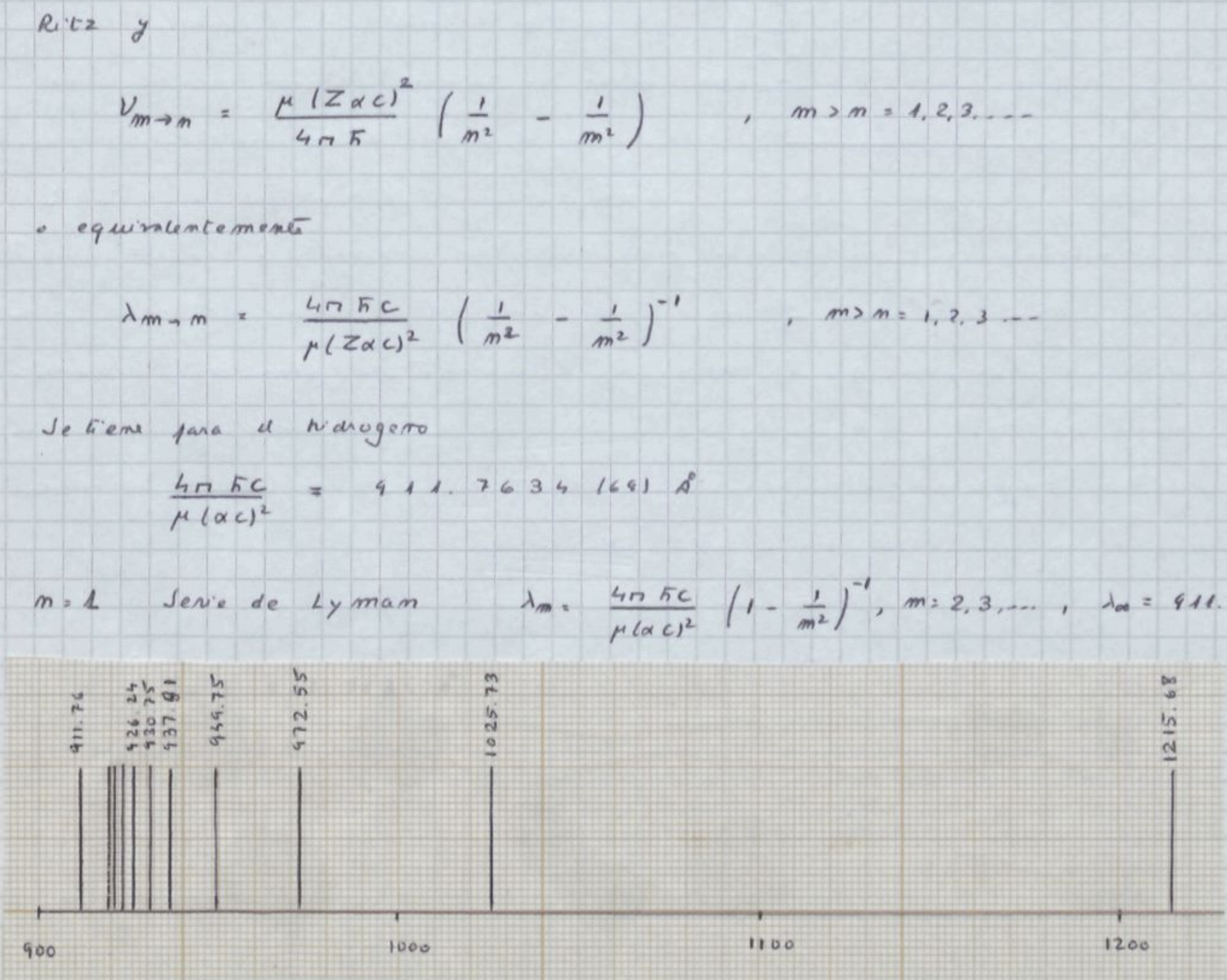
o equivalentemente

$$\lambda_{m\to n} = \frac{4\pi\hbar c}{\mu\,(Z\alpha c)^2}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)^{-1}, \quad m > n = 1, 2, 3 \dots \qquad (6)$$

Se tiene para el hidrógeno

$$\frac{4\pi\hbar c}{\mu\,(\alpha c)^2} = 911.7634\,(68)\ \text{Å}$$

$n = 1$ Serie de Lyman $\quad \lambda_m = \dfrac{4\pi\hbar c}{\mu\,(\alpha c)^2}\left(1 - \dfrac{1}{m^2}\right)^{-1}, \quad m = 2, 3, \dots, \quad \lambda_\infty = 911.76\ \text{Å}$



36/001

Todo ello está en el ultravioleta

n=2 Serie de Balmer . Visible $\lambda_{3\to2} = 6564.70$ Å , $\lambda_\infty = 3647.05$ Å

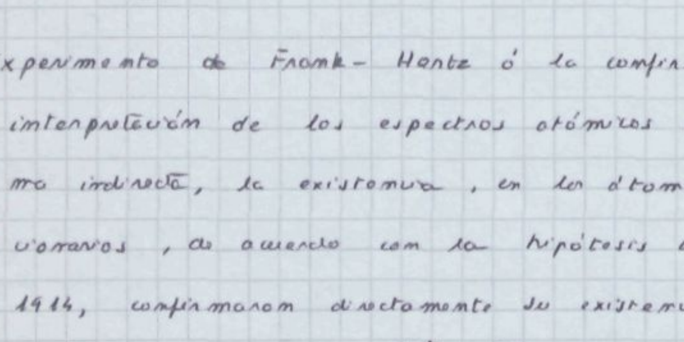
n=3 Serie de Paschen . Infrarrojo $\lambda_{4\to3} = 18756$ Å $\lambda_\infty = 8205.87$ Å

n=4 Serie de Brackett Infrarrojo $\lambda_{5\to4} = 40523$ Å $\lambda_\infty = 14588.1$ Å

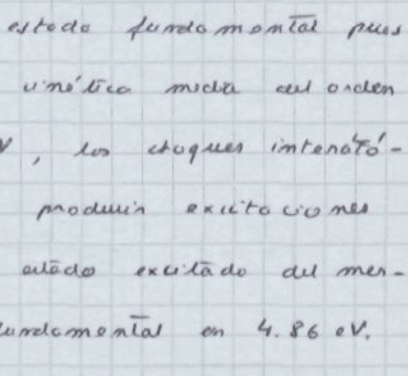
n=5 Serie de Pfund Infrarrojo $\lambda_{6\to5} = 74599$ Å $\lambda_\infty = 22794.1$ Å

Volveremos más adelante sobre el espectro del átomo de hidrógeno. Los resultados anteriores están en buen acuerdo con los datos experimentales sino se hacen medidas muy precisas.

Experimento de Franck-Hertz ó la confirmación directa de los niveles energéticos. La interpretación de los espectros atómicos estableció sin lugar a dudas, pero de forma indirecta, la existencia, en los átomos, de una serie de niveles de energía estacionarios, de acuerdo con la hipótesis de Bohr. Fueron Franck y Hertz los que, en 1914, confirmaron directamente su existencia. El vapor de mercurio a temperatura ambiente tiene prácticamente todos sus átomos en su estado fundamental pues siendo la energía cinética media del orden de $k_B T \simeq 1/40$ eV, los choques interatómicos no pueden producir excitaciones ya que el primer estado excitado del mercurio dista del fundamental en 4.86 eV.



Cuando V es próximo a cero, los electrones provenientes del filamento caliente F carecen de energía para llegar a la placa P, al no poder vencer la diferencia de energía potencial entre la rejilla R y la placa P. A medida que V aumenta, llegarán más electrones a P, y muchos de ellos habrán chocado en su camino con átomos de Hg sin haberles transferido prácticamente energía. Si se admite la existencia real de los estados estacionarios, es de esperar que cuando $V \simeq 5V$, los electrones empiecen a sufrir colisiones inelásticas, dejando algún átomo en su primer estado excitado y perdiendo el electrón su energía. Se debe así observar a partir de $V \simeq 5V$, una caída brusca de la corriente, como realmente sucede. Si se continúa aumentando V los electrones, después del choque inelástico, tienen aun energía suficiente para llegar a la placa y la corriente aumentará de nuevo hasta $V \simeq 10V$,



momento en el que los electrones podrán chocar dos veces inelásticamente y se observará una nueva caída en la intensidad de la corriente, como sucede realmente.

Reglas de cuantificación de Sommerfeld - Wilson - Ishiwara. Uno de los resultados más importantes de la primitiva teoría cuántica fué la generalización de la teoría de Bohr llevada a cabo por Sommerfeld (1916), Wilson (1915) e Ishiwara (1915). Vamos a empezar considerando problemas unidimensionales. Sea q la coordenada que caracteriza la posición de la partícula y p el momento conjugado a esta. Si x es una coordenada cartesiana de posición entonces $p = m\dot{x}$. Construyamos la llamada variable de acción J definida como

$$J = \oint dq\; p \qquad (1)$$

donde la integral se extiende a un periodo. Entonces las reglas de cuantificación de S.W.I dicen que

$$J = n\, h \qquad n = \text{entero} \qquad (2)$$

y esto permite calcular la energía de los niveles estacionarios.

Ejemplo 1. Sabemos que la integral de la energía se puede escribir

$$E = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} M \omega^2 x^2 \qquad (3)$$

y ya vimos que

$$x = \sqrt{\frac{2E}{M\omega^2}} \cos(\omega t + \alpha) \quad \Rightarrow \quad p = M\dot{x} = -\sqrt{2EM}\, \sin(\omega t + \alpha)$$

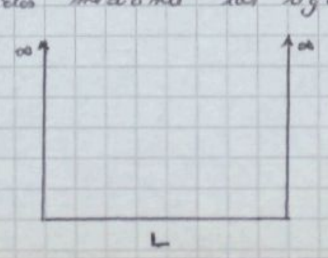
$$J = \oint dq\, p = \int_0^T dt\; 2E \sin^2(\omega T + \alpha) = \frac{2E}{\omega} \int_0^{2\pi} dz\, \sin^2 z = \frac{2E}{\omega}\pi = n\, h \quad \Rightarrow$$

$$E = \omega \hbar\, n \qquad n = 1, 2, 3 \ldots \qquad (4)$$

El valor deducido mediante la mecánica cuántica es

$$E = \omega \hbar\, (n + 1/2) \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (5)$$

que coincide con el obtenido para $n \gg 1$. En realidad sabemos hoy día que sólo para n grande podemos creer los valores de las energías obtenidas mediante las reglas de cuantificación de SWI.



Ejemplo 2. Consideremos una partícula en una caja

$$E = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 \qquad , \quad p = \sqrt{2ME}$$

36/001

$J = \sqrt{2ME}\ 2L = nh$

$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ML^2}\ n^2 \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (6)$$

que coincide, para todo n, con el valor obtenido en mecánica cuántica.

Notas

i) Si q no es una coordenada cartesiana y $K = K(\dot{q})$ y $V = V(q)$ entonces $p \equiv \partial K(\dot{q}) / \partial \dot{q}$.

ii) El método es aplicable a sistemas multiperiódicos en general. Si entonces $q_1, q_2, \ldots q_N$ son las coordenadas posición y $p_1, p_2, \ldots p_N$ los momentos conjugados entonces cada una de las acciones

$$J_i \equiv \oint dq_i\ p_i \qquad (7)$$

debe estar cuantificada $(= n_i h)$

iii) Al aplicar este método al átomo de hidrógeno, se obtiene que el nivel asociado con el número cuántico principal n, y cuya energía viene dada por la fórmula deducida por Bohr, le corresponden n tipos de órbitas caracterizadas por un número cuántico n_φ que puede tomar los valores $1, 2, \ldots, n$ y que mide, en unidades de $\hbar$, el momento angular. Para cada uno de ellos la órbita se puede orientar en el espacio de $(2n_\varphi + 1)$ formas distintas. En realidad la mecánica cuántica nos dice que para un n dado los valores posibles del momento angular son $L/\hbar = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ y que estas órbitas se pueden orientar en el espacio de $(2L+1)$ formas distintas. La degeneración del nivel n es según las reglas de SWI $n(n+2)$, mientras que de acuerdo con la mecánica cuántica es n^2, que es el resultado correcto, si no se tiene en cuenta el spin.

iv) Mediante estas reglas de cuantificación se pudieron atacar muchos problemas: estructura fina de los espectros de los que hablaremos más adelante, efecto Stark, ... En muchos se lograron dar explicaciones pero en otros, como por ejemplo el efecto Zeeman, se fracasó. En el caso del efecto Zeeman el fracaso es debido a que el spin del electrón juega un papel esencial y aun no se había descubierto su existencia.

Ondas de materia: En el estudio del efecto Compton hemos visto que para el fotón la relación entre su momento p y su longitud de onda λ era

$$\lambda = \frac{h}{p} \qquad (8)$$

En 1923 Louis de Broglie, estudiando las analogías entre los fenómenos mecánicos y ondulatorios, postuló que cualquier móvil con momento p va acompañado de una onda, imposible de separar de su movimiento, y con longitud de onda dada por la expresión $\lambda = h/p$. Esto implica, como destacó el mismo de Broglie, que en circunstancias adecuadas cualquier cuerpo puede revelar su carácter ondulatorio. En 1927 Davisson y Germer confirmaron esta predicción: con electrones de 54 eV y una red de difracción formada por un cristal de níquel obtuvieron una figura de difracción correspondiente a $\lambda \simeq 1.65 Å$, en buen acuerdo con el valor teórico $\lambda \simeq 1.67 Å$.

La Ecuación de Schrödinger. El trabajo de De Broglie constituye uno de los puntos de partida de la mecánica cuántica. El primer problema que se planteaba era el de determinar qué ecuación de ondas regía la evolución de la onda asociada al movimiento de una partícula. Este problema fué abordado y resuelto por Schrödinger en 1926. Encontró que para una partícula de masa M que se mueve bajo la influencia de un potencial $V(\vec{r})$, la función de onda $\Psi(\vec{r};t)$ debía satisfacer la ecuación

$$- \frac{\hbar^2}{2M} \Delta \Psi(\vec{r};t) + V(\vec{r}) \Psi(\vec{r};t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r};t)}{\partial t} \tag{1}$$

En general $\Psi(\vec{r};t)$ es una función compleja y se normaliza en la forma

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3r \ |\Psi(\vec{r};t)| = 1 \tag{2}$$

Entonces $|\Psi(\vec{r}t)|^2$, de acuerdo con Born (1926), se interpreta como la densidad de probabilidad de que en el instante t la partícula esté en $\vec{r}$. La función de onda $\Psi(\vec{r};t)$ nos da el máximo conocimiento posible sobre el sistema.

Estados estacionarios: De particular interés para nosotros son los llamados estados estacionarios para los que

$$\Psi(\vec{r};t) = \psi(\vec{r})\, e^{-iEt/\hbar} \tag{3}$$

El nombre es debido a que $|\Psi(\vec{r};t)|^2 = |\psi(\vec{r})|^2$ es independiente del tiempo. La $\psi(\vec{r})$ debe satisfacer la ecuación de ondas

$$- \frac{\hbar^2}{2M} \Delta \psi(\vec{r}) + V(\vec{r}) \psi(\vec{r}) = E\, \psi(\vec{r}) \tag{4}$$

Es evidente que una ecuación diferencial como la anterior no tiene determinada su solución a no ser que se impongan unas condiciones sobre $\psi(\vec{r})$. Por ejemplo para poder lograr una interpretación de $\psi(\vec{r})$ es necesario que esta función sea de cuadrado integrable, es decir impondremos

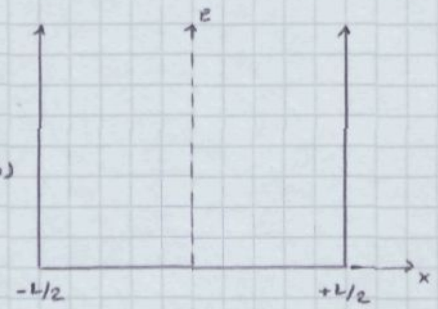
$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3r \, |\psi(\vec{r})|^2 = 1 \qquad (5)$$

de lo contrario la probabilidad de hallar la partícula en algún punto del espacio no sería la unidad. Esto hace que sólo para algunos valores de E la ecuación anterior tenga soluciones y estas son las energías de los estados estacionarios del sistema.

Pozo cuadrado infinito unidimensional.

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = E\,\psi(x) \qquad |x| \leq L/2$$

$$\psi(x) \equiv 0 \qquad |x| \geq L/2 \qquad (6)$$



La segunda condición corresponde a la imposibilidad de encontrar la partícula para $|x| \geq L/2$. La solución mas general de la ecuación diferencial anterior es

$$\psi(x) = A\cos\sqrt{\frac{2ME}{\hbar^2}}\,x + B\sin\sqrt{\frac{2ME}{\hbar^2}}\,x \qquad (7)$$

Impongamos ahora $\psi(\pm L/2) = 0$

$$A\cos\sqrt{\frac{2ME}{\hbar^2}}\,\frac{L}{2} + B\sin\sqrt{\frac{2ME}{\hbar^2}}\,\frac{L}{2} = 0$$

$$A\cos\sqrt{\frac{2ME}{\hbar^2}}\,\frac{L}{2} - B\sin\sqrt{\frac{2ME}{\hbar^2}}\,\frac{L}{2} = 0 \qquad (8)$$

que solo puede tener soluciones no nulas si el determinante de los coeficientes es nulo

$$-2\sin\sqrt{\frac{2ME}{\hbar^2}}\,\frac{L}{2}\cos\sqrt{\frac{2ME}{\hbar^2}}\,\frac{L}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$\sin\left(\sqrt{\frac{2MEL^2}{\hbar^2}}\right) = 0 \qquad (9)$$

y por tanto los únicos niveles permitidos son

$$E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ML^2}\,n^2 \quad , \quad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (10)$$

El valor $n=0$ debe excluirse pues $\psi_0(x) \equiv 0$. ¿Como son las funciones de onda? Para un dado n los valores de A_n y B_n vienen dado por

$$A_m \cos\frac{\pi m}{2} + B_m \sin\frac{\pi m}{2} = 0 \qquad\qquad m \text{ par} \Rightarrow A_m = 0$$ (1)

$$A_m \cos\frac{\pi m}{2} - B_m \sin\frac{\pi m}{2} = 0 \qquad\qquad m \text{ impar} \Rightarrow B_m = 0$$

y

Si m = par $\qquad \psi_m(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{m\pi}{L} x\right)$ (2)

Si m = impar $\qquad \psi_m(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{m\pi}{L} x\right)$

es decir que para todo valor de m

$$\psi_m(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\frac{m\pi}{L}\left(x + \frac{L}{2}\right) \qquad m = 1, 2, \ldots$$ (3)

Notar que hemos normalizado a la unidad y hemos elegido la fase global de forma arbitraria, pues solo $|\psi_m(x)|^2$ es interesante. Veamos propiedades interesantes

i) De las expresiones anteriores

$$\psi_m(-x) = (-1)^{m-1} \psi_m(x)$$ (4)

y por tanto las funciones de onda pares e impares van alternandose. La fundamental $(m=1)$ es par.

ii) Notar que $\psi_m(x)$ en el abierto $(-L/2, L/2)$ tiene $(m-1)$ nodos, es decir la función de onda oscila mas y mas al crecer m.

iii) Valor medio de x

$$\langle x \rangle_m = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \; x \; |\psi_m(x)|^2 = 0$$ (5)

pues $|\psi_m(x)|^2$ es siempre par.

iv) Calculemos la indeterminación en x

$$(\Delta x)^2_m \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dx \; [x - \langle x\rangle_m]^2 |\psi_m(x)|^2 = \int_{-L/2}^{L/2} dx \; x^2 \; |\psi_m(x)|^2$$

$$= \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{+L/2} dx \; x^2 \sin^2 \frac{m\pi}{L}\left(x + \frac{L}{2}\right) = \frac{2L^2}{(m\pi)^3}\int_0^{m\pi} dz \left(z - \frac{m\pi}{2}\right)^2 \sin^2 z =$$

$$= \frac{2L^2}{(m\pi)^3}\left\{\left[\frac{z^3}{6} - \frac{z^2}{4}\sin 2z + \frac{1}{8}\sin 2z - \frac{z}{4}\cos 2z\right] - m\pi\left[\frac{z^2}{4} - \frac{z}{4}\sin 2z - \frac{1}{8}\cos 2z\right]\right.$$

$$\left. + \frac{m^2\pi^2}{4}\left[\frac{z}{2} - \frac{1}{4}\sin 2z\right]\right\}_0^{m\pi} \Rightarrow$$

$$(\Delta x)^2_m = \frac{L^2}{12}\left(1 - \frac{6}{m^2\pi^2}\right)$$ (6)

v) Consideremos la situación clásica. Para un valor dado de la energía E la partícula se mueve de la una a la otra pared con velocidad constante y momento $p = \sqrt{2ME}$. La densidad de probabilidad de hallar la partícula en x es

$$\rho(x) = \frac{1}{L} \qquad (7)$$

y por tanto

$$\langle x \rangle_{cl} = 0 \qquad\qquad (\Delta x)^2_{cl} = \frac{L^2}{12} \qquad (8)$$

Ambos resultados coinciden con los cuánticos en el límite $n \to \infty$, como debe suceder

vi) Distribución de momentos. La función de ondas en la representación de momentos es

$$\hat{\psi}_n(p) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \; \psi_n(x) \, e^{-ipx/\hbar} \qquad (9)$$

y $|\hat{\psi}_n(p)|^2$ se interpreta como la densidad de probabilidad de que la partícula tenga momento p. La función definida en (9) está normalizada

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dp \; |\hat{\psi}_n(p)|^2 = 1 \qquad (10)$$

Procedamos a su cálculo

$$\hat{\psi}_n(p) = \frac{1}{(\pi\hbar L)^{1/2}} \int_{-L/2}^{+L/2} dx \; e^{-ipx/\hbar} \sin\frac{n\pi}{L}(x + L/2) =$$

$$= \frac{1}{2i(\pi\hbar L)^{1/2}} \int_{-L/2}^{L/2} dx \left\{ e^{i\frac{n\pi}{2}} e^{-i\left(\frac{p}{\hbar} - \frac{n\pi}{L}\right)x} - e^{-i\frac{n\pi}{2}} e^{-i\left(\frac{p}{\hbar} + \frac{n\pi}{L}\right)x} \right\} =$$

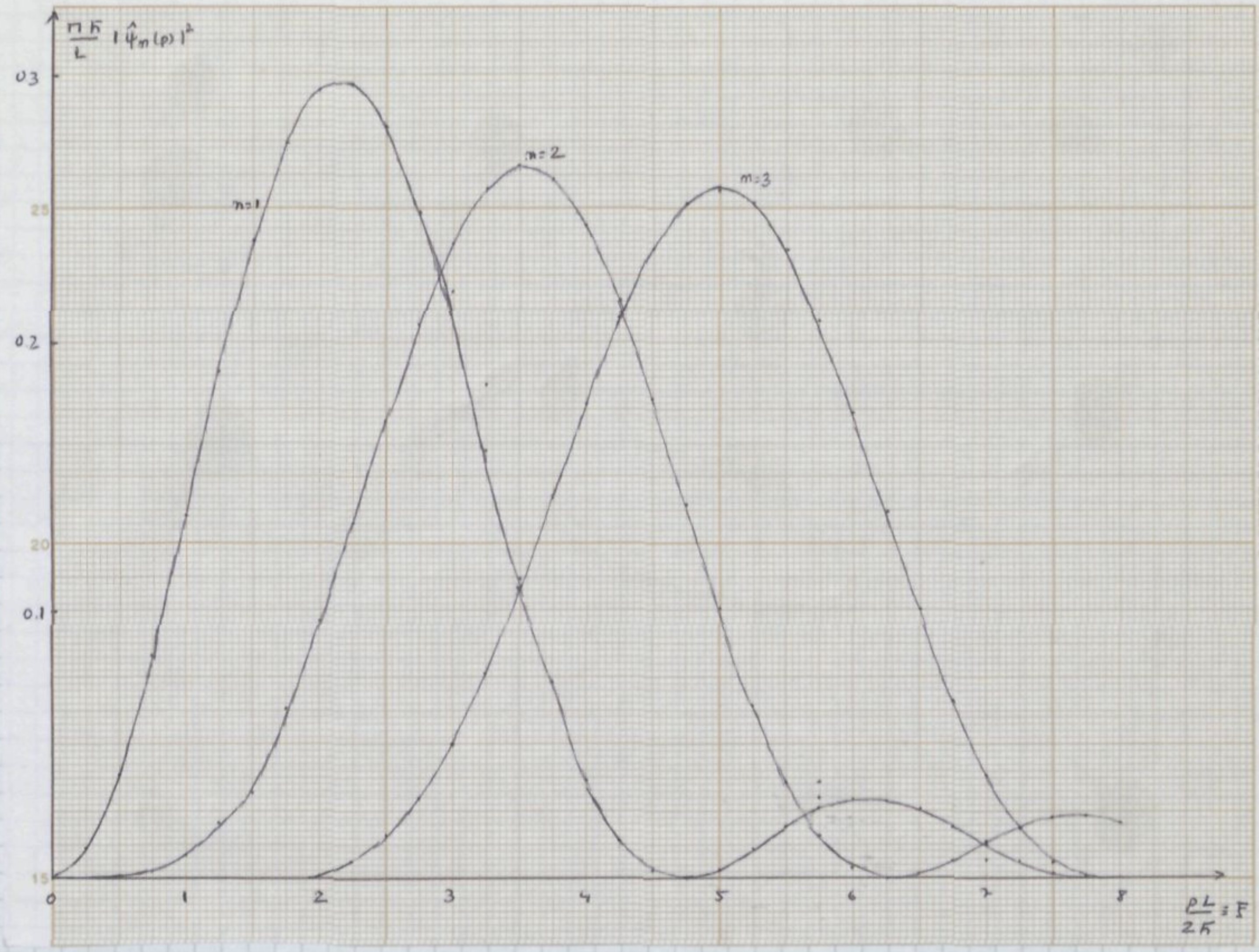
$$= -\frac{i}{(\pi\hbar L)^{1/2}} \left\{ \frac{e^{in\pi/2}}{(p/\hbar - n\pi/L)} \sin\left(\frac{p}{\hbar} - \frac{n\pi}{L}\right)\frac{L}{2} + \frac{e^{-in\pi/2}}{(p/\hbar + n\pi/L)} \sin\left(\frac{p}{\hbar} + \frac{n\pi}{L}\right)\frac{L}{2} \right\}$$

$$= -\frac{i}{(\pi\hbar L)^{1/2}} \left\{ \frac{1}{(p/\hbar - n\pi/L)} + \frac{1}{(p/\hbar + n\pi/L)} \right\} \left\{ \cos^2\frac{n\pi}{2} \sin\frac{pL}{2\hbar} - i\sin^2\frac{n\pi}{2} \cos\frac{pL}{2\hbar} \right\}$$

$$= -\frac{i}{(\pi\hbar L)^{1/2}} \frac{2p\hbar}{p^2 - \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{L^2}} \left\{ \cos^2\frac{n\pi}{2} \sin\frac{pL}{2\hbar} - i\sin^2\frac{n\pi}{2} \cos\frac{pL}{2\hbar} \right\} \Rightarrow$$

$$n = \text{impar} \qquad \hat{\psi}_n(p) = -\frac{1}{(\pi\hbar L)^{1/2}} \frac{2p\hbar}{p^2 - \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{L^2}} \cos\frac{pL}{2\hbar} \qquad (11)$$

$$n = \text{par} \qquad \hat{\psi}_n(p) = -\frac{i}{(\pi\hbar L)^{1/2}} \frac{2p\hbar}{p^2 - \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{L^2}} \sin\frac{pL}{2\hbar}$$



Maxima $\quad \xi = \frac{m\pi}{2}(1+\delta) \qquad \xi^2 - \frac{m^2\pi^2}{4} = 2\delta\left(1+\frac{1}{2}\delta\right)$

$$\frac{\xi^2}{(\xi^2 - m^2\pi^2/4)^2} = \frac{m^2\pi^2}{16}\frac{1}{\delta^2}\left(\frac{1+\delta}{1+\delta/2}\right)^2 = \frac{m^2\pi^2}{16}\frac{1}{\delta^2}\left(1+\delta-\frac{1}{4}\delta^2+\dots\right)$$

$$\sin^2\frac{\pi m}{2}\delta = \frac{\pi^2 m^2}{4}\delta^2\left(1-\frac{\pi^2 m^2}{12}\delta^2\right)$$

$$\frac{\pi\hbar}{L}|\hat\psi(p)|^2 = \frac{1}{4}\left(1+\delta-\left(\frac{1}{4}+\frac{\pi^2 m^2}{12}\right)\delta^2+\dots\right) \quad \to \quad \delta = \frac{6}{3+m^2\pi^2}$$

$$\left(\frac{pL}{2\hbar}\right)_{max} = \frac{m\pi}{2}\left(1+\frac{6}{3+m^2\pi^2}+\dots\right) \tag{1}$$

$$\frac{\pi\hbar}{L}|\hat\psi(p)|^2\Big|_{\xi=\xi_{max}} = \frac{1}{4}\left\{1+\frac{6}{3+m^2\pi^2}+\dots\right\} \tag{2}$$

$$(\Delta p)^2_m \simeq \frac{4\pi^2}{L^2}\hbar^2 \tag{3}$$

36/001

Atomos hidrogenoideos. La resolución de la ecuación de Schrödinger da para los niveles energeticos

$$E_n = -\frac{1}{2}\mu\,(Z\alpha c)^2\,\frac{1}{n^2} \qquad n = 1, 2, 3 \ldots \tag{4}$$

De aqui la energia de ligadura para el estado fundamental es

$$B = \frac{\mu}{m_e}\; 13.605\,804\,(36)\ \text{eV}. \tag{5}$$

$$\frac{\mu}{m_e} = \frac{m_e}{1+m_e/m_p} = 0.999\,455\,679$$

Se puede probar que para un n dado existen n^2 soluciones distintas de la ecuación de Schrödinger que se suelen indicar por

$$\psi_{n\ell m}(\vec r) \tag{6}$$

n = número cuántico principal, ℓ = momento angular en unidades de $\hbar$ = 0, 1, 2, ---
m = tercera componente del momento angular en unidades de $\hbar$ = $-\ell, -\ell+1, \ldots, \ell-1, \ell$. Para los niveles mas bajos

$n = 1$ $\quad \psi_{100}(\vec r) = (\pi a^3)^{-1/2}\, e^{-r/a}$

$n = 2$ $\quad \psi_{200}(\vec r) = \frac{1}{2}(2\pi a^3)^{-1/2}\, e^{-r/2a}\left(1-\frac{r}{2a}\right)$

$$\psi_{211}(\vec r) = -\frac{1}{8}(\pi a^3)^{-1/2}\, e^{-r/2a}\,\frac{r}{a}\sin\theta\, e^{i\phi}, \quad \psi_{21-1} = -\psi_{211}^{*} \tag{7}$$

$$\psi_{210}(\vec r) = \frac{1}{4}(2\pi a^3)^{-1/2}\, e^{-r/2a}\,\frac{r}{a}\cos\theta$$

$$a \equiv \hbar/\mu(Z\alpha c)$$

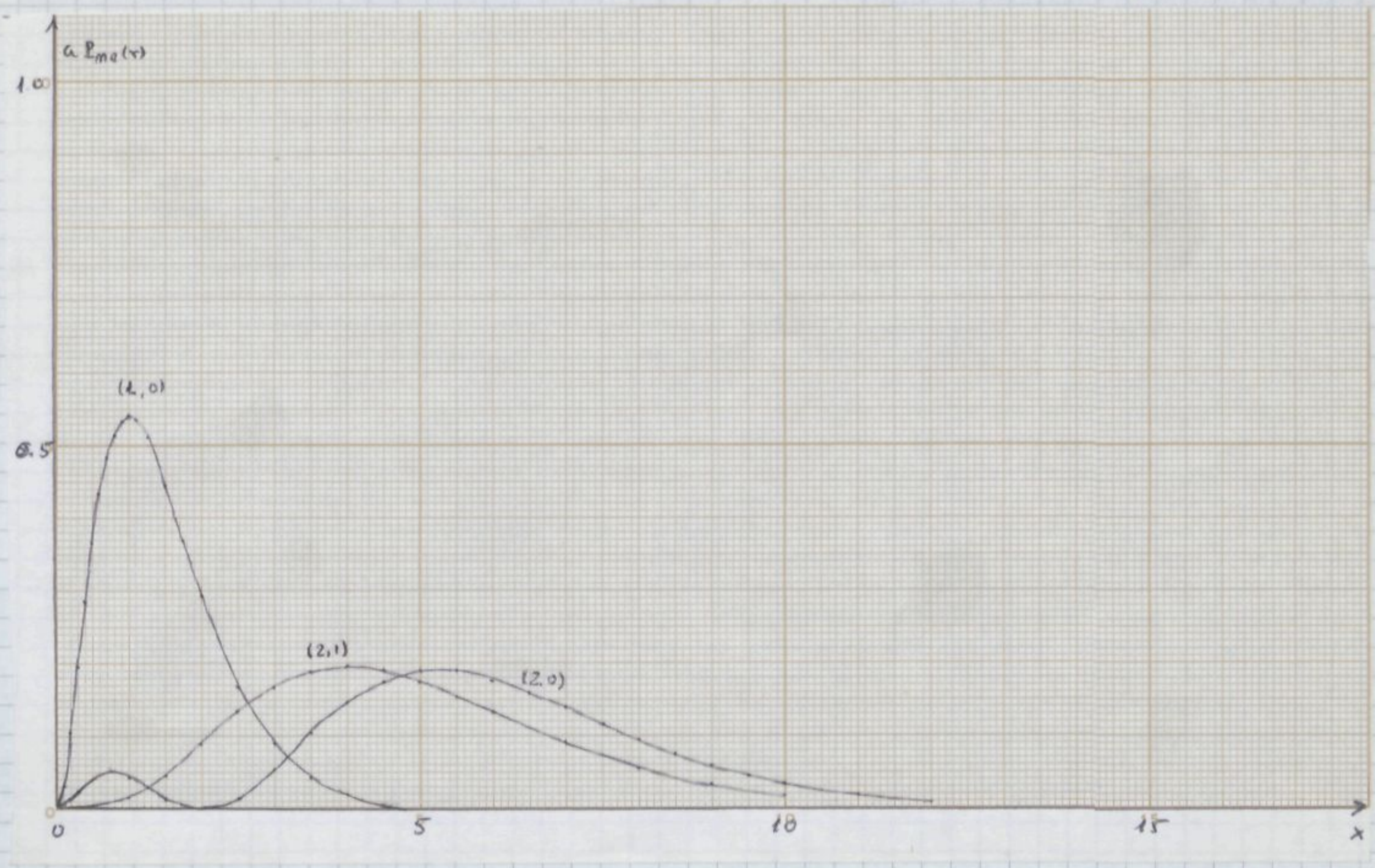
i) La densidad de probabilidad de hallar el electron en r es

$$\rho_{n\ell m}(r) = \int d\Omega\, r^2\, |\psi_{n\ell m}(\vec r)|^2 = \rho_{n\ell}(r)$$

$$a\,\rho_{10}(r) = 4x^2 e^{-2x} \qquad a\,\rho_{20}(r) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{2}\right)^2 x^2 e^{-x}$$

$$a\,\rho_{21}(r) = \frac{1}{24}x^4 e^{-x}$$

$x \equiv r/a$.



Se puede probar que

$$\langle r\rangle_{n,n-1} = (2n+1)\,\frac{na}{2} = n^2 a\left(1+\frac{1}{2n}\right) \qquad (1)$$

$$(\Delta r)_{n,n-1} = (2n+1)^{1/2}\,\frac{na}{2}$$

Lo cual permite afirmar que para $n \gg 1$ las correspondientes funciones de onda se encuentran sobre una capa esférica de radio $n^2 a$ y espesor despreciable frente al mismo, es decir estamos en el límite clásico.

ii) La probabilidad de encontrar la partícula en la dirección (θ,ϕ) es

$$P_{n\ell m}(\Omega) = \int_0^\infty dr\, r^2\, |\psi_{n\ell m}(\vec r)|^2 = |Y_\ell^m(\Omega)|^2 \qquad (2)$$

entonces

$$P_{100}(\Omega) = \frac{1}{4\pi} \quad , \quad P_{200}(\Omega) = \frac{1}{4\pi} \qquad (3)$$

$$P_{211}(\Omega) = P_{21-1}(\Omega) = \frac{3}{8\pi}\sin^2\theta \quad , \quad P_{210}(\Omega) = \frac{3}{4\pi}\cos^2\theta$$

35/001

Espectro del átomo de hidrógeno

Según la ecuación de Schrödinger

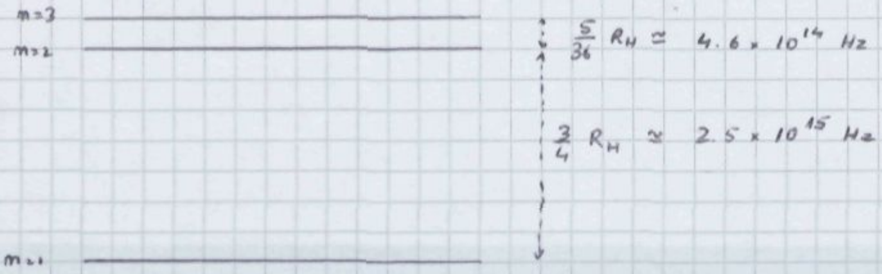
$$E_n = -\frac{1}{2}\,\mu\,(Z\alpha c)^2\,\frac{1}{n^2} \qquad (4)$$

y

$$\nu_{n\to m} = \frac{\mu\,(Z\alpha c)^2}{4\pi\hbar}\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) \qquad n > m = 1, 2, 3, \ldots \qquad (5)$$

$$R_H = \frac{\mu\,(Z\alpha c)^2}{4\pi\hbar} = Z^2\frac{\mu}{m_e}\,\frac{m_e\,(\alpha c)^2}{4\pi\hbar} = Z^2\,\underset{\uparrow}{\frac{\mu}{m_e}}\;3.289842\,(25)\times 10^{15}\ \text{Hertz.} \qquad (6)$$

y R_H es la llamada constante de Rydberg



¿Son importantes las correcciones relativistas? Notemos

$$\langle K\rangle_{mem} = -\frac{1}{2}\langle V\rangle_{mem} \qquad E_n = \langle K\rangle_{mem} + \langle V\rangle_{mem} = -\langle K\rangle_{mem}$$

$$\langle K\rangle_{mem} = \frac{1}{2}\,\mu\,(Z\alpha c)^2\,\frac{1}{n^2}$$

$$\langle v^2/c^2\rangle_{mem} = \frac{Z^2\alpha^2}{n^2} \qquad (7)$$

Son pequeñas pero no despreciables y son tanto más importantes cuanto más alto sea Z y menor n. Si se hace la corrección relativista entonces se encuentra para $Z=1$

$$E_{nj} = E_n\left\{1 + \frac{\alpha^2}{n}\left(\frac{1}{j+{}^1\!/_2} - \frac{3}{4n}\right)\right\} \qquad (8)$$

$$j = l - {}^1\!/_2 \;\text{ó}\; l + {}^1\!/_2 \quad \text{excepto si } l = 0 \Rightarrow j = {}^1\!/_2$$

Notar que $\left(\frac{1}{j+{}^1/_2} - \frac{3}{4n}\right) > \left(\frac{1}{(n-1)+{}^1/_2+{}^1/_2} - \frac{3}{4n}\right) = \frac{1}{4n} > 0$ y por lo tanto las correcciones relativistas tienden a ligar más los niveles. Notar que en orden de más o menos ligados y usando la notación nl_j los niveles son

$1s_{1/2}$; $2s_{1/2} = 2p_{1/2}$, $2p_{3/2}$; $3s_{1/2} = 3p_{1/2}$, $3p_{3/2} = 3d_{3/2}$, $3d_{5/2}$; ---

El nivel de número cuántico principal n se divide ahora en n niveles y esta es la llamada estructura fina del espectro.

Nivel $n=1$ no se desdobla y disminuye su energía en $|E_1| \frac{\alpha^2}{4}$

Nivel $n=2$ se desdobla en dos niveles

$2s_{1/2} = 2p_{1/2}$ cuya energía disminuye en $|E_1| \frac{5\alpha^2}{64}$

$2p_{3/2}$ " " " " $|E_1| \frac{\alpha^2}{64}$

La frecuencia de esta transición es $R_H \frac{\alpha^2}{16} = 1.1 \times 10^{10}$ Hz

Nivel $n=3$ se desdobla en tres niveles

$$\left.\begin{array}{lll} 3s_{1/2} = 3p_{1/2} & \text{cuya energía disminuye en} & |E_1| \frac{\alpha^2}{36} \\ 3p_{3/2} = 3d_{3/2} & \text{"} & |E_1| \frac{\alpha^2}{108} \\ 3d_{5/2} & \text{"} & |E_1| \frac{\alpha^2}{324} \end{array}\right. \quad \nu = R_H \frac{\alpha^2}{54} = 3.2 \times 10^9 \text{ Hz} \quad \nu = R_H \frac{\alpha^2}{162} = 1.1 \times 10^9 \text{ Hz.}$$

En realidad estados tales como el $2s_{1/2}$ y el $2p_{1/2}$ tampoco están degenerados en energía y se encuentra experimentalmente que

$$\Delta E \equiv 2s_{1/2} - 2p_{1/2} = 1057.90\ (0.06) \times 10^6 \text{ Hz.} \qquad (1)$$

La electrodinámica cuántica permite calcular esta separación y da

$$(\Delta E)_{th} = 1057.911\ (12) \times 10^6 \text{ Hz} \qquad (2)$$

en perfecto acuerdo con el dato experimental. Este es el llamado efecto Lamb.

Existe aun la llamada estructura hiperfina. Según lo dicho hasta ahora el estado fundamental del átomo de hidrógeno es el $1s_{1/2}$. En realidad la situación es mas compleja pues el electron tiene un momento magnetico que interacciona con el del protón y el estado se desdobla en dos estados que forman la estructura hiperfina del espectro. La diferencia de energias es

$$\nu_{hfs} = \frac{E_t - E_s}{h} = 1420.405\ 751\ 786\ 4\ (17) \times 10^6 \text{ Hz} \qquad (3)$$

que es la cantidad mejor medida de toda la física. La longitud de onda correspondiente a esta transición es $\lambda_{hfs} = 21.11$ cm. y juega un papel extraordinariamente importante en astrofísica. Teoricamente solo sabemos calcular las primeras cifras de esta cantidad, debido a nuestro desconocimiento de la estructura del protón y sus interacciones.

36/001

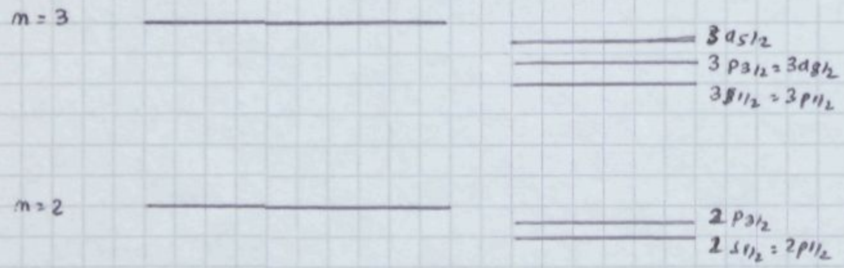
Espectro de emisión. Con esta gran proliferación de niveles podrán aparecer muchas líneas. Veamos lo que sucede tomando como ejemplo el Hidrógeno. Tengamos en cuenta

$$R_H = \frac{\mu (\alpha c)^2}{4\pi\hbar} = 3.288\ 051\ (25) \times 10^{15}\ \text{Hz}. \qquad (4)$$

Consideremos la transición $n=3 \rightarrow n=2$. En la teoría de Schrödinger la frecuencia es

$$\nu_{3\rightarrow 2} = \frac{5}{36} R_H = 4.566\ 738.(35) \times 10^{14}\ \text{Hz} \qquad (5)$$

La estructura fina desdobla las líneas iniciales



$$E_{3d_{5/2}} = -R_H \frac{1}{9}\left(1 + \frac{1}{36}\alpha^2\right)$$
$$E_{3p_{3/2}} = -R_H \frac{1}{9}\left(1 + \frac{1}{12}\alpha^2\right)$$
$$E_{3s_{1/2}} = -R_H \frac{1}{9}\left(1 + \frac{1}{4}\alpha^2\right) \qquad (6)$$
$$E_{2p_{3/2}} = -R_H \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{16}\alpha^2\right)$$
$$E_{2s_{1/2}} = -R_H \frac{1}{4}\left(1 + \frac{5}{16}\alpha^2\right)$$

En principio parece que pueden existir en lugar de la línea inicial $3 \times 2 = 6$ líneas cercanas a ella y en su lugar. En realidad la $3d_{5/2} \rightarrow 2s_{1/2}$ tiene lugar con una probabilidad muy baja y por tanto es difícil de observar y la despreciaremos aquí. Las otras cinco líneas tienen probabilidades de transición similares y por tanto, en principio, son observables. Teniendo en cuenta que $\alpha^2 R_H = 1.750\ 931\ (13) \times 10^{11}$ Hz.

$$\nu(3d_{5/2} \rightarrow 2p_{3/2}) = \nu_{3\rightarrow 2} + \frac{65}{5184} R_H \alpha^2 = \nu_{3\rightarrow 2} + 2195.42\ \text{MH.}$$

$$\nu(3p_{3/2} \rightarrow 2p_{3/2}) = \nu_{3\rightarrow 2} + \frac{33}{5184} R_H \alpha^2 = \nu_{3\rightarrow 2} + 1114.60\ \text{MH}$$

$$\nu(3p_{3/2} \rightarrow 2s_{1/2}) = \nu_{3\rightarrow 2} + \frac{357}{5184} R_H \alpha^2 = \nu_{3\rightarrow 2} + 12057.8\ \text{MH} \qquad (7)$$

$$\nu(3s_{1/2} \rightarrow 2p_{3/2}) = \nu_{3\rightarrow 2} - \frac{63}{5184} R_H \alpha^2 = \nu_{3\rightarrow 2} - 2127.87\ \text{MH}$$

$$\nu(3s_{1/2} \rightarrow 2s_{1/2}) = \nu_{3\rightarrow 2} + \frac{261}{5184} R_H \alpha^2 = \nu_{3\rightarrow 2} + 8825.06\ \text{MH}$$

Vemos pues que la raya original se divide en cinco rayas muy cercanas (sus longitudes de onda difieren en décimas de Å). En realidad tendríamos que considerar el efecto Lamb y la estructura hiperfina, pero las reglas de selección actúan de forma que quedan sólo 5 rayas. En la práctica no es posible observar estas cinco rayas:

i) Las líneas tiene una anchura natural $\Delta E \simeq \hbar/\tau \Rightarrow \Delta\nu \simeq 1/2\pi\tau$ y como $\tau \simeq 10^{-7}$ s entonces $\Delta\nu \simeq 2$ MH. y por tanto no es importante.

ii) Efecto Doppler: El gas que emite luz se encuentra a una temperatura T y por tanto la velocidad media de las moléculas es $\langle v\rangle \simeq \sqrt{3k_BT/M} \Rightarrow \langle v\rangle = 1.57\times 10^4\ cm\ s^{-1}\sqrt{T}$ y si $T = 300\,K$ entonces $\langle v\rangle = 2.73\times 10^5\ cm\ s^{-1}$. Entonces el ensanchamiento de las líneas producido por efecto Doppler es

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \simeq 2\frac{\langle v\rangle}{c} \Rightarrow \frac{\Delta\nu}{\nu} \simeq 2\frac{\langle v\rangle}{c} =$$

$$\Delta\nu = 1.8\times 10^{-5}\,\nu = 8000\ MH \qquad (1)$$

No hay esperanza de separar las rayas a temperatura ambiente. En condiciones de observación muy favorables se ven claramente dos o tres de las cinco rayas.

Efecto Stark: Volvamos a la ecuación de Schrödinger para el átomo de hidrógeno. Hemos visto que para un nivel energético dado E_n existían n^2 funciones de onda independientes $\psi_{n\ell m}(\vec{r})$, sin tener en cuenta el spin. ¿Por qué hay esta degeneración? Ya dijimos que ℓ era el momento angular y m su tercera componente. Es evidente que para todo potencial central $V(r)$ los valores propios deben ser $E(n,\ell)$ pues no hay ninguna dirección privilegiada en el espacio. En el átomo de hidrógeno aparece la llamada degeneración accidental que hace que $E(n,\ell)$ no depende de ℓ. Supongamos que introducimos el átomo de hidrógeno en un campo eléctrico $\vec{\mathcal{E}}$ constante y uniforme. En este momento es lógico esperar que se rompa la degeneración pues ya hay una dirección privilegiada en el espacio. Se puede probar que el nivel E_n se rompe en $(2n-1)$ niveles cuyas energías, para campos débiles, vienen dadas por

$$E_{n,k} = -\frac{1}{2}\mu(Z\alpha c)^2\frac{1}{n^2}\left\{1 + \frac{3e\hbar n^3\mathcal{E}}{\mu^2(Z\alpha c)^3}k\right\} \qquad (2)$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm(n-1)$$

Nótese que el nivel con $k=0$ coincide con el original y los restantes $2(n-1)$ están distribuidos simétricamente alrededor de él y son equidistantes. Notar que

$$\frac{3e\hbar\mathcal{E}}{\mu^2(\alpha c)^3} = 5.840380(56)\times 10^{-10}\,[\mathcal{E}/Volt/cm]$$

$$E_{n,k} = -\frac{1}{2}\mu(Z\alpha c)^2\frac{1}{n^2}\left\{1 + 5.840380(56)\times 10^{-10}\frac{n^3k}{Z^3}(\mathcal{E}\ V^{-1}cm)\right\} \qquad (3)$$

Este es el llamado efecto Stark y la expresión (2) puede deducirse de la ecuación de Schrödinger usando teoría de perturbaciones. En realidad también se deduce usando las reglas de cuantificación de SWI.

36/001

Efecto Zeeman: Tambien es a esperar que se produzcan desdoblamientos en el caso de un átomo de hidrógeno en el seno de un campo magnético constante y uniforme $\vec{B}$. La vieja teoría clásica, es decir las reglas de cuantificación de SWI, predecían un cierto desdoblamiento que en ocasiones no estaba de acuerdo con los hechos experimentales. Tampoco la ecuación de Schrödinger permitía explicar los datos experimentales. En 1925, Pauli sugirió la introducción de un cuarto grado de libertad para el electrón; el spin. Esta idea de Pauli fue recogida inmediatamente por Uhlembeck y Goudsmit en su teoría del spin del electrón. ¿Por qué fallaba la teoría clásica? Recordemos que una espira de corriente de intensidad I produce un dipolo magnético

$$\vec{\mu} = \frac{I}{c}\vec{A} \tag{4}$$

donde $|\vec{A}|$ es el area de la espira y la dirección de $\vec{A}$ es perpendicular a la espira, que suponemos plana y ligada al sentido de I por la regla del tornillo. Consideremos el modelo de Bohr con orbitas circulares de radio a_n

$$I_n = \frac{e}{\text{periodo}} = \frac{e}{2\pi a_n} v_n = \frac{e}{2\pi a_n}\frac{p_n}{m_e} \qquad |\vec{A}| = \pi a_n^2$$

$$|\vec{\mu}| = \frac{e}{2\pi a_n}\frac{p_n}{m_e}\frac{1}{c}\pi a_n^2 = \frac{e}{2m_e c} p_n a_n = \frac{e}{2m_e c} n\hbar = \frac{e}{2m_e c} L$$

$$\vec{\mu} = \frac{e}{2m_e c}\vec{L} \tag{5}$$

y la interacción con un campo magnético $\vec{B}$ da una energía

$$U = -\vec{\mu}\cdot\vec{B} = -\frac{e}{2m_e c}\vec{B}\cdot\vec{L} \tag{6}$$

Si $\vec{S}$ denota el momento angular de spin entonces la interacción viene dada por

$$U = -\frac{e}{2m_e c}(\vec{L} + g\vec{S})\cdot\vec{B} \tag{7}$$

$$\left(\frac{g}{2}\right)_{exp} = 1.001\ 159\ 652\ 209\ (31)$$

la electrodinámica cuantica y efectos de otras interacciones dan

$$\left(\frac{g}{2}\right)_{th} = 1.001\ 159\ 652\ 460\ (127)$$

Atomos en general: Evidentemente el problema de un núcleo central de carga $Z|e|$ rodeado por Z electrones atraídos por el núcleo y que se repelen entre sí, es un problema demasiado complejo para que pueda ser resuelto exactamente, incluso si $Z=2$. Sin embargo hay técnicas aproximadas y en algunos casos extraordinariamente sofisticadas para calcular los niveles energéticos de los átomos. En general sobre cada electrón actúa un potencial medio $V(r)$ debido al núcleo central y al apantallamiento de los otros electrones. No toda la repulsión electrostática entre los electrones se puede simular con un $V(r)$, pero despreciando esta interacción residual, aparecen una serie de niveles E_{nl} $n=1,2,3,\ldots$, $l=0,1,2,\ldots n-1$ que se ordenan según las leyes

i) $n+l$ en orden creciente

ii) para $n+l$ dado en orden de n crecientes

Si usamos la nomenclatura habitual

$$\begin{matrix} l = & 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & \ldots \\ & s, & p, & d, & f, & g, & h & \ldots \end{matrix} \qquad (1)$$

entonces

Capa	1s ;	2s,	2p ;	3s,	3p ;	4s,	3d,	4p ;	5s,	4d,	5p ;
$n+l$	1	2	3	3	4	4	5	5	5	6	6
electrones	2	2	6	2	6	2	10	6	2	10	6
Total	2	8		8		18			18		
Z	2	10		18		36			54		

6s,	4f,	5d,	6p ;	7s,	5f,	6d,	7p
6	7	7	7	7	8	8	8
2	14	10	6	2	14	10	6
32				32			
86				118			

(2)

Los ; indican que entre ambos niveles energéticos hay un gran gap y los Z que llenan estas capas corresponden a los llamados gases nobles He, Ne, A, Kr X, Rn, que son extraordinariamente estables. A medida que Z aumenta se van colocando los nuevos electrones en la capa de energía menor que no está llena. Hay algunas anomalías a esta ley

	4s	3d		5s	4d		5s	4d
Cr	1	5	Nb	1	4	Rh	1	8
Cu	1	10	Mo	1	5	Pd	0	10
			Tc	1	6	Ag	1	10
			Ru	1	7			

	4f	5d		6s	4f	5d
La	0	1	Pt	1	14	9
Gd	7	1	Au	1	14	10

La mayor parte de las anomalías aparecen en las tierras raras y en los elementos transuránidos no considerados aquí
Cuando se da la descripción de un estado mediante el número de electrones de cada capa se acostumbra a decir que se da su configuración

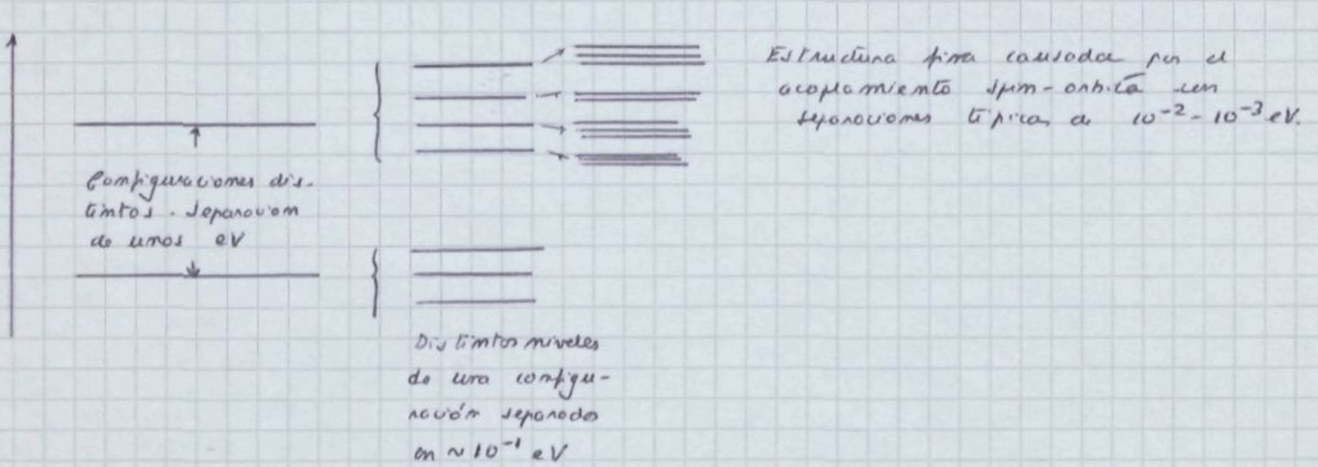
$C : 1s^2 \; 2s^2 \; 2p^2$ $\qquad$ $Cl : 1s^2 \; 2s^2 \; 2p^6 \; 3s^2 \; 3p^5$

Una determinada configuración es, en general, altamente degenerada. Por ejemplo, como en el nivel 2p caben 6 electrones la degeneración de la configuración del C es 15. Esto sería todo si no existiera la interacción residual que da origen a dos tipos de términos

i) La repulsión electrostática entre los electrones

ii) El acoplamiento spin-órbita.

En átomos ligeros i) es la más importante y se obtienen espectros de la forma



1. Calcular el momento que deberían tener los electrones para asegurar que pueden hallarse confinados dentro de los nucleos, como se suponía en modelos atómicos anteriores al descubrimiento del neutrón. ¿A que energía corresponde este momento?

$\Delta p \simeq \dfrac{\hbar}{2(2R)}$ siendo R el radio nuclear $R \simeq 2$ fm.

$$c\,\Delta p = \frac{\hbar c}{4R} \qquad \frac{197.3 \text{ MeV fm}}{4 \text{ fm}} \Rightarrow \qquad \Delta p = 49 \text{ MeV/c}$$

Como $c\,\Delta p \gg m_e c^2 \Rightarrow \Delta E \simeq 49$ MeV

Este era uno de los grandes problemas, pues es practicamente imposible hallar una fuerza con la que se logre esto.

---

2. La densidad de probabilidad de encontrar un electrón en el punto $\bar{r}$ en el estado $2s$ del átomo de hidrogeno es

$$\rho(\bar{r}) = \frac{1}{8\pi a^3}\left(1 - \frac{r}{2a}\right)^2 e^{-r/a} \quad , \quad a = \frac{\hbar}{\mu(\alpha c)}$$

Hallar la densidad de probabilidad $P(r)$ de que el electrón esté a una distancia r del origen. Calcula los maximos y minimos de $P(r)$.

$$P(r) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{a}\left(\frac{r}{a}\right)^2\left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{r}{a}\right)^2 e^{-r/a}$$

$x \equiv r/a \qquad S(x) \equiv a\,P(r) \qquad S(x) = \frac{1}{2}x^2(1-x)^2 e^{-x}$

$$\frac{dS(x)}{dx} = x\left(1 - \frac{x}{2}\right)\left(1 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}x^2\right)e^{-x} = 0$$

$x = 0$ mínimo $S = 0$

$x = 2$ mínimo $S = 0$

$x = \infty$ mínimo $S = 0$

$x = 3 \pm \sqrt{5}$ maximos $\qquad S_+ = 1.3089$

$S_- = 0.0076$

3.- En un cuerpo negro la densidad de energía por unidad de volumen y de frecuencia es

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\,k_B T\,\frac{h\nu/k_B T}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$$

36/001

Calcular el número de fotones por unidad de volumen y su energía media. Notar que

$$\int_0^{\infty} dx \; x^2 \; \frac{1}{e^x - 1} = 2\zeta(3)$$

$$\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = 1.202\;056\;903\ldots$$

El número de fotones por unidad de volumen es

$$N(T) = \int_0^{\infty} d\nu \; \frac{u(\nu,T)}{h\nu} = \int_0^{\infty} d\nu \; \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \; \frac{1}{e^{h\nu/k_BT} - 1} = \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{k_B T}{\hbar c}\right)^3 \int_0^{\infty} dx \; \frac{x^2}{e^x - 1} =$$

$$= \frac{2\zeta(3)}{\pi^2}\left(\frac{k_B T}{\hbar c}\right)^3 = 20.2865\,(20)\left(\frac{T}{1K}\right)^3 \text{ fotones}/cm^3$$

La energía por unidad de volumen es

$$u(T) = \frac{\pi^2}{15}\;\frac{k_B^4}{c^3\hbar^3}\;T^4$$

y por tanto la energía media es

$$E_m = \frac{\pi^4}{30\zeta(3)}\;k_B T = 2.327\;700\;(76) \times 10^{-4} \; eV \left(\frac{T}{1K}\right)$$

---

4. Hawking ha demostrado que los agujeros negros no son totalmente negros pues debido a efectos cuánticos emiten fotones como un cuerpo negro a una temperatura

$$T = \frac{1}{8\pi}\;\frac{\hbar c^3}{G M k_B}$$

Esto significa que los agujeros negros se evaporan. Calcular el tiempo que tarda en suceder esto

---

Notar que

$$T = 1.22733\,(76) \times 10^{26}\;\frac{g}{M}\;K$$

Notar que T aumenta a medida que el agujero se va evaporando. Su vida se puede estimar

$$t = \frac{Mc^2}{\text{Luminosidad}} = \frac{Mc^2}{(\text{Area})\;\sigma T^4} =$$

$$= Mc^2 \; \frac{1}{\dfrac{16\pi G^2 M^2}{c^4}} \cdot \frac{1}{\dfrac{\pi^2 k_B^4}{60\, c^2 \hbar^3}} \; \frac{1}{\dfrac{\hbar^4 c^{12}}{4096\, \pi^4 G^4 M^4 k_B^4}} =$$

$$t = 15360\, \pi \, \frac{G^2 M^3}{\hbar c^4} = 2.52 \times 10^{-25} \left(\frac{M}{g}\right)^3 s.$$

Esta fórmula es solo una estimación, pues a medida que se evapora su temperatura aumenta y se van emitiendo todo tipo de partículas. Mas aún cuando su temperatura es parecida a la de Planck los efectos de la gravedad cuántica son fundamentales y no sabemos como tratarlos

---

5. Considerese un átomo de hidrogeno. Su energia es

$$E = \frac{p^2}{2m_e} - \frac{e^2}{r}$$

Sabemos que $\lambda = h/p$ y que en el estado fundamental $\lambda = 2\pi r$ lo cual implica que $p = \hbar/r$. Usando esto E queda una función de r. Encontrar el valor de r minimo y la correspondiente energía.

$$E = \frac{\hbar^2}{2m_e r^2} - \frac{e^2}{r} \quad , \quad \frac{dE}{dr} = 0 \quad -\frac{\hbar^2}{m_e r^3} + \frac{e^2}{r^2} = 0$$

$$r_{min} = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} = \frac{\hbar}{m_e (\alpha c)} = 0.529\ 177\ 06\ (44)\ \text{Å}$$

$$E_{min} = -\frac{1}{2} m_e (\alpha c)^2 = -13.605\ 804\ (36)\ eV$$

siendo esta la energia del estado fundamental del átomo de hidrogeno en mecánica cuántica

---

6. Consideremos átomos neutros con $2 < Z \leq 10$. En el estado fundamental dos electrones estan llenando la capa K $(n=1)$ y $(Z-2)$ estan en la capa L $(n=2)$. La orbita K tiene un radio a_0/Z y como es pequeña supondremos que los electrones en la capa L ven una carga nuclear effectiva $Z_{ef} \equiv Z-2$. Clasicamente la energia de este átomo (olvidandonos de la capa K) se puede aproximar por

$$E = Z_{ef} \frac{p^2}{2m_e} - \frac{Z_{ef}^2 e^2}{r} + \frac{Z_{ef}(Z_{ef}-1)e^2}{2r_{ef}}$$

donde el primer término representa la energia cinética de los Z_{ef} electrones, el segundo su atracción nuclear y el tercero su repulsión electrostatica, siendo r_{ef} un parámetro. Para la capa L se tiene, en el modelo de Bohr, que $p = 2\hbar/r$. Minimizando E como

36/001

función de r hallar la energía de ligadura de la capa L y el radio del átomo. Ajustar $r_{ef} = r/\lambda$ para reproducir que el neon ($Z = 10$) tiene una energía de ligadura para los electrones de la capa L que es $70.0\ E_{0,\infty}$

$$E = Z_{ef}\frac{2\hbar^2}{m_e r^2} - \frac{Z_{ef}^2 e^2}{r} + \frac{\lambda Z_{ef}(Z_{ef}-1)e^2}{2r}$$

$$\frac{dE}{dr} = 0 \qquad r = \frac{4a_0}{Z_{ef} - \frac{\lambda}{2}(Z_{ef}-1)} \qquad a_0 = \frac{\hbar}{m_e(\alpha c)}$$

$$E = \frac{1}{4} Z_{ef}\left[Z_{ef} - \frac{\lambda}{2}(Z_{ef}-1)\right]^2 E_0 \qquad E_0 = -\frac{1}{2} m_e (\alpha c)^2$$

Para el neon $Z_{ef} = 8$ $\quad E = 70.0\ E_0 \Rightarrow 280 = 8\left[8 - \frac{7}{2}\lambda\right]^2 \Rightarrow$

$\lambda = 0.595 \Rightarrow \lambda = 0.6$

Entonces

Elemento	Z	Z_{ef}	n	r_{th}/a_0	r_{exp}/a_0	E_{th}/E_0	E_{exp}/E_0
H	1	1	1	1.0	1.0	1.	1
He	2	2	1	0.6	0.6	5.8	5.8
Li	3	1	2	4.0	2.8	0.25	0.4
Be	4	2	2	2.4	2.2	1.4	2.0
B	5	3	2	1.7	1.6	4.3	5.2
C	6	4	2	1.3	1.2	9.6	10.9
N	7	5	2	1.1	1.0	18.1	19.5
O	8	6	2	0.9	0.8	30.4	31.8
F	9	7	2	0.8	0.7	47.3	48.5
Ne	10	8	2	0.7	0.6	69.6	70.0

Donde se ha añadido el helio calculado por el mismo procedimiento y $r_{ef} = r/0.6$

El mismo tipo de argumento vale para una capa externa n

$$r = \frac{n^2 a_0}{Z_{ef} - \frac{\lambda}{2}(Z_{ef}-1)}$$

$$E = \frac{1}{n^2} Z_{ef}\left[Z_{ef} - \frac{\lambda}{2}(Z_{ef}-1)\right]^2 E_0$$

---

7. Una lámpara incandescente de 100 W radia uniformemente en todas las direcciones
1) Hallar la intensidad a una distancia de 1 m. 2) Hallar el número de fotones por segundo que inciden sobre una superficie de 1 cm² de área, de modo que su normal coincida con la recta que pasa por la lámpara, si la longitud de onda es $\lambda = 6000$ Å

---

1) La potencia emitida es $P = 10^2 W = 10^9\ g\ cm^2 s^{-3}$. La energía que incide por unidad de tiempo y por unidad de área perpendicular a los rayos es

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{10^9\ g\ cm^2 s^{-3}}{4\pi \times 10^4\ cm^2} = 7.9578\ g\ s^{-3} = 7.9578\ erg\ cm^{-2} s^{-1}$$

2) $\lambda = 6000$ Å $\Rightarrow \nu = \frac{c}{\lambda}$. La energía de un fotón es $E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{2\pi \hbar c}{\lambda}$

$E = 3.3108 \times 10^{-12}$ erg y por tanto el número de fotones emitidos en un segundo es

$$N = \frac{10^7\ erg/s}{E} = 3.0204 \times 10^{18}\ fotones\ s^{-1}$$

y llegan a la superficie considerada

$$n = \frac{N}{4\pi r^2} = 2.4036 \times 10^{13}\ fotón\ cm^{-2} s^{-1}$$

---

8. Nuestro Universo se encuentra lleno de un fondo de radiación electromagnética, altamente isótropa, proveniente de la Gran Explosión, y con distribución espectral correspondiente a un cuerpo negro de temperatura $T = 2.7 K$. Determinar la longitud de onda λ_{max} para la que es máxima la densidad de energía y las longitudes de onda para las que esa densidad es una centésima parte de su valor máximo.

Si $x \equiv \frac{2\pi \hbar c}{\lambda k_B T}$ entonces $\bar{u}(\lambda, T) = \frac{1}{2} \frac{k_B^5 T^5}{\pi^3 \hbar^4 c^4} \frac{1}{x^5} \frac{1}{e^x - 1}$

El máximo ocurre, de acuerdo con la ley de desplazamiento de Wien, para

$$\lambda_{max} T = 0.28978\ cm\ K$$

$$\lambda_{max} = 0.107\ cm.$$

Los valores de x deseados son $10^{-2} x^{-5} [e^x - 1] = x_{max}^{-5} [e^{x_{max}} - 1]$

$$e^x - 1 = 4.717 x^5 \Rightarrow x_1 = 0.750 \Rightarrow \lambda_1 = 0.711\ cm$$

$$x_2 = 15.14 \Rightarrow \lambda_2 = 0.0352\ cm.$$

36/001

9. El potencial de detección para el efecto fotoeléctrico con luz monocromática incidente sobre sodio es : 1.85V si $\lambda = 3000\ \text{Å}$ y 0.82V si $\lambda = 5000\text{Å}$. Determinar: 1) El valor de la constante de Planck. 2) La función de trabajo del sodio. 3) La longitud de onda umbral para el Na.

Para los fotones la relación entre la energía y la longitud de onda es $E = 2\pi\hbar c/\lambda$. Si ϕ_0 es la función de trabajo y $V_0(\lambda)$ el potencial de detección

$$\frac{hc}{\lambda} = \phi_0 + |eV_0(\lambda)|$$

y por tanto

$$\hbar = \frac{1}{2\pi c}\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)^{-1} \left[\,|eV_0(\lambda_1)| - |eV_0(\lambda_2)|\,\right] \Rightarrow$$

$$\hbar = 6.56 \times 10^{-16}\ \text{eV s}$$

Entonces $\quad \phi_0 = +\dfrac{hc}{\lambda} - |e\,V_0(\lambda)| = 2.27\ \text{eV}$

y la longitud de onda umbral es

$$\lambda_0 = \frac{hc}{\phi_0} = 5.44 \times 10^{3}\ \text{Å}$$

---

10. Por ser $\hbar$ muy pequeña los efectos cuánticos no son perceptibles en nuestra vida normal. Si el valor de $\hbar$ fuera macroscópico, tales efectos serían patentes. Estimar $\hbar$ para que los incrementos mínimos permitidos en la velocidad de una rueda de bicicleta fueran de 10Km/hora. (La regla de cuantificación del momento angular alrededor del eje de giro es $L = m\hbar$).

Si R es el radio de la rueda y M su masa, prácticamente concentrada en la periferia, su momento de inercia es $I = MR^2$ y $L = I\omega$ donde ω es su velocidad angular. Como $v = \omega R$ se tiene que $L = MRv$. Por tanto, el mínimo incremento en la velocidad tangencial es

$$\delta v \simeq \frac{\hbar}{MR}$$

Si $M = 2\ \text{Kg}$, $R = 0.5\ \text{m}$ como $\delta v = 10\ \text{Km/hora}$ resulta

$$\hbar = 2.8\ \text{J.s}$$

NÚCLEOS

Los núcleos estables son estados ligados de A nucleones, de los cuales Z son protones y $N \equiv A - Z$ son neutrones. La carga total del núcleo es $Z|e|$. En primera aproximación los núcleos pueden considerarse esféricos con radio

$$R = r_0 \, A^{1/3} \qquad r_0 \simeq 1.25 \text{ fm} \tag{1}$$

Las masas del protón y del neutrón son

$$M_n = 939.5731\,(27) \text{ MeV}/c^2 \quad , \quad M_p = 938.2796\,(27) \text{ MeV}/c^2$$
$$M_n - M_p = 1.293323\,(16) \text{ MeV}/c^2 \tag{2}$$

y, despreciando la energía de ligadura, la masa de un núcleo es $M \simeq 939 \, A$ MeV/c^2. Por tanto la densidad nuclear es

$$\rho = \frac{M}{V} \simeq \frac{A\, M_N}{\frac{4}{3}\pi r_0^3 A} = \frac{3\, M_N}{4\pi r_0^3} = \frac{3}{4\pi} \, \frac{1.67 \times 10^{-24} \text{ gr}}{1.25^3 \times 10^{-39} \text{ cm}^3} \simeq 2.0 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3} \tag{3}$$

El hecho de que ρ sea la misma prácticamente para todos los núcleos indica que las fuerzas nucleares deben ser altamente repulsivas a pequeñas distancias.

Energía de ligadura

La energía de ligadura de un núcleo se define como

$$B = [\, Z M_p + N M_n - M(A, Z) \,]\, c^2 \tag{4}$$

donde $M(A,Z)$ es la masa del núcleo considerado. Esta energía puede calcularse mediante la fórmula semi-empírica de Weiszäcker ($A \gtrsim 10$)

$$B(A, Z) = a_1 A - a_2 A^{2/3} - a_3 \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_4 (N-Z)^2 \frac{1}{A} + \delta \tag{5}$$

i) $a_1 = 15.760$ MeV. Este término corresponde a la energía de ligadura por nucleón para núcleos con $A \to \infty$, con $Z = N$, en ausencia de fuerzas electrostáticas y de apareamiento. Debido al corto alcance de las fuerzas nucleares, cada nucleón sólo nota la presencia de sus vecinos más próximos y no le importa el tamaño total del núcleo. Este efecto se conoce con el nombre de saturación de las fuerzas nucleares.

ii) $a_2 = 17.810$ MeV. En un núcleo finito los nucleones superficiales están menos ligados y la relación entre el volumen $V \sim A$ y la superficie $S \sim A^{2/3}$ es la razón del segundo término

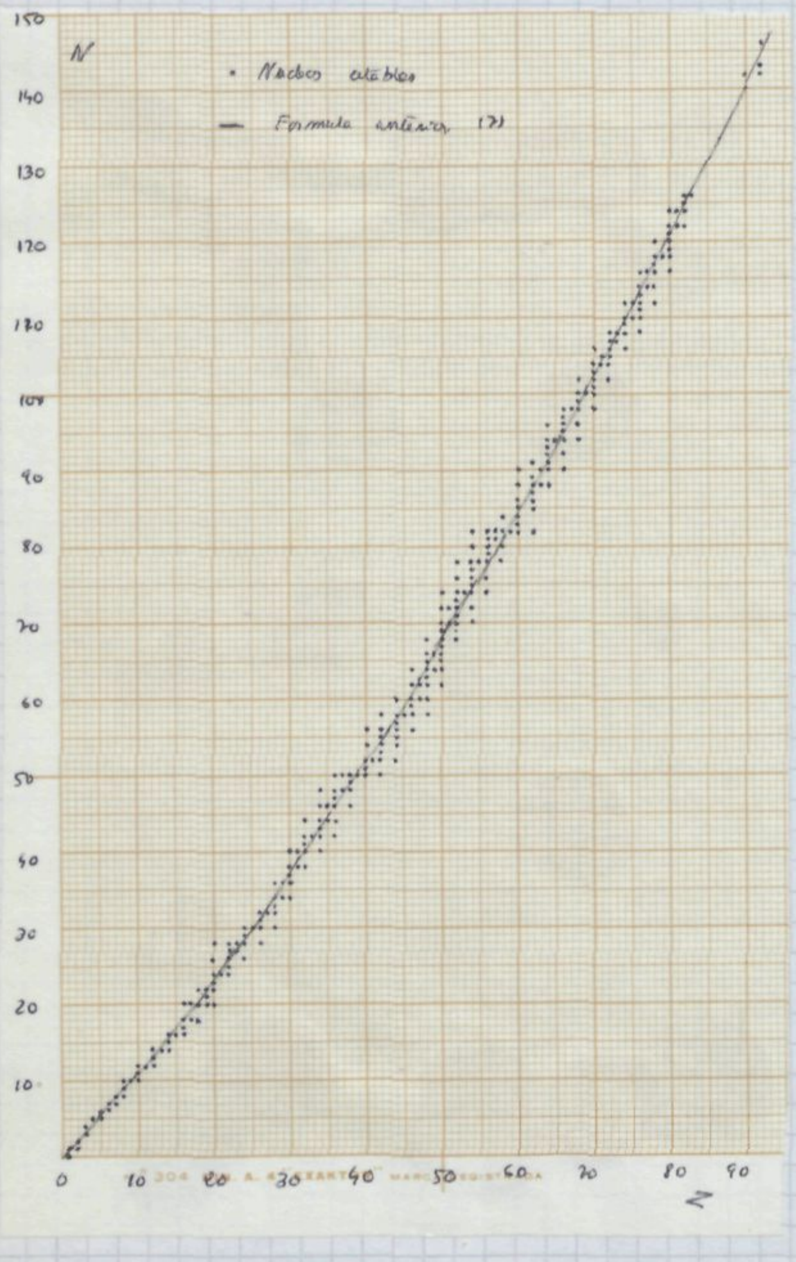
iii) $a_3 = 0.711$ MeV. Hasta aquí no hemos tenido en cuenta las fuerzas electrostáticas entre protones que dan una contribución a la energía $\sim -Z^2/R \sim -Z^2 A^{-1/3}$ y esto origina el tercer término

iv) $a_4 = 23.702$ MeV. Es debido a la distinta energía cinética del mar de neutrones y de protones.

v) δ es una energía de apareamiento

$$\delta = \begin{cases} a_5 A^{-3/4} & Z = \text{par y } N = \text{par} \\ 0 & A = \text{impar} \\ -a_5 A^{-3/4} & Z = \text{impar}, \; N = \text{impar} \end{cases} \qquad a_5 = 34 \text{ MeV} \qquad (6)$$

Estabilidad: Despreciando el término de apareamiento, los núcleos más estables son aquellos, que para un dado A, tienen $B(A,Z)$ máximo:



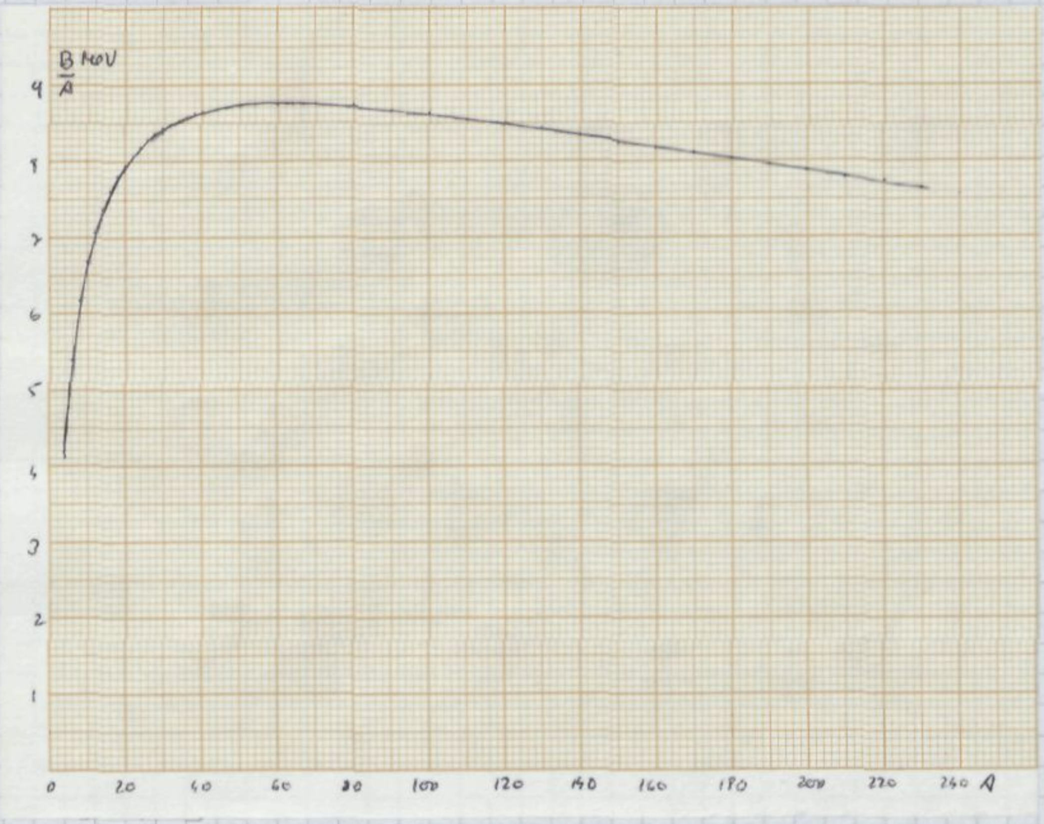
$$\frac{\partial B(A,Z)}{\partial Z} = 0$$

$$-2a_3 A^{-1/3} Z + 4a_4 (A - 2Z)\frac{1}{A} = 0$$

$$Z = \frac{A}{2} \frac{1}{1 + \frac{a_3}{4a_4} A^{2/3}}$$

$$\left.\begin{aligned} Z &= \frac{A}{2} \frac{1}{1 + 0.00750\, A^{2/3}} \\ N &= A - Z \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Para los núcleos que se encuentran sobre la curva de mayor estabilidad que se acaba de deducir ($\delta = 0$) se encuentra



El máximo aparece para el Fe.

Medida de masas: Las masas atómicas se suelen medir en

$$1\ \mathrm{amu} = 931.5016\ (26)\ \mathrm{MeV}/c^2 \qquad (1)$$

que se define diciendo que la masa del átomo de C es precisamente 12 amu.

Veamos qué tal reproduce la fórmula másica este valor

$$M_{at}({}^{12}_{6}C)\,c^2 = 6 \times 938.2796\,(27) + 6 \times 939.5731\,(27) + 6 \times 0.5110034\,(14)$$

$$-\left\{15.760 \times 12 - 17.810 \times 12^{2/3} - 0.711\,\frac{6^2}{12^{1/3}} + 0 + 34\,\frac{1}{12^{3/4}}\right\}\ \mathrm{MeV}.$$

$$= 5629.6776\,(162) + 5637.4386\,(162) + 3.0660204\,(84) -$$

$$-\{189.1200 - 93.3508 - 11.1801 + 5.2734\} =$$

$$= 11180.3197\,(229)\ \mathrm{MeV} = 12 \times 931.5016\,(26) \times 1.0002058\,(35). \qquad (2)$$

es decir la fórmula semiempírica reproduce muy bien la masa del ${}^{12}_{6}C$. Notar que hemos despreciado la energía de ligadura a los electrones, totalmente despreciable

Fisión: Una forma de obtener energía nuclear es mediante la fisión, que consiste en la escisión de núcleos muy pesados ocasionado por neutrones lentos. Un ejemplo típico es

$$n + {}^{235}_{92}U \longrightarrow {}^{140}_{54}Xe + {}^{94}_{38}Sr + n + n \qquad (3)$$

$$Q = M(n) + M(U) - M(Xe) - M(Sr) - M(n) - M(n) =$$

$$= -B(U) + B(Xe) + B(Sr) =$$

$$= -\left[15.760 \times 235 - 17.810 \times 235^{2/3} - 0.711 \frac{92^2}{235^{1/3}} - 23.702 \frac{51^2}{235} + 0\right]$$

$$+ \left[15.760 \times 140 - 17.810 \times 140^{2/3} - 0.711 \frac{54^2}{140^{1/3}} - 23.702 \frac{32^2}{140} + \frac{34}{140^{3/4}}\right]$$

$$+ \left[15.760 \times 94 - 17.810 \times 94^{2/3} - 0.711 \frac{38^2}{94^{1/3}} - 23.702 \frac{18^2}{94} + \frac{34}{94^{3/4}}\right] =$$

$$= -1787.846 + 1154.396 + 806.869 = 173.419$$

Vemos pues que alrededor del 0.8‰ de la masa inicial se convertió en energía. En la práctica esto se logra haciendo incidir neutrones lentos sobre ${}^{235}_{92}U$ y el neutrón es captado por el uranio formándose un núcleo intermedio que se comporta como una gota de agua en vibración muy forzada debido a la energía suministrada por el neutrón. La gota puede fisionarse dando origen a dos núcleos mas ligeros y a algunos neutrones que salen a gran velocidad y que deben ser frenados mediante un moderador si se quiere utilizarlos para producir nuevas fisiones.

Fusión: Núcleos ligeros se unen para constituir otro más pesado. Esa es la forma de producción de energía en las estrellas. En estrellas como el Sol uno de los ciclos más importantes para la producción de energía es el del hidrógeno a lo largo del cual se unen 4 protones para formar un núcleo de helio cuatro

$$4p \rightarrow {}^{4}_{2}He + 2e^{-} + 2\bar{\nu}_e \qquad (4)$$

$$Q = 4M_p - 2M_p - 2M_n + B(He) - 2M_e = +2\times 938.2796 - 2.\times 939.5731 +$$

$$-2\times 0.5110034 + 28.2 \Rightarrow Q = 24.6 \text{ MeV}$$

es decir se produce un 7‰ de energía.

Modelo de capas: Si bien el problema de la estructura nuclear es mucho más complejo que el atómico, un modelo que describe muy bien distintas características nucleares es el llamado modelo de capas. Se supone que cada nucleón se mueve casi libre en un potencial central $V(r)$ creado por los restantes nucleones. Este potencial, además de tener una parte central, debe tener un término de acoplamiento spin-orbita. El orden de niveles, con una elección conveniente del potencial, es

$$
\begin{array}{cccccccccccccccccc}
1s_{1/2}; & 1p_{3/2} & 1p_{1/2}; & 1d_{5/2} & 1d_{3/2} & 2s_{1/2}; & 1f_{7/2}; & 1f_{5/2} & 2p_{3/2} & 2p_{1/2} & 1g_{9/2}; & 1g_{7/2} & 2d_{5/2} & 2d_{3/2} & 3s_{1/2} & 1h_{11/2}; & \\
2 & 4 & 2 & 6 & 4 & 2 & 8 & 6 & 4 & 2 & 10 & 8 & 6 & 4 & 2 & 12 & (1) \\
2 & & 8 & & & 20 & 28 & & & & 50 & & & & & 82 &
\end{array}
$$

Los números 2, 8, 20, 28, 50, 82, 128, ... se llaman números mágicos. Los núcleos con número de protones y neutrones mágicos tienen una gran estabilidad.
Existen interacciones residuales entre los nucleones que explican los detalles más finos de los espectros nucleares. El modelo de capas se puede justificar a partir de primeros principios, es decir de las interacciones entre nucleones.
Los estados excitados de un núcleo corresponden a colocar un nucleón en un estado excitado. Hay sin embargo excitaciones nucleares mas complejas.

Desintegraciones: Todos los núcleos en sus estados excitados y algunos en su estado fundamental son inestables y se desintegran, básicamente, mediante uno de los mecanismos siguientes:

i) Desintegraciones α, mediadas por las interacciones fuertes
ii) Desintegraciones γ, mediadas por las interacciones electromagnéticas
iii) Desintegraciones β, mediadas por las interacciones débiles

Cada uno de estos procesos tienen unas reglas de selección que permiten que el proceso tenga lugar. En principio un núcleo inestable tiende a desintegrarse α, pero la conservación de la energía o de alguna otra cantidad pueden prohibir este proceso, en cuyo lugar tiende a desintegrarse ~~β~~ y si esto tampoco es posible se produce una desintegración β. Pueden, en ocasiones, coexistir varios de estos modos con probabilidades distintas y con estados finales distintos.

Desintegración α : $\;{}^{A}Z \rightarrow {}^{A-4}(Z-2) + ({}^{4}_{2}He \equiv \alpha)$

Es un modo típico de desintegrarse de núcleos muy pesados o de estados muy excitados de núcleos ligeros. Evidentemente para que el proceso pueda tener lugar es necesario que

$$Q \equiv M(A,Z) - M(A-4,Z-2) - M(4,2) = B(A-4,Z-2) + M(4,2) - B(A,Z) \geqslant 0. \qquad (2)$$

Una desintegración típica es

36/001

$$^{238}_{92}U \rightarrow \, ^{234}_{90}Th + \, ^{4}_{2}He$$

$$Q = -1782.16 + 28.2 - 1805.98 = 4.38 \text{ MeV}$$

Notar que las partículas α emitidas tienen energía y momento bien definidos

$M_1 \rightarrow M_2 + M_3$ $\qquad \xleftarrow{-p} \; \overset{\cdot}{M_1} \; \xrightarrow{p}$

$$M_1 c^2 = \sqrt{M_2^2c^4 + c^2p^2} + \sqrt{M_3^2c^4 + c^2p^2}$$

$$M_1^2c^4 = M_2^2c^4 + M_3^2c^4 + 2c^2p^2 + 2\sqrt{M_2^2c^4 + c^2p^2}\sqrt{M_3^2c^4 + c^2p^2}$$

$$(M_1^2c^4 - M_2^2c^4 - M_3^2c^4 - 2c^2p^2)^2 = 4(M_2^2c^4 + c^2p^2)(M_3^2c^4 + c^2p^2)$$

$$(M_1^2c^4 - M_2^2c^4 - M_3^2c^4)^2 + \cancel{4c^4p^4} - 4c^2p^2(M_1^2c^4 \cancel{- M_2^2c^4 - M_3^2c^4}) = \cancel{4c^4p^4} + \cancel{4(M_2^2c^4 + M_3^2c^4)p^2} + 4M_2^2c^4M_3^2c^4$$

$$4c^2p^2M_1^2c^4 = (M_1^2c^4 - M_2^2c^4 - M_3^2c^4)^2 - 4M_2^2M_3^2c^8$$

$$p^2 = \frac{1}{4M_1^2}\left\{(M_1^2 - M_2^2 - M_3^2)^2c^2 - 4M_2^2M_3^2c^2\right\}$$

$$p = \frac{c}{2M_1}\lambda^{1/2}(M_1^2, M_2^2, M_3^2) \qquad (3)$$

$\lambda(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$ (Función λ de Källen)

$$E_3 = \frac{c^2}{2M_1}(M_1^2 - M_2^2 + M_3^2) \qquad (4)$$

Desintegración γ: $(^AZ)^* \rightarrow (^AZ) + \gamma$. Esta es una forma muy usual de desintegrarse los estados excitados de un núcleo dando origen a fotones de energías de unos MeV.

Para estas transiciones de un estado inicial de spin-paridad (J_i, Π_i) inicial a uno final (J_f, Π_f) existen reglas de selección. Las transiciones $J_i = 0 \rightarrow J_f = 0$ están siempre prohibidas. Si el cambio de spines ΔJ entonces el estado final $J_f \in [J_i - \Delta J, J_i - \Delta J + 1, \ldots, J_i + \Delta J]$

Cambio de spin ΔJ		1	2	3	4	...
Cambio de paridad	Si	E1	M2	E3	M4	..
	No	M1	E2	M3	E4	..

(5)

Como más elevado es ΔJ mas difícil es que la transición multipolar tenga lugar

Desintegraciones β. Son del tipo

$$(A, Z) \rightarrow (A, Z+1) + e^- + \bar{\nu}_e \qquad \beta^-$$
$$(A, Z) \rightarrow (A, Z-1) + e^+ + \nu_e \qquad \beta^+ \tag{1}$$

y son producidas al desintegrarse un neutrón

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \qquad \tau = 898\ (16)\ s \tag{2}$$

Las transiciones β más usuales son las llamadas permitidas con reglas de selección

i) Tipo Fermi $\qquad J_i - J_f = 0 \quad ; \quad \Pi_i = \Pi_f$

ii) Tipo Gamow-Teller $\qquad J_i - J_f = 0, \pm 1 \quad , \quad J_i = 0 \not\rightarrow J_f = 0 \quad ; \quad \Pi_i = \Pi_f$ (3)

Una típica desintegración de este tipo es

$$^{12}_{5}B\,(1^+; g.s) \rightarrow {}^{12}_{6}C\,(0^+; g.s) + e^- + \bar{\nu}_e \tag{4}$$

que es una transición de Gamow-Teller.

Si en el proceso (1) no existiera el ν_e entonces el ~~elect~~ electrón tendría una energía bien definida. El hecho que el electrón tenga un espectro continuo de energía fué una de las razones que impulsaron a Pauli a postular la existencia del neutrino en 1930. El neutrino fué descubierto por C. L Cowan y F. Reines en 1956. El espectro típico de energías en las desintegraciones permitidas es

$$\frac{dN_e}{dE} \propto p_e E_e (E_{max} - E_e)^2 \tag{5}$$

$$E_{max} = \frac{c^2}{2M_i} (M_i^2 - M_f^2 + m^2)$$

donde M_i y M_f son, respectivamente, las masas de los nucleos inicial y final y m la del electrón.

1. El $^{238}_{92}U$ tiene una constante radiactiva $\lambda = 7.0 \times 10^{-18}\ s^{-1}$. Calcular su vida media. Si se tiene una muestra de 0.01 g de $^{238}_{92}U$ ¿cuántos desintegraciones se producen, en promedio, en un segundo.

$$\tau = \frac{1}{\lambda} = 1.43 \times 10^{17}\ s = 4.53 \times 10^{9}\ \text{años}$$

Masa de un átomo de uranio $\simeq \frac{1}{c^2}\ 238 \times 931.5\ MeV = 3.95 \times 10^{-22}$ g.

$N(0) = 2.53 \times 10^{19}$ atom $\qquad N(1\,sg) = N(0)\ e^{-1s/\tau}$

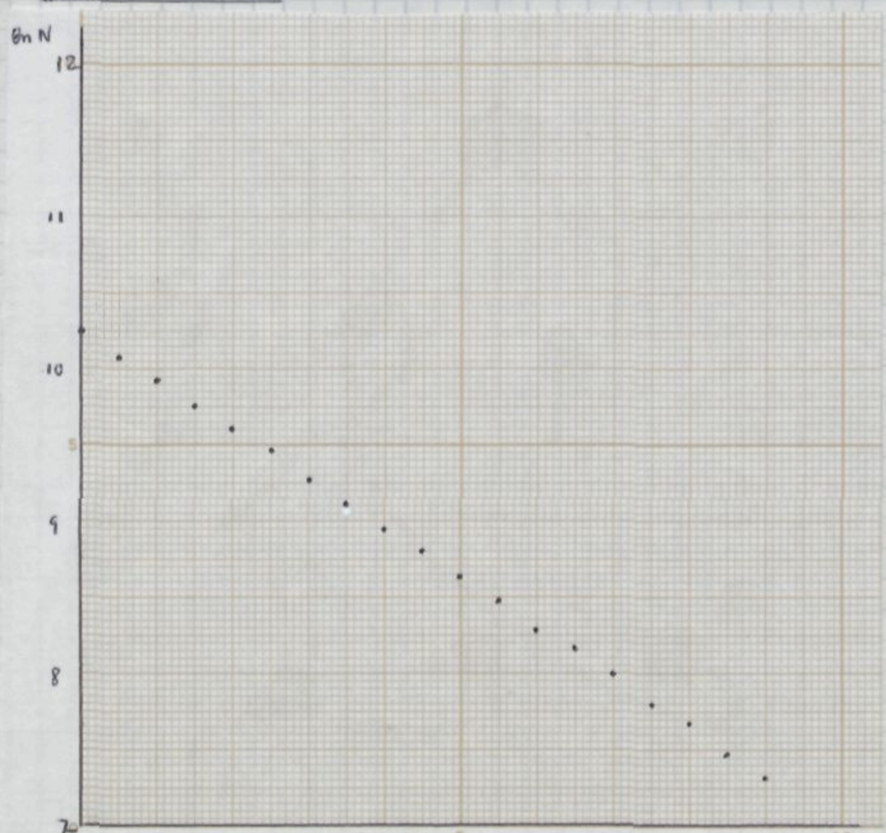
$$\Delta N = N(0)\left[1 - e^{-1s/\tau}\right] = N(0)\ \frac{1s}{\tau} \Rightarrow \quad \Delta N = 177\ s^{-1}$$

---

2. Para obtener la vida media de una substancia pura efectuamos una serie de medidas del número de sus átomos $N(t)$ en función de t, obteniendo

t min	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180
N(t)	28452	24085	20644	17380	14910	12760	10644	9188	7695	6670	5610	4796	4003	3491	2980	2426	2150	1762	1501

Representar estos valores en papel semilogarítmico y hallar λ y τ



$$N(t) = N(0)\ e^{-\lambda t}$$

$$A \equiv \sum_{i=1}^{N} \left[\ln N_i - \ln N(0) + \lambda t_i\right]^2$$

$$\frac{dA}{d\lambda} = 0$$

$$\lambda = \frac{\sum_i t_i \ln \frac{N(0)}{N_i}}{\sum_i t_i^2}$$

$$\lambda = \frac{3429.210603}{210900}$$

$$\lambda = 0.01626\ m^{-1}$$

$$\lambda = 2.710 \times 10^{-4}\ s$$

$$\tau = 3690\ s.$$

3. En la atmósfera existe una cierta cantidad de ${}^{14}_{6}C$ que es radioactivo y es absorbido por los seres vivos. Cuando una planta o un animal muere la absorción deja de tener lugar y la cantidad de ${}^{14}_{6}C$ presente en los restos de un ser vivo va disminuyendo. La vida media del ${}^{14}_{6}C$ es $\tau = 8.200$ años. Se encuentra madera que tras un análisis muestra una riqueza en ${}^{14}_{6}C$ que es sólo 25% a la normal. ¿Cuándo murió el árbol?

$$\frac{N_0}{4} = N_0\, e^{-t/8200 \text{ años}} \qquad t = 8200 \text{ años} \ln 4$$

$$t = 11368 \text{ años}$$

---

4. La constante solar es $f = 1.94$ cal/cm² minuto y es el flujo de energía electromagnética, proveniente del Sol, que incide sobre la parte superior de la atmósfera. ¿Cuál es la fracción de la masa del Sol que se radia en un año?

La energía radiada por el Sol en un año es

$$\Delta E = 4\pi R_{TS}^2\, f.\, T = 4\pi\,[1.50 \times 10^{13} \text{ cm}]^2\; 1.94\, \frac{\text{cal}}{\text{cm}^2 \text{ min}}\; 4.184 \times 10^7\, \frac{\text{erg}}{\text{cal}}\; \frac{\text{min}}{60\text{ s}}\; 3.1558 \times 10^7 \text{ s}$$

$$= 1.2071 \times 10^{41} \text{ erg} \Rightarrow \Delta M = \frac{\Delta E}{c^2} \Rightarrow \Delta M = 1.343 \times 10^{20} \text{ gr.}$$

$$\frac{\Delta M}{M} = \frac{1.343 \times 10^{20} \text{ gr}}{1.989 \times 10^{33} \text{ gr}} \Rightarrow \frac{\Delta M}{M} = 6.75 \times 10^{-14}$$

---

5. Sabiendo que la luminosidad del Sol es $L_\odot = 3.90 \times 10^{33}$ erg s⁻¹ y que su energía proviene de la conversión $4p \to {}^{4}_{2}He + 2e^+$ ¿Qué vida puede tener el Sol suponiendo que sólo se puede quemar un 10% de su hidrógeno y que inicialmente el Sol era todo hidrógeno?
En el proceso considerado se liberan 6.40×10^{18} erg/gr.

La energía que se puede producir es $E = M_\odot \times 6.40 \times 10^{18} \frac{\text{erg}}{\text{gr}} \times 0.10 = 1.273 \times 10^{51}$ erg.

y la vida del Sol es

$$t = \frac{E}{L_\odot} \Rightarrow \qquad t = 3.264 \times 10^{17} \text{ s} \Rightarrow t = 1.03 \times 10^{10} \text{ años}$$

---

6. Al quemar gas natural se libera una energía de 5×10^7 J/Kg. A los físicos de principios de siglo les preocupó mucho que al desintegrarse el radio emitiera partículas α con velocidad $v = 2.5 \times 10^7$ ms⁻¹. ¿Por qué?

Esto significaba que el radio con una masa $M_{Ra} = 226$ uam. al desintegrarse emitiera una partícula α con energía cinética $K = \frac{1}{2}$ (4 uam) $\times (2.5 \times 10^7 \,m\,s^{-1})^2$ y por tanto la energía liberada era de

$$\frac{1}{226}\ \frac{1}{2}\ 4\ (2.5 \times 10^7)^2 = 5.53 \times 10^{12}\ J/Kg$$

Ni la gravitación ni el electromagnetismo eran capaces de explicar esto

PARTICULAS Y FUERZAS FUNDAMENTALES.

Cuando decimos que una partícula es elemental entendemos que con las energías disponibles en los laboratorios no hemos podido descubrir su estructura. Hoy día llamamos elementales a las partículas que no tienen estructura o si la tienen es menor de 10^{-3} fm y no la podemos observar.

Partículas elementales: Hoy día creemos que las partículas elementales se pueden clasificar en varias familias

i) Leptones

ii) Quarks

iii) Bosones intermediarios

iv) Otros.

Leptones: (e, ν_e) ; (μ, ν_μ) ; (τ, ν_τ) ;

El electrón (e) fué descubierto en 1899 por J.J. Thomson que logró medir el valor de la masa y de la carga eléctrica emitida en los rayos catódicos. Hoy día sabemos que el electrón es una partícula elemental de spin 1/2 (en unidades de $\hbar$) y

$$m_e = 0.5110034\,(14)\ \mathrm{MeV}/c^2 \quad , \quad Q_e = -1$$
$$\tau_e > 2 \times 10^{22}\ \text{años} \tag{1}$$

donde la carga se mide en unidades de la carga del protón. Además de la carga eléctrica el electrón tiene una carga leptónica electrónica $L_e = +1$, que es aditivamente conservada en todas las interacciones bien establecidas experimentalmente.

En 1928, P.A.M. Dirac encontró la ecuación de ondas relativista que describe el electrón, que presentaba problemas que fueron resueltos por el mismo Dirac, en 1931, al postular la existencia del antielectrón o positrón, que tenía las mismas propiedades que el electrón, pero todas sus cargas eran de signo opuesto. El positrón fue descubierto, en la radiación cósmica, por C.D. Anderson en 1932.

El neutrino electrónico (ν_e) fue postulado por W. Pauli a finales del año 1930. Ya en 1900 se sabía que los rayos β emitidos por los núcleos atómicos estaban formados por electrones. En un lenguaje moderno se veía que un núcleo (A, Z) se desintegraba β en la forma

$$(A, Z) \rightarrow (A, Z+1) + e^- \tag{2}$$

es decir que uno de los neutrones del núcleo se transformaba en un protón y se emitía un electrón. Si M_i y M_f son las masas de los núcleos inicial y final entonces la energía del electrón emitido es

$$E_e = \frac{c^2}{2M_i}\left(M_i^2 - M_f^2 + m_e^2\right) \tag{3}$$

contra la evidencia experimental de un espectro continuo, en el que los electrones aparecen con todas las energías menores que una E_{max} que prácticamente coincidía con (3). Además de este problema había otro, llamado de la falsa estadística, que en el lenguaje moderno sería la no conservación del momento angular en (2). El 4 de diciembre de 1930 Pauli, desde Zürich, escribe una carta abierta a los asistentes a una conferencia sobre radioactividad que tenía lugar en Tübingen y les dice:
"En vista de la falsa estadística de los núcleos de nitrógeno y litio y también del espectro continuo β, se me ha ocurrido una escapatoria desesperada para salvar "el principio de intercambio" y el principio de conservación de la energía. A saber, la eventualidad de que en los núcleos puedan existir partículas eléctricamente neutras, a las que llamaré "neutrones" que tienen spin 1/2". Hoy día sabemos que

$$(A, Z) \longrightarrow (A, Z+1) + e^- + \bar{\nu}_e \tag{4}$$

El neutrino fué descubierto por C.L. Cowan y F. Reines en 1956. Sabemos que el neutrino tiene spin 1/2 y

$$m_{\nu_e} \leq 10\ eV/c^2 \quad , \quad \tau_{\nu_e} > 3.\times 10^8 \frac{m_{\nu e}}{MeV}\ s. \quad , \quad Q_e = 0 \tag{5}$$

$$L_e = +1$$

Notar que la reacción (4) conserva tanto la carga eléctrica como la carga leptónica electrónica, pues solo el electrón y el neutrino tienen $L_e \neq 0$.
¿Por qué es tan difícil de observar? La dificultad de observar el neutrino es debida a que por no tener carga eléctrica solo tiene interacciones débiles. El proceso $\gamma + e^- \to \gamma + e^-$ para energías $E_\gamma \ll mc^2$ tiene una sección eficaz

$$\sigma = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{\alpha}{m_e}\right)^2 \frac{\hbar^2}{c^2} = 0.665\ 244\ 8\ (33) \times 10^{-24}\ cm^2 \tag{6}$$

que es la llamada sección eficaz Thomson. La sección eficaz para el proceso $\bar{\nu}_e + e \to e + \bar{\nu}_e$ es

$$\sigma = \frac{4 G_F^2}{3\pi} \frac{(m_e c^2) E^2}{(m_e c^2 + 2E)^3}\left[4E^2 + 6 m_e c^2 E + 3 m_e^2 c^4\right] \frac{1}{(\hbar c)^4} \tag{7}$$

donde E es la energía del neutrino y G_F es la llamada constante de Fermi que caracteriza la intensidad de las interacciones débiles y vale

$$G_F = 1.02684\,(2) \times 10^{-5} \frac{\hbar^3}{M_p^2 c} \tag{1}$$

donde M_p es la masa del protón. Si $E \gg m_e c^2$ entonces

$$\sigma \sim \frac{2 G_F^2 \,(m_e c^2)\, E}{3\pi \,(\hbar c)^4} = 5.74399\,(16) \times 10^{-42} \frac{E}{GeV}\ cm^2 \tag{2}$$

que es válida para $E \lesssim 50$ GeV y que es muchos órdenes de magnitud menor que la sección eficaz Thomson.

El muón (μ) fue descubierto en la radiación cósmica, en 1936, por S.H. Neddermeyer y C.D. Anderson. Tiene spin 1/2 y además

$$m_\mu = 105.65916\,(30)\ MeV/c^2 \quad , \quad \tau_e = 2.19703\,(4) \times 10^{-6}\ s. \tag{3}$$

$$Q_e = -1 \quad , \quad L_\mu = +1$$

Su principal modo de desintegración es

$$\mu^- \longrightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu \tag{4}$$

El neutrino muónico tiene spin 1/2, carga eléctrica nula, carga leptónica muónica $L_\mu = +1$ y su masa es $m_\nu \lesssim 0.25\ MeV/c^2$. Solo estas dos partículas tienen $L_\mu \neq 0$ y L_μ es aditivamente conservado en todos los procesos mediados por las interacciones bien establecidas. La vida media del muón es (despreciando la masa del electrón y las correcciones radiativas)

$$\tau_\mu = 192\pi^3 \frac{1}{G_F^2\, m_\mu^5} \frac{\hbar^7}{c^4} = 2.187298\,(65) \times 10^{-6}\ s. \tag{5}$$

En 1962 se probó experimentalmente que $\nu_\mu \neq \nu_e$.

En 1947, C.F. Powell dijo: "La frase "existe el muón" debió provocar una carcajada en los cielos, pero el hombre era y es ignorante de cuál es el chiste. ¿Para qué sirve el muón sino para ser la desintegración favorita del pión? El descubrimiento del electrón fue inesperado, pero su uso como ingrediente de la periferia atómica se reconoció inmediatamente.

El tauón (τ) fue descubierto, en 1975, por M.L. Perl. De nuevo es una partícula de spin 1/2 y

36/001

$m_\tau = 1784.2\ (3.2)\ MeV/c^2$, $\tau_\tau = (3.3 \pm 0.4) \times 10^{-13}\ s$

(6)

$Q_\tau = -1$, $L_\tau = +1$

Exactamente como en los casos anteriores existe un ν_τ tambien de spin $1/2$, carga eléctrica nula y número leptonico tauonico $L_\tau = +1$, conservado en todas las interacciones bien establecidas y solo distinto de cero para el τ y el ν_τ. Además $m_\tau \leq 70\ MeV/c^2$. Se desintegra en muchisimos canales debido a su gran masa.

Tenemos pues tres familias de leptones (e, ν_e), (μ, ν_μ), (τ, ν_τ) todos de spin $1/2$ que solo tienen interacciones débiles y electromagnéticas, si estan cargados. ¿Hay posibilidad de nuevas familias? De los resultados del estudio del Z^0 se ve que el número de familias con neutrinos ligeros N_ν es $N_\nu \leq 5$. Del modelo cosmológico standard $N_\nu \leq 4$. Además si existe otro leptón cargado su masa es $m \gtrsim 41\ GeV/c^2$.

Quarks:

El neutrón y el protón son los dos constituyentes del nucleo atómico; ambos tienen spin $1/2$ y

$M_p = 938.2796\ (27)\ MeV/c^2$, $M_n = 939.5731\ (27)\ MeV/c^2$

$\tau_p \geq 10^{30}$ años $\tau_n = 898 \pm 16\ s.$

$Q_p = +1$ $Q_n = 0$

Ambos tienen una carga barionica ó número barionico $B = +1$, que es aditivamente conservado en todas las interacciones bien establecidas. El protón se conoce desde principios de siglo y el neutrón fué descubierto por J. Chadwick en 1932. El antiprotón fue descubierto por Rosse en 1955. Estos fueron los dos primeros hadrones conocidos. Los hadrones tienen interacciones fuertes, debiles y electromagneticas, asi como tambien gravitacionales.

En 1935, H. Yukawa, para poder explicar las interacciones fuertes que ligan los nucleones (neutrón y protón) en los nucleos, postula la existencia de un nuevo hadrón: el pion. Los piones son descubiertos en 1947. y sus propiedades son

$M_{\pi^\pm} = 139.5685\ (10)\ MeV/c^2$ $M_{\pi^0} = 134.9642\ (38)\ MeV/c^2$

$\tau_{\pi^\pm} = 2.6030\ (23) \times 10^{-8}\ s$ $\tau_{\pi^0} = 0.87\ (4) \times 10^{-16}\ s.$

$$Q_{\pi^\pm} = \pm 1 \qquad , \qquad Q_{\pi^0} = 0$$

Todos los piones tienen spin nulo y $B=0$. El π^+ y π^- son partícula - antipartícula, mientras que el π^0, por tener todas las cargas nulas, coincide con su antipartícula.

A partir de este momento el número de hadrones aumenta sin cesar, los primeros descubiertos en la radiación cósmica y después creados con los modernos aceleradores de partículas. Estos hadrones se les suele dar el nombre de resonancias si decaen vía las interacciones fuertes, lo cual sucede en la mayor parte de los casos. Los hadrones se clasifican en dos grandes familias

i) Bariones : que tienen spin semi-impar y $B=+1$

ii) Mesones : que tienen spin entero y $B=0$.

En 1964, M. Gell-Mann y G. Zweig, independientemente, postulan que los hadrones están constituidos por quarks. Su existencia quedó fuera de toda duda ~~en~~ finales de la década de los sesenta y principios de la de los setenta, gracias a las experiencias de colisiones profundamente inelásticas.

Hoy día aceptamos que hay tres familias de quarks

$$(u, d) \qquad , \qquad (c, s) \qquad , \qquad (t, b) \tag{1}$$

Todos tienen spin $1/2$ y $B=+1/3$. Se dice que existen 6 tipos distintos de quarks o más usualmente que hay quarks de seis "aromas" distintos u (≡ up), d (≡ down) c (≡ charm), s (≡ strange), t (≡ top), b (≡ bottom). Además cada aroma de quark puede aparecer en tres estados posibles, que suelen designarse como estados de color: rojo, azul y verde y los antiquarks tienen los anticolores correspondientes: cian, magenta y amarillo. Sus cargas son

$$Q_u = Q_c = Q_t = +\frac{2}{3} \qquad , \qquad Q_d = Q_s = Q_b = -\frac{1}{3} \tag{2}$$

Todos los hadrones son estados ligados de quarks. Los bariones son estados ligados de tres quarks, uno de cada color y los mesones estados ligados de un quark de un color con el antiquark correspondiente.

$$p = (uud) \qquad , \qquad n = (ddu) \qquad ,$$

$$\pi^+ = (u\bar{d}) \qquad , \qquad \pi^- = (d\bar{u}) \qquad , \qquad \pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d}) \tag{3}$$

Interacciones entre quarks: La interacción entre dos quarks tiene importantes características:

i) Libertad asintótica: A muy pequeñas distancias la interacción desaparece

ii) Los quarks están confinados

La interacción entre dos quarks se puede pensar como si estuvieran unidos por una cinta de goma que no se pudiera romper. Cuando los dos quarks están muy cercanos la cinta está flácida y los quarks se mueven libremente. La interacción crece al alejar un quark de otro.

Cuando en 1964 se postuló la existencia de quarks todos los hadrones conocidos podían explicarse a partir de los quarks: u, d, s. S.L. Glashow, J. Illiopoulos y L. Maiani postularon, en 1970, para resolver ciertos problemas de la teoría electrodébil la existencia del quark c y en 1974, B. Richter y S. Ting descubrieron la partícula J/ψ que es $(c\bar{c})$. Además el número de familias de quarks y leptones debía ser el mismo con lo cual al descubrirse (τ, ν_τ) era de esperar una nueva pareja de quarks (b, t). En 1977, L.M. Lederman descubrió el $\Upsilon \equiv (b\bar{b})$ y aún no hemos descubierto el t.

Debido a que los quarks están confinados no es trivial definir su masa. Esta es una función de la energía y a energías del orden de 1 GeV estas son

$$m_u \simeq 5\ MeV/c^2 \quad , \quad m_d \simeq 8\ MeV/c^2 \quad , \quad m_s \simeq 150\ MeV/c^2 \tag{4}$$

$$m_c \simeq 1350\ MeV/c^2 \quad , \quad m_b \simeq 5300\ MeV/c^2 \quad , \quad m_t \gtrsim 80.000\ MeV/c^2$$

Las interacciones.

A fines del siglo XIX todos los fenómenos conocidos se podían explicar claramente en términos de dos interacciones: La gravitación y el electromagnetismo.

1) La gravitación

Fué Newton el que se dió cuenta que la misma fuerza que regía la caída de las manzanas era la que explicaba el movimiento de los planetas alrededor del Sol y era la dueña y señora que regía el movimiento de las estrellas, unificando así la Mecánica celeste con la terrestre. De acuerdo con Newton partículas de masas M_1 y M_2 se atraían con una fuerza derivable de un potencial

$$V(r) = -G\frac{M_1 M_2}{r} \tag{5}$$

donde r es la distancia entre las dos partículas y G es la constante de la gravitación universal

$$G = 6.6720\ (41) \times 10^{-8}\ cm^3\, g^{-1}\, s^{-2} \tag{1}$$

En lugar de G que tiene dimensiones se suele introducir la llamada constante de estructura fina gravitacional

$$\alpha_G \equiv \frac{G M_p^2}{\hbar c} = 5.9042\ (36) \times 10^{-39} \tag{2}$$

que es adimensional.

Vemos que es extraordinariamente débil comparada con las restantes interacciones, pero es extraordinariamente importante en el macrocosmos pues

i) Su alcance es infinito $V(r) \propto 1/r$

ii) Actúa siempre.

La teoría clásica de Newton fue mejorada, en 1916, por Albert Einstein al formular la teoría de la relatividad general, que no es más que una teoría clásica del campo gravitatorio.

2) El electromagnetismo.

Desde la más remota antigüedad se conocía la existencia de fuerzas eléctricas y de fuerzas magnéticas. Fué en 1820 cuando Oersted descubrió que las corrientes eléctricas producen efectos magnéticos. Unos cuarenta años más tarde J.C. Maxwell unificaba ambas fuerzas en la teoría del electromagnetismo. La ley de Coulomb dice que si dos partículas de cargas Q_1 y Q_2 están a una distancia r se atraen si $Q_1 Q_2 < 0$ o se repelen si $Q_1 Q_2 > 0$ con una fuerza derivable del potencial

$$V(r) = + \frac{Q_1 Q_2}{r} \tag{3}$$

Si es e la carga del protón

$$e = 4.803\,242\ (14) \times 10^{-10}\ ues \tag{4}$$

y su intensidad se puede medir mediante la constante de estructura fina

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = 1 / 137.036\,04\ (11) \tag{5}$$

Notemos que para dos protones la relación entre la fuerza gravitacional y la electrostática es

$$\alpha_G / \alpha = 8.0909\ (49) \times 10^{-37} \tag{6}$$

35/001

Cuando hay fuerzas electrostáticas podemos olvidar la gravitación. Estas fuerzas son de alcance infinito, pero debido a que existen partículas de ambos signos los cuerpos macroscópicos tienden a ser neutros y en el macrocosmos no juegan papel primordial. Estas interacciones electromagnéticas son las que ligan los electrones a los núcleos atómicos para formar los átomos, los átomos entre sí para formar moléculas y no es exagerado decir que son los responsables de toda la química y la biología.

Gracias al trabajo iniciado por Dirac en 1927 y culminado por S. Tomonaga (1946) J. Schwinger (1948) y Feynman (1949) disponemos de una teoría cuántica del campo electromagnético: la electrodinámica cuántica (Q.E.D.). En esta teoría la interacción entre dos electrones es debida al intercambio de fotones. El fotón es una partícula elemental, de spin 1 (helicidad ±1) y con todas las cargas nulas por lo cual coincide con su antipartícula. Su masa es

$$m_\gamma \leq 3 \cdot 10^{-33} \ \mathrm{MeV}/c^2. \qquad (7)$$

La Q.E.D. es la teoría mas precisa de toda la física y describe la interacción de los leptones cargados mediante el intercambio de fotones.

De hecho, todas las interacciones son debidas al proceso de intercambio de partículas y el alcance de una interacción está relacionada con la masa de la partícula que es intercambiada. En efecto, considérense dos partículas de masa M, en reposo. Su energía es $E = 2Mc^2$. Para que tenga lugar la interacción una de ellas debe emitir una partícula de masa m que debe ser captada por la otra. Entre los instantes de la emisión y de la absorción la energía del sistema es mayor que $E' = 2Mc^2 + mc^2$, y por tanto se produce una violación de la ley de conservación de la energía que al menos es $\Delta E = E' - E = mc^2$. Ahora bien de acuerdo con la mecánica cuántica, tal violación es posible a lo sumo durante un tiempo τ tal que $\tau \Delta E = \hbar$. Por muy rápida que se propague la partícula la cota superior que puede recorrer es $d = c\tau$. Esta distancia es llamada el alcance de la interacción y vale

$$d = \frac{\hbar}{mc} = \frac{\hbar c}{mc^2} = 197.328\,58\,(51) \ \mathrm{fm} \ \frac{\mathrm{MeV}}{mc^2} \qquad (8)$$

El alcance es infinito para $m = 0$. El potencial correspondiente es de la forma

$$V(r) \sim \frac{1}{r} e^{-r/d} \qquad (9)$$

Newton en su libro "Optichs" dice "las atracciones de la gravedad, el magnetismo y la electricidad alcanzan distancias considerables, y por tanto han sido observadas fácilmente y puede haber otras que actúen solo a distancias tan cortas que hasta ahora no han sido observadas". En 1896, con el descubrimiento de la radiactividad por Henry Becquerel empiezan una serie de experiencias que, en el transcurso de los años, permitirían establecer la existencia de dos nuevas fuerzas fundamentales de alcance extraordinariamente pequeño: las fuertes y las débiles.

3) Interacciones fuertes

Hoy día es fácil entender la necesidad de las interacciones fuertes. Consideremos, por ejemplo, una partícula α que está formada por $2p + 2n$. Las fuerzas gravitacionales atractivas son totalmente incapaces de vencer la repulsión coulombiana y, por tanto, la única forma de explicar la gran energía de ligadura de este núcleo es suponer que los nucleones se atraen entre sí con una fuerza mucho mayor que la que causa la repulsión electrostática. El hecho de que estas fuerzas no tengan ninguna importancia en física atómica y molecular es debido que su alcance es del orden de 1 fm. En 1935, H. Yukawa postuló que la fuerza era debida al intercambio de una partícula con una masa de unos 100 - 200 MeV. Este es el pion que fué descubierto en 1947. A grandes distancias el potencial es

$$V(r) = - \frac{g^2}{4\pi} \frac{e^{-\mu r}}{r} \qquad r \gtrsim 1 \text{ fm.} \tag{1}$$

$$\frac{g^2}{4\pi \hbar c} \simeq 14.8 \qquad \mu = \frac{mc^2}{\hbar c} \simeq 0.706 \text{ fm}^{-1}$$

Sabemos que a pequeñas distancias $r \lesssim 0.5$ fm las fuerzas nucleares son altamente repulsivas y esto explica la saturación de las fuerzas nucleares.

En términos de los quarks la teoría de las interacciones fuertes fue formulada en los comienzos de la década de los setenta y se llama cromodinámica cuántica. La interacción fuerte entre los quarks es debida al intercambio de ocho gluones que son partículas sin masa, elementales, de spin 1 y con sólo carga de color. La teoría explica la libertad asintótica y quizá el confinamiento, pero es suficientemente complicada para que aún no sepamos como a partir de esta calcular la masa del protón ó la interacción entre nucleones, por ejemplo.

4) Las Interacciones débiles.

En el año 1900 quedó claramente establecido que los rayos β, identificados dos años

36/001

antes entre los productos de las desintegraciones nucleares, estaban formados por electrones. Sin embargo aún dejaron transcurrir 14 años para que quedase probado que el espectro de los electrones emitidos era continuo. Y durante casi 50 años desde su descubrimiento la desintegración β de los núcleos fué la única manifestación de un nuevo tipo de fuerza: las interacciones débiles.

Enrico Fermi, a finales de 1933, formuló la primera teoría cuántica de campos de las interacciones débiles, que envió a Nature y fué rechazada "por contener especulaciones demasiado alejadas de la realidad para que puedan interesar al lector". La teoría de Fermi evolucionó con los años sin que se modificaran demasiado sus ingredientes básicos.

Los trabajos de S.L. Glashow (1961), S. Weinberg (1967) y A. Salam (1968) permitieron formular la teoría electrodébil. Esta teoría describe simultaneamente las interacciones electromagneticas, debido al intercambio de fotones, y las debiles mediadas por los bosones $W^{\pm}$, Z^0, partículas elementales de spin 1. Los éxitos de esta teoría han sido multiples y su confirmación experimental ha culminado con el descubrimiento, en el CERN, de los bosones vectoriales que tienen las propiedades

$$M_W = (81.8 \pm 1.5)\ \text{GeV} \qquad \Gamma_W < 6.5\ \text{GeV}$$
$$M_Z = (92.6 \pm 1.7)\ \text{GeV} \qquad \Gamma_Z < 4.6\ \text{GeV} \qquad (5)$$

en perfecto acuerdo con las predicciones teóricas

En la teoría electrodébil existe ~~una~~ partícula escalar, el Higgs, que aún no ha sido descubierta

GUTS: ¿Existe una teoría unificada de la teoría electrodébil y la Q.C.D? Intentos en este camino fueron iniciados por J.C. Pati y A. Salam, en 1973, y H. Georgi y S.L. Glashow, en 1974. Existen muchos modelos para lograr esto, pero no tenemos datos para averiguar cual de los modelos es el adecuado. Todos ellos permiten la violación del número barionico y leptónico y por tanto convierten el protón en una partícula inestable. Tambien estos modelos predicen la existencia de monopoles magnéticos. Sin embargo no hemos visto ni los monopolos ni la desintegración del protón.

Gravitación. En 1956, N. Wiener escribió: "Se ha dicho, con acierto, que un físico moderno es un teórico cuántico los lunes, miércoles y viernes, un estudiante de la teoría relativista de la gravitación los martes, jueves y sabados. Los domingos, el físico se los pasa rezando a su Dios y pidiéndole que alguien, preferiblemente él, encuentre la reconciliación entre estas dos teorías". Hoy día, han transcurrido 30 años, y continuamos sin disponer de una teoría cuántica de la gravitación.

1. La sección eficaz para procesos tales como $\bar{\nu} + p \to n + e^+$ es del orden de $\sigma \simeq 10^{-38} cm^2$ para antineutrinos con energía $E = 1 GeV$. Calcular el recorrido libre medio de los antineutrinos en un material de la densidad de la Tierra.

El recorrido libre medio es $\lambda = \frac{1}{n\sigma}$ donde n es el número de protones por unidad de volumen. La densidad de la Tierra es $\rho = 5.56 \; g\, cm^{-3}$ y suponiendo que hay igual número de neutrones y protones

$$n = \frac{1}{2} \, 5.56 \, \frac{1}{1.672 \times 10^{-24}} = 1.66 \times 10^{24} \; cm^{-3}$$

$$\lambda = 6 \times 10^{13} \; cm = 6 \times 10^{8} \; Km.$$

---

2. El τ^- se desintegra en $(17.6 \pm 0.6)\%$ de las veces según el canal $\tau^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu + \nu_\tau$. Si la anchura para este proceso es por analogía con el caso del muón

$$\Gamma(\tau^- \to \mu^- \bar{\nu}_\mu \nu_\tau) = \frac{G_F^2 \, m_\tau^5}{192 \pi^3} \frac{c^4}{\hbar^6}$$

determinar su vida media

Se tiene que si $B = 0.176\,(6)$ entonces $\frac{\Gamma(\tau^- \to \mu^- \bar{\nu}_\mu \nu_\tau)}{\Gamma(\tau^- \to all)} = B$

$$\tau = B \, \frac{\hbar}{\Gamma(\tau^- \to \mu^- \bar{\nu}_\mu \nu_\tau)} = B \, \frac{192 \pi^3}{G_F^2 \, m_\tau^5} \, \frac{\hbar^7}{c^4}$$

$$= B \; 1.5930\,(64) \times 10^{-12} \, s \quad \Rightarrow \quad \tau = 2.804\,(96) \times 10^{-13} \, s.$$

El valor experimental es $\tau_{exp} = (3.3 \pm 0.4) \times 10^{-13} s$.

3.- La forma más económica de crear antiprotones es usando la reacción

$$p + p \longrightarrow p + p + p + \bar{p}$$

Si el blanco se supone en reposo ¿Cuál es la energía mínima del haz de protones incidente para que la reacción pueda tener lugar?

La cantidad $s = (p_1 + p_2)^2$ es un escalar, p_1 y p_2 son los momentos de los dos protones iniciales en cualquier sistema de referencia. Además $s = (p_1' + p_2' + p_3' + p_4')^2$ donde p_i' son los momentos finales. En el sistema C.M. el valor mínimo de este último cantidad es $s = (4 M_p c^2)^2$ y en el sistema laboratorio $s = p_1^2 + p_2^2 + 2 p_1 \cdot p_2 = 2 M_p^2 c^4 + 2 M_p c^2 E_{th}$ y por tanto

36/001

$$2M_p^2c^4 + 2M_pc^2E_a = 16M_p^2c^4$$

$$E_a = 7M_pc^2 = 6.58 \text{ GeV}$$

---

4. Un mesón K^0_S en reposo se desintegra en $\pi^+\pi^-$. Hallar el momento de estos piones

---

Ambos llevan momentos iguales y opuestos $\vec{p}$.

$$M_K c^2 = \sqrt{M_\pi^2c^4 + c^2p^2} + \sqrt{M_\pi^2c^4 + c^2p^2}$$

$$M_K^2c^4 = 2\left(M_\pi^2c^4 + c^2p^2\right) \qquad 2c^2p^2 = M_K^2c^4 - 2M_\pi^2c^4$$

$$cp = \sqrt{\frac{1}{2}(M_Kc^2)^2 - (M_\pi c^2)^2}$$

$M_Kc^2 = 497.72(7)$ MeV , $M_\pi c^2 = 139.5685(10)$ MeV $\Rightarrow p = 323.1$ keV/c^2

5.

HISTORIA DEL UNIVERSO

Goethe "El Fausto": "Amigo mío, los tiempos pasados son para nosotros un libro con siete sellos"

1650. James Usher, arzobispo irlandés, calculó la edad de la Tierra a partir de la evidencia del Antiguo Testamento y llegó a la conclusión que fué creada a las 9 en punto de la mañana del 26 de octubre del año 4004 A.C.

1750 George Louis Leclerc, conde de Buffón, publicó su "Teoría de la Tierra". En ella explica que calentó dos esferas de hierro al rojo vivo y del tiempo que tardaron en enfriarse dedujo que la Tierra tiene al menos 74 832 años.

1862. Lord Kelvin realizó experiencias parecidas y dedujo que la edad de la Tierra debía estar entre 2×10^7 y 4×10^8 años.

1987. Hoy día sabemos, gracias a los trabajos iniciados por Gamow en los años 1930 y basándose en la medida de abundancias relativas de ciertos isótopos, que la corteza terrestre se formó hace aproximadamente 4×10^9 años y que la Tierra es aun 10^9 años más vieja.

1917. A Einstein publica "Consideraciones cosmológicas sobre la teoría de la Relatividad General" que constituye el inicio de la cosmología moderna. Einstein intentó buscar una solución que describiera un universo estacionario, pues nadie dudaba entonces de esto, y al no lograrlo introdujo la famosa constante cosmológica, que describe una repulsión entre galaxias lejanas.

1929 Edwin Hubble encontró que las galaxias se alejan de nosotros con velocidades proporcionales a su distancia". Exactamente

$$d = \frac{c}{H_0}\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \qquad , \qquad \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}} - 1 \sim \frac{v}{c} + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{1}{2}\frac{v^3}{c^3} \cdots \tag{1}$$

$$H_0 = h_0\, 50\ \mathrm{Km\ s^{-1}\ Mpc^{-1}} \qquad h_0 = 0.5 - 1.5$$

Principio cosmológico: Aceptamos como punto de partida la validez del principio cosmológico, es decir admitiremos que en gran escala el Universo es homogeneo e isotropo. Experimentalmente se sabe que las variaciones de densidad de materia de su valor medio, a escalas de 10^3 Mpc, no exceden al 3% y son aun menores a escalas mayores.

36/001

Métricas de Robertson-Walker: A partir del principio cosmológico se puede probar que el Universo tuvo un origen y que la geometría del espacio tiempo viene totalmente caracterizada por una función $R(t)$ que nos mide la distancia entre dos puntos del Universo en el transcurso del tiempo y un parámetro k cuyo valor nos explica la estructura global del espacio-tiempo. El gas que forma el Universo viene caracterizado por la presión $p(t)$, la densidad $\rho(t)$ y una ecuación de estado $p = p(\rho)$. La función de Hubble y el parámetro de desaceleración vienen dados por

$$H(t) \equiv \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} \qquad \text{(Función de Hubble)}$$

$$q(t) \equiv -\frac{\ddot{R}(t)\,R(t)}{\dot{R}^2(t)} \qquad \text{(Parámetro de desaceleración)} \tag{2}$$

Sus valores en el momento actual ~~se~~ suelen denotar por H_0 y q_0. El valor conservativo a q_0 es

$$q_0 \leq 2 \tag{3}$$

Ecuaciones de campo: Las ecuaciones de campo de la relatividad general permiten determinar $R(t)$ conocida k., que puede tomar los valores $k = 0, \pm 1$.

Edad del universo. Si $q(t) \equiv 0$ entonces la edad del Universo sería

$$T = \frac{1}{H_0} = \frac{\text{Megaparsec}}{h_0\ 50\ \text{Km}}\ s = \frac{3.086 \times 10^{24}\ \text{cm}}{h_0\ 5 \times 10^6\ \text{cm}}\ s =$$

$$= \frac{1}{h_0}\ 6.172 \times 10^{17}\ s = 1.956 \times 10^{10}\ \frac{1}{h_0}\ \text{años} \tag{4}$$

En realidad T es algo menor que este valor pues $q_0 \geq 0$.

Valor de k. Conviene introducir una densidad crítica

$$\rho_c(t) = \frac{3H^2(t)}{8\pi G} \tag{5}$$

cuyo valor actual es

$$\rho_{0c} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 4.696 \times 10^{-30}\ h_0^2\ \text{g cm}^{-3} \tag{6}$$

Indiquemos por ρ_0 la densidad actual del Universo. Entonces

·) Si $\rho_0 > \rho_{0c} \Rightarrow k = +1$; el Universo es finito y después de la etapa de expansión actual, seguirá otra de compresión que ocasiona un colapso

ii) Si $\rho_0 = \rho_{0c} \Rightarrow k=0$, el universo es plano y se expandirá siempre

iii) Si $\rho_0 < \rho_{0c} \Rightarrow k=-1$, el universo es infinito y su expansión continuará indefinidamente.

Historia del Universo

Big Bang: En el instante inicial el universo era extraordinariamente denso y caliente. Hasta que tengamos una teoría cuántica de la gravitación no podremos saber nada de lo que sucedió para tiempos menores que el tiempo de Planck.

$$t_P \equiv \sqrt{\frac{G\hbar}{c^5}} = 5.39 0 6\ (17) \times 10^{-44}\ s^{-1} \tag{1}$$

$T \gg 1.5 \times 10^{12}$ K ($k_B T \gg 130$ MeV). Las densidades y temperaturas son tan altas que toda clase de partículas están presentes en equilibrio termodinámico y en mutua interacción. La presencia de muchas partículas interaccionando fuertemente hace difícil saber el comportamiento de la materia en tales condiciones y empezaremos nuestro estudio a temperaturas algo más bajas.

$T = 10^{11}$ K ($k_B T = 8.62$ MeV) El Universo es muy simple. El universo está formado, básicamente, por fotones, neutrinos, antineutrinos, electrones y positrones en equilibrio termodinámico. Suponiendo tres generaciones de leptones la densidad viene dada por

$$\rho(T) = 4.52 \times 10^{-35}\ \mathrm{g\,cm^{-3}}\ (T/K)^4 \tag{2}$$

que para $T = 10^{11}$ da $\rho = 4.52 \times 10^{9}\ \mathrm{g\,cm^{-3}}$

En este universo también hay un pequeño número de nucleones: alrededor de 1 nucleón por cada 10^9 fotones. Prácticamente hay el mismo número de protones y de neutrones. La edad del Universo es entonces

$$t = 1.10 \left(\frac{K}{T}\right)^2 \times 10^{20}\ s. \tag{3}$$

es decir $t = 0.011$ s.

$T = 3 \times 10^{10}$ K ($k_B T = 2.585$ MeV) Nada ha cambiado substancialmente, la densidad ha disminuido a $\rho = 3.66 \times 10^{7}\ \mathrm{g\,cm^{-3}}$ y la edad es $t = 0.12$ s. Al ser el neutrón más pesado que el protón, de los nucleones existentes un 38 % son neutrones y el resto protones.

$T = 10^{10}$ K ($k_B T = 0.862$ MeV) Ya han transcurrido 1.1 s y la densidad es 4.52×10^5 g cm^{-3}
De los nucleones un 24% son neutrones y el resto protones. Los neutrinos empiezan a comportarse como partículas libres y dejan de estar en equilibrio térmico con los fotones y electrones y positrones. Muy poco después los pares e^+e^- empiezan a aniquilarse, calentando el gas de fotones. Como los neutrinos ya están desacoplados su temperatura permanecerá siempre menor que la de los fotones.

$$T \equiv T_\gamma = \left(\frac{11}{4}\right)^{1/3} T_\nu \qquad (4)$$

A partir de este momento

$$\rho(T) = 1.42\times10^{-35}\,(T/K)^4 \text{ g cm}^{-3} \qquad t = 1.78\times10^{20}\left(\frac{K}{T}\right)^2 \text{ s.} \qquad (5)$$

$T = 10^9$ K ($k_B T = 0.0862$ MeV), la edad del Universo es $t = 178$ s y su densidad $\rho = 14.2$ g cm^{-3}
El Universo está, básicamente, formado por fotones a temperatura T y neutrinos y antineutrinos a temperatura $(4/11)^{1/3}T = 0.7138\,T$. Por cada 10^9 fotones hay un nucleón. De los nucleones un 13.7% son neutrones y el resto protones. Incluso a temperaturas superiores a esta, núcleos muy estables, como los de $^4_2$He podrían existir en equilibrio termodinámico, pero estos no se pueden formar aún. La razón es que la expansión del Universo es suficientemente rápida para que la formación de un núcleo complejo deba producirse a partir de los nucleones por procesos de colisión a dos partículas tales como

$$n + p \to d + \gamma \quad , \quad d + d \to {}^3He + n \leftrightarrow {}^3H + p$$
$$^3H + d \to {}^4He + n \qquad (6)$$

y al ser el deuterio muy poco estable no se pueden formar núcleos pesados. Sin embargo a $T = 8\times10^8$ K ($k_B T = 70$ KeV) el deuterio ya puede producirse y como consecuencia empieza la nucleosíntesis. En la práctica la inmensa mayoría de n quedan ligados en forma de ^{4}He y la abundancia primordial de este elemento, en peso, es

$$0.23 \leq Y \leq 0.27. \qquad (7)$$

A continuación el Universo continúa expansionándose y enfriándose. Está formado por fotones y neutrinos. Por cada 10^9 fotones hay un nucleón. Los nucleones están formando helio e hidrógeno, y los electrones, en número igual al de protones, están libres.

$T = 4000\,K$ ($k_B T = 0.345$ eV). Han transcurrido $t = 1.11 \times 10^{13}\,s = 350.000$ años. En este momento los electrones se unen a los núcleos y se forman, rápidamente, los átomos. Esto provoca una gran disminución de la opacidad del universo que se hace transparente a la radiación; la materia y la radiación se desacoplan y esto permite que empiecen a formarse galaxias y estrellas.

En la actualidad el Universo está formado

i) fotones: El gas de fotones que llena el Universo tiene las características de un cuerpo negro a $T = 2.7\,K$, según descubrieron A.A. Penzias y R.W. Wilson, en 1965. De acuerdo con la teoría del cuerpo negro su densidad es

$$\rho_\gamma = 2 \times 4.20896(60) \times 10^{-36} \frac{g}{cm^3} \left(\frac{T}{K}\right)^4 = 4.47 \times 10^{-34}\, g\, cm^{-3} \qquad (1)$$

$$n_\gamma = 2 \times 10.1432(11) \text{ fotones } cm^{-3} \left(\frac{T}{K}\right)^3 = 399 \text{ fotones}/cm^3$$

ii) neutrinos. El gas de neutrinos que llena el universo tiene temperatura de $T_\nu = (4/11)^{1/3}\, T = 1.93\,K$, pero no conocemos ningún método para detectarlo. Suponiendo que hay tres tipos de neutrinos y los correspondientes tipos de antineutrinos y que no tienen masa su densidad es

$$\rho_\nu = 6 \times \frac{7}{8} \times 4.20896(60) \times 10^{-36} \frac{g}{cm^3} \left(\frac{T}{K}\right)^4 = 3.07 \times 10^{-34}\, g\, cm^{-3} \qquad (2)$$

$$n_\nu = 6 \times \frac{3}{4} \times 10.1432(11)\ (\nu + \bar{\nu})/cm^3 \left(\frac{T}{K}\right)^3 = 328 \text{ neutrinos y antineutrinos}/cm^3$$

iii) Por cada 10^9 fotones hay un nucleón. La densidad de bariones observada en el Universo es

$$\rho_{B0} \approx 1.4 \times 10^{-31} h_0^2\, g\, cm^{-3} \qquad (3)$$

con lo cual podemos afirmar que el universo actual está dominado por la materia pues $\rho_{B0} \gg \rho_\gamma$. Fijémonos que $\rho_{B0} \simeq 0.03\, \rho_c$. Obviamente $\rho_0 > \rho_{B0}$ pero si bien se sospecha que $\rho_0 \simeq \rho_c$ no sabemos qué tipo de partículas son las causantes de esta materia oscura.