

UNIDADES ELECTROMAGNETICAS

1) Ley de Coulomb

Sistema de Gauss : $F = \frac{e_1 e_2}{r^2}$

Unidad : $1 \text{ statcoulomb} = g^{1/2} \text{ cm}^{3/2} \text{ s}^{-1}$

Sistema M.K.S. : $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e_1 e_2}{r^2}$, $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = \left(\frac{\text{C}}{10^9} \frac{\text{s}}{\text{m}} \right)^2 \times 10^9 \frac{\text{Newton m}^2}{\text{Coulomb}^2}$

Equivalencia $e_1 = e_2 = 1 \text{ Coulomb} = X \text{ statcoulomb}$, $r = 1 \text{ m} \Rightarrow F = \left(\frac{\text{C}}{10^9} \frac{\text{s}}{\text{m}} \right)^2 \times 10^9 \text{ Newton}$

$$\frac{X^2 \text{ statcoulomb}}{10^4 \text{ cm}^2} = \left(\frac{\text{C}}{10^9} \frac{\text{s}}{\text{m}} \right)^2 \times 10^9 \times 10^5 \text{ dinas}$$

$$1 \text{ coulomb} = \left(\frac{\text{C}}{10^9} \frac{\text{s}}{\text{m}} \right) \times 10^9 \text{ statcoulomb} = 2.99792458 \times 10^9 \text{ statcoulomb.}$$

2) Potencial

Sistema de Gauss : $W = q \phi$

Unidad : $1 \text{ statvolt} = g^{1/2} \text{ cm}^{1/2} \text{ s}^{-1}$

Sistema M.K.S. : $W = q \phi$

Unidad : $1 \text{ Volt} = \frac{1 \text{ Julio}}{1 \text{ Coulomb}} = \frac{10^7 \text{ erg.}}{\left(\frac{\text{C}}{10^9} \frac{\text{s}}{\text{m}} \right) \times 10^9 \text{ statcoulomb}} = \frac{1}{\left(\frac{\text{C}}{10^9} \frac{\text{s}}{\text{m}} \right) \times 10^2} \text{ statvolt}$

$$1 \text{ Volt} = \frac{1}{\left(\frac{\text{C}}{10^9} \frac{\text{s}}{\text{m}} \right) \times 10^2} \text{ statvolt} = \frac{1}{299.792458} \text{ statvolt.}$$

3) Resistencia.

Sistema de Gauss : $R = \frac{\phi}{I}$

Unidad : $1 \text{ cm}^{-1} \text{ s.}$

Sistema M.K.S. : $R = \frac{\phi}{I}$

Unidad : $1 \Omega = \frac{1 \text{ Volt}}{1 \text{ Ampere}}$

Equivalencia : $1 \Omega = \frac{1}{\left(\frac{\text{C}}{10^9} \frac{\text{s}}{\text{m}} \right) \times 10^2} g^{1/2} \text{ cm}^{1/2} \text{ s}^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{\text{C}}{10^9} \frac{\text{s}}{\text{m}} \right) \times 10^9} g^{1/2} \text{ cm}^{3/2} \text{ s}^{-2}$

36/002

$$1 \Omega = \frac{1}{\left(\frac{C}{10^9} \frac{s}{m}\right)^2 \times 10^{11}} \text{ cm}^{-1} \text{ s} = \frac{1}{8.98755179 \times 10^{11}} \text{ cm}^{-1} \text{ s}.$$

4) Capacidad

Sistema de Gauss $C = Q/\phi$

Unidad $1 \text{ cm}.$

Sistema MKS $C = Q/\phi$

Unidad $1 \text{ farad} = \frac{1 \text{ Coulomb}}{1 \text{ Volt}}$

Equivalencia

$$1 \text{ farad} = \left(\frac{C}{10^9} \frac{s}{m}\right) \times 10^9 \left(\frac{C}{10^9} \frac{s}{m}\right) \times 10^2 \text{ cm}$$

$$1 \text{ farad} = \left(\frac{C}{10^9} \frac{s}{m}\right)^2 \times 10^{11} \text{ cm} = 8.98755179 \times 10^{11} \text{ cm}.$$

5) Campo magnético

Sistema de Gauss: $\vec{F} = Q(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B})$

Unidad $1 \text{ gauss} = g^{1/2} \text{ cm}^{-1/2} \text{ s}^{-1}$

Sistema MKS: $\vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

Unidad $1 \text{ Tesla} = 1 \text{ Weber m}^{-2}$

Equivalencia:

$$1 \text{ Newton} = 1 \text{ Coulomb} \times 1 \frac{m}{s} \times 1 \text{ tesla}$$

$$10^5 \text{ dynes} = \left(\frac{C}{10^9} \frac{s}{m}\right) \times 10^9 g^{1/2} \text{ cm}^{3/2} \text{ s}^{-1} \cdot \frac{1}{c} 10^2 \cdot 1 \times \text{gauss} \Rightarrow x = 10^4$$

$$1 \text{ tesla} = 10^4 \text{ gauss}$$

1) Constante de estructura fina

$$\text{Sistema de Gauss} \quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$$

$$e = 4.803242 \times 10^{-10} \text{ g}^{1/2} \text{ cm}^{3/2} \text{ s}^{-1}, \quad \hbar = 1.0545887 \times 10^{-27} \text{ g cm}^2 \text{ s}^{-1}$$

$$c = 2.99792458 \times 10^{10} \text{ cm s}^{-1} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 1/137.03606$$

$$\alpha = 1/137.03604 (11)$$

$$\text{Sistema MKS} \quad \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\hbar c}$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = \left(\frac{\text{C}}{10^9} \frac{\text{S}}{\text{m}} \right)^2 \times 10^9 \frac{\text{Newton m}^2}{\text{Coulomb}^2}$$

$$e = 1.6021892 \times 10^{-19} \text{ Coulomb}$$

$$c = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

$$\hbar = 1.0545887 \times 10^{-34} \text{ Joule s}$$

$$\Rightarrow \alpha = 1/137.03604$$

2) Electromagnet

$$\vec{E} = e \phi = 1.6021892 (46) \times 10^{-19} \text{ Joule}$$

$$1 \text{ eV} = 1.6021892 (46) \times 10^{-19} \text{ Joule}$$

3) Magneton de Bohr

$$\mu_B = \frac{\hbar e}{2 m_e c}$$

$$m_e = 9.109534 \times 10^{-28} \text{ g}$$

$$\mu_B = 9.274078 \times 10^{-21} \text{ g}^{1/2} \text{ cm}^{5/2} \text{ s}^{-1} = 9.274078 \times 10^{-21} \text{ Gauss}^{-1} \text{ g cm}^2 \text{ s}^{-2}$$

$$= 9.274078 \times 10^{-21} \text{ Gauss}^{-1} \frac{1 \text{ eV}}{1.6021892 \times 10^{-12}} = 5.788379 \times 10^{-9} \text{ Gauss}^{-1} \text{ eV}$$

$$\mu_B = 5.7883785 (95) \times 10^{-9} \text{ Gauss}^{-1} \text{ eV}$$

ORDENES DE MAGNITUD

Motivación: Todo físico debe tener una contestación a preguntas tales como: ¿Cuál es el tamaño de un átomo? ¿Cuál es la masa de una estrella? Enrico Fermi ponía a sus estudiantes el siguiente problema: Estimar el número de faros que hay en Chicago. Veamos los ordenes de magnitud de algunos objetos.

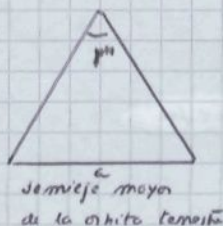
Longitudes: La unidad de longitud es el metro que se define como la longitud que recorre la luz en el vacío en un tiempo de $(1/2.997\,924\,58 \times 10^8) \text{ s}$. Unidades de uso frecuente son

$$1 \mu\text{m} = 10^{-6} \text{ m}, \quad 1 \text{ \AA} = 10^{-8} \text{ cm}, \quad 1 \text{ fermi} = 10^{-13} \text{ cm}. \quad (1)$$

$$1 \text{ Km} = 10^3 \text{ m}. \quad (2)$$

$$1 \text{ año luz} = c \times (\text{duración del año sidéreo}) = c \times 365.256 \text{ días} \times 86400 \frac{\text{s}}{\text{día}} = \\ = c \times 3.155\,812 \times 10^7 \text{ s} = 9.460\,886 \times 10^{17} \text{ cm}. \quad (3)$$

1 parsec



$$1 \text{ parsec} = \frac{a}{2 \sin (1''/2)} = \frac{1.496 \times 10^{13} \text{ cm}}{2 \times \sin (1''/2)}$$

$$1 \text{ parsec} = 3.086 \times 10^{18} \text{ cm} = 3.262 \text{ años luz} \quad (4)$$

Ordenes de magnitud:

Radio del protón: $1 \text{ fm} = 10^{-13} \text{ cm}$

Radio de los núcleos atómicos: $1 \text{ fm} = 10^{-13} \text{ cm}$

Radio de los átomos: $1 \text{ \AA} = 10^{-8} \text{ cm}$

Longitud de onda del visible: $5000 \text{ \AA} = 5 \times 10^{-5} \text{ cm}$

Tamaño de un hombre: $1.8 \text{ m} = 1.8 \times 10^2 \text{ cm}$

Radio de la Tierra: $6.400 \text{ Km} = 6.4 \times 10^8 \text{ cm}$

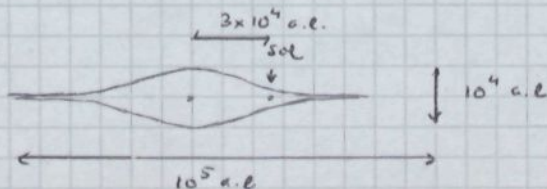
Distancia Tierra-Luna: $400.000 \text{ Km} = 4 \times 10^{10} \text{ cm}$

Radio del Sol: $700.000 \text{ Km} = 7 \times 10^{10} \text{ cm}$

Distancia Tierra-Sol: $150.000.000 \text{ Km} = 1.5 \times 10^{13} \text{ cm} = 8.3 \text{ minutos luz}$

Distancia Tierra-estrella más cercana (α Centauri) $\approx 4.26 \text{ años luz} \approx 4.0 \times 10^{18} \text{ cm}$

Nuestra Galaxia



36/002

Distancia a la galaxia más cercana (Andrómeda) $\approx 2.2 \times 10^6 \text{ a.l.} = 2.1 \times 10^{24} \text{ cm}$

Objetos más lejanos $\approx 10^{10} \text{ a.l.} \approx 10^{28} \text{ cm}$.

Medida de longitudes pequeñas. Es fácil dividir 1 m en 1000 partes iguales y con ayuda de un buen microscopio dividir 1 mm en 1000 partes iguales y así obtenemos $1 \mu\text{m} = 10^{-6} \text{ m} = 10^{-4} \text{ cm} = 10.000 \text{ Å}$. Sin embargo no se puede ir mucho más allá con microscopios normales pues para la luz visible

$$(\text{violeta}) \quad 4 \times 10^{-5} \text{ cm} = 4000 \text{ Å} \approx \lambda \approx 7500 \text{ Å} = 7.5 \times 10^{-5} \text{ cm} \quad (\text{rojo}) \quad (5)$$

con luz de longitud de onda λ no se pueden observar detalles que tengan tamaño $\frac{1}{2}\lambda$.

Si deseamos medir objetos de un tamaño de menosísimas longitudes de onda de tamaño $\lambda \approx d$. Louis de Broglie, en 1923, postuló que toda partícula de momento p tiene asociada una onda cuya longitud de onda es

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (6)$$

$$\text{Como } cp = \sqrt{E^2 - m^2 c^4}$$

$$\lambda = \frac{2\pi \hbar c}{E} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{m^2 c^4}{E^2}}} = \frac{1239.8520(32) \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{E \sqrt{1 - \frac{m^2 c^4}{E^2}}} \quad (7)$$

pues

$$\hbar = 6.582173(17) \times 10^{-22} \text{ MeV} \cdot \text{s} \quad c = 2.99792458 \times 10^{10} \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$$

En los microscopios electrónicos normales se emplean haces de electrones en lugar de fotones y las lentes normales se sustituyen por lentes electromagnéticas. Dificultades técnicas no permiten ver cosas de tamaños menores que unos 60 Å . Deben siempre funcionar con elvendo nuevo. Hay microscopios electrónicos basados en efecto túnel en los que se puede ver hasta tamaño de unos pocos Å.

Con aceleradores de electrones ($m_e c^2 = 0.5110034(14) \text{ MeV}$)

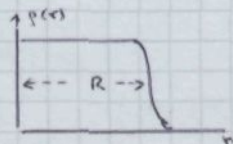
$$E = 10^2 \text{ MeV} \quad \lambda = 12.4 \text{ fm}$$

$$E = 1 \text{ GeV} = 10^3 \text{ MeV} \quad \lambda = 1.24 \text{ fm}$$

$$E = 10 \text{ GeV} = 10^4 \text{ MeV} \quad \lambda = 0.124 \text{ fm}$$

$$E = 100 \text{ GeV} = 10^5 \text{ MeV} \quad \lambda = 0.0124 \text{ fm}.$$

Estructura nuclear



$$R = 1.25 A^{1/3} \text{ fm}.$$

cuando decimos que una partícula es elemental lo único que afirmamos es que con las energías disponibles hoy día no vemos que tenga estructura. El límite actual es de unos $10^{-3} \text{ fm.} \approx 10^{-16} \text{ cm.}$

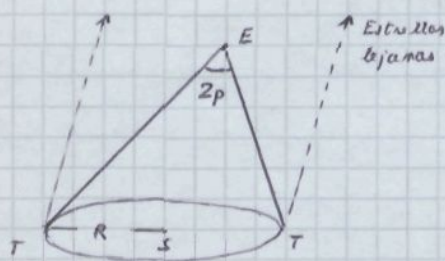
Medida de longitudes grandes.

La distancia Tierra - Luna se puede medir con gran precisión mediante técnicas de rayos laser. Así mismo se puede medir la distancia Tierra - Sol mediante métodos geométricos que tienen su base en una medida directa; también por métodos dinámicos basados en la ley de la gravitación universal, así como por métodos físicos basados en la propagación de ondas de radar. La distancia medida es

$$R = 149\,598\,500 (\pm 500) \text{ Km}$$

(1)

Estrellas cercanas. De acuerdo con la figura es posible medir el paralaje, p , para



estrellas cercanas. Se pueden medir paralajes para $p > 0.01''$.

La distancia d de la estrella es $d = \frac{R}{p}$ donde p se debe poner en radianes. Si p se expresa en segundos

$$d = \frac{180 \times 60 \times 60}{p_{\text{seg}}} \frac{R}{p_{\text{seg}}} = \frac{3.2615}{p_{\text{seg}}} \text{ años luz.} \quad (2)$$

Todas las estrellas tienen $p < 1''$ y las más lejanas medibles en este procedimiento están a $d \approx 300$ años luz. Hay unas 6000 estrellas cuya distancia se puede medir en este procedimiento y de ellas solo 700 la distancia se puede medir con precisión mejor que al 10%.

Magnitudes estelares: Al mirar al cielo vemos estrellas más o menos brillantes. Definimos, arbitrariamente, que la estrella Polar tiene magnitud aparente +2. Decimos que una estrella es de primera magnitud si es exactamente 100 veces más brillante que una de sexta magnitud. (Olvidaremos aquí los problemas espectrales). Designemos por b_i el brillo aparente de una estrella de magnitud i . Sea $a \equiv b_i / b_{i+1}$, entonces

$$\frac{b_1}{b_2} \frac{b_2}{b_3} \frac{b_3}{b_4} \frac{b_4}{b_5} \frac{b_5}{b_6} = \frac{b_1}{b_6} = 100 \Rightarrow a^5 = 10^2 \quad a = 10^{2/5}$$

$$a = 10^{2/5} = 2.511886432..$$

$$\frac{b_m}{b_n} = 10^{\frac{2}{5}(m-m_2)}$$

(3)

36/002

Las magnitudes aparentes son

$$m_{\odot} = -26.78$$

$$m(\text{Luna llena}) = -12.6$$

$$m(\text{Venus}) \approx m(\text{Júpiter}) \approx -4$$

$$m(\text{Sirio}) = -1.5$$

$m \approx +24$ son las estrellas más débiles que se pueden detectar

Las magnitudes aparentes dependen de: i) Características de la estrella

ii) Distancia de la estrella

Magnitud absoluta: Elimina el segundo factor. La magnitud absoluta de una estrella se define como la magnitud aparente que tendría la estrella si se colocara a una distancia de 10 parsec.

Brillo: El brillo aparente de una estrella varía inmensamente con el cuadrado de la distancia, pues la luz se mueve isotrópicamente y se reparte sobre esferas concéntricas con la estrella. Sean m y b_m la magnitud y brillo aparente de una estrella y M y b_M su magnitud y brillo absolutos. Sea d la distancia de la estrella medida en parsec., entonces

$$\frac{b_m}{b_M} = \left(\frac{10}{d} \right)^2$$

Como

$$\frac{b_m}{b_M} = 10^{\frac{2}{5}(M-m)}$$

se tiene

$$10^{\frac{2}{5}(M-m)} = \left(\frac{10}{d} \right)^2 \quad \frac{2}{5}(M-m) = 2 \log_{10} \frac{10}{d}$$

$$M = m + 5 - 5 \log_{10} d$$

$$d = 10^{1 - \frac{1}{5}(M-m)}$$

d en parsec

(4)

$$\text{Sol } m = -26.78, \quad d = 4.858 \times 10^{-6} \text{ parsec} \Rightarrow M = 4.792$$

$$\text{Luminosidad Sol } L_{\odot} = 3.90 (4) \times 10^{33} \text{ erg s}^{-1}$$

Constante solar: Energía que llega en un segundo y en cm^2 a la parte alta de

la atmósfera $L_{\odot} / 4\pi R^2 = 1.39 \times 10^6 \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$. Se puede medir y de aquí deducir

un $L_{\odot}$. El albedo de la Tierra es de, aproximadamente, 0.5 y por tanto

la energía que por cm^2 y segundo llega a la superficie terrestre es $0.7 \times 10^6 \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$.

Paralaje espectroscópica. Cada tipo de estrella da origen a un espectro de luz que la caracteriza en gran parte. Estudiando las características de su espectro, podemos saber el tipo de estrella y averiguar el valor de M ; si además podemos medir m , entonces la distancia es

$$d = 10^{(m - M + 5)/5} \quad (\text{en parsecs}) \quad (1)$$

Se cometen errores del orden del 15% y el método sólo es aplicable a $d \lesssim 10^5$ años-luz, pues a distancias mayores es difícil determinar m o ver las estrellas individualmente, en general.

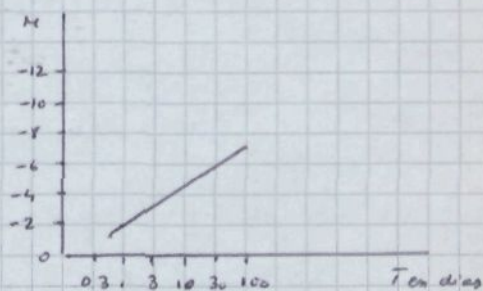
Cúmulos estelares: En nuestra galaxia se han observado unos 150 cúmulos estelares y éstos también son abundantes en otras galaxias. Característicamente un cúmulo tiene $L \lesssim 10^6 L_\odot$. Si suponemos que los cúmulos estelares tienen las mismas magnitudes absolutas en todas las galaxias, que las magnitudes absolutas de los cúmulos estelares en nuestra galaxia y en otras galaxias coinciden, observando la magnitud aparente de estos cúmulos más brillantes se determina su distancia. El método funciona hasta $d \lesssim 3 \times 10^7$ años luz.

Cefeidas: Son estrellas muy brillantes y pulsantes.

Se ha observado que existe una relación lineal entre su magnitud absoluta y el logaritmo de su periodo.

Esto permite fijar M conociendo T . Funciona hasta

distancias a $d \lesssim 10^7$ a.l. Hay algunas complicaciones debidas a distintos tipos de cefeidas.



Supernovas: Son estrellas en las últimas fases de su evolución y que presentan un rápido incremento en su luminosidad y en el pico pueden ser tan brillantes como nuestra galaxia (Luminosidad de nuestra galaxia $\approx 10^{44} \text{ erg s}^{-1} \approx 2.5 \times 10^{10} L_\odot$). Si se supone que en el punto de máxima luminosidad todas las supernovas tienen la misma luminosidad, la aparición de una supernova en una galaxia permite determinar la distancia de ésta. El método funciona para $d \lesssim 5 \times 10^7$ a.l.

Galaxias: Si se supone, de acuerdo con la evidencia experimental, que las galaxias más brillantes de nuestra vecindad son de un brillo igual a las más brillantes de otros partes del Universo y que por otra parte en un cúmulo de galaxias casi siempre se encuentra que la más brillante, dentro de un factor dos, es una galaxia gigante elíptica con $L \approx 10^{45} \text{ erg s}^{-1}$, entonces se pueden usar estas para determinar

36/002

distancias de galaxias hasta $d \leq 10^9$ a.l.

En el siglo XVIII Olbers enunció su famosa paradoja: si el espacio es infinito y está poblado uniformemente de estrellas que están en reposo, el cielo entero debe brillar como la superficie del sol. El carácter estático del universo era creído firmemente incluso a principios de nuestro siglo.

En 1928 Hubble observó que había una relación entre la distancia a una galaxia y su velocidad de recesión. A partir de unos pocos datos experimentales intuyó que

$$\text{velocidad de recesión } v = H_0 d \quad H: \text{cte de Hubble}$$

(2)

$$d = \frac{v}{H_0} = \frac{c}{H_0} \frac{v}{c}$$

Esta fórmula es válida solo para $v \ll c$. En general se tiene

$$d = \frac{c}{H_0} \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$$

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}} - 1 \approx \frac{v}{c} + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{1}{2} \frac{v^3}{c^3} + \dots$$

(3)

$$H_0 = 50 \text{ km s}^{-1} \text{ Megaparsec}^{-1}$$

El error en H es del orden de (± 25) . Midiendo el corrimiento hacia el rojo $\Delta\lambda/\lambda$ se puede determinar d . Existen objetos, los llamados cuasares de radiofrecuencia no bien comprendida, con $\Delta\lambda/\lambda \approx 3$ y por tanto a distancias de $d = 3.9 \times 10^{10}$ a.l.

El universo empezó con un Big Bang inicial. ¿En que instante T todas las galaxias estaban juntas? Si suponemos que H ha permanecido siempre constante entonces

$$T = \frac{1}{H_0} = 3.7 \times 10^{17} \text{ s} = 2.4 \times 10^{10} \text{ años}$$

(4)

En realidad la edad del universo debe ser algo ~~mayor~~ que T pues las fuerzas gravitacionales tienden a frenar la expansión.

Tiempo: La unidad básica es el segundo que es la duración de 9192 631 770 ciclos de la radiación correspondiente a la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de cesio 133.

$$1 \text{ día} = 8.64 \times 10^4 \text{ s}$$

$$1 \text{ año sideral} = 365.256 \text{ días} = 3.155 812 \times 10^7 \text{ s}$$

Vida media: Consideremos una determinada muestra de un material radiactivo de partículas elementales. Sea N_0 el número de partículas en el instante $t=0$, y designemos por $N(t)$ el número de partículas que aún quedan en el instante t . Se observa que el número de partículas que se desintegran en un tiempo Δt es proporcional al número de partículas de la muestra que aún no se han desintegrado.

$$\Delta N \equiv N(t + \Delta t) - N(t) = -\lambda N(t) \Delta t, \quad \lambda \geq 0, \quad \lambda = \text{const. radiactiva}, \quad \Delta t \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t) \quad \Rightarrow \quad N(t) = A e^{-\lambda t}$$

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \equiv N_0 e^{-t/\tau} \quad (1)$$

$$\tau \equiv \frac{1}{\lambda} = \text{vida media.}$$

Ordenes de magnitud

Vida media de una resonancia $\approx 10^{-24} \text{ s.} - 10^{-22} \text{ s.}$

Vida media del n^0 $0.87(4) \times 10^{-16} \text{ s.}$

Vida media del n^+ $2.6020(23) \times 10^{-8} \text{ s.}$

Vida media del neutrón $(898 \pm 16) \text{ s.}$

1 hora = $3.6 \times 10^3 \text{ s.}$

1 día = $8.64 \times 10^4 \text{ s.}$

Año sideral medio = $365.256 \text{ días} = 3.155812 \times 10^7 \text{ s.}$

Nuestra era 1987 años = $6.27 \times 10^{10} \text{ s.}$

Primer homínido $2 \times 10^6 \text{ años} = 6.3 \times 10^{13} \text{ s.}$

Edad de la corteza terrestre $\approx 4.5 \times 10^9 \text{ años} = 1.4 \times 10^{17} \text{ s.}$ La Tierra es unos 10^9 años más vieja.

Edad del Universo $\approx 2 \times 10^{10} \text{ años} \approx 6.3 \times 10^{17} \text{ s.}$

Vida media del electrón $\gg 2 \times 10^{22} \text{ años} \approx 6.3 \times 10^{29} \text{ s.}$

Vida media del protón $> 10^{30} \text{ años} \approx 3 \times 10^{37} \text{ s.}$

Medida de vidas medias de resonancias: Las resonancias son partículas que se desintegran mediante las interacciones fuertes. La mecánica cuántica nos dice que si en un sistema es necesario que transcurra un tiempo Δt para que podamos observar un cambio en el mismo, entonces la energía del sistema queda indeterminada en una cantidad ΔE tal que

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar$$

36/002

En las resonancias se encuentra que $\Gamma \approx \Delta (mc^2) \sim 1 - 100 \text{ MeV}$ y la vida media se define como

$$\tau = \frac{\hbar}{\Gamma} = \frac{6.582 \, 173 \, (17) \times 10^{-22} \text{ MeV s}}{\Gamma} \quad \Gamma = \text{anchura} \quad (3)$$

Este límite con en $\Delta (mc^2)$ caso de importancia para las otras partículas

$$\tau_{\pi^+} = 2.6030 \, (23) \times 10^{-8} \text{ s} \quad \Rightarrow \quad \Delta^+ = 2.53 \times 10^{-14} \text{ MeV} \quad m_{\pi^+} c^2 = 139.5685 \, (10) \text{ MeV}$$

Para las partículas que se desintegran electromagnética o débilmente sus vidas medias pueden, en general, medirse directamente. Muchas de ellas se miden, esquemáticamente, de la siguiente forma: se usa una partícula con energía conocida y su tanto se moverá con una velocidad determinada. Así recorrerá un cierto espacio antes de desintegrarse. De la longitud media de los recorridos de muchas partículas idénticas se puede sacar la vida media. Mediante técnicas electrónicas modernas se pueden medir tiempos del orden del picosegundo.

Medida de tiempos largos: Objetos muy antiguos, la edad de la corteza terrestre, ... se mide la edad mediante el estudio de la abundancia de algunos radioisótopos.

Masa: La unidad fundamental es el Kilogramo que es la masa de un cilindro de aleación de iridio y platino que se conserva en la Oficina Internacional de Pesos y Medidas de París.

$$\frac{1 \text{ MeV}}{c^2} = 1.782 \, 675 \, 9 \, (51) \times 10^{-27} \text{ g} \quad (4)$$

$$\text{masa del fotón} < 3 \times 10^{-33} \text{ MeV}/c^2 = 5 \times 10^{-60} \text{ g}$$

$$\text{masa del electrón} \approx 0.511 \text{ MeV}/c^2 = 9.11 \times 10^{-28} \text{ g}$$

$$\text{masa del protón} \approx 938 \text{ MeV}/c^2 \approx 1.67 \times 10^{-24} \text{ g}$$

$$\text{masa de un átomo} \approx 1.7 \times 10^{-24} \text{ A g}$$

$$\text{masa de un hombre} \approx 80 \text{ Kg} \approx 8 \times 10^4 \text{ g}$$

$$\text{masa de la Tierra} \approx 5.997 \times 10^{27} \text{ g}$$

$$\text{masa Júpiter} \approx 317.45 \times \text{Masa Tierra} \approx 1.904 \times 10^{30} \text{ g}$$

Masa sol $\approx 1.989 \times 10^{33} \text{ g}$. Todas las estrellas tienen masas parecidas. Si fueran mucho más pequeñas no serían estrellas y si fueran mucho mayores habría poca estabilidad.

$$\text{masa de nuestra galaxia} \approx 3 \times 10^{11} M_{\odot} \approx 6 \times 10^{44} \text{ g}$$

Densidad media del universo: En las teorías cosmológicas modernas existe una densidad crítica

$$\rho_c = \frac{3 H_0^2}{8\pi G} = 4.6 \times 10^{-30} \text{ g cm}^{-3} \quad (1)$$

Si la densidad actual del universo es $\rho_0 > \rho_c$, entonces el universo es cerrado y después de la etapa actual de expansión tendrá que colapsar. Si $\rho_0 \leq \rho_c$ el universo continuará expandiéndose indefinidamente y es infinito. En particular si $\rho_0 = \rho_c$ el universo es plano. Si definimos

$$\Omega_0 \equiv \frac{\rho_0}{\rho_c} \quad (2)$$

entonces teniendo en cuenta las galaxias que observamos se encuentra que $\Omega_0 \approx 0.03$, mientras que límites conservadores del parámetro de desaceleración implican que $\Omega_0 \leq 4$. Todo parece sugerir que a nivel cósmico, así como también a nivel galáctico, falta masa en el universo. Parece ser que hay masa no visible en forma de galaxias y no sabemos qué tipo de partículas son responsables de esta masa que falta.

TRATAMIENTO DE DATOS

Notas del P.R. Bennington "Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences"

Mac Graw-Hill 1969

Si se hubiera un número infinito de medidas, entonces podríamos describir la forma en que, los puntos correspondientes a los datos observados, se hallan distribuidos. Esto no es posible en la práctica, pero podemos suponer la existencia de una distribución de probabilidad que determine la probabilidad de obtener un cierto valor en un proceso de medida. Esta distribución es lo llamada "parent distribution" (p.d.). Igualmente, podemos suponer que las medidas que se han realizado son muestras de un número infinito de medidas que están distribuidas de acuerdo con la p.d. Esta colección de un número infinito de medidas se llama "parent population" (p.p.).

$$\text{Valor esperado } \langle \rangle : \langle f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) P(x) \quad (1)$$

$$\text{Mediana } \mu_{1/2} : P(x_i \leq \mu_{1/2}) = P(x_i \geq \mu_{1/2}) = \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\text{Valor más probable } \mu_{\max} : P(\mu_{\max}) \geq P(x \neq \mu_{\max}) \quad (3)$$

$$\text{Moda } \mu : \mu \equiv \langle x \rangle \quad (4)$$

$$\text{Desviación media } \alpha : \alpha \equiv \langle |x_i - \mu| \rangle \quad (5)$$

$$\text{Varianza } \sigma^2 : \sigma^2 \equiv \langle (x - \mu)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \mu^2 \quad (6)$$

$$\text{Desviación standard } \sigma : \sigma = \sqrt{\sigma^2} \quad (7)$$

$$\text{Valor medio } \bar{x} : \bar{x} \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \text{ esta es la mejor estimación de la media de la p.d. (8)}$$

$$\text{Desviación cuadrática media } s^2 : s^2 \equiv \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2, \text{ esta es la mejor estimación de la varianza de la p.d.} \quad (9)$$

$$\text{Momento de orden } m : \langle x^m \rangle \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dx x^m P(x) \quad (10)$$

$$\text{Función generatriz : } g(\alpha) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dx \alpha^x P(x) \quad (11)$$

$$g(\alpha) \Big|_{\alpha=1} = 1 \quad \frac{d g(\alpha)}{d \alpha} \Big|_{\alpha=1} = \langle x \rangle \quad (12)$$

$$\frac{d^2 g(\alpha)}{d \alpha^2} \Big|_{\alpha=1} = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \quad (13)$$

36/002

Distribución binómica: Describe la probabilidad de observar x sucesos en n intentos, cuando la probabilidad de un suceso es p

$$P_B(x; n; p) = \frac{n!}{x! (n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$g_B(x) = [p^x + (1-p)^x]^n \quad (14)$$

$$\mu = n p, \quad \sigma^2 = n p (1-p)$$

Distribución de Poisson: Es el caso límite de una distribución binómica para grandes n y valor de μ constante; es apropiada para describir muestras pequeñas de grandes distribuciones

$$P_P(x, \mu) = \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu}$$

$$g_P(x) = \sum_{x=0}^{\infty} x^x \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu} = e^{\mu(x-1)} \quad (15)$$

$$\mu = \mu, \quad \sigma^2 = \mu$$

Distribución gaussiana: Es el límite de una distribución binómica para grandes n y para p finito; es apropiada para distribuciones suaves y simétricas

$$P_G(x; \mu; \sigma) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2}$$

$$g_G(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, x^x e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2} = \frac{\sigma^\mu}{\Gamma(\mu)} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \, y^{\mu-1} e^{-y^2} \quad (16)$$

Distribución de Lorentz

$$P_L(x; \mu; \Gamma) = \frac{1}{\Gamma} \frac{(\Gamma/2)}{(x-\mu)^2 + (\Gamma/2)^2} \quad (17)$$

Propagación de errores: Supongamos que queremos determinar una cantidad x que es función de dos variables u y v que son las que realmente se miden y que $x = f(u, v)$. Aunque no sea siempre exacto, supondremos que el valor más probable de x es

$$\bar{x} = f(\bar{u}, \bar{v}) \quad (1)$$

La incertidumbre en el valor de $\bar{x}$ puede hallarse considerando las medidas individuales u_i, v_i ($i = 1, \dots, N$) combinadas con $x_i \equiv f(u_i, v_i)$. En el límite de infinitas medidas

$$\sigma_x^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \quad (2)$$

de donde

$$\sigma_x^2 = \sigma_u^2 \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)_{u=\bar{u}, v=\bar{v}}^2 + \sigma_v^2 \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)_{u=\bar{u}, v=\bar{v}}^2 + 2\sigma_{uv} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)_{u=\bar{u}, v=\bar{v}} \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)_{u=\bar{u}, v=\bar{v}} \quad (3)$$

$$\sigma_u^2 \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (u_i - \bar{u})^2, \quad \sigma_v^2 \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (v_i - \bar{v})^2$$

$$\sigma_{uv} \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v}) \quad \text{que es nula para medidas no correlacionadas}$$

Casos particulares

- 1) $x = au + bv$, $\sigma_x^2 = a^2 \sigma_u^2 + b^2 \sigma_v^2 \pm 2ab \sigma_{uv}$
- 2) $x = auv$, $\sigma_x^2 / \bar{x}^2 = \sigma_u^2 / \bar{u}^2 + \sigma_v^2 / \bar{v}^2 + 2\sigma_{uv} / \bar{u}\bar{v}$
- 3) $x = au/v$, $\sigma_x^2 / \bar{x}^2 = \sigma_u^2 / \bar{u}^2 + \sigma_v^2 / \bar{v}^2 - 2\sigma_{uv} / \bar{u}\bar{v}$
- 4) $x = au^b$, $\sigma_x / \bar{x} = |b| \sigma_u / \bar{u}$
- 5) $x = ae^{bu}$, $\sigma_x / \bar{x} = |b| \sigma_u$
- 6) $x = a \ln(bu)$, $\sigma_x = |a| \frac{\sigma_u}{\bar{u}}$

Estimación de la media y errores. Si asignamos a cada dato x_i su propia desviación standard σ_i el valor más probable de la media $\bar{x}$ y de la varianza son

$$\bar{x} = \frac{\sum (x_i / \sigma_i^2)}{\sum (1 / \sigma_i^2)} \xrightarrow{\sigma_i \equiv \sigma} \frac{1}{N} \sum x_i \quad (5)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{\sum (1 / \sigma_i^2)} \xrightarrow{\sigma_i \equiv \sigma} \frac{\sigma^2}{N} \quad (6)$$

36/002

Test de χ^2 : la comparación de la distribución de frecuencias observada $f(x_i)$ de posibles observaciones x_i versus la distribución prueba $NP(x_i)$ donde N es el número de datos y $P(x_i)$ la probabilidad de distribución teórica se puede hacer con

$$\chi^2 \equiv \sum_{i=1}^N \frac{[f(x_i) - NP(x_i)]^2}{NP(x_i)} \quad (7)$$

Indicaremos por ν el número de grados de libertad definidos como la diferencia entre el número de puntos N menos el número de parámetros determinados por estos datos. El valor reducido de χ^2 se define como $\chi_\nu^2 \equiv \chi^2/\nu$. Para que el test sea bueno $\chi_\nu^2 \approx 1$.

Ajuste por mínimos cuadrados de una recta. Nuestros datos consisten de N pares de medidas (x_i, y_i) de una variable independiente x y de una dependiente y . Queremos ajustar los datos mediante una ecuación de la forma

$$y = a_0 + a_1 x \quad (8)$$

Supondremos que podemos adscribir toda la incertidumbre de la medida al parámetro dependiente y que σ_i es la desviación estándar de y_i . Entonces

$$\chi^2 = \sum_i \frac{1}{\sigma_i^2} [y_i - a_0 - a_1 x_i]^2 \quad (9)$$

y el ajuste por mínimos cuadrados consiste en minimizar χ^2 con respecto a cada uno de los coeficientes simultáneamente. Si introducimos

$$\langle A \rangle \equiv \sum \frac{A_i}{\sigma_i^2} \quad (10)$$

entonces

$$a_0 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \langle y \rangle & \langle x \rangle \\ \langle yx \rangle & \langle x^2 \rangle \end{vmatrix}, \quad a_1 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \langle 1 \rangle & \langle y \rangle \\ \langle x \rangle & \langle yx \rangle \end{vmatrix} \quad (11)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \langle 1 \rangle & \langle x \rangle \\ \langle x \rangle & \langle x^2 \rangle \end{vmatrix}$$

y la incertidumbre en los coeficientes son

$$\sigma_{a_0}^2 = \frac{1}{\Delta} \langle x^2 \rangle, \quad \sigma_{a_1}^2 = \frac{1}{\Delta} \langle 1 \rangle \quad (12)$$

Ajuste por mínimos cuadrados de un polinomio

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m \quad (1)$$

entonces si

$$\Delta = \begin{vmatrix} \langle 1 \rangle & \langle x \rangle & \langle x^2 \rangle & \dots & \langle x^m \rangle \\ \langle x \rangle & \langle x^2 \rangle & \langle x^3 \rangle & \dots & \langle x^{m+1} \rangle \\ \langle x^2 \rangle & \langle x^3 \rangle & \langle x^4 \rangle & \dots & \langle x^{m+2} \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle x^m \rangle & \langle x^{m+1} \rangle & \langle x^{m+2} \rangle & \dots & \langle x^{2m} \rangle \end{vmatrix} \quad (2)$$

los coeficientes son

$$a_0 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \langle y \rangle & \langle x \rangle & \langle x^2 \rangle & \dots & \langle x^m \rangle \\ \langle yx \rangle & \langle x^2 \rangle & \langle x^3 \rangle & \dots & \langle x^{m+1} \rangle \\ \langle yx^2 \rangle & \langle x^3 \rangle & \langle x^4 \rangle & \dots & \langle x^{m+2} \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle yx^m \rangle & \langle x^{m+1} \rangle & \langle x^{m+2} \rangle & \dots & \langle x^{2m} \rangle \end{vmatrix} \quad (3)$$

El coeficiente a_j viene dado reemplazando en Δ la columna $j+1$ por la primera de a_0 y dividiendo por Δ .

MEDIOS MATERIALES

Nosotros hemos hablado de las ecuaciones de Maxwell en el vacío y hemos visto que una distribución de cargas caracterizada por la densidad de carga $\rho(\vec{x}; t)$ y de densidad de corriente $\vec{J}(\vec{x}; t)$ crea un campo electromagnético, que podrá caracterizarse mediante los vectores $\vec{E}(\vec{x}; t)$ y $\vec{B}(\vec{x}; t)$, que llamaremos campo eléctrico y magnético, respectivamente, y que podrán ser calculados a partir de las ecuaciones de Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}; t) = 4\pi \rho(\vec{x}; t) \quad , \quad \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}; t) = \frac{4\pi}{c} \vec{J}(\vec{x}; t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}(\vec{x}; t)}{\partial t} \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{x}; t) = 0 \quad , \quad \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}; t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}(\vec{x}; t)}{\partial t} = 0$$

Para un pequeño número de fuentes la determinación del campo electromagnético es un problema tratable, pero para grandes aglomerados de materia la resolución de las ecuaciones de Maxwell es imposible. Hay dos aspectos importantes al considerar medios materiales macroscópicos:

- i) El número de partículas individuales, las partículas cargadas en cada átomo o molécula, es prohibitivamente alto.
- ii) Para observaciones macroscópicas el comportamiento detallado de los campos, con sus variaciones drásticas sobre las pequeñas distancias interatómicas, es irrelevante. Lo único relevante es el promedio del campo o de la fuente sobre un volumen grande comparado con el volumen ocupado por un único átomo o molécula.

La forma usual de proceder es escribir las ecuaciones de Maxwell en el vacío, teniendo en cuenta todas las cargas y corrientes del problema, y promediarlas espacialmente sobre regiones del tamaño de unos $100 \text{ \AA}$. Se puede pensar que el resultado final es

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{x}; t) &= 4\pi \rho(\vec{x}; t) & \vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{x}; t) &= \frac{4\pi}{c} \vec{J}(\vec{x}; t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}(\vec{x}; t)}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{x}; t) &= 0 & \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}; t) &+ \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}(\vec{x}; t)}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

donde ahora $\vec{E}(\vec{x}; t)$ y $\vec{B}(\vec{x}; t)$ son los promedios de los campos microscópicos y se les suele llamar campo eléctrico macroscópico e inducción magnética macroscópica, respectivamente. Los dos nuevos campos auxiliares $\vec{D}(\vec{x}; t)$ y $\vec{H}(\vec{x}; t)$, que se les llaman desplazamiento eléctrico y campo magnético, respectivamente. Las densidades $\rho(\vec{x}; t)$ y $\vec{J}(\vec{x}; t)$ representan ahora sólo las densidades macroscópicas de carga y corrientes "libres" en el medio, ya que es puramente el intento de eliminar las cargas

36/002

y corrientes ligadas lo que nos ha llevado a introducir $\vec{D}(\vec{x}; t)$ y $\vec{H}(\vec{x}; t)$. Pueden introducirse la polarización y magnetización medias del medio $\vec{P}(\vec{x}; t)$ y $\vec{M}(\vec{x}; t)$, respectivamente, mediante las relaciones

$$\vec{D}(\vec{x}; t) = \vec{E}(\vec{x}; t) + 4\pi \vec{P}(\vec{x}; t) \quad , \quad \vec{H}(\vec{x}; t) = \vec{B}(\vec{x}; t) - 4\pi \vec{M}(\vec{x}; t) \quad (3)$$

Evidentemente en las zonas externas al medio material $\vec{D} = \vec{E}$ y $\vec{H} = \vec{B}$ y entonces $\vec{P} = \vec{M} = 0$.

Las ecuaciones de Maxwell (2) son, ahora, ocho ecuaciones para determinar cuatro campos: $\vec{E}$, $\vec{D}$, $\vec{B}$, $\vec{H}$. Las ecuaciones homogéneas pueden ser resueltas formalmente expresando $\vec{E}$ y $\vec{B}$ en términos del potencial escalar ϕ y del potencial vector $\vec{A}$; para resolver las ecuaciones homogéneas es necesario conocer $\vec{D}$ y $\vec{H}$ en términos de $\vec{E}$ y $\vec{B}$. Estas ecuaciones son las llamadas ecuaciones constitutivas del medio:

$$\vec{D} = \vec{D}[\vec{E}, \vec{B}] \quad , \quad \vec{H} = \vec{H}[\vec{E}, \vec{B}] \quad (4)$$

Las paréntesis cuadrados significan que estas conexiones no son necesariamente simples; pueden no ser lineales, pueden depender de la historia de la sustancia (fenómenos de histéresis) y el estudio de las mismas constituye un capítulo importante del estado sólido.

En sustancias que no sean ferrodélicas o ferromagnéticas (en la que la historia de la muestra es importante) y para campos aplicados suficientemente débiles, la presencia de un campo eléctrico o de un campo magnético induce, respectivamente, una polarización o una magnetización que es una función lineal del campo aplicado. Si para simplificar suponemos el medio homogéneo e isotrópico esto significa en particular que

$$\vec{D}(\vec{x}; t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3x' dt' \delta(\vec{x} - \vec{x}'; t - t') \vec{E}(\vec{x}'; t') \quad (5)$$

Analizando Fourier y usando

$$f(\vec{x}; t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3k d\omega \hat{f}(\vec{k}; \omega) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\omega t} \quad (6)$$

se obtiene inmediatamente que

$$\vec{D}(\vec{k}; \omega) = \hat{\epsilon}(\vec{k}; \omega) \vec{E}(\vec{k}; \omega) \quad (7)$$

Si $\vec{E}(\vec{x}; t)$ es tal que los momentos y frecuencias que aparecen en su análisis de Fourier se hallan limitados a zonas tales que en ellas se pueda considerar $\hat{\epsilon}(\vec{k}; \omega)$ prácticamente constante, entonces también se puede escribir

$$\vec{D}(\vec{x}; t) = \epsilon \vec{E}(\vec{x}; t) \quad (1)$$

donde $\epsilon \equiv \hat{\epsilon}(\vec{k}_m; \omega_m)$, siendo $\vec{k}_m$ y ω_m los momentos y frecuencias medias del paquete. La constante adimensional ϵ se suele llamar constante dieléctrica.

Para luz visible o para radiaciones electromagnéticas de longitud de onda aún mayor, suele ser una buena aproximación despreciar la no localidad espacial de $\epsilon(\vec{x}; t)$ y esto implica que $\hat{\epsilon}(\vec{k}; \omega) \equiv \hat{\epsilon}(\omega)$.

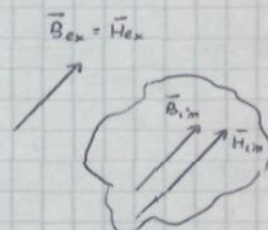
Resumiendo, si las condiciones anteriores se cumplen, las ecuaciones constitutivas del medio se pueden escribir como

$$\vec{D}(\vec{x}; t) = \epsilon \vec{E}(\vec{x}; t) \quad ; \quad \vec{H}(\vec{x}; t) = \mu^{-1} \vec{B}(\vec{x}; t) \quad (2)$$

donde ϵ es la constante dieléctrica y $\mu \equiv 1/\mu'$ es la permeabilidad magnética del medio. Evidentemente en el vacío $\epsilon = \mu = 1$.

Como ejemplo de todo esto vamos a considerar las propiedades magnéticas de la materia. El material que tiene propiedades magnéticas más chocantes es, en supuesto, el hierro. Estas propiedades son compartidas por algunas otras sustancias tales como el níquel, cobalto, etc. Esta clase de magnetismo, el llamado ferromagnetismo, es muy complicado y lo discutiremos más adelante. Sin embargo todas las sustancias ordinarias muestran algunos efectos magnéticos, que son pequeños pues son del orden de un millón de veces menores importantes que los de los materiales ferromagnéticos.

Consideremos una pieza de material no ferromagnético colocado en un campo magnético externo $\vec{B}_{ex} = \vec{H}_{ex}$. Supondremos para simplificar que el medio es isotrópico y homogéneo y que el campo externo tiene una frecuencia bien definida. Este campo externo origina en el material una magnetización $\vec{M}$, que es el momento magnético por unidad de volumen, (Recordad $[\vec{M}] = [\vec{B}] = [\vec{H}] = H^{1/2} L^{-1/2} T^{-1}$) que tendrá la misma dirección que el campo macroscópico $\vec{B}_{in}$. Entonces



$$\vec{B}_{in} = \mu \vec{H}_{in} \quad , \quad \vec{B}_{in} = \vec{H}_{in} + 4\pi \vec{M} \quad (3)$$

36/002

donde μ es la permeabilidad magnética del medio. Entonces

$$\vec{M} = \frac{1}{4\pi\mu} (\mu - 1) \vec{B}_{im} \quad (4)$$

es decir que la magnetización del medio es proporcional al campo magnético que existe en él. Llamamos susceptibilidad magnética del medio a la constante adimensional

$$\chi = \frac{1}{4\pi\mu} (\mu - 1) \quad (5)$$

$$\Rightarrow \mu = 1 + 4\pi\mu\chi$$

i) Algunas veces se habla de susceptibilidad molar que se obtiene como en el caso anterior pero sustituyendo la magnetización por unidad de volumen por la magnetización por mol, entonces $[\chi_m] = \text{cm}^3/\text{mol}$.

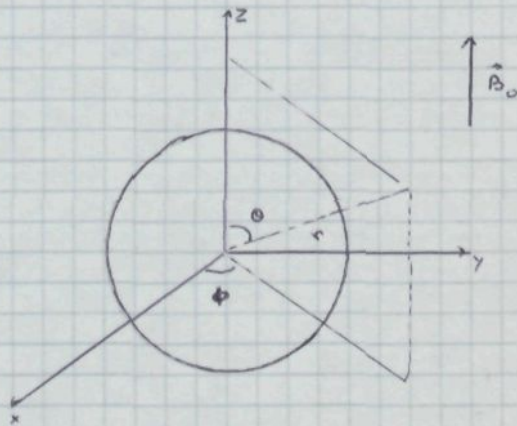
ii) Algunos autores prefieren usar otra definición de susceptibilidad. En efecto a las relaciones anteriores

$$\vec{M} = \tilde{\chi} \vec{H}_{im} \quad (6)$$

(por supuesto ellos escriben χ y no $\tilde{\chi}$) la relación entre ambas es

$$\tilde{\chi} = \frac{\chi}{1 - 4\pi\chi}, \quad \chi = \frac{\tilde{\chi}}{1 + 4\pi\tilde{\chi}} \quad (7)$$

Consideremos una esfera sumergida en un campo magnético constante $\vec{B}_0 \parallel OZ$. Se puede determinar el campo $\vec{B}_{im}$. Supondremos que es R el radio de la esfera. Sabemos que



$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_{ext} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_{im} = 0$$

(8)

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}_{ext} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}_{int} = 0$$

Además

$$\vec{B}_{ex} = \vec{H}_{ex} = \vec{B}_0$$

$$\vec{B}_{im} = \mu \vec{H}_{im}$$

(9)

y por tanto

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H}_{ext} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}_{ext} = 0$$

(10)

Esto nos permite asegurar, en cada región, la existencia de un potencial escalar tal que

$$\vec{H}_{\text{ext}}^{\text{im}} = - \vec{\nabla} \Phi_{\text{ext}}^{\text{im}} \quad (1)$$

que satisface

$$\Delta \Phi_{\text{ext}}^{\text{im}} = 0 \quad (2)$$

Teniendo en cuenta la simetría del problema

$$\Phi_{\text{ext}}^{\text{im}}(\vec{r}) = \sum_{L=0}^{\infty} R_{L,\text{ext}}^{\text{im}}(r) P_L(\cos \theta) \quad (3)$$

donde en ambos casos

$$\frac{d^2 R_L(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR_L(r)}{dr} - \frac{L(L+1)}{r^2} R_L(r) = 0 \quad (4)$$

Entonces obtenemos

$$\Phi_{\text{ext}}(\vec{r}) = \sum_{L=0}^{\infty} \left[\frac{A_L}{r^{L+1}} + B_L r^L \right] P_L(\cos \theta) \quad (5)$$

$$\Phi_{\text{int}}(\vec{r}) = \sum_{L=0}^{\infty} \left[\frac{A'_L}{r^{L+1}} + B'_L r^L \right] P_L(\cos \theta)$$

Notar que la condición de que $\Phi_{\text{int}}(0)$ sea finita implica que $A'_L \neq 0$, $\forall L$. Además al estar interesados en los campos podemos tomar $B'_0 \equiv 0$, y así obtenemos

$$\Phi_{\text{int}}(\vec{r}) = \sum_{L=1}^{\infty} B'_L r^L P_L(\cos \theta) \quad (6)$$

Además para $r \rightarrow \infty$

$$\Phi_{\text{ext}}(\vec{r}) \sim \sum_{L=0}^{\infty} B_L r^L P_L(\cos \theta) \quad (7)$$

y podemos elegir como antes $B_0 \equiv 0$, y en tanto

$$\Phi_{\text{ext}}(\vec{r}) \sim \sum_{L=1}^{\infty} B_L r^L P_L(\cos \theta) \quad (8)$$

$$\vec{H}_{\text{ext}} \sim - \left\{ \vec{e}_r \sum_{L=1}^{\infty} L B_L r^{L-1} P_L(\cos \theta) + \vec{e}_\theta \sum_{L=1}^{\infty} B_L r^{L-1} \frac{dP_L(\cos \theta)}{d\theta} \right\} \quad (9)$$

El campo externo debe coincidir con el campo aplicado

$$\vec{H}_0 = \vec{e}_r H_0 \cos \theta - \vec{e}_\theta H_0 \sin \theta \quad (10)$$

y en tanto tanto

36002

$$B_1 = -H_0$$

$$B_L = 0 \quad \forall L \geq 2$$

(11)

Entonces

$$\Phi_{ext} = -H_0 r \cos \theta + \sum_{L=0}^{\infty} \frac{A_L}{r^{L+1}} P_L(\cos \theta)$$

(12)

$$\Phi_{int} = \sum_{L=1}^{\infty} B'_L r^L P_L(\cos \theta)$$

de donde

$$\vec{H}_{ext} = \hat{e}_r \left\{ \left(H_0 + \frac{2A_1}{r^3} \right) P_1(\cos \theta) + \sum_{L=2}^{\infty} (L+1) \frac{A_L}{r^{L+2}} P_L(\cos \theta) + \frac{A_0}{r^2} \right\}$$

$$+ \hat{e}_\theta \left\{ \left(H_0 - \frac{A_1}{r^3} \right) \frac{dP_1(\cos \theta)}{d\theta} + \sum_{L=2}^{\infty} \frac{A_L}{r^{L+2}} \frac{dP_L(\cos \theta)}{d\theta} \right\}$$

(13)

$$\vec{H}_{int} = \hat{e}_r \left\{ - \sum_{L=1}^{\infty} L B'_L r^{L-1} P_L(\cos \theta) \right\} + \hat{e}_\theta \left\{ - \sum_{L=1}^{\infty} B'_L r^{L-1} \frac{dP_L(\cos \theta)}{d\theta} \right\}$$

Para determinar A_L y B'_L debemos imponer las condiciones de continuidad de $\vec{H}$ y $\vec{B}$ al cruzar la superficie.

$$i) (\vec{B}_{ext} - \vec{B}_{int}) \cdot \hat{n} = 0 \quad \text{donde } \hat{n} \text{ es el vector normal} \Rightarrow$$

$$\vec{H}_{ext} \cdot \hat{e}_r = \mu \vec{H}_{int} \cdot \hat{e}_r$$

(14)

$$\Rightarrow \frac{A_0}{R^2} = 0, \quad H_0 + \frac{2A_1}{R^3} = -\mu B'_1, \quad (L+1) \frac{A_L}{R^{L+2}} = -\mu L B'_L R^{L-1} \quad L \geq 2 \Rightarrow$$

$$A_0 = 0, \quad B'_1 = -\frac{1}{\mu} \left(H_0 + \frac{2A_1}{R^3} \right), \quad B'_L = -\frac{L+1}{\mu L} \frac{A_L}{R^{2L+1}} \quad \forall L \geq 2$$

(15)

entonces

$$\vec{H}_{ext} = \hat{e}_r \left\{ \left(H_0 + \frac{2A_1}{r^3} \right) P_1(\cos \theta) + \sum_{L=2}^{\infty} (L+1) \frac{A_L}{r^{L+2}} P_L(\cos \theta) \right\}$$

$$+ \hat{e}_\theta \left\{ \left(H_0 - \frac{A_1}{r^3} \right) \frac{dP_1(\cos \theta)}{d\theta} + \sum_{L=2}^{\infty} \frac{A_L}{r^{L+2}} \frac{dP_L(\cos \theta)}{d\theta} \right\}$$

(16)

$$\mu \vec{H}_{int} = \hat{e}_r \left\{ \left(H_0 + \frac{2A_1}{R^3} \right) P_1(\cos \theta) + \sum_{L=2}^{\infty} (L+1) \frac{A_L}{R^{2L+1}} r^{L-1} P_L(\cos \theta) \right\}$$

$$+ \hat{e}_\theta \left\{ \left(H_0 + \frac{2A_1}{R^3} \right) \frac{dP_1(\cos \theta)}{d\theta} + \sum_{L=2}^{\infty} \frac{L+1}{L} \frac{A_L}{R^{2L+1}} r^{L-1} \frac{dP_L(\cos \theta)}{d\theta} \right\}$$

(17)

ii) $(\vec{H}_{ext} - \vec{H}_{int}) \times \hat{n} = -\frac{4\pi}{c} \vec{K}$, donde $\vec{K}$ es la corriente superficial que tiene como elementos paralelos a la superficie en todo punto y en nuestro caso $\vec{K} = 0$ y por tanto,

$$(\vec{H}_{ext} - \vec{H}_{int}) \times \hat{n} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{H}_{ext} \cdot \hat{e}_\theta = \vec{H}_{int} \cdot \hat{e}_\theta$$

(18)

$$H_0 - \frac{A_1}{R^3} = \frac{1}{\mu} \left(H_0 + \frac{2A_1}{R^3} \right), \quad - \frac{A_L}{R^{L+2}} = \frac{1}{\mu} \frac{L+1}{L} \frac{A_L}{R^{2L+1}} R^{L-1} \quad \forall L \geq 2$$

de donde

$$A_1 = \frac{\mu-1}{\mu+2} R^3 H_0, \quad A_L = 0 \quad \forall L \geq 2 \quad (1)$$

Entonces

$$\vec{H}_{ext} = \hat{e}_r \left\{ 1 + 2 \frac{\mu-1}{\mu+2} \frac{R^3}{r^3} \right\} H_0 \cos \theta - \hat{e}_\theta \left\{ 1 - \frac{\mu-1}{\mu+2} \frac{R^3}{r^3} \right\} H_0 \sin \theta \quad (2)$$

$$\vec{H}_{int} = [\hat{e}_r \cos \theta - \hat{e}_\theta \sin \theta] \frac{3}{\mu+2} H_0$$

Teniendo en cuenta que

$$\vec{B}_0 = \hat{e}_r B_0 \cos \theta - \hat{e}_\theta B_0 \sin \theta \quad (3)$$

entonces

$$\vec{H}_{int} = \frac{3}{\mu+2} \vec{B}_0 \quad (4)$$

$$\vec{H}_{ext} = \vec{B}_0 + \frac{\mu-1}{\mu+2} \frac{R^3}{r^3} B_0 (2 \cos \theta \hat{e}_r + \sin \theta \hat{e}_\theta) \quad (5)$$

y de aquí

$$\vec{B}_{int} = \frac{3\mu}{\mu+2} \vec{B}_0 \quad (6)$$

$$\vec{M} = \frac{3}{4\pi} \frac{\mu-1}{\mu+2} \vec{B}_0 \quad (7)$$

y en tanto podemos escribir

$$\vec{H}_{int} = \vec{B}_0 - \frac{4\pi}{3} \vec{M}, \quad \vec{B}_{in} = \vec{B}_0 + \frac{8\pi}{3} \vec{M} \quad (8)$$

Resumiendo, vemos que en este caso $\vec{B}_{in} \parallel \vec{B}_0$ y se define la susceptibilidad como

$$\chi \equiv \frac{M}{B_0} \quad (9)$$

entonces

$$\chi = \frac{3}{4\pi} \frac{\mu-1}{\mu+2} = \frac{\chi}{1 - \frac{8\pi}{3} \chi} \quad (10)$$

En notación se mide χ y si la muestra es esférica la relación anterior permite

36/002

colocación χ . Para muestras de forma arbitraria $\vec{B}_{im}$ no será, en general, paralelo a $\vec{B}_0$ y puede ser muy difícil deducir χ de los resultados experimentales. En general se toman muestras de una forma determinada y entonces es posible calcular, como en el caso anterior, la susceptibilidad a efectos. Más sobre este punto en André Herpin "Théorie du Magnétisme" Presses Universitaires de France.

Diamagnetismo y paramagnetismo. Podemos dividir las sustancias en dos clases

$$(i) \text{ Diamagnéticas } \Leftrightarrow \chi < 0 \quad (11)$$

$$(ii) \text{ Paramagnéticas } \Leftrightarrow \chi > 0$$

Veamos lo que sucede al introducir una sustancia en un campo magnético externo $\vec{B}_{ex}$. Al cambiar el campo externo de $\vec{B}_{ex}'$ a $\vec{B}_{ex}' + d\vec{B}_{ex}'$, la energía potencial por unidad de volumen de la muestra cambia en

$$dU = - \vec{M}(\vec{B}_{im}') \cdot d\vec{B}_{im}' = - \chi \vec{B}_{im}' \cdot d\vec{B}_{im}' \approx - \chi \vec{B}_{ex}' \cdot d\vec{B}_{ex}' \quad (12)$$

en la hipótesis de que $|\chi| \ll 1$. Entonces la energía total es

$$U = - \frac{1}{2} \chi \vec{B}_{ex}^2 \quad (13)$$

y por tanto la fuerza que actúa sobre la unidad de volumen es

$$\vec{F} = \frac{1}{2} \chi \vec{\nabla}(\vec{B}_{ex}^2) \quad (14)$$

Vemos que en las sustancias diamagnéticas una muestra colocada en un campo magnético no uniforme tiende a ir hacia las zonas de campo débil, mientras que en las paramagnéticas tienden a ir hacia las zonas de campo externo intenso.

Diamagnetismo: consideraremos la teoría clásica de Langevin. Sea un electrón moviéndose en un círculo de radio r alrededor de un núcleo atómico. Si el electrón tiene una velocidad v la corriente equivalente a su largo del círculo es

$$I = \frac{1e v}{2\pi r} \quad (15)$$

y el momento magnético usado por esta corriente es

$$m = \frac{I}{c} A = \frac{1}{c} \frac{1e v}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{1e \hbar}{2c m_e} \frac{1}{\hbar} m_e v r \quad (16)$$

Introduciendo el momento de Bohr

$$\mu_B \equiv \frac{1e \hbar}{2m_e c} = 5.7883785(95) \times 10^{-15} \text{ MeV gauss}^{-1} \quad (17)$$

y teniendo en cuenta que el momento angular es $L = m_e v r$ se obtiene

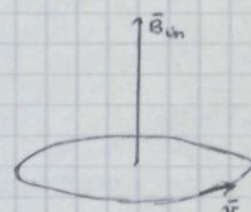
$$\vec{m} = - \mu_B \frac{\vec{L}}{\hbar} \quad (1)$$

donde el signo menos es debido a la carga negativa del electrón. Si el átomo tiene varios electrones la contribución de los mismos al momento magnético dipolar es

$$\vec{m} = - \mu_B \sum_i \frac{1}{\hbar} \vec{L}_i \quad (2)$$

Si $\sum_i \vec{L}_i = 0$ entonces el átomo no tiene un momento dipolar magnético permanente (en realidad también debe ser nulo el momento angular de spin) y se trata de una sustancia diamagnética.

Supongamos ahora que se aplica un campo magnético a un átomo diamagnético. Su efecto es cambiar ligeramente el movimiento orbital de los electrones. Consideremos por ejemplo la órbita de la figura, en la que el electrón, en ausencia de $\vec{B}_{im}$, se mueve describiendo una órbita circular con velocidad angular ω_0 dada por



$$m_e \omega_0^2 r = \frac{Ze^2}{r^2} \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{Ze^2}{m_e r^3} \quad (3)$$

Al establecer el campo, perpendicular al plano de la órbita y en el sentido indicado en la figura, la fuerza de atracción hacia el centro es aumentada en una cantidad $|e| v B_{im} / c$, que es muy pequeña comparada con las fuerzas atómicas para los campos magnéticos usuales:

$$\begin{aligned} \frac{|e| v B_{im}}{c} \frac{r^2}{Ze^2} &\approx \frac{|e| Z \alpha c B_{im}}{c} \frac{1}{Z \alpha \hbar c} \frac{\hbar^2}{m_e^2 (Z \alpha c)^2} = \frac{|e| \hbar B_{im}}{m_e^2 c^3 (Z \alpha)^2} \\ &= \frac{2 \mu_B}{m_e c^2 (Z \alpha)^2} B_{im} \approx 4.254 \times 10^{-10} \frac{1}{Z^2} \left(\frac{B_{im}}{\text{gauss}} \right) \ll 1 \end{aligned} \quad (4)$$

Entonces es una hipótesis razonable suponer que el electrón permanece en la órbita original, cambiando ligeramente su velocidad angular

$$\begin{aligned} m_e \omega^2 r &= \frac{Ze^2}{r^2} + |e| \omega r \frac{1}{c} B_{im} \Rightarrow \\ \omega &= \omega_0 + \frac{|e| B_{im}}{2 m_e c} \end{aligned} \quad (5)$$

Esto nos dice que en presencia de un campo magnético la velocidad angular del electrón aumenta en una cantidad $\omega_L = |e| B_{im} / 2 m_e c$, conocida con el nombre de fre-

36/002

movimiento angular de Larmore. Esto produce un aumento del momento angular $m_e \omega_L r^2$ y esto induce un momento magnético

$$\vec{m}_{\text{ind}} = - \frac{e^2}{4 m_e c^2} r^2 \vec{B}_{\text{im}} \quad (1)$$

Este resultado es independiente del sentido de giro de los electrones.

Un átomo con número atómico Z tiene Z electrones. Estos electrones están en órbitas con distintos radios y con distintas inclinaciones con respecto a $\vec{B}_{\text{im}}$. Tomando la media de las contribuciones de todos los electrones, se puede probar que el momento dipolar magnético inducido por átomo es

$$\langle \vec{m}_{\text{ind}} \rangle = - \frac{e^2}{6 m_e c^2} Z \langle r^2 \rangle \vec{B}_{\text{im}} \quad (2)$$

donde $\langle r^2 \rangle$ es el radio cuadrático medio del átomo. Si en el volumen unidad hay N átomos entonces obtenemos para la susceptibilidad.

$$\chi = - \frac{e^2}{6 m_e c^2} Z N \langle r^2 \rangle \quad (3)$$

En mecánica cuántica se obtiene un resultado análogo para átomos con capas llenas y siendo $\langle r^2 \rangle$ el valor esperado cuántico. Es precisamente en el cálculo de $\langle r^2 \rangle$ donde están las mayores dificultades.

1) Gases nobles. A presión y temperatura ambiente $N = 6.022 \times 10^{23} / 22.413 \text{ l (20)} \times 10^{-3} \text{ m}^3$
 $\approx 2.686754 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$ y entonces

$$\chi = - 1.261851 (41) \times 10^{-10} Z \left\langle \left(\frac{r}{A^0} \right)^2 \right\rangle \quad (4)$$

Los valores experimentales son

	He ($Z=2$)	Ne ($Z=10$)	Ar ($Z=18$)	Kr ($Z=36$)	Xe ($Z=54$)
$-\chi_{\text{exp}}$	8.36×10^{-11}	2.99×10^{-10}	8.75×10^{-10}	1.28×10^{-9}	1.96×10^{-9}

que está en buen acuerdo con (4) si se toma $\langle r^2 \rangle^{1/2} \approx 0.5 \text{ Å}$, lo cual es totalmente razonable.

2) Otros cuerpos diamagnéticos son el oro, cobre, germanio, agua, sal común, ... Calculamos y para el oro la densidad es $\rho = 19.3 \text{ g/cm}^3$ y su peso atómico es $A = 196.967$ y $Z = 79$. De agua $N = 5.40 \times 10^{22} \text{ m}^{-3}$. Si $\langle r^2 \rangle^{1/2} = 0.5 \text{ Å}$ entonces $\chi = -5.5 \times 10^{-6}$ a comparar con $\chi_{\text{exp}} = -2.9 \times 10^{-6}$, en buen acuerdo teniendo en cuenta que $\langle r^2 \rangle^{1/2}$ es una aproximación grossera.

Paramagnetismo. Usaremos también aquí la teoría clásica de Langevin. Supongamos ahora una sustancia cuyos átomos tengan un momento dipolar magnético permanente $\vec{m}$. Entonces la energía de interacción de este dipolo en el campo $\vec{B}_{im}$ es

$$U = -\vec{m} \cdot \vec{B}_{im} = -m B_{im} \cos \theta \equiv U(\theta) \quad (1)$$

donde θ es el ángulo de $\vec{m}$ y $\vec{B}_{im}$. En la teoría de Langevin se supone totalmente despreciable la interacción entre dipolos. Usando la estadística de Boltzmann

$$U \equiv \langle U(\theta) \rangle = -m B_{im} \frac{\int_0^\pi \sin \theta \cos \theta \exp(m B_{im} \cos \theta / k_B T) d\theta}{\int_0^\pi \sin \theta \exp(m B_{im} \cos \theta / k_B T) d\theta}$$

Haciendo $u \equiv m B_{im} / k_B T$ y $x \equiv \cos \theta$

$$U = -m B_{im} \frac{\int_{-1}^{+1} dx \, x e^{ax}}{\int_{-1}^{+1} dx \, e^{ax}} = -m B_{im} \frac{d}{da} \ln \int_{-1}^{+1} dx \, e^{ax} = -m B_{im} \frac{d}{da} \ln \left(\frac{1}{a} (e^a - e^{-a}) \right)$$

$$= -m B_{im} \left\{ \frac{e^a + e^{-a}}{e^a - e^{-a}} - \frac{1}{a} \right\}$$

y por tanto la contribución por portador a la magnetización es

$$\langle m \rangle = m L \left(\frac{m B_{im}}{k_B T} \right) \quad (2)$$

$$L(x) \equiv \coth x - \frac{1}{x} \quad (\text{Función de Langevin})$$

$$L(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{3} x - \frac{1}{45} x^3 + \frac{2}{945} x^5 + \dots \quad (3)$$

$$L(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} 1 - \frac{1}{x} + 2e^{-2x} + 2e^{-4x} + 2e^{-6x} + \dots \quad (4)$$

Si suponemos que $m = \mu_B$ entonces

$$\frac{\mu_B B_{im}}{k_B T} = 6.71712 (21) \times 10^{-5} \left(\frac{K}{T} \right) \left(\frac{B_{im}}{\text{gauss}} \right) \quad (5)$$

en los casos reales $\mu_B B_{im} / k_B T \ll 1$ y entonces podemos desarrollar $L(x)$ para $x \rightarrow 0$ y quedarnos con el primer término en el desarrollo. Entonces si hay N dipolos por unidad de volumen

$$\chi = \frac{N m^2}{3 k_B T} \equiv \frac{C}{T} \quad (\text{ley de Curie}) \quad (6)$$

Como en materia condensada $N = \nu \times 10^{22} \text{ cm}^{-3}$ y $\mu_B = \mu \mu_B$ donde ν y μ son del orden

35/002

de la unidad, entonces

$$C = \nu \mu^2 \cdot 2.076503 (68) \times 10^{-3} \text{ K} \quad (7)$$

En general el diamagnetismo coexiste con el paramagnetismo, pero este último es dominante.

De haber tenido en cuenta los efectos cuánticos el resultado final hubiera sido

$$\langle m \rangle = g_J \mu_B J B_J \left(\frac{g_J \mu_B J B_m}{k_B T} \right)$$

$$B_J(x) \equiv \frac{2J+1}{2J} \operatorname{ctgh} \left(\frac{2J+1}{2J} x \right) - \frac{1}{2J} \operatorname{ctgh} \left(\frac{x}{2J} \right) \quad (\text{Fórmula de Brillouin}) \quad (8)$$

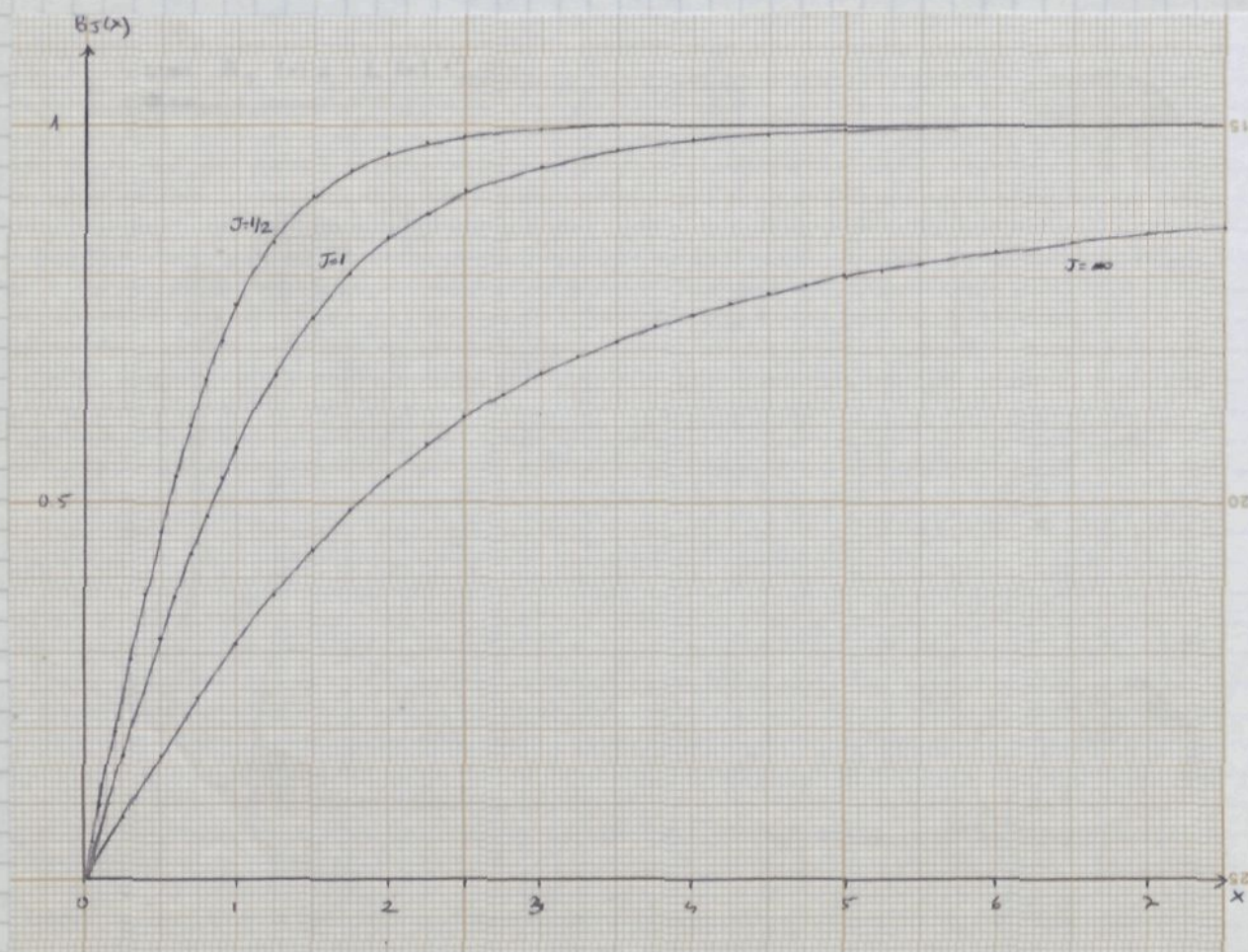
$$g_J = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)} \quad (\text{Fórmula de Landé})$$

Notas que

$$B_J(x) \sim \frac{J+1}{J} \frac{1}{3} x - \frac{(2J+1)^4 - 1}{(2J)^4} \frac{1}{45} x^3 + \frac{(2J+1)^6 - 1}{(2J)^6} \frac{2}{945} x^5 + \dots$$

$$B_J(x) \sim 1 + 2 \left(\frac{2J+1}{2J} e^{-(J+1)x/J} - \frac{1}{2J} e^{-x/J} \right) \quad (9)$$

$$+ 2 \left(\frac{2J+1}{2J} e^{-2(J+1)x/J} - \frac{1}{2J} e^{-2x/J} \right) + \dots \quad (10)$$



$$\lim_{J \rightarrow \infty} B_J(x) = L(x)$$

(1)

La ley de Curie es ahora determinada con

$$C = N g_J^2 \mu_B^2 J(J+1) \frac{1}{3k_B} \quad (2)$$

y su medida permite obtener estimaciones de J y g_J^2 .

1) Iones de tierras raras.

La medida de C permite calcular $p \equiv [g_J^2 J(J+1)]^{1/2}$. Por otra parte p se puede calcular teóricamente teniendo en cuenta las reglas de Hund

i) S es el máximo posible permitido por el principio de exclusión

ii) L es el máximo posible consistente con S

iii) $J = |L-S|$ cuando la capa está llena menos de la mitad y $J = L+S$ cuando está llena más de la mitad. Cuando la capa está llena hasta la mitad la aplicación de i) y ii) da $L=0$ de forma que $J=S$.

Ejemplo $Dy^{3+} 4f^9 5s^2 5p^6$

La capa que no está totalmente llena es la $4f$ en la que caben 14 electrones, es decir faltan 5 electrones. y $S = 5/2$ y por consiguiente $L = 5 \Rightarrow J = 15/2$ es decir el estado fundamental es ${}^6H_{15/2} \equiv {}^{2S+1}L_J$ así dando $g_J = 68/51$ y

$$p_{th} = \frac{34}{51} \sqrt{255} = 10.6458 \dots$$

a comparar $p_{ex} = 10.6$. En otros casos el acuerdo, en general, es también muy bueno

2) Grupo del Hierro

Aquí el acuerdo es bueno, en general, si se toma $p = 2[S(S+1)]^{1/2}$ en lugar de la expresión anterior. Se habla entonces de un "quenching" del momento angular orbital

3) Oxígeno

Consideremos el O_2 en condiciones normales. La configuración del estado atómico fundamental es $(1s)^2 (2s)^2 (2p)^4$. Al fallar dos electrones en la última capa $S=1$ y de los posibles $L=0, 1, 2$, la antisimetría de la función de ondas implica $L=1$ por lo que $J=2$. De aquí $g_J = 3/2$. Por tanto

$$\chi_{th} = 1.380 \times 10^{-7} \quad (4)$$

a comparar con

$$\chi_{exp} = 1.528 \times 10^{-7} \quad (5)$$

Es evidente que cuando $x \approx 1$ la ley de Curie falla y esto sucede a temperaturas muy bajas. Si $x \gg 1$ entonces $\langle m \rangle = m$ y la magnetización tiende a una constante.

Ferromagnetismo.

Algunas sustancias como el hierro, cobalto, níquel, --- presentan enormes efectos paramagnéticos y se les denominan ferromagnéticos. Un ferromagnético tiene un momento magnético espontáneo incluso sin la existencia de un campo aplicado. Se supone que estos momentos magnéticos son debidos a los spins de los electrones los cuales no se hallan desaptados como en el caso anterior, sino que interactúan los unos con los otros. En la teoría de Weiss el efecto de la interacción entre los spins se representa mediante un campo molecular o de intercambio $\vec{B}_{mol}$ que se superpone al campo externo de forma que el campo en que está sometido un portador es

$$\vec{B}_{ef} = \vec{B}_{ex} + \vec{B}_{mol} \quad (6)$$

Como $\vec{B}_{mol}$ ha de expresar la acción de los portadores que tienen momento medio $\langle \vec{m} \rangle$, Weiss supone que

$$\vec{B}_{mol} = \lambda \langle \vec{m} \rangle \quad (7)$$

Es decir que un campo externo tenderá a causar una magnetización que producirá un campo molecular proporcional a ella. Reproduciendo los cálculos del paramagnetismo encontramos

$$M = N g_J \mu_B J B_J \left[\frac{g_J \mu_B J (B_{ex} + \lambda M)}{k_B T} \right] \quad (8)$$

Para temperaturas suficientemente altas $B_J(x) \sim ((J+1)/J)(x/3)$ y

$$M = N g_J^2 \mu_B^2 J(J+1) \frac{1}{3 k_B T} (B_{ex} + \lambda M) \Rightarrow$$

$$\chi = \frac{C}{T - T_c} \quad (\text{Ley de Curie-Weiss}) \quad (9)$$

$$C \equiv N g_J^2 \mu_B^2 J(J+1) \frac{1}{3 k_B}, \quad T_c \equiv \lambda C$$

y esta ley, en primera aproximación está en buen acuerdo con los datos experimentales.

Algunos datos experimentales son

	C	T _C	λ	M _S (T=273°) gauss
Fe	0.1784	1043	5846	1740
Co	0.1830	1388	7585	1446
Ni	0.0485	627.2	12932	510

(4)

Notemos que el campo molecular $B_{mol} = \lambda M_S$ es enorme comparado con todos los otros campos presentes. Muy cerca de la temperatura de Curie T_C de G_{me}

$$\chi \propto \frac{1}{(T - T_C)^{\gamma}} \quad T \downarrow T_C \quad (2)$$

$$\chi_{Fe} = 1.330 \pm 0.015, \quad \chi_{Co} = 1.21 \pm 0.04, \quad \chi_{Ni} = 1.35 \pm 0.02$$

Teniendo en cuenta los valores medidos de C

	g $\mu_B \text{ cm}^{-3}$	N en cm^{-3}	$p \equiv g_J / (J(J+1))$
Fe	7.86	8.48×10^{22}	3.18
Co	8.9	9.09×10^{22}	3.11
Ni	8.9	9.13×10^{22}	1.60

(3)

No es inmediato interpretar el valor de p. En este caso hay un "quenching" parcial que hace que $g_J > 2$. Si supusiéramos que el "quenching" es total entonces $g_J = 2$ y usaríamos $J = 1.17, 1.13$ y 0.44 para el Fe, Co y Ni, respectivamente.

Si T no es demasiado alto no se puede hacer el desarrollo anterior. Para calcular la magnetización introducimos

$$x \equiv \frac{g_J \mu_B J B_{ex}}{k_B T} + \frac{g_J \mu_B J \lambda M}{k_B T} \quad (4)$$

y para determinar M debemos resolver numéricamente la ecuación (7.8)

$$\frac{T}{T_C} \frac{J+1}{3J} \left(x - \frac{g_J \mu_B J B_{ex}}{k_B T} \right) = B_J(x) \quad (5)$$

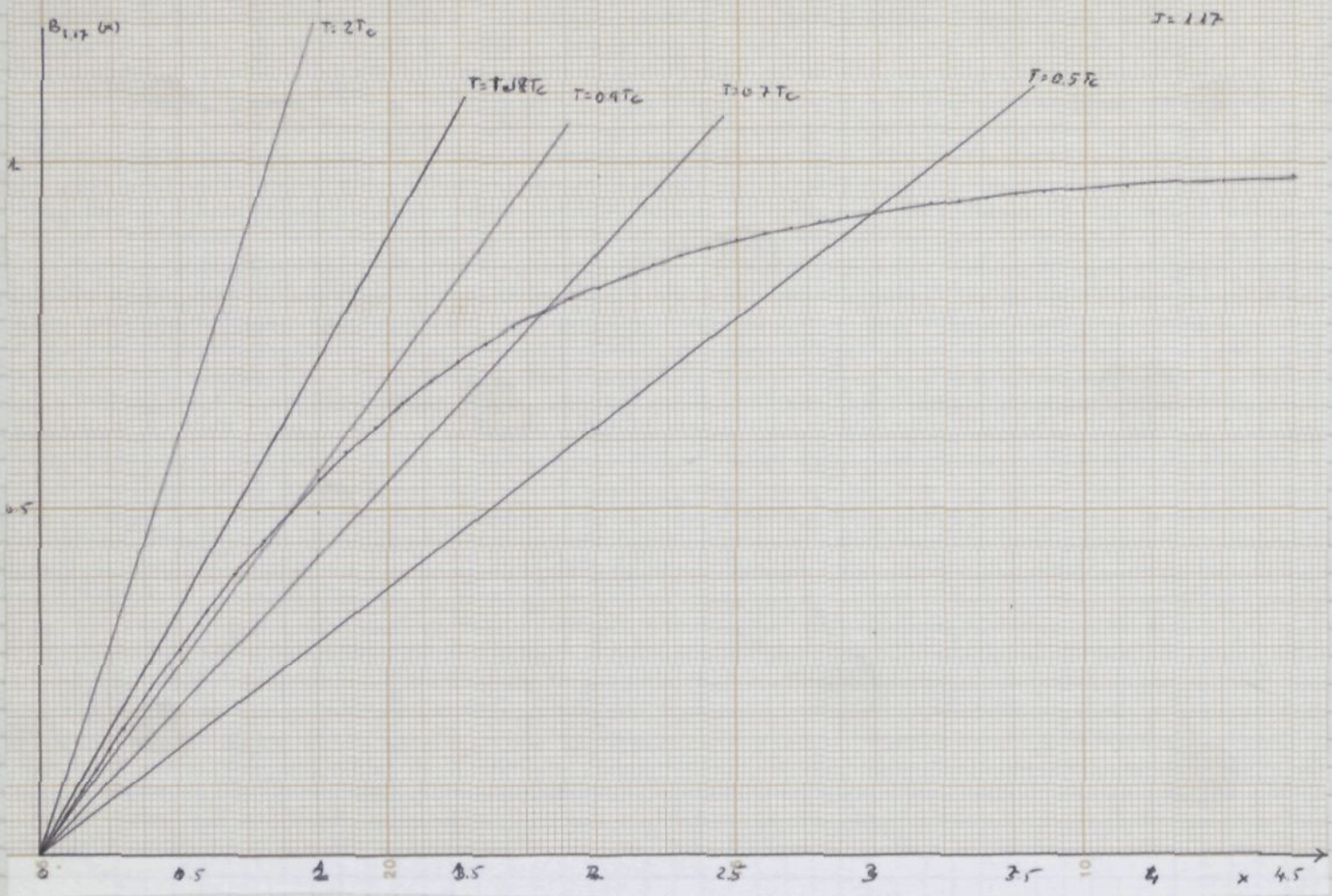
$$x_0 \equiv \frac{g_J \mu_B J B_{ex}}{k_B T} = 6.71712(22) \times 10^{-5} g_J J \left(\frac{B_{ex}}{\text{gauss}} \right) \left(\frac{K}{T} \right) \quad (6)$$

Ver la figura al dorso

Si $B_{ex} = 0$ entonces el miembro a la derecha de (5) tiene una pendiente de $\frac{J+1}{3J}$ y el de la izquierda $\frac{J+1}{3J} \frac{T}{T_C}$ y en tanto hay magnetización espontánea si y sólo si

$$T \leq T_C \quad (7)$$

6/002



Para $T \leq T_c$ y en ausencia de campo externo, el campo molecular supera la agitación térmica y ordena parcialmente o totalmente los momentos magnéticos de forma que existe una magnetización espontánea, que viene dada por

$$\frac{T}{T_c} \frac{J+1}{3J} x = B_J(x) \quad (8)$$

$$x = \frac{g_J \mu_B J \lambda}{R_B T} M(T)$$

Para $T \downarrow 0$ entonces

$$M(0) = \frac{3 R_B T_c}{g_J \mu_B \lambda (J+1)} \quad (9)$$

y por tanto

$$\frac{M(T)}{M(0)} = \frac{J+1}{3J} \frac{T}{T_c} x \quad (10)$$

Entonces se obtiene para $M(T)/M(0)$ versus T/T_c la figura siguiente ($J=1.17$). Los datos experimentales son relativamente bien ajustados por la curva teórica, pero los detalles finos no coinciden.



Para $T \ll T_c$ se encuentra $\frac{T}{T_c} \frac{J+1}{3J} x = 1 - \frac{1}{J} e^{-x/J} \Rightarrow$

$$\frac{M(T)}{M(0)} = 1 - \frac{1}{J} e^{-x/J}$$

y aproximando en el exponente $M(T)$ por $M(0)$ se tiene

$$\frac{M(T)}{M(0)} \approx 1 - \frac{1}{J} e^{-\frac{3T_c}{(J+1)T}} \quad (1)$$

y por tanto

$$\frac{\Delta M(T)}{M(0)} \approx \frac{M(0) - M(T)}{M(0)} = \frac{1}{J} e^{-\frac{3T_c}{(J+1)T}}, \quad T \ll T_c \quad (2)$$

mientras que experimentalmente

$$\frac{\Delta M(T)}{M(0)} = A T^{3/2}, \quad T \ll T_c \quad (3)$$

Este comportamiento se explica mediante la teoría de ondas de spin.

Para $T \uparrow T_c$ se obtiene

35/002

$$\frac{T}{T_c} \frac{J+1}{3J} x = \frac{J+1}{3J} x - \frac{(2J+1)^4 - 1}{720 J^4} x^3 + \dots$$

pero $(2J+1)^4 - 1 = 8J(J+1)(2J^2+2J+1)$

$$x^2 = \frac{30 J^2}{(2J^2+2J+1)} \left(1 - \frac{T}{T_c}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{M(T)}{M(0)} = \frac{\sqrt{30}}{3} \frac{J+1}{(2J^2+2J+1)^{1/2}} \frac{T}{T_c} \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{1/2} \quad T \uparrow T_c \quad (4)$$

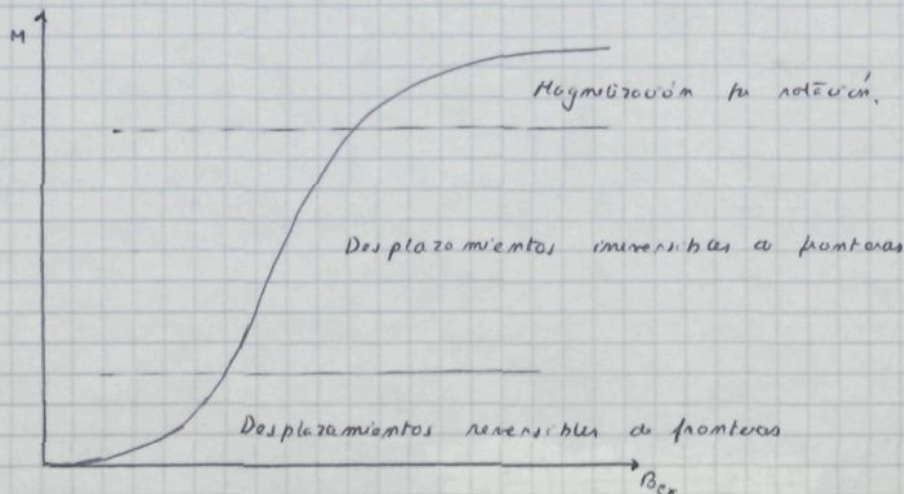
Domínios Ferromagnéticos

A temperaturas $T < T_c$ los momentos magnéticos electrónicos se hallan esencialmente alineados, cuando se observan a escala microscópica. Sin embargo, mirando la muestra como un todo, puede muy bien suceder que el momento magnético sea mucho menor que el de saturación y puede ser necesaria la aplicación de un campo magnético externo para saturar la muestra.

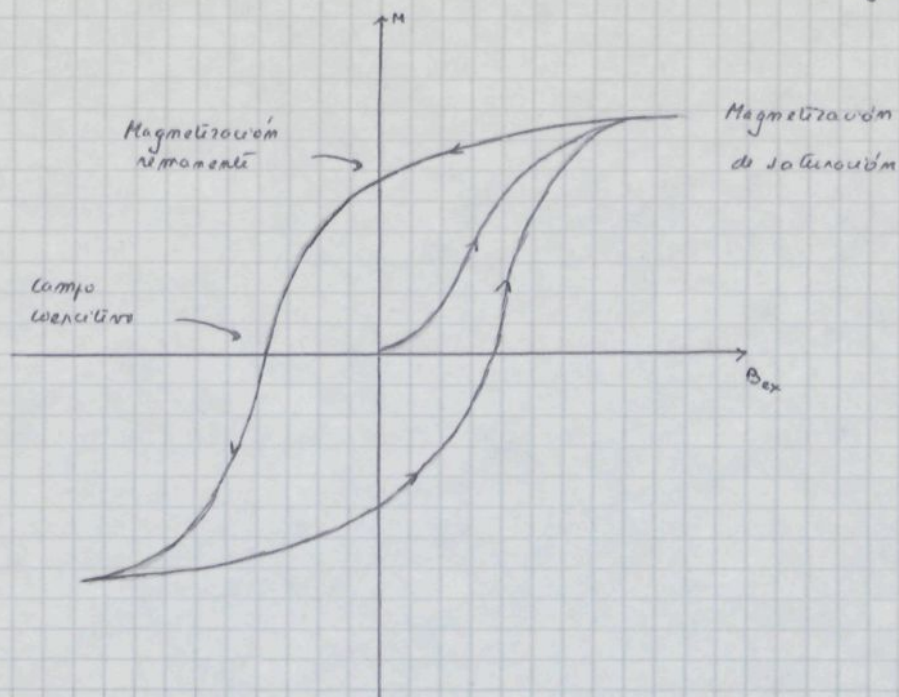
Una muestra normal está compuesta de pequeñas regiones, llamadas dominios, con tamaños típicos de 10^{-4} a 10^{-6} cm³. En cada dominio los momentos magnéticos están perfectamente alineados, pero la dirección de magnetización de los distintos dominios puede ser arbitraria, con lo cual el momento magnético resultante es prácticamente nulo. Los dominios están separados los unos de los otros por paredes, llamadas de Bloch, de un espesor típico de 10^{-5} cm.

Al colocar la muestra en un campo magnético externo suceden dos procesos independientes:

- En campos aplicados débiles el volumen de los dominios favorablemente orientados con respecto al campo crece a expensas de los que no lo están.
- En campos aplicados fuertes la magnetización gira hasta coincidir con la dirección del campo.



El tipo de comportamiento de una muestra es el dado en la figura siguiente



Esta figura se denomina ciclo de histéresis.