

Se trata de estudiar el comportamiento de sistemas determinísticos que, sin embargo, dan lugar a fenómenos impredecibles o caóticos. Uno de los modelos más sencillos que exhibe esta complejidad es un modelo que proviene de la biología de poblaciones. Este modelo describe el tamaño de una población $x_0, x_1, x_2, \dots$ ($0 \leq x_i \leq 1$) en los instantes de tiempo $t_m = t_0 + m \Delta t$ y se tiene que

$$x_{m+1} = C x_m - C x_m^2 \quad 0 \leq C \leq 4.$$

La limitación $0 \leq C \leq 4$ es para asegurar que cualquier valor $0 \leq x_m \leq 1$ le corresponde uno de x_{m+1} en el mismo intervalo: $0 \leq x_{m+1} \leq 1$.

Veamos lo que sucede para $C \leq 3$, digamos $C=2$. En este caso para todo $x_0 \neq 0,1$ se tiene que $x_\infty = 0.5$, como se puede ver de la construcción de la figura que corresponde a

$$x_0 = 0.2$$

$$x_1 = 0.32$$

$$x_2 = 0.4352$$

$$x_3 = 0.4916019$$

$$x_4 = 0.4998589$$

$$x_5 = 0.5000000$$

Consideremos otro punto tal como $x = 2.9$ entonces para todo $x_0 \neq 0,1$ se obtiene $x_\infty = 0.655172$; para los primeros pasos

$$x_0 = 0.2$$

$$x_1 = 0.464$$

$$x_2 = 0.721242$$

$$x_3 = 0.583051$$

$$x_4 = 0.704997$$

$$x_5 = 0.603131$$

$$x_6 = 0.694155$$

$$x_7 = 0.615680$$

$$x_8 = 0.686192$$

$$x_9 = 0.624464$$

$$x_{10} = 0.680075$$

Si $1 < C < 3$ el punto de acumulación es $x_\infty = (C-1)/C$ y si $0 \leq C \leq 1$ es $x_\infty = 0$.

Veamos lo que sucede para $C = 3.1$

$$x_0 = 0.2$$

$$x_1 = 0.496$$

$$x_2 = 0.774950$$

$$x_3 = 0.540647$$

$$x_4 = 0.769878$$

$$x_5 = 0.549214$$

$$x_6 = 0.767492$$

$$x_7 = 0.553189$$

$$x_8 = 0.766230$$

$$x_9 = 0.555277$$

$$x_{10} = 0.765528$$

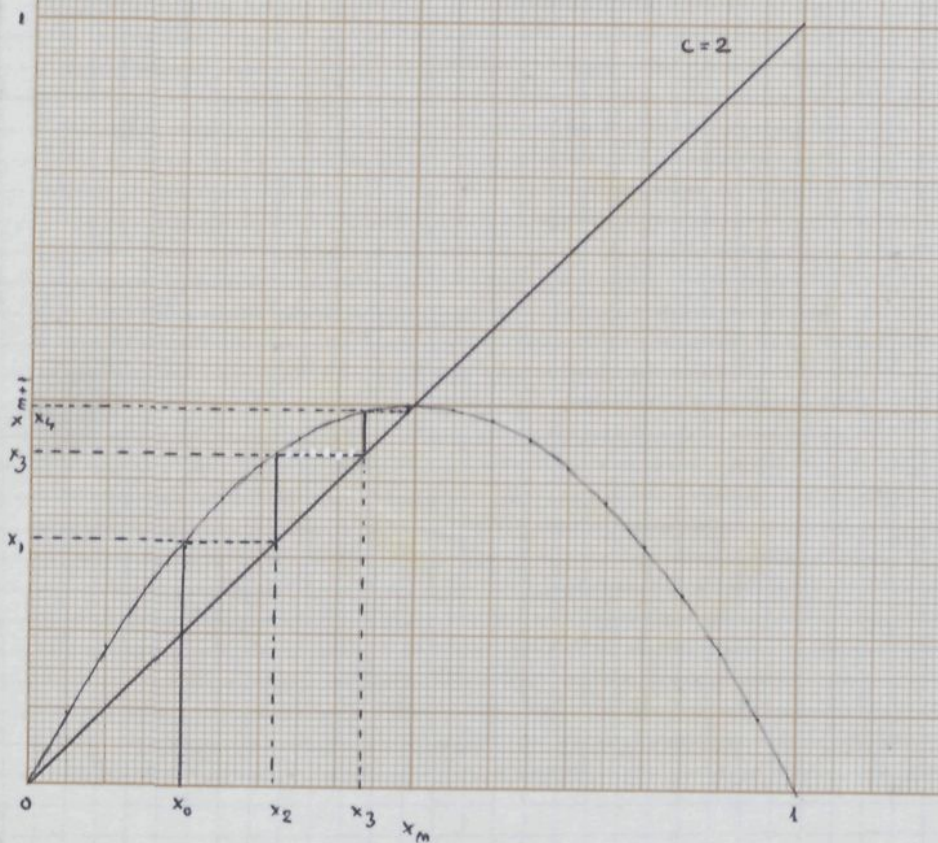
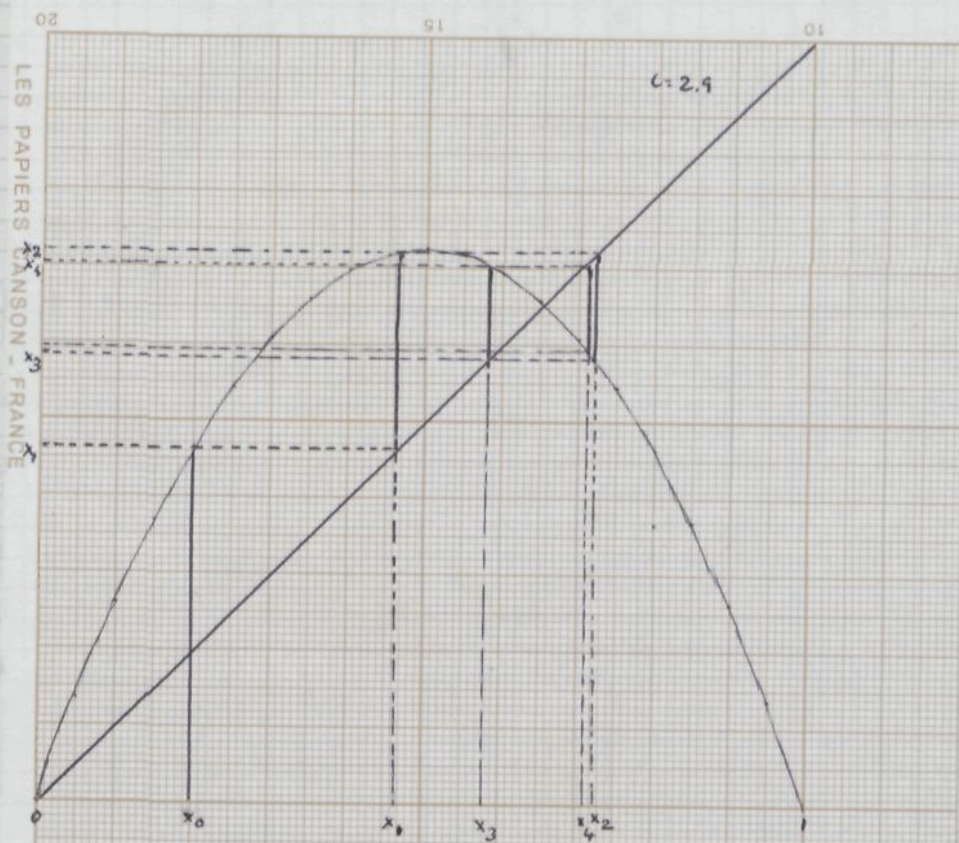
$$x_{11} = 0.556434$$

$$x_{2m+1} \underset{m \rightarrow \infty}{\sim} 0.558014$$

$$x_{2m} \underset{m \rightarrow \infty}{\sim} 0.764567$$

Es decir para $x_0 \neq 0,1$ el resultado final oscila alternativamente acercándose con

36/003



período 2 a 0.558014 y a 0.764567

Para $C=3.5$ la situación es más complicada pues para grandes n e independientemente del $x_0 \neq 0,1$ elegida se suceden los números 0.382820, 0.826941, 0.500884 y 0.874997 y se repiten con período 4. El punto donde se produce este desdoblamiento es $C \approx 3.44$ -- pues para $C=3.43$ oscila entre 0.444580 y 0.846965, también que para $C=3.44$ oscila entre 0.444580 y 0.846965. Para $C=3.445$ también presenta solo dos valores límite