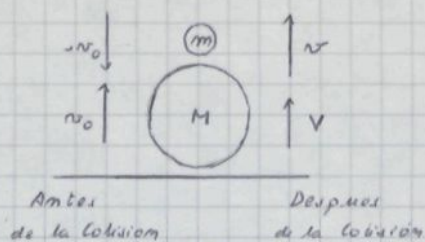


CHOQUES DE BOLAS

I) Dos bolas en caída libre

Si dos bolas se dejan caer desde una altura h , una encima de la otra y separadas una pequeña distancia,



entonces alcanzara el suelo con una velocidad $v_0 = \sqrt{2gh}$. Primero la bola de masa M choca elásticamente con el suelo y si se supone que el choque es elástico entonces rebota con velocidad v_0 hacia arriba. La situación es la indicada en la parte izquierda de la figura. Inmediatamente choca con la de masa m , que aún está bajando. Después de este choque, que también consideramos elástico, la situación es la presentada a la derecha de la figura. Entonces las leyes de conservación del momento y de la energía dan

$$M v_0 - m v_0 = M V + m v \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} M v_0^2 + \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} m v^2 \quad (2)$$

La segunda ecuación puede escribirse

$$M (v_0^2 - V^2) = m (v^2 - v_0^2) \Rightarrow M (v_0 - V) (v_0 + V) = m (v - v_0) (v + v_0)$$

y usando la primera, $M (v_0 - V) = m (v + v_0)$, se obtiene

$$m (v + v_0) (v_0 + V) = m (v - v_0) (v + v_0)$$

esto es

$$v_0 + V = v - v_0$$

o equivalentemente

$$v - V = 2 v_0 \quad (3)$$

De (1) y (3) se deduce que

$$V = \frac{1 - 3m/M}{1 + m/M} v_0, \quad v = \frac{3 - m/M}{1 + m/M} v_0 \quad (4)$$

Casos particulares

i) $m/M \rightarrow 0$, entonces $V = v_0$ y $v = 3v_0$ y por la bola pequeña alcanza una altura $9h$ en su rebote

ii) $M = 3m$, entonces $V = 0$ y $v = 2v_0$; la bola grande quedará en reposo y la otra alcanzará una altura $4h$.

Notar que $v > v_0$ siempre que $M > m$, y v crece a medida que m/M disminuye.

¿Que sucede si los dos choques son inelásticos? En el primer choque la velocidad de subida de la bola de masa M no es v_0 , sino $e_1 v_0$ donde $0 \leq e_1 \leq 1$. Entonces la ley de conservación del momento en el segundo choque es

$$M e_1 v_0 - m v_0 = M V + m v \quad (1)$$

La ley de conservación de la energía es

$$\frac{1}{2} M e_1^2 v_0^2 + \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} m v^2 + E, \quad E \geq 0 \quad (2)$$

i.e.

$$M (e_1 v_0 - V) (e_1 v_0 + V) = m (v - v_0) (v + v_0) + 2E$$

y usando (1)

$$m (v + v_0) (e_1 v_0 + V) = m (v - v_0) (v + v_0) + 2E$$

$$\Rightarrow e_1 v_0 + V = v + v_0 + \frac{2E}{m(v + v_0)}$$

$$\Rightarrow v - V = (1 + e_1) v_0 - \frac{2E}{m(v + v_0)} \quad (2)$$

que puede reescribirse como

$$v - V = e_2 (1 + e_1) v_0 \quad (3)$$

donde $0 \leq e_2 \leq 1$ es el llamado coeficiente de restitución. $e_2 = 1$ corresponde al caso elástico y $e_2 = 0$ al caso totalmente inelástico. ($v = V = 0$). Entonces

$$V = \frac{e_1 - \frac{m}{M} [1 + e_2 (1 + e_1)]}{1 + \frac{m}{M}} v_0 \quad (4)$$

$$v = \frac{e_1 + e_2 (1 + e_1) - \frac{m}{M}}{1 + \frac{m}{M}} v_0 \quad (5)$$

Si $e_1 = e_2 = e$ entonces

$$V = \frac{e - \frac{m}{M} (e^2 + e + 1)}{1 + \frac{m}{M}} v_0, \quad v = \frac{(e^2 + 2e) - \frac{m}{M}}{1 + \frac{m}{M}} v_0 \quad (6)$$

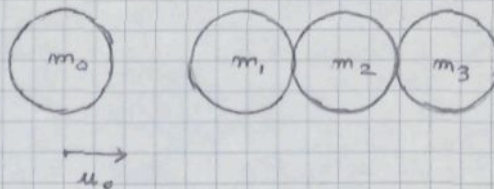
Si $V = 0$ entonces se obtiene $v > v_0$ si $e^4 + 3e^3 + 2e^2 - e - 1 > 0 \Rightarrow e > 0.618033989$

Si por ejemplo $e = 0.9$ entonces para que $V = 0$ se debe tener $H/m = 271/90 = 3.01111\dots$ y entonces $v = 1.71 v_0$ y la altura alcanzada por la bola pequeña es $2.9241 h$.

J. L. Spradley *Am. J. Phys.* 55, 183 (1987)

II) Cadena de bolas

Consideremos un conjunto de n masas $m_1, m_2, \dots, m_n$ que están inicialmente en reposo y hacia las que se acerca



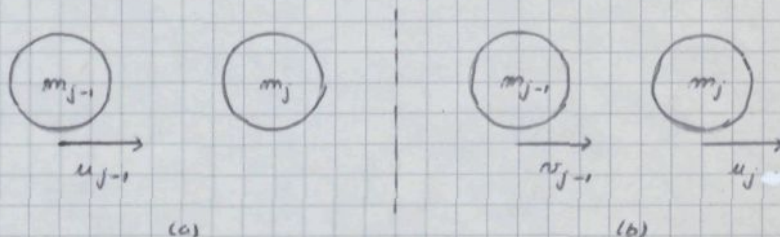
una masa m_0 con velocidad u_0 , como está indicado en la figura. Supondremos que la velocidad de onda de la perturbación transmitida en el medio de las bolas es suficientemente grande para que las primeras colisiones a lo largo de la cadena sean independientes. Esto es, en el frente de la onda no más de dos masas están chocando al mismo tiempo. Esto será también el caso si hay separaciones suficientes entre las masas. La figura

muestra la situación antes

(a) del choque y después

del choque (b). Usando

conservación del momento



$$m_{j-1} u_{j-1} = m_{j-1} v_{j-1} + m_j u_j \quad (1)$$

y conservación elástica de la energía, a través de un coeficiente de restitución,

$$u_j - v_{j-1} = e u_{j-1}, \quad 0 \leq e \leq 1. \quad (2)$$

obtenemos

$$u_j = \frac{(1+e) m_{j-1}}{m_{j-1} + m_j} u_{j-1} \quad (3)$$

$$v_{j-1} = \frac{m_{j-1} - e m_j}{m_{j-1} + m_j} u_{j-1} \quad (4)$$

Introducimos

$$r_j \equiv \frac{m_j}{m_{j-1}} \quad f \equiv 1+e \quad (5)$$

$$g_j \equiv \frac{u_j}{u_{j-1}}$$

entonces

$$g_j = \frac{f}{1+r_j} \quad (1)$$

El cociente de los momentos sucesivos, llamado la ganancia de momento, es

$$p_j \equiv \frac{m_j u_j}{m_{j-1} u_{j-1}} = r_j g_j = r_j \frac{f}{1+r_j} \quad (2)$$

y la transferencia de energía es

$$k_j \equiv \frac{\frac{1}{2} m_j u_j^2}{\frac{1}{2} m_{j-1} u_{j-1}^2} = r_j g_j^2 = r_j \frac{f^2}{(1+r_j)^2} \quad (3)$$

Se tiene entonces para toda la cadena

$$R_m \equiv \frac{m_m}{m_0} = \prod_{j=1}^m r_j \quad G_m \equiv \frac{u_m}{u_0} = \prod_{j=1}^m g_j \quad (4)$$

$$P_m \equiv \frac{m_m u_m}{m_0 u_0} = \prod_{j=1}^m p_j \quad K_m \equiv \frac{\frac{1}{2} m_m u_m^2}{\frac{1}{2} m_0 u_0^2} = \prod_{j=1}^m k_j$$

y por lo tanto

$$G_m = f^m / \prod_{j=1}^m (1+r_j) \quad (5)$$

$$P_m = f^m R_m / \prod_{j=1}^m (1+r_j) \quad (6)$$

$$K_m = f^{2m} R_m / \prod_{j=1}^m (1+r_j)^2 \quad (7)$$

Si suponemos todas las bolas iguales en masa, entonces $r_1 = r_2 = \dots = r_m = 1$ y se obtiene $R_m = 1$, $G_m = f^m / 2^m$, $P_m = f^m / 2^m$, $K_m = f^{2m} / 2^{2m}$. Si además el choque es elástico $e=1 \Rightarrow f=2$ y entonces $G_m = P_m = K_m = 1$, como era de esperar.

Supongamos que m_0 y m_m están fijos, es decir R_m está dada. Veamos para qué valores de r_i el valor de G_m es máximo. Esto es equivalente a buscar el mínimo de

$$y = (1+r_1)(1+r_2) \dots (1+r_m) \quad (8)$$

con

$$r_1 r_2 \dots r_m = R_m \quad (9)$$

Usando el método de los multiplicadores de Lagrange, se debe buscar el

mínimo de

$$y = (1+r_1)(1+r_2) \dots (1+r_m) - \lambda (r_1 r_2 \dots r_m - R_m) \quad (1)$$

y por tanto

$$(1+r_2) \dots (1+r_m) - \lambda r_2 r_3 \dots r_m = 0$$

$$(1+r_1)(1+r_3) \dots (1+r_m) - \lambda r_1 r_3 \dots r_m = 0 \quad (2)$$

$$(1+r_1) \dots (1+r_{m-1}) - \lambda r_1 r_2 \dots r_{m-1} = 0$$

Dividiendo la primera por la segunda $(1+r_2)/(1+r_1) = r_2/r_1 \Rightarrow r_1 = r_2$ y similarmente en los otros casos. Por tanto para R_m dado el máximo valor de G_m es cuando

$$r_1 = r_2 = \dots = r_m = R_m^{1/m} \quad (3)$$

y entonces

$$G_m = f^m / (1 + R_m^{1/m})^m, \quad L_m = f^m R_m / (1 + R_m^{1/m})^m \quad (4)$$

$$K_m = f^{2m} R_m / (1 + R_m^{1/m})^{2m}$$

En el caso de los neónidos que $f=2$ y

$$G_m = \frac{2^m}{(1 + R_m^{1/m})^m}, \quad L_m = \frac{2^m R_m}{(1 + R_m^{1/m})^m}, \quad K_m = \frac{2^{2m} R_m}{(1 + R_m^{1/m})^{2m}} \quad (\text{los Gm}) \quad (5)$$

Notar que $G_m > 1$ siempre que $R_m < 1$, en el caso de los y en general si $R_m < e^m$

Entendientemente si $R_m = 0$ entonces $G_m = f^m$ y en el caso de los $G_m = 2^m$. Si $e=1$ entonces

R_m	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	$m=6$	$m=7$	$m=8$
0	2.0000	4.0000	8.0000	16.0000	32.0000	64.0000	128.0000	256.0000
0.1	1.8182	2.3089	2.5417	2.6854	2.7729	2.8335	2.8778	2.9117
0.2	1.6667	1.9048	2.0049	2.0633	2.0964	2.1189	2.1352	2.1475
0.3	1.5385	1.6698	1.7194	1.7452	1.7609	1.7715	1.7791	1.7849
0.4	1.4286	1.5010	1.5270	1.5403	1.5483	1.5537	1.5576	1.5605
0.5	1.3333	1.3726	1.3862	1.3932	1.3973	1.4001	1.4021	1.4036
0.6	1.2500	1.2702	1.2771	1.2805	1.2826	1.2840	1.2850	1.2857
0.7	1.1765	1.1858	1.1889	1.1905	1.1914	1.1921	1.1925	1.1929
0.8	1.1111	1.1146	1.1157	1.1163	1.1166	1.1169	1.1170	1.1172
0.9	1.0526	1.0536	1.0536	1.0537	1.0538	1.0538	1.0539	1.0539
1.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Valores de G_m con $e=1$

Valores de K_m para distintos valores de e .

$e=1$

R_m	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	$m=6$	$m=7$	$m=8$
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.1	0.3306	0.5331	0.6496	0.7212	0.7689			
0.2	0.5556	0.7295	0.8079	0.8515	0.8790			
0.3	0.7101	0.8365	0.8869	0.9137	0.9302			
0.4	0.8163	0.9012	0.9327	0.9490	0.9589			
0.5	0.8889	0.9420	0.9608	0.9705	0.9763			
0.6	0.9375	0.9680	0.9785	0.9838	0.9870			
0.7	0.9689	0.9842	0.9895	0.9921	0.9937			
0.8	0.9877	0.9938	0.9959	0.9969	0.9975			
0.9	0.9972	0.9986	0.9991	0.9993	0.9994			
1.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000			

$e=0.9$

0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.1	0.2983	0.4342	0.4775	0.4784	0.4604			
0.2	0.5014	0.5942	0.5939	0.5649	0.5263			
0.3	0.6408	0.6813	0.6520	0.6062	0.5570			
0.4	0.7367	0.7340	0.6856	0.6296	0.5742			
0.5	0.8022	0.7673	0.7063	0.6438	0.5845			
0.6	0.8461	0.7884	0.7193	0.6527	0.5910			
0.7	0.8744	0.8017	0.7273	0.6582	0.5949			
0.8	0.8914	0.8095	0.7320	0.6614	0.5972			
0.9	0.9000	0.8134	0.7344	0.6630	0.5984			
1.0	0.9025	0.8145	0.7351	0.6634	0.5987			

e=0.8

0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
0.1	0.2678	0.3498	0.3452	0.3104	0.2681			
0.2	0.4500	0.4786	0.4294	0.3665	0.3065			
0.3	0.5751	0.5488	0.4713	0.3933	0.3244			
0.4	0.6612	0.5913	0.4957	0.4085	0.3344			
0.5	0.7200	0.6180	0.5106	0.4177	0.3404			
0.6	0.7544	0.6351	0.5200	0.4235	0.3442			
0.7	0.7848	0.6458	0.5258	0.4271	0.3465			
0.8	0.8000	0.6520	0.5292	0.4291	0.3478			
0.9	0.8078	0.6552	0.5309	0.4302	0.3485			
1.0	0.8100	0.6561	0.5314	0.4305	0.3487			

e=0.7

0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
0.1	0.2388	0.2783	0.2450	0.1965	0.1514			
0.2	0.4014	0.3808	0.3047	0.2320	0.1731			
0.3	0.5130	0.4367	0.3345	0.2490	0.1831			
0.4	0.5898	0.4704	0.3518	0.2586	0.1888			
0.5	0.6422	0.4917	0.3624	0.2644	0.1922			
0.6	0.6773	0.5053	0.3690	0.2680	0.1943			
0.7	0.7000	0.5138	0.3732	0.2703	0.1956			
0.8	0.7134	0.5188	0.3756	0.2716	0.1964			
0.9	0.7205	0.5213	0.3768	0.2723	0.1968			
1.	0.7225	0.5220	0.3771	0.2725	0.1969			

Notar que si $e=1$ y $|R_m| > 0$ la K_m aumenta monotonamente con m y $K_m \sim \frac{1}{m^2}$ mientras que si $e < 1$ y $|R_m| > 0$, K_m presenta un máximo para un cierto valor de m .

J. D. Kerwin Am. J. Phys. 50, 1152 (1972)

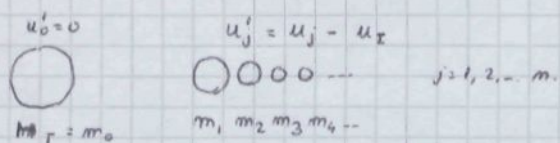
J. B. Hart and R. B. Hermann Am. J. Phys. 36, 56 (1968)

Joe Polow

III) Cadena de bolas en caída libre

La colisión de una cadena de bolas, colocadas una encima de la otra, que caen sobre la Tierra, es la misma que la considerada en la primera figura de C-3 cuando $m_0 = M_T$ es la masa de la Tierra y usamos un sistema de coordena-

des que se mueve, con relac'ón a la Tierra, con la velocidad de caída de las bolas exactamente igual a la que tienen estos cuando llegan a la Tierra. Indicaremos las nuevas coordenadas con primos. En la figura damos la situación antes del impacto



La ganancia de velocidad es

$$G'_m = \frac{u'_m}{u_T} = \frac{u_m - u_T}{u_T} = \frac{u_m}{u_T} - 1 \quad (1)$$

donde u_T es la velocidad con que llega al

suelo un cuerpo en caída libre desde una altura h . De aquí obtenemos

$$G'_m = G_m - 1 \quad (2)$$

$$E'_m = R_m (G_m - 1) = E_m - R_m$$

$$K'_m = R_m E_m^n - 2R_m E_m + R_m = K_m - 2E_m + R_m$$

y usando (C-4.5) obtenemos

$$G'_m = \frac{f^m}{\prod_{j=1}^m (1+r_j)} - 1 \quad r_j \equiv \frac{m_j}{m_{j-1}}, \quad j=1, 2 \quad (3)$$

Esto es la velocidad de la bola m es ($u'_m \equiv v_m$, $u_T \equiv v_0$)

$$v_m = \left\{ \frac{f^m}{\prod_{j=1}^m (1+r_j)} - 1 \right\} v_0 \quad (4)$$

Notar que $r_1 = m_1/m_0 = 0$. Entonces

$$m=2 \quad v_2 = \left\{ \frac{f^2}{(1+r_2)} - 1 \right\} v_0 = \frac{(e^2 + 2e) - m_2/m_1}{1 + m_2/m_1} v_0 \quad (5)$$

que coincide con (C-2.6)

$$m=3 \quad v_3 = \left\{ \frac{f^3}{(1+r_2)(1+r_3)} - 1 \right\} v_0 = \frac{(e^3 + 3e^2 + 3e) - \frac{m_2}{m_1} - \frac{m_3}{m_2} - \frac{m_3}{m_1}}{(1 + m_2/m_1)(1 + m_3/m_2)} v_0 \quad (6)$$

Casos particulares

1) $r_j = 0 \quad \forall j$. Entonces $v_m = (f^m - 1) v_0$ y la altura alcanzada es

$$H_m = (f^m - 1)^2 h \quad (7)$$

siendo h la inicial. Si $f=2$ entonces

$$H_2 = h, \quad H_3 = 9h, \quad H_4 = 49h, \quad H_5 = 225h, \dots \quad (8)$$

$$(v) \quad r_j = \frac{j-1}{j+1}$$

$$N_m = N_0 \left\{ \prod_{j=1}^m \left[1 + \frac{j-1}{j+1} \right]^{-1} - 1 \right\} = N_0 \left\{ \prod_{j=1}^m \frac{2j}{j+1} - 1 \right\} =$$

$$= N_0 \left\{ \left(\frac{2^m m!}{(m+1)!} \right) - 1 \right\} = N_0 \left\{ \left(\frac{1}{2} \right)^m (m+1) - 1 \right\} =$$

$$N_m = \left\{ \left(\frac{1}{2} \right)^m (m+1) - 1 \right\} N_0 \quad (1)$$

Si $e=1$ entonces

$$N_m = m N_0 \quad (2)$$

En este caso todas las otras bolas quedan paradas después del choque. En efecto: De la ecuación (C-3.4) ($e=1$)

$$N_{j-1} = \frac{m_{j-1} - m_j}{m_{j-1} + m_j} u_{j-1} = \frac{1}{j} u_j = \frac{1}{j} j u_1 = u_1 \Rightarrow N_{j-1} = 0 \quad \text{Q.E.D.} \quad (3)$$

J. D. Kenwim *Am. J. Phys.* 40, 1152 (1972)

(X) II Resplando

Recordemos que para la transmisión energética

$$K_m = \frac{R_m f^{2m}}{(1 + R_m^{1/m})^{2m}}, \quad f \approx 1+e, \quad r_1 = r_2 = \dots = r_m = R_m^{1/m} \quad (4)$$

¿Para un R_m y f dados, para qué valor de m K_m es máximo? Igualando a cero la derivada de K_m con respecto a m se obtiene

$$\ln f - \ln(1 + R_m^{1/m}) + \frac{1}{m} (\ln R_m) \frac{R_m^{1/m}}{1 + R_m^{1/m}} = 0$$

Introduciendo

$$x \equiv R_m^{1/m}$$

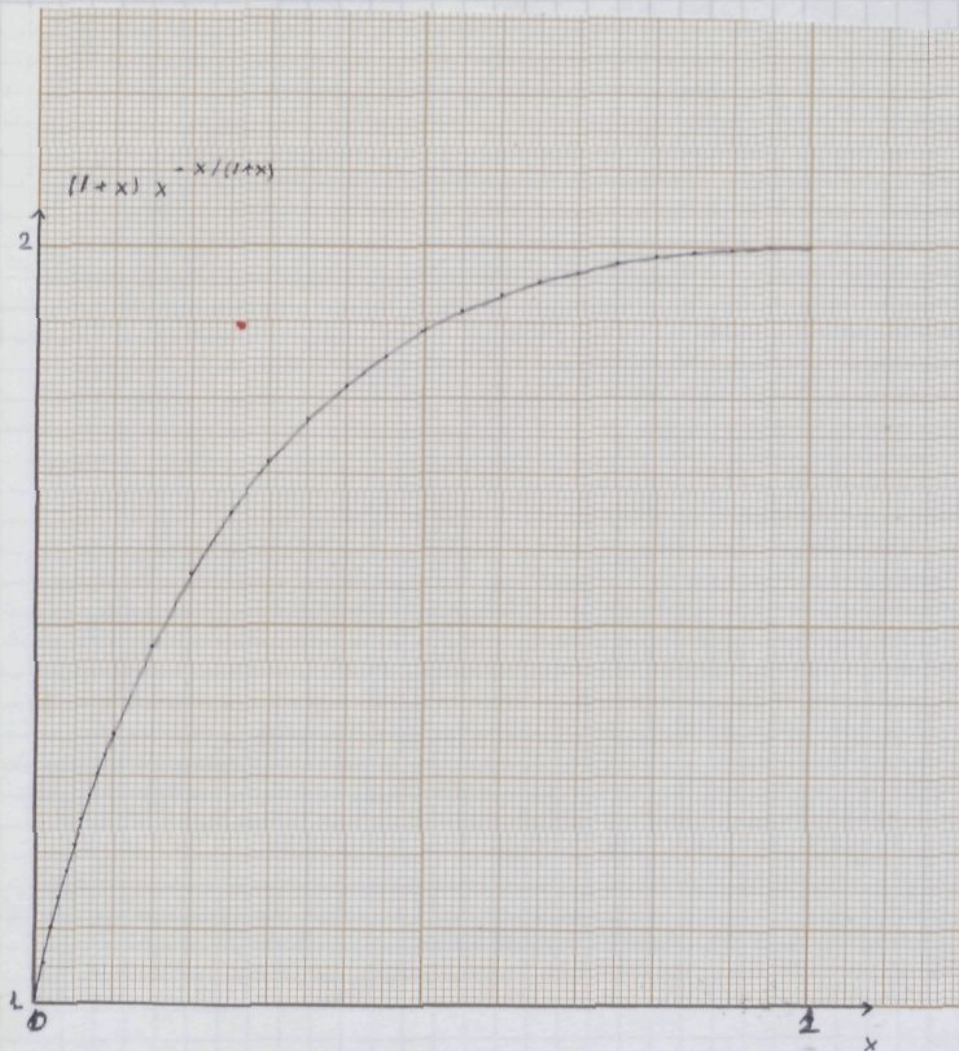
se obtiene

$$\ln(1+x) - \frac{x}{1+x} \ln x - \ln f = 0$$

$$\Rightarrow (1+x) x^{-x/(1+x)} = f \quad (5)$$

y entonces

$$K = \frac{f^{2m} x^m}{(1+x)^{2m}} \quad (6)$$



Supongamos que $f = 1.99$ entonces $x = 0.8181131$ y de aquí

$1/R$	n	K
1	1	0.980
2	3	0.942
3	5	0.904
4	7	0.869
5	8	0.852
6	9	0.835
7	10	0.818
8	10	0.818
9	11	0.802
10	11	0.802
20	15	0.740
30	17	0.711
40	18	0.697
50	19	0.683

Supongamos $f = 1.80$ entonces $x = 0.37856160$

$1/R$	m	K
1	1	0.645
2	1	0.645
4	1	0.645
6	2	0.417
8	2	0.417
10	2	0.417
20	3	0.269
30	4	0.174
40	4	0.174
50	4	0.174
100	5	0.112
200	5	0.112
300	6	0.072