FISICA NUCLEAR Y DE PARTICULAS

P. PASCUAL

30-09-95

FISICA NUCLEAR Y DE PARTICULAS

1. Núcleos - Neutrones y protones. Formalismo de isospín. Tamaño y forma de los núcleos. Fórmulas de Rutherford y Mott. Factores de forma de carga. Fórmula semiempírica de masas. Ley de desintegración exponencial. Desintegraciones α, β y γ. Fusión y Fisión.

2. Fuerzas nucleares - El pión: masa, isospín, spín y paridad. Teoría de Yukawa: OPEP. Descripción general de los potenciales nucleares. El deuterón: energía de ligadura, momento magnético y cuadrupolar.

3. Modelo de capas - Potencial cuadrado y oscilador armónico. Saxon-Woods. Acoplamiento spín-órbita. Modelo de capas y números mágicos. Momento magnético dipolar. Momento eléctrico cuadrupolar.

4. Transiciones multipolares - Planteamiento del problema. Transiciones multipolares eléctricas y magnéticas. Reglas de selección. Ordenes de magnitud en sistemas atómicos y nucleares. Reglas de selección en núcleos debidas al isospín. Formulas de Weisskopf.

5. Desintegración beta - Ecuación de Dirac. Teoría de Fermi. Transiciones de Fermi y de Gamow-Teller. Factor $F(Z,E)$. Valores de $ft_{1/2}$.

6. Partículas elementales - Leptones y quarks: propiedades. Extrañeza, encanto, ... SU(3). Mesones y hadrones. Multipletes de SU(3). Fórmulas de masas.

7. Interacciones - Interacción electromagnética como teoría gauge. Diagramas de Feynman. Resultados espectaculares. Cromodinámica cuántica: libertad asintótica. Teoría electrodébil.

MESONS

$\pi^{\pm}$	$J^{\pi} = 0^-$	$M = 139.6$ MeV	$\tau = 2.6 \times 10^{-8}$ s	$\mu^+\nu_\mu$	$u\bar{d}$, $d\bar{u}$
π^0	0^-	135.0	8.4×10^{-17}	$\gamma\gamma$	$(u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}$
$K^{\pm}$	0^-	493.7	1.2×10^{-8}	$\mu^+\nu_\mu$, $\pi^+\pi^0$	$u\bar{s}$, $\bar{u}s$
K^0, $\bar{K}^0$	0^-	497.7	K_S^0 0.89×10^{-10}	$\pi^+\pi^-$	$d\bar{s}$, $\bar{d}s$
			K_L^0 5.2×10^{-8}	$\pi^0\pi^0\pi^0$, $\pi^+\pi^-\pi^0$, $\pi^{\pm}\mu^{\mp}\nu_\mu$	
η	0^-	547.3	$\Gamma = 1.2$ keV	$\gamma\gamma$, $\pi^0\pi^0\pi^0$, ...	$c_1(u\bar{u} + \bar{d}d) + c_2 s\bar{s}$

BARYONS

p	$1/2^+$	938.3	$> 1.6 \times 10^{25}$ y		uud
n	$1/2^+$	939.6	8.9×10^2	$pe^-\bar{\nu}_e$	dds
Λ	$1/2^+$	1115.7	2.6×10^{-10}	$p\pi^-$, $n\pi^0$	uds
Σ^+	$1/2^+$	1189.4	0.80×10^{-10}	$p\pi^0$, $n\pi^+$	uus
Σ^0	$1/2^+$	1192.6	7.4×10^{-20}	$\Lambda\gamma$	uds
Σ^-	$1/2^+$	1197.4	1.5×10^{-10}	$n\pi^-$	dds
Ξ^0	$1/2^+$	1314.9	2.9×10^{-10}	$\Lambda\pi^0$	uss
Ξ^-	$1/2^+$	1321.3	1.6×10^{-10}	$\Lambda\pi^-$	dss

I - LOS NUCLEOS

Hoy día sabemos que toda la materia que nos rodea está formada por átomos. Un átomo neutro suele caracterizarse mediante dos números enteros positivos (A, Z) con $A \geq Z$, que se denominan peso atómico y número atómico, respectivamente y que tiene un tamaño de unos pocos Ångstrong ($1\,Å = 10^{-8}$ cm). El átomo esta constituido por un núcleo central formado por Z protones y $N \equiv A - Z$ neutrones, cuyo tamaño es de unos pocos fermi ($1\,fm = 10^{-13}$ cm) y una nube de Z electrones a su alrededor. De acuerdo con esto la materia esta constituida por protones (p), neutrones (n) y electrones (e) cuyas principales características son:

e | Masa : $0.510\,999\,06\,(15)\ MeV/c^2 =$

$= 5.485\,799\,03\,(13) \times 10^{-4}\ u$ (1)

Es frecuente medir la masa de las partículas en MeV/c^2

$$1\ MeV/c^2 = 1.782\,662\,70\,(54) \times 10^{-30}\ kg \quad (2)$$

o en unidades de masa atómica unificada (u)

$$1\ u = \frac{\text{masa del átomo } {}^{12}C}{12} = \frac{1\ g}{N_A\ mol} = 931.494\,32\,(28)\ MeV/c^2 \quad (3)$$

Spin : $1/2$

Se sobreentiende que es en unidades de $\hbar$

$$\hbar = 1.054\,572\,66\,(63) \times 10^{-34}\ J\,s$$
$$= 6.582\,122\,0\,(20) \times 10^{-22}\ MeV\,s \quad (4)$$

Carga : $-e$

$$e = 1.602\,177\,33\,(49) \times 10^{-19}\ C$$
$$= 4.803\,206\,8\,(15) \times 10^{-10}\ esu \quad (5)$$

Momento magnético $\mu = 1.001\,159\,652\,193\,(10)\ \mu_B$ (6)

μ_B = Magnetón de Bohr $= \frac{e\hbar}{2m_e} = 5.788\,382\,63\,(52) \times 10^{-11}\ MeV\,T^{-1}$ (7)

Momento dipolar eléctrico : $d = (-0.3 \pm 0.8) \times 10^{-26}$ e cm. (1)

Vida media $\tau > 2.7 \times 10^{23}$ años. (2)

p

$m = 938.272\ 31\ (28)$ MeV/c^2

$= 1.007\ 276\ 470\ (12)$ u (3)

Spin = 1/2

carga = + e

momento magnético : $\mu = 2.792\ 847\ 39\ (6)\ \mu_N$ (4)

μ_N = magnetón nuclear = $\frac{e\hbar}{2m_p} = 3.152\ 451\ 66\ (28) \times 10^{-14}$ MeV T^{-1} (5)

momento dipolar eléctrico: $d = (-4 \pm 6) \times 10^{-23}$ e cm (6)

Vida media $\tau > 1.6 \times 10^{25}$ años. (7)

Notar que experimentalmente

$$\left| 1 + \frac{q_p}{q_e} \right| < 1.0 \times 10^{-21}$$

La igualdad tan extraordinaria de estas dos cargas sólo puede explicarse, hoy día, suponiendo que existen monopolos magnéticos.

n

$m = 939.565\ 63\ (28)$ MeV/c^2

$= 1.008\ 664\ 904\ (14)$ u (8)

Spin = 1/2

carga = 0 $(-0.4 \pm 1.1) \times 10^{-21}$ e (9)

momento magnético $\mu = -1.913\ 042\ 8\ (5)\ \mu_N$ (10)

momento dipolar eléctrico $d < 11 \times 10^{-26}$ e cm. (11)

Vida media $\tau = 887.0 \pm 2.0$ s (12)

$m_n - m_p = 1.293\ 318\ (9)$ MeV/c^2 (13)

El único modo de desintegración conocido del neutrón es

$$n \longrightarrow p + e + \bar{\nu}_e \quad (14)$$

siendo ν_e el neutrino electrónico de spin 1/2 y $m_\nu < 7$ eV/c^2. Todas estas partículas tienen las correspondientes antipartículas que se denotan por una barra sobre su símbolo.

Una partícula y su correspondiente antipartícula tienen, de acuerdo con el teorema PCT, la misma masa y experimentalmente sabemos que

$$(m_{\bar{e}} - m_e)/m_e < 4. \times 10^{-8} \qquad (1)$$

$$\frac{m_{\bar{p}}}{m_p} = 0\ 9\ 9\ 9\ 9\ 9\ 9\ 9\ 9\ 8\ (4) \qquad (2)$$

Además la partícula y la antipartícula tienen todas sus cargas de igual valor absoluto y signos opuestos. Es bien conocida la carga eléctrica que es aditivamente conservada en todos los procesos. Si la carga eléctrica no se conservara podría tener lugar la desintegración $n \to p + \nu_e + \bar{\nu}_e$, que nunca ha sido observada

$$\frac{\Gamma(n \to p + \nu_e + \bar{\nu}_e)}{\Gamma(n \to p + e + \bar{\nu}_e)} < 9 \times 10^{-24} \qquad (3)$$

Existen otros tipos de números cuánticos aditivamente conservados que suelen llamarse cargas o números

Carga bariónica : $B_p = B_n = +1$, $B_e = B_{\nu_e} = 0$

Carga leptónica electrónica : $L_p = L_n = 0$, $L_e = L_{\nu_e} = +1$.

Estas cargas son conservadas en todas las interacciones conocidas.

Recuérdese que la velocidad de la luz es definida como

$$c = 2\ 9\ 9\ 7\ 9\ 2\ 4\ 5\ 8\ \ m\,s^{-1} \qquad (4)$$

y es frecuente usar sistemas de unidades en los que $\hbar = c = 1$.

Antes de continuar se deberá considerar la transformación de paridad, P, que refleja, con respecto al origen de coordenadas, el equipo experimental de preparación de estados. Esta reflexión es descomponible en producto de una rotación por una reflexión especular. Conviene darse cuenta, sin embargo, de que puede haber situaciones físicas cuya imagen especular no sea físicamente realizable. Los datos experimentales conocidos apoyan la hipótesis de que los neutrinos son partículas de helicidad $-\hbar/2$, por lo que su imagen especular no es realizable como neutrino. En los restantes casos, el operador U_P, correspondiente a la transformación de paridad, debe ser tal

que

$$U_p \, \vec{r}_i \, U_p^+ = -\vec{r}_i$$
$$U_p \, \vec{p}_i \, U_p^+ = -\vec{p}_i \qquad (1)$$
$$U_p \, \vec{S}_i \, U_p^+ = +\vec{S}_i$$

donde se ha adoptado para $\vec{S}_i$ la ley de transformación del momento angular orbital, que es deducible inmediatamente de las dos primeras. El hecho de que tanto $\vec{r}_i$ como $\vec{p}_i$ cambien simultaneamente de signo bajo la transformación de paridad, y que, por tanto, se preserve la ley de conmutación de estos observables, implica que el operador U_p habrá de ser unitario.

El operador U_p así definido es tal que U_p^2 conmuta con todos los operadores de un conjunto irreducible de observables, y, por tanto, debe ser un multiplo del operador unidad. Siendo además unitario, es evidente que $U_p^2 = e^{i\alpha} I$, donde α es un número real. Se eligió la fase de U_p de forma que $U_p^2 = I$ y, por tanto, $U_p = U_p^+$; es decir es autoadjunto. Con esta elección de fase, el operador U_p es un observable con valores propios ± 1. Al observable U_p se le llama <u>paridad</u>.

Si, para mayor sencillez, se considera una partícula A de spin S en un estado $|\vec{r}, m\rangle$, donde m es la proyección (en unidades de $\hbar$) del spin en una dirección fija, entonces el operador U_p actúa de la forma

$$U_p \, |\vec{r}, m\rangle = \eta_A \, |-\vec{r}, m\rangle \qquad (2)$$

y por tanto

$$(U_p \, \psi)_m (\vec{r}) = \eta_A \, \psi_m (-\vec{r}) \qquad (3)$$

donde $\eta_A = \pm 1$, y se denomina <u>paridad intrinseca</u> de la partícula A o <u>paridad</u>. La no-dependencia de η_A de $\vec{r}, m$ es consecuencia inmediata de la segunda y tercera relaciones de (1).

Si sucede que $\psi_m (-\vec{r}) = \eta_\psi \, \psi_m (\vec{r})$, entonces $\eta_A \eta_\psi$ recibe el nombre de paridad del estado considerado, y de acuerdo con lo dicho antes, sus valores posibles son ± 1. Estas consideraciones pueden extenderse sin dificultad a un sistema de N partículas. La acción de la paridad sobre una función de onda de tal sistema es

$$(U_P\ \psi)_{m_1, m_2, \ldots, m_N}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N) = \eta_1 \eta_2 \cdots \eta_N\ \psi_{m_1, m_2 \ldots m_N}(-\vec{r}_1, -\vec{r}_2, \ldots -\vec{r}_N) \qquad (1)$$

donde η_i es la paridad intrínseca de la partícula i.

En aquellas circunstancias en que el número y tipo de partículas se mantienen constantes a lo largo de un proceso, las paridades intrínsecas son irrelevantes, pues su producto afecta por igual a todos los estados. Sin embargo, en procesos en que el número y/o la naturaleza de las partículas cambia, la asignación de las paridades intrínsecas es, en general, importante. Lo mismo sucede si, aun manteniéndose el número y tipo de las partículas constituyentes, sus agregaciones inicial y final son distintas, pero queremos describir tales agregados como partículas, sin detallar su estructura interna. En este último caso, si, por ejemplo, consideramos una partícula A, que es un estado ligado de otras dos B y C con momento angular relativo L, entonces la paridad intrínseca de A debe tomarse $\eta_A = (-1)^L \eta_B \eta_C$, pues $Y_L^M(-\hat{r}) = (-1)^L Y_L^M(\hat{r})$.

El hecho de que el comportamiento de un sistema físico sea invariante bajo la reflexión espacial o paridad significa que si en un instante inicial lo preparamos un estado $|\Psi(t_0)\rangle$ y su imagen bajo paridad $U_P|\Psi(t_0)\rangle$, éstos evolucionarán con el tiempo de forma que $U(t, t_0)\, U_P\, |\Psi(t_0)\rangle$ seguirá siendo, para todo t, la imagen de $U(t, t_0)\,|\Psi(t_0)\rangle$ bajo P. Debido a la ley de conservación del momento angular, esto equivale a decir que la imagen especular de la evolución temporal de un estado es físicamente realizable con la misma dinámica, pues la operación de reflexión en un plano es equivalente a una operación de paridad seguida por una rotación de ángulo π alrededor de un eje perpendicular al plano considerado.

Al no ser la paridad una invariancia, universal, según veremos, nos es necesario recordar aquí algunos hechos sobre las fuerzas básicas de la naturaleza. Hasta comienzos de la década de los setenta, se postulaban cuatro tipos de interacciones fundamentales entre las partículas elementales: las <u>gravitacionales</u>, las <u>débiles</u>, las <u>electromagnéticas</u> y las <u>fuertes</u>, ordenadas por intensidades crecientes. Las fuertes son necesarias para explicar, entre otros fenómenos, la estabilidad de los núcleos atómicos, las débiles son responsables de procesos tales como la desintegración del neutrón; y las electromagnéticas y gravitacionales, únicas que se manifiestan ostensiblemente a nivel macroscópico, dan cuenta de la existencia de átomos, moléc-

culas, etc, y de la gravedad, respectivamente. Estas cuatro clases de interacciones se diferencian enormemente, a bajas energías, en intensidad y/o alcance.

Multiples resultados experimentales de los últimos veinticinco años han evidenciado que los componentes fundamentales de la materia son los leptones (electrón, muón, tauón y neutrinos asociados) y los quarks (u, d, s, c, b, t, cada uno en tres estados de color distintos). Estos leptones y quarks, todos ellos de spin 1/2, interaccionan entre sí mediante el intercambio de partículas de spin entero (fotón, $W^{\pm}$, Z^{0}, gluones, gravitón (?)). Movidos por un impulso simplificador, Glashow-Salam-Weinberg propusieron un modelo, conocido como teoría electrodébil, en el que las interacciones electromagnéticas y débiles aparecen englobadas en un mismo esquema, y sólo para energías muy inferiores a $M_W \simeq M_Z \simeq 10^2 M_p$ aparecen diferenciadas y con sus características ordinarias. Sus distintos alcances e intensidades se explican por la masa nula del fotón (transmisor de las interacciones electromagnéticas) y las masas grandes de los $W^{\pm}$ y Z (transmisores de las débiles).

Existe, por otra parte, la llamada cromodinámica cuántica que da cuenta de las interacciones fuertes entre los quarks por el intercambio de un octete de gluones. Si bien esta teoría ha cosechado éxitos experimentales, se está aún lejos de deducir con ella las interacciones fenomenológicas fuertes entre los hadrones (sistemas incoloros de quarks y antiquarks, como los nucleones, piones, etc). Finalmente, se trabaja con ahínco en la búsqueda de teorías que unifiquen las interacciones electrodébiles con la cromodinámica e incluso con las gravitacionales. Para la primera unificación se han propuesto los modelos de gran unificación (GUT) (una de cuyas predicciones más notables es, que al violar la conservación del número bariónico y del leptónico, la inestabilidad del protón, y que apuntan posibles soluciones a importantes problemas cosmológicos), en alguno de los cuales se incluye un nuevo tipo de simetría, llamada supersimetría. Estas supersimetrías abren un camino para la inclusión de las interacciones gravitacionales, aunque la situación actual es incierta. Parece ser que otra vía prometedora para la total unificación es mediante la teoría de supercuerdas.

Interesándonos de momento en problemas de baja energía, para los que los efectos residuales de la unificación son muy pequeños (aunque algunos sí observables en medidas de gran precisión), mantendremos la clasificación tradicional de las

cuatro interacciones. Las intensidades se suelen caracterizar por las constantes de acoplamiento escritas en forma adimensional:

i) Gravitacional

Constante de Newton $G_N = 6.672\,59\,(85) \times 10^{-11}\ m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}$ (1)

Constante de estructura fina gravitacional $\alpha_G \equiv \frac{G M_p^2}{\hbar c} =$

$= 5.904\,64\,(76) \times 10^{-39}$ (2)

ii) Débiles

Constante de Fermi $G_F = 1.166\,39\,(2) \times 10^{-5}\ (\hbar c)^3\ GeV^{-2}$ (3)

Constante adimensional $\frac{G_F M_p}{\hbar^3 c} = 1.094\,39\,(2) \times 10^{-5}$

iii) Electromagnéticas

Carga del protón $e = 4.803\,206\,8 \times 10^{-10}$ esu (4)

Constante de estructura fina $\alpha \equiv \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137.035\,989\,5\,(61)}$ (5)

iv) Fuertes

No existe en la teoría clásica de las interacciones fuertes una constante de acoplamiento única y se puede escribir

$$\frac{g^2}{4\pi\hbar c} \sim 1 - 10 \qquad (6)$$

La debilidad de α_G explica la irrelevancia de la interacción gravitacional en núcleos, átomos y moléculas.

Tras este inciso, pasaremos a continuación a exponer alguna evidencia experimental relacionada con la cuestión de la conservación o violación de la paridad. En primer lugar, consideraremos un sistema nuclear cuya estructura, como se sabe, está básicamente gobernada por las interacciones fuertes y electromagnéticas. Supondremos para este sistema $[H, U_P] = 0$, lo cual implica que para cada nivel nuclear existen estados nucleares de paridad $\Pi\,(\pm 1)$ bien definida. La complejidad de H para un sistema nuclear hará que en la práctica los niveles energéticos no presenten degeneración de paridad, si ésta se conserva. De hallar niveles de paridad no definida, habría que atribuir su exis-

tencia a una violación de $\mathcal{P}$. Para ver hasta que punto esto es cierto, consideremos un estado nuclear con spin-paridad J^Π que puede sufrir una desintegración α a un estado nuclear final de spin-paridad 0^+. Como la partícula α tiene spin-paridad 0^+, la ley de conservación del momento angular implica que el momento angular orbital del estado final debe ser $L = J$, con lo cual la función de onda que describe el movimiento relativo de los dos núcleos finales será de la forma $R(r)\, Y_J^M(\theta, \phi)$. Teniendo en cuenta que las coordenadas esféricas de $(-\vec{r})$ son $(r, \pi - \theta, \phi + \pi)$, el efecto del operador paridad sobre la función de onda del movimiento relativo es

$$U_p\,;\; R(r)\, Y_J^M(\theta, \phi) \longrightarrow R(r)\, Y_J^M(\pi - \theta, \phi + \pi) = (-1)^J R(r)\, Y_J^M(\theta, \phi) \tag{1}$$

La paridad inicial es $\Pi_i = \Pi$; la final es $\Pi_f = (+1)(+1)(-1)^J = (-1)^J$. Por tanto, la conservación de la paridad implica que estas desintegraciones α son únicamente posibles si $\Pi = (-1)^J$, es decir, si el estado inicial es $J^\Pi = 0^+, 1^-, 2^+, \ldots$. Según esto, debe estar prohibida la transición

$$^{16}O\,(2^-;\ 8.88) \longrightarrow {}^{12}C\,(0^+;\ \text{e.f.}) + \alpha + 7.148\ \text{MeV} \tag{2}$$

donde e.f. significa estado fundamental y 8.88 es la energía de excitación, expresada en MeV, del estado excitado del ^{16}O que se considera. La anchura de este proceso Γ_α ha sido medida, y se ha encontrado $\Gamma_\alpha = (1.8 \pm 0.8) \times 10^{-10}$ eV. Si el estado inicial tuviera análogas características, pero su paridad fuera positiva, se puede estimar que la anchura correspondiente sería $\Gamma_\alpha^{(+)} \simeq 6 \times 10^4$ eV. Ahora bien, si el estado inicial no tuviera paridad bien definida se podría escribir su función de onda

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{1 + |\epsilon|^2}} \left[\psi_- + \epsilon\, \psi_+ \right] \tag{3}$$

donde ψ_Π son funciones de onda normalizadas con paridad Π y ϵ es un parámetro del orden de magnitud de la razón de las intensidades de las fuerzas que violan la paridad a las fuerzas que la conservan. Entonces

$$\Gamma_\alpha \simeq \frac{|\epsilon|^2}{1 + |\epsilon|^2}\, \Gamma_\alpha^{(+)} \tag{4}$$

de donde $|\epsilon| \simeq 5 \times 10^{-8}$. Es conveniente darse cuenta de que, aun cuando la

paridad fuera exactamente conservada en las interacciones fuertes y electromagnéticas, no es de esperar que $\epsilon = 0$, pues como las interacciones débiles intervienen también en la estructura nuclear y violan, como veremos, la paridad, pueden originar valores de ϵ pequeños, pero no nulos. Se han realizado cálculos de Γ_α suponiendo que sólo las interacciones débiles violan paridad, y se llega para esta cantidad a valores teóricos que están en buen acuerdo con los datos experimentales. De argumentos de este tipo logra inferirse que las interacciones fuertes y electromagnéticas pueden conservar la paridad de forma exacta, pero que no es posible descartar en las interacciones fuertes (electromagnéticas) la presencia de una parte que viole la paridad, siempre que esté deprimida por un factor al menos del orden de 10^{-8} (10^{-5}) frente a la que la conserve.

Podría objetarse en principio la argumentación anterior imaginando un nivel nuclear degenerado accidentalmente bajo paridad, de forma que tuviera estados pares e impares, y, por tanto, que no fuese necesario recurrir a violación de paridad para explicar la presencia de ψ_+ y ψ_-. Ahora bien, en tales circunstancias, la excitación del núcleo a tal nivel produciría una mezcla estadística de estados pares e impares, de proporciones paridad, y, por tanto, la anchura de su desintegración α sería $N\,\Gamma_\alpha^{(+)}/2$, en contra de la evidencia experimental.

Pasemos a continuación a discutir un experimento que demuestra la no-conservación de la paridad en las interacciones débiles. Fueron T.D. Lee y C.N. Yang, en 1956, los primeros en postular que, contra lo que se venía creyendo, la paridad no sólo no se conservaba en las interacciones débiles, sino que, además, se violaba al máximo, es decir, que para las interacciones débiles las amplitudes de transición que conservan y violan paridad eran de la misma intensidad. Para confirmar este postulado, C. Wu y sus colaboradores estudiaron la desintegración β:

$$^{60}Co\,(5^+;\ g.f.) \longrightarrow {}^{60}Ni\,(4^+;\ 2.505) + e^- + \bar{\nu}_e \qquad (1)$$

midiendo la correlación entre la dirección de salida de los electrones y la de la polarización del núcleo original. En la figura 10.1 se representa

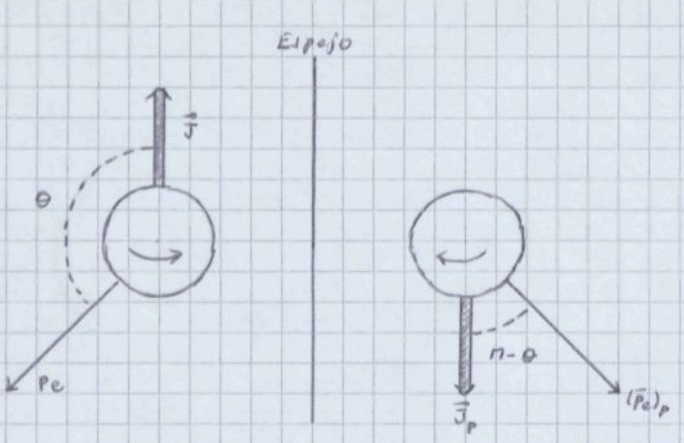


Fig 10.1

este proceso y su imagen especular. Si la paridad fuera conservada, la imagen especular sería dinámicamente posible y, por tanto, el número de electrones emitidos formando un ángulo θ entre la dirección de salida del electrón y la del spin del núcleo original debería ser igual al número de electrones emitidos con ángulo $\pi-\theta$. En el modelo propuesto por Lee y Yang, en que la paridad se violaba al máximo, la distribución angular de los electrones emitidos venía dada por

$$W(\theta) = 1 - \frac{\langle J_{iz}\rangle}{J_i}\,\frac{v}{c}\cos\theta \qquad (1)$$

donde J_i es el spin del núcleo original, v es la velocidad del electrón saliente y $\langle J_{iz}\rangle / J_i$ mide el grado de polarización de la muestra original. Los resultados de la experiencia mencionada, que revelaron la dependencia en $\cos\theta$ para esta distribución angular, constituyeron la primera evidencia de que la ley de la conservación de la paridad se violaba en las interacciones débiles. Posteriores experiencias en física nuclear y con partículas elementales han establecido claramente este hecho, así como que, con un error de una parte en 10^3, se puede afirmar que la violación es la máxima posible.

En la interpretación de todas estas experiencias hay que tener en cuenta que si intervienen N partículas (contados los iniciales y finales) con momentos $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_N$ y spines $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \dots, \vec{s}_N$ enteros, si la paridad se conserva, la función de distribución $W(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_N ; \vec{s}_1, \vec{s}_2, \dots, \vec{s}_N)$, que representa la probabilidad de transición de un estado inicial a otro final, debe satisfacer la relación

$$W(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_N ; \vec{s}_1, \vec{s}_2, \dots, \vec{s}_N) = W(-\vec{p}_1, -\vec{p}_2, \dots -\vec{p}_N ; \vec{s}_1, \vec{s}_2, \dots, \vec{s}_N) \qquad (2)$$

lo cual implica que en cualquier proceso en que la paridad se conserve, los valores medios de cantidades pseudoescalares tales como $\vec{p}_i \cdot \vec{s}_j$, $(\vec{p}_i \times \vec{p}_j)\cdot \vec{p}_k$, etc.,

deben ser nulos.

Finalmente, como las interacciones fuertes y electromagnéticas conservan la paridad, y el intercambio de fotones y gluones no cambia el tipo de quark, es posible fijar arbitrariamente las paridades intrínsecas de cada quark, y suelen tomarse como +1. Argumentos de teoría de campos cuánticos relativistas y locales exigen entonces paridad intrínseca −1 para los antiquarks. Con este convenio, las paridades de los hadrones quedan en principio determinadas, a través de su constitución, y se sabe por ejemplo, que $\eta_p = \eta_n = +1$, $\eta_\pi = \eta_K = -1$, de acuerdo en estos dos últimos casos con los datos experimentales. Independientemente del modelo quark como en la naturaleza un neutrón sólo puede convertirse en protón mediante una interacción débil entonces podemos elegir arbitrariamente

$$J_p^\pi = J_n^\pi = 1/2^+ \qquad (1)$$

Independientemente de las simetrías espacio-temporales, existen en física las llamadas <u>simetrías internas</u>, muy importantes en el desarrollo de la física nuclear y en la teoría de las partículas elementales. De momento limitaremos nuestra discusión al <u>isospín</u> o <u>spín isotópico</u>. Las dos partículas constituyentes de los núcleos atómicos son el protón y el neutrón, partículas de spín-paridad $1/2^+$, con las propiedades dadas en la página 2. Las propiedades de estas partículas son esencialmente debidas al efecto conjunto de las interacciones fuertes, electromagnéticas y débiles. Fue W. Heisenberg el primero en plantearse, en 1932, el problema de cómo se verían modificadas esas propiedades si sólo las interacciones fuertes existieran en la naturaleza. Como el neutrón se desintegra únicamente según el canal débil $n \to p + e + \bar{\nu}_e$, al desaparecer las interacciones débiles tanto el protón como el neutrón serían partículas estables (ignoramos su posible inestabilidad a través de procesos típicos de los modelos de gran unificación). Por otra parte, el concepto de carga eléctrica y momento magnético dejan de tener sentido si no existen las interacciones electromagnéticas. Si se supone que la pequeña diferencia de masas entre el protón y el neutrón es de origen electromagnético, entonces podremos ya afirmar que en ausencia de interacciones débiles y electromagnéticas, el neutrón y el pro-

trón son dos partículas indistinguibles; se usa la palabra nucleón para indicar cualquiera de ellas.

Es sabido que en ausencia de campos electromagnéticos externos que fijen alguna dirección privilegiada en el espacio no pueden haber fenómenos observables que dependan de que el valor de la tercera componente del spin del electrón sea $+1/2$ o' $-1/2$ en una dirección de cuantificación elegida arbitrariamente, y esto es debido a la invariancia del hamiltoniano bajo el grupo de rotaciones. De forma totalmente análoga, se puede argumentar que el hecho de que el neutrón y el protón sean indistinguibles, en ausencia de interacciones electromagnéticas y débiles, es debido a que el hamiltoniano es invariante bajo rotaciones en algún espacio interno, que suele denominarse espacio de isospin. El álgebra de este grupo de rotaciones es la del $SU_T(2)$, donde T indica que la rotación tiene lugar en este espacio interno. Se tiene, por tanto, que el Hamiltoniano con sólo las interacciones fuertes, H_f, es tal que si $G \in SU_T(2)$, entonces $[H_f, U_G] = 0$, donde U_G es el operador unitario que implementa G, mientras que el Hamiltoniano total $H = H_f + H_{em} + H_d$, que incluye también las interacciones electromagnéticas y débiles, debe cumplir $[H, U_G] \neq 0$, pues se sabe que en el mundo real existen marcadas diferencias entre el neutrón y el protón.

El protón y el neutrón corresponden a la representación $\mathcal{D}^{(1/2)}$ de $SU_T(2)$, y se dice que el nucleón tiene isospin $1/2$. Se suele tomar, arbitrariamente, la siguiente identificación:

$$|p\rangle \equiv |T = 1/2,\ T_3 = +1/2\rangle$$

$$|n\rangle \equiv |T = 1/2,\ T_3 = -1/2\rangle \qquad (1)$$

Una consecuencia de que H_f sea invariante bajo $SU_T(2)$ es que en cada nivel energético de un núcleo (A, Z) existen, en ausencia de interacciones electromagnéticas y débiles, estados con valores bien definidos del isospin T y de su tercera componente T_3. En general, dada la compleja dinámica de un núcleo, sus niveles no presentan degeneración accidental y poseen un T bien determinado. Para un núcleo dado el valor de T_3 es fija y viene determinado por la ley de suma de terceras componentes, es decir

$$T_3 = \frac{1}{2}\,(\text{Número de protones} - \text{Número de neutrones}) = Z - A/2 \qquad (1)$$

Por otra parte, si en el núcleo (A,Z) existe un nivel $(T, T_3 = Z-A/2)$, entonces deberían existir los niveles (T,T), $(T,T-1)$, ... $(T,-T+1)$, $(T,-T)$ en los núcleos $(A, A/2+T)$, $(A, A/2+T-1)$, ..., $(A, A/2-T+1)$, $(A, A/2-T)$, respectivamente, con la misma energía e idéntico valor del spin-paridad, pues los operadores de $SU_T(2)$ no pueden cambiar el valor de estas cantidades. El conjunto de estos estados se dice que forman un <u>isomultiplete</u>. Para ver hasta qué punto esto es cierto, consideremos algunos isomultipletes que han sido observados y comparemos sus energías.

El estado fundamental del ^{14}C, el estado de energía (de excitación) 2.312 MeV del ^{14}N y el estado fundamental del ^{14}O forman un isotriplete, con $J^\pi = 0^+$ y valores de $T_3 = -1, 0, +1$, respectivamente. Las diferencias de energía entre los estados atómicos correspondientes son

$$\begin{aligned} E(^{14}O) - E(^{14}N) &= 2.835 \ \text{MeV} \\ E(^{14}N) - E(^{14}C) &= 2.157 \ \text{MeV} \end{aligned} \qquad (2)$$

Teniendo en cuenta que $M_n - M_p = 1.293\,318\,(9)\ \text{MeV}/c^2$ y que $M_e = 0.510\,999\,06\,(15)\ \text{MeV}/c^2$, la corrección a llevar a cabo para tener en cuenta la diferencia de masas neutrón-protón, así como la presencia de un número distinto de electrones en cada caso, es añadir a las cantidades anteriores $(1.293\,32 - 0.510\,001) = 0.782\,32\ \text{MeV}$, con lo cual se obtiene para las diferencias de energías entre los estados nucleares, corregidas de la diferencia de masas neutrón-protón, los valores

$$\begin{aligned} E_N(^{14}O) - E_N(^{14}N) &= 3.617 \ \text{MeV} \\ E_N(^{14}N) - E_N(^{14}C) &= 2.939 \ \text{MeV} \end{aligned} \qquad (2)$$

Estas diferencias, de ser cierto que H_f es invariante bajo $SU_T(2)$, serán debidas fundamentalmente a las fuerzas electromagnéticas repulsivas entre protones. El cálculo de esta corrección energética no es sencillo. Aproximando la energía coulombiana de un núcleo mediante la fórmula

$$E_C(A,Z) \simeq \frac{3Z^2\alpha}{5R}\left\{1 - 5\left(\frac{3}{16\pi Z}\right)^{2/3}\right\} \qquad (3)$$

donde R es el radio nuclear que como veremos viene dado por $R \simeq 1.25 A^{1/3}$ fm., se encuentra

$$E_c(^{14}O) - E_c(^{14}N) = 3.730 \text{ MeV}$$
$$E_c(^{14}N) - E_c(^{14}C) = 3.150 \text{ MeV} \qquad (1)$$

que están en buen acuerdo con los resultados experimentales si se tienen en cuenta la imprecisión de éstos y la aproximación usada para E_c.

Otro ejemplo típico es el isocuadruplete ($T=3/2$) formado por: el nivel fundamental del ^{33}P, el de energía 5.48 MeV del ^{33}S, el de energía 5.56 MeV del ^{33}Cl y el fundamental del ^{33}Ar, todos ellos de spin paridad $1/2^+$ y con valores de T_3, respectivamente, $-3/2$, $-1/2$, $+1/2$, $+3/2$. De las tablas, se deduce que las diferencias de energías entre los estados nucleares corregidos de la diferencia de masas neutron-proton son

$$E_N(^{33}Ar) - E_N(^{33}Cl) = 6.82 \text{ MeV}, \quad E_N(^{33}Cl) - E_N(^{33}S) = 6.43 \text{ MeV}, \quad E_N(^{33}S) - E(^{33}P) = 6.014 \text{ MeV} \qquad (2)$$

y las diferencias entre las energías coulombianas, calculadas mediante (13.3), son

$$E_N(^{33}Ar) - E_N(^{33}Cl) = 6.973 \text{ MeV}, \quad E_N(^{33}Cl) - E_N(^{33}S) = 6.553 \text{ MeV}, \quad E_N(^{33}S) - E(^{33}P) = 6.133 \text{ MeV}, \qquad (3)$$

en buen acuerdo con los datos anteriores, si se tienen en cuenta los errores.

Otro lugar para comprobar la validez de la simetría $SU_T(2)$ es el estudio de las reacciones nucleares, que al venir mediadas básicamente por las interacciones fuertes, deben conservar el isospín. Se han estudiado, por ejemplo, las reacciones

$$d\,(1^+;\ \text{e.f.};\ T=0) + {}^{16}O\,(0^+;\ \text{e.f.};\ T=0) \longrightarrow {}^{14}N + \alpha\,(0^+;\ \text{e.f.};\ T=0) \qquad (4)$$

para distintos estados posibles del núcleo ^{14}N, y en particular la producción de los estados $^{14}N\,(1^+;\ \text{e.f.};\ T=0)$ y $^{14}N\,(0^+;\ 2.312;\ T=1)$. La conservación del isospín implica que no puede producirse este último estado. Usando deuterones de 24 MeV se encontró que el estado excitado considerado era producido únicamente un (0.7 ± 0.6) por ciento de las veces que se produció el estado fundamental. Es muy posible que la baja producción del estado excitado sea debida en gran parte a la regla de selección considerada, pero no

puede descartarse que una parte de esta inhibición se deba al mecanismo de reacción causante de esta transición.

Más adelante veremos otros ejemplos que apoyan la validez de esta simetría. Finalmente, añadiremos que el concepto de isospin puede ser útil también en el estudio de las interacciones electromagnéticas y débiles, pues parece ser que los hamiltonianos que describen estas interacciones constan de unos pocos términos, cada uno de los cuales tiene un carácter tensorial bien definido bajo $SU_I(2)$.

La cromodinámica cuántica permite entender el origen de esta simetría de isospin. Si las masas de todos los tipos de quarks que aparecen en las ecuaciones de dicha teoría fuesen iguales, esas ecuaciones serían invariantes bajo un grupo $SU(N)$ siendo N el número de tipos de quarks (= «sabores»), y, por tanto, también las interacciones fuertes entre hadrones. En realidad esto no es así, pero, sin embargo, las masas de los quarks u y d son mucho más pequeñas que las masas de cualquier hadrón y subsiste todavía, en muy buena aproximación, la invariancia bajo un grupo $SU(2)$, que es el de isospin.

Ya hemos dicho antes, que argumentos de teoría de campos cuánticos relativistas y locales exigen que el antiprotón y el antineutrón tengan spin-paridad $1/2^-$. Surge ahora la pregunta: ¿Cómo asignar los estados físicos $|\vec{p}\rangle$ y $|\vec{n}\rangle$ con los estados matemáticos $|I=1/2,\ I_3=+1/2\rangle$ y $|I=1/2,\ I_3=-1/2\rangle$? Definiremos la transformación de simetría <u>conjugación partícula - antipartícula</u> o <u>conjugación de carga</u> como una correspondencia biyectiva de un sistema físico en otro sistema físico en el que la partícula es substituida por la antipartícula correspondiente. Sea U_C el operador que implementa esta simetría. Este operador es unitario y como una nueva aplicación del mismo nos reproduce el sistema original se puede escribir

$$U_C\,|\text{partícula}\rangle = |\text{antipartícula}\rangle \equiv |\overline{\text{partícula}}\rangle \qquad (1)$$

$$U_C = U_C^{+} \quad , \quad U_C^2 = I$$

Sea $R \in SU_2(I)$ y R el operador unitario que implementa esta rotación

entonces

$$|T\,T_3\rangle \xrightarrow{R} R\,|T\,T_3\rangle = \sum_{T_3'} D^{(T)}(R)_{T_3' T_3}\,|T\,T_3'\rangle \tag{1}$$

Si en teoría cuántica de campos deseamos leyes de transformación simples y locales para los campos veremos, más adelante, que

$$|\overline{T}\,\overline{T_3}\rangle \xrightarrow{R} R\,|\overline{T}\,\overline{T_3}\rangle = \sum_{T_3'} \left\{ D^{(T)}(R)_{T_3' T_3} \right\}^{*} |\overline{T_3}\,\overline{T_3'}\rangle \tag{2}$$

de donde se deduce que

$$\langle T\,T_3' \,|\, R \,|\, T\,T_3\rangle = \langle \overline{T_3}\,\overline{T_3'} \,|\, R \,|\, \overline{T}\,\overline{T_3}\rangle^{*} \tag{3}$$

Teniendo en cuenta que R en función de $\vec{T}$ puede expresarse como

$$R = e^{-i\theta\,\hat{m}\cdot\vec{T}} \tag{4}$$

se obtiene inmediatamente que

$$\langle T\,T_3' \,|\, T\,T_3\rangle = \langle \overline{T}\,\overline{T_3'} \,|\, \overline{T}\,\overline{T_3}\rangle^{*}\,, \qquad \langle T\,T_3' \,|\, \vec{T} \,|\, T\,T_3\rangle = -\langle \overline{T}\,\overline{T_3'} \,|\, \vec{T} \,|\, \overline{T}\,\overline{T_3}\rangle^{*} \tag{5}$$

y como por definición $U_c\,|T\,T_3\rangle = |\overline{T}\,\overline{T_3}\rangle$ se obtiene

$$\vec{T}^{\,*} = -\,U_c\,\vec{T}\,U_c \tag{6}$$

y en la representación usual en la que T_3 es diagonal y T_2 imaginaria pura.

$$T_1 = -\,U_c\,T_1\,U_c\,, \qquad T_2 = +\,U_c\,T_2\,U_c\,, \qquad T_3 = -\,U_c\,T_3\,U_c \tag{7}$$

La última relación implica que el valor de T_3 para la partícula y la anti-partícula deben ser opuestos. Usando (5) se obtiene que, salvo fase no esencial, las asignaciones correctas de los antipartículas son

$$|\bar{n}\rangle = +\,|1/2\;\;1/2\rangle\,, \qquad |\bar{p}\rangle = -\,|1/2\;-1/2\rangle \tag{8}$$

Hasta aquí hemos considerado los protones y neutrones que son los componentes de los núcleos atómicos y ahora deseamos discutir el tamaño y la forma de los mismos. La información que poseemos sobre el tamaño y forma de los núcleos atómicos provienen, en general, del análisis de

experiencias en las que se hace colisionar un haz de partículas de prueba con el núcleo que se desea estudiar. Recordar que si se desean ver detalles de tamaño d es necesario que la longitud de onda, λ, asociada a la partícula de prueba sea del orden de magnitud de d. La longitud de onda asociada a una partícula de prueba de masa M y momento p es

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{2\pi\hbar c}{\sqrt{E^2 - M^2c^4}} = \frac{197.327\,053\,(59)\ \text{MeV fm}}{\sqrt{E^2 - M^2c^4}} \qquad (1)$$

donde $E = [p^2c^2 + M^2c^4]^{1/2}$ es la energía de dichas partículas. En el estudio de la estructura nuclear se suelen usar electrones como partículas de prueba, pues al no sufrir estos las interacciones fuertes la interpretación de los resultados experimentales es más simple. De acuerdo con (1) son necesarios electrones con $E \gtrsim 100 - 200$ MeV, si se quieren estudiar estructuras del tamaño de 1 fm.

Para poder continuar este análisis debemos recordar algunas nociones de teoría de colisiones. Consideremos la colisión de una partícula de masa M, sin spin, con momento $\vec{p}_i$ con un centro difusor con el que la partícula interacciona mediante un potencial $V(\vec{r})$., entonces la <u>sección eficaz diferencial elástica</u> viene dada por

$$\frac{d\sigma(\vec{p}_i \longrightarrow \vec{p}_f)}{d\Omega_f} = (2\pi\hbar)^4 \left(\frac{p_i}{v_i h}\right)^2 |T_{E_i}(\vec{p}_f, \vec{p}_i)|^2 \qquad (2)$$

donde $\vec{p}_f$ es el momento de la partícula emergente y por ser de colisión elástica $|\vec{p}_f| = |\vec{p}_i|$. Además

$$T_{E_i}(\vec{p}_f, \vec{p}_i) \equiv \langle \vec{p}_f | T(E_i + i0) | \vec{p}_i \rangle \qquad (3)$$

donde el <u>operador de transición</u> $T(z)$ es la solución de la ecuación integral

$$T(z) = V + V G_0(z) T(z) \qquad (4)$$

siendo $G_0(z)$ el propagador libre: $G_0(z) = (z - H_0)^{-1}$. La ecuación (4) se conoce

bajo el nombre de ecuación operacional de Lippmann-Schwinger. Su solución formal es

$$T(z) = [1 - V G_0(z)]^{-1} V \tag{1}$$

que, tras desarrollo en serie de $[1 - V G_0(z)]^{-1}$, conduce a la famosa serie de Born

$$T(z) = V + V G_0(z) V + V G_0(z) V G_0(z) V + \cdots \tag{2}$$

La llamada aproximación de Born es suponer que

$$T(z) \simeq T_B(z) \equiv V \tag{3}$$

En este caso

$$T_{E_i}(\hat{P}_f, \hat{P}_i) = \langle \vec{P}_f | V | \vec{P}_i \rangle = \int d^3r \, \langle \vec{P}_f | \vec{r} \rangle \cdot V(\vec{r}) \langle \vec{r} | \vec{P}_i \rangle =$$

$$= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3r \, V(\vec{r}) \, e^{-i(\vec{P}_f - \vec{P}_i)\vec{r}/\hbar} \tag{4}$$

que introduciendo la transferencia de momento o momento transferido

$$\vec{q} \equiv \vec{P}_f - \vec{P}_i \tag{5}$$

puede escribirse como

$$T_{E_i}(\hat{P}_f, \hat{P}_i) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3r \, V(\vec{r}) \, e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}/\hbar} \tag{6}$$

Consideremos ahora que la partícula entrante tiene carga $-|e|$ y que el potencial difusor es debido a la presencia de un núcleo sin spin, anclado en el origen, y con carga total $Z|e|$ con una distribución $\rho(\vec{r})$ que cumple

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3r \, \rho(\vec{r}) = 1 \tag{7}$$

Entonces

$$V(r) = -\int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \frac{Z e^2 \rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \, e^{-\mu|\vec{r} - \vec{r}'|} \tag{8}$$

donde hemos puesto un apantallamiento al potencial de Coulomb, y bien al final hacemos el límite $\mu \to 0$. Entonces

$$T_{E_i}(\hat{p}_f, \hat{p}_i) = -\frac{Ze^2}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3r\, d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}/\hbar} e^{-\mu|\vec{r}-\vec{r}'|} =$$

$$= -\frac{Ze^2}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3r' \rho(\vec{r}') e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}'/\hbar} \int d^3x \frac{1}{|\vec{x}|} e^{+i\vec{q}\cdot\vec{x}/\hbar} e^{-\mu|\vec{x}|}$$

Introduzcamos ahora el factor de forma

$$F(\vec{q}) \equiv \int d^3r' \rho(\vec{r}') e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}'/\hbar} \tag{1}$$

y tengamos en cuenta que

$$\int d^3x \frac{1}{|\vec{x}|} e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}/\hbar} e^{-\mu|\vec{x}|} = \frac{4\pi\hbar^2}{q^2+\hbar^2\mu^2} \tag{2}$$

Entonces en el límite $\mu \to 0$ se obtiene

$$T_{E_i}(\hat{p}_f, \hat{p}_i) = -\frac{Ze^2}{2\pi^2\hbar} F(\vec{q}) \frac{1}{q^2} \tag{3}$$

Entonces teniendo en cuenta la relación entre la $T_{E_i}(\hat{p}_f, \hat{p}_i)$ y la sección eficaz diferencial se obtiene

$$\frac{d\sigma(\vec{p}_i \to \vec{p}_f)}{d\Omega_f} = \frac{4Z^2e^4}{v_i^2} p_i^2 |F(\vec{q})|^2 \frac{1}{q^4} \tag{4}$$

Para dos colisiones elásticas de (18.5) se obtiene

$$q^2 = p_i^2 + p_f^2 - 2|\vec{p}_i||\vec{p}_f| \cos\theta_f = 4p_i^2 \sin^2\frac{\theta_f}{2} \tag{5}$$

y así obtenemos

$$\frac{d\sigma(\vec{p}_i \to \vec{p}_f)}{d\Omega_f} = \left(\frac{Ze^2}{2\pi v_i p_i}\right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta_f/2)} |F(\vec{q})|^2 \tag{6}$$

Si el núcleo fuera puntual entonces $\rho(\vec{r}) = \delta(\vec{r})$ con lo que $F(\vec{q}) = 1$ y la fórmula anterior se reduce a

$$\frac{d\sigma(\vec{p}_i \to \vec{p}_f)}{d\Omega_f} = \left(\frac{Z e^2}{2 v_i p_i}\right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta_f/2)} \tag{1}$$

Es de notar que el resultado no depende de $\hbar$ y esta es la famosa fórmula que Ernest Rutherford dedujo, usando mecánica clásica, en 1911. Esto le permitió interpretar las experiencias de H. Geiger y E. Marsden de 1909 y establecer que el radio del núcleo atómico era menor que unos 10 fm. En realidad el uso de la aproximación de Born para deducir (1) no está justificado pero el resultado obtenido es el correcto pues el efecto de los términos despreciados en el desarrollo (8.2) es sólo el de cambiar el $T_{E_i}(\hat{p}_f, \hat{p}_i)$ que hemos calculado en una fase. En este cálculo hemos supuesto el núcleo anclado en el origen, lo cual es una aproximación aceptable si la energía del electrón incidente es mucho menor que la energía del núcleo en reposo ($M_{Nuc.} c^2$). Se ha supuesto además que tanto el electrón como el núcleo tienen spin nulo, lo cual como es bien sabido es falso para el electrón. Volveremos más adelante al estudio de este proceso con mayor rigor, pero (19.6) es suficiente de momento.

Ya hemos dicho que si el nucleo es puntual $F(q) = 1$. Imaginemos ahora que la distribución de carga es

$$\rho(\vec{r}) = \frac{3}{4\pi R^3}\,\theta(R - r) \tag{2}$$

esto es, una esfera de radio R cargada uniformemente. Entonces

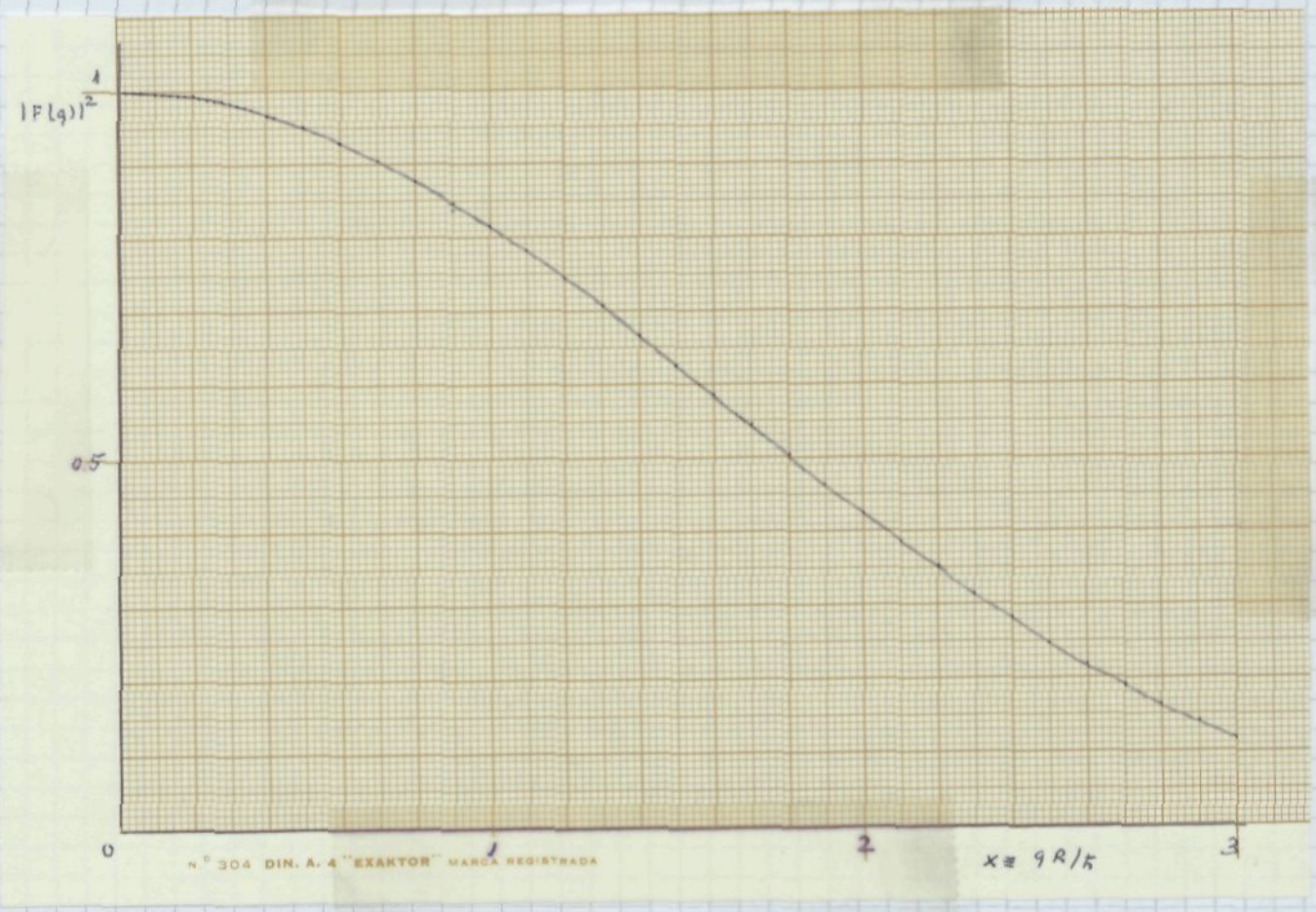
$$F(\vec{q}) = 3\left(\frac{\hbar}{qR}\right)^3 \sin\left(\frac{qR}{\hbar}\right) - 3\left(\frac{\hbar}{qR}\right)^2 \cos\left(\frac{qR}{\hbar}\right) \tag{3}$$

$$\simeq 1 - \frac{1}{10}\left(\frac{qR}{\hbar}\right)^2 + \frac{1}{280}\left(\frac{qR}{\hbar}\right)^4 - \cdots$$

donde recordamos que

$$\left(\frac{qR}{\hbar}\right)^2 = \left(\frac{2RE_i}{\hbar c}\right)^2 \sin^2(\theta_f/2) \tag{4}$$

En la figura siguiente se da $|F(q)|^2$ para distintos valores de $x \equiv qR/\hbar$



Es evidente que si $qR/\hbar \ll 1$ nada podemos aprender sobre $\rho(\vec{r})$. También resulta evidente que si $qR/\hbar \gg 1$ la posibilidad de que se produzcan estos tipos de colisiones estarán muy deprimidas.

Para $qr/\hbar \ll 1$ en la expresión (1) se tiene, en general, que

$$F(\vec{q}) = \int d^3x\ \rho(\vec{x}) \left\{ 1 - \frac{i}{\hbar}\vec{q}\cdot\vec{x} - \frac{1}{2}\frac{1}{\hbar^2}(\vec{q}\cdot\vec{x})^2 + \dots \right\}$$

y para distribuciones esféricas de carga esto conduce inmediatamente a

$$F(\vec{q}) = 1 - \frac{2\pi}{3\hbar^2} q^2 \int_0^\infty dr\ r^4 \rho(r) + \dots$$

$$= 1 - \frac{1}{6}\frac{q^2 \langle r^2 \rangle}{\hbar^2} + \dots \qquad (1)$$

donde $\langle r^2 \rangle^{1/2}$ es el radio cuadrático medio de la distribución de carga.

Resultados de multiples experimentos de colisión de electrones con núcleos atómicos permiten afirmar que la distribución de carga de los mismos queda bien descrita por la distribución de Fermi

$$\rho_F(r) = \frac{\rho_0}{1 + e^{(r-c)/a}} \tag{1}$$

con

$$c = (1.12\, A^{1/3} - 0.86\, A^{-1/3})\ fm \quad , \quad a = 0.54\ fm \tag{2}$$

y ρ_0 viene determinada por la condición de normalización [18.7]. Como para la mayor parte de núcleos $c/a \gg 1$ entonces $\rho_F(0) \simeq \rho_0$. Notar que $\rho_F(r=c) = \rho_0/2$. La cantidad a viene ligada al espesor de la superficie nuclear t definida como

$$t = r_2 - r_1 \quad , \quad \rho_F(r_2) = 0.1\,\rho_0 \qquad \rho_F(r_1) = 0.9\,\rho_0 \tag{3}$$

de donde

$$t = a \ln 81 \simeq 4.4\, a \simeq 2.4\ fm \tag{4}$$

Para esta distribución de carga el radio cuadrático medio se calcula mediante

$$\langle r^2 \rangle = I_4 / I_2 \quad , \quad I_m \equiv \int_0^\infty dx\, x^m \frac{1}{1 + e^{(x-c)/a}} \tag{5}$$

si bien I_m no puede calcularse exactamente, si puede aproximarse si $c/a \gg 1$. En efecto introduciendo $u = x/a$ se tiene

$$I_m = a^{m+1} \int_0^\infty du\, \frac{u^m}{1 + e^{u - c/a}} = a^{m+1} \int_{-c/a}^\infty dz\, \frac{(z + c/a)^m}{e^z + 1} =$$

$$= a^{m+1} \left\{ \int_{-c/a}^0 dz\, \frac{(c/a + z)^m}{e^z + 1} + \int_0^\infty dz\, \frac{(c/a + z)^m}{e^z + 1} \right\}$$

Hagamos en la primera integral $z \to -z$ y téngase en cuenta que $(e^{-z} + 1)^{-1} = 1 - (e^z + 1)^{-1}$

$$I_m = a^{m+1} \left\{ \int_0^{c/a} dz\, (c/a - z)^m - \int_0^{c/a} dz\, \frac{(c/a - z)^m}{e^z + 1} + \int_0^\infty dz\, \frac{(c/a + z)^m}{e^z + 1} \right\}$$

Como $c/a \gg 1$ no se comete un gran error extendiendo la segunda integral hasta $+\infty$

$$I_m = a^{m+1} \left\{ \frac{1}{m+1} \left(\frac{c}{a}\right)^{m+1} + \int_0^\infty dz \, \frac{(c/a+z)^m - (c/a-z)^m}{e^z+1} \right\} \simeq$$

$$\simeq a^{m+1} \left\{ \frac{1}{m+1} \left(\frac{c}{a}\right)^{m+1} + 2m \left(\frac{c}{a}\right)^{m-1} \int_0^\infty dz \, \frac{z}{e^z+1} \right\} =$$

$$= a^{m+1} \left\{ \frac{1}{m+1} \left(\frac{c}{a}\right)^{m+1} + \frac{m\pi^2}{6} \left(\frac{c}{a}\right)^{m-1} \right\} = \frac{c^{m+1}}{m+1} \left\{ 1 + \frac{m(m+1)}{6} \pi^2 \frac{a^2}{c^2} \right\} \quad (1)$$

de donde

$$\langle r^2 \rangle^{1/2} = \sqrt{\frac{3}{5}}\, c \left\{ 1 + \frac{7\pi^2}{6} \frac{a^2}{c^2} \right\} \quad (2)$$

Una distribución del tipo escalón (20.2) tiene el mismo radio cuadrático medio si

$$R = c \left\{ 1 + \frac{7\pi^2}{6} \frac{a^2}{c^2} \right\} \quad (3)$$

Mejores ajustes se obtienen si en lugar de usar (22.1) suponemos

$$\rho(r) = \left(1 + w \frac{r^2}{c^2}\right) \rho_F(r) \quad (4)$$

Si $w > 0$ (el mejor ajuste se obtiene para $w = 0.65$) entonces hay una depresión central en la distribución de carga. Lo opuesto sucede si $w < 0$, como sucede, por ejemplo, con el ^{40}Ca.

Hay multiples formas de medir la distribución de carga y de masa en los núcleos y todas ellas se ajustan, aproximadamente, mediante una distribución escalón (20.2) con

$$R = a_0 A^{1/3} \quad , \quad a_0 = 1.20 - 1.25 \text{ fm.} \quad (5)$$

El resultado puede parecer un tanto paradójico pues en núcleos muy pesados el número de neutrones excede al de protones en un 50%. Sin embargo la fuerza coulombiana repulsiva entre los protones tiende a alejarlos los unos de los otros y las fuerzas nucleares atractivas y más intensas, que como veremos no dependen del tipo de nucleón, tienden a entremezclar los protones y neutrones tan íntimamente que, dentro de errores experimentales, los radios de carga y masa coinciden.

De acuerdo con (5) la densidad de un núcleo atómico es, despreciando la diferen-

ría de masas neutrón - protón

$$\rho = \frac{A M_p}{\frac{4\pi}{3} R^3} = \frac{3 M_p}{4\pi a_0^3} = 0.122 \ M_p/fm^3 = 2.04 \times 10^{14} \ g/cm^3 \qquad (1)$$

y por tanto la densidad nuclear es, aproximadamente, independiente del número de nucleones. Esto es muy importante pues revela la <u>propiedad de saturación</u> de las fuerzas nucleares a diferencia de lo que sucede, por ejemplo, con las fuerzas electromagnéticas. El alcance infinito de éstas últimas hace que cuantos más electrones y protones contenga un átomo más intensa será la atracción entre ellos y por consiguiente el tamaño de un átomo neutro varía poco con Z. Mediante el modelo de Thomas-Fermi se puede probar que el radio de una esfera que contiene todos los electrones menos uno es, para $Z \to \infty$, $r_{Z-1} \sim 3.9 \text{Å}$ y en los casos prácticos ($125 \leq Z \leq 100$) r_{Z-1} varía entre 2 y 3 Å.

La masa total de un núcleo $M(A,Z)$ en su estado fundamental es siempre menor que la suma de las masas de sus constituyentes debido a las fuerzas nucleares y electromagnéticas que lo ligan. Definiremos la energía de ligadura como

$$B(A,Z) = [\, Z M_p + N M_n - M(A,Z) \,] c^2 \qquad (2)$$

Para núcleos esféricos la dependencia de $B(A,Z)$ de sus argumentos es muy regular y se puede dar una expresión simple que permite su cálculo llamada <u>fórmula semi-empírica de masas</u> inicialmente debida a H. A. Bethe y C. F. von Weizsäcker

$$B(A,Z) = a_1 A - a_2 A^{2/3} - a_3 \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_4 \frac{(N-Z)^2}{A} + a_5 \frac{\delta}{A^{1/2}} \qquad (3)$$

Veamos el origen de los distintos términos

i) a_1. Ya hemos dicho que las fuerzas nucleares presentan el fenómeno de saturación y por tanto cada nucleón siente sólo la influencia de unos pocos vecinos, entonces para núcleos muy grandes y con $N = Z$ es de esperar que el término dominante en $B(A,Z)$ sea proporcional a A. En realidad a_1 es la energía de ligadura por nucleón en un núcleo infinito con $Z = N$.

2) a_2. En los núcleos finitos los nucleones superficiales estarán menos ligados que los que estan totalmente en su interior. Como $V \sim A$ y $S \sim A^{2/3}$, esta es la razón de este termino

3) a_3. Los protones del núcleo se repelem entre sí debido a las fuerzas electromagnéticas y por tanto es de esperar que den una contribución negativa a la energía proporcional a $Z^2/R \sim Z^2/A^{1/3}$.

4) a_4. Este término es debido a dos o dos fenómenos de importancia similar: Si $N \neq Z$ entonces la energía del mon de Fermi es distinta para neutrones y protones y es preferible, para minimizar la energía cinética, que sus números tiendan a igualarse. Además la fuerza neutrón-protón es, en media, algo más fuerte que entre dos partículas idénticas, que sufren una repulsión intrínseca debida al principio de exclusión de Pauli. Este término se suele llamar energía de simetría.

5) a_5. Es la llamada energía de apareamiento y proviene de la observación de variaciones sistemáticas de la energía de ligadura segun A sea par o impar. Se tiene que

$$\delta = \begin{cases} +1 & \text{si } N = \text{par},\ Z = \text{par} \\ 0 & \text{si } A = \text{impar} \\ -1 & \text{si } N = \text{impar},\ Z = \text{impar} \end{cases} \qquad (4)$$

Posibles valores para estos coeficientes son

$$a_1 = +15.56 \text{ MeV}, \quad a_2 = +17.23 \text{ MeV}, \quad a_3 = +0.697 \text{ MeV}$$
$$a_4 = 23.285 \text{ MeV}, \quad a_5 = 12.0 \text{ MeV} \qquad (2)$$

Consideremos un par de ejemplos

a) Núcleo ligero: ^{16}O $(A=16, Z=8, N=8)$

$$B(16,8)/A = (15.56 - 6.838 - 1.106 - 0 + 0.188)\ \text{MeV} =$$
$$= 7.80 \text{ MeV}$$

$$(B(16,8)/A)_{exp} = 7.98 \text{ MeV}$$

ii) Núcleo pesado : ^{208}Pb $(A = 208\ ,\ Z = 82,\ N = 126)$

$$B(208, 82)/A = (15.56 - 2.908 - 3.803 - 1.042 + 0.040)\ MeV$$

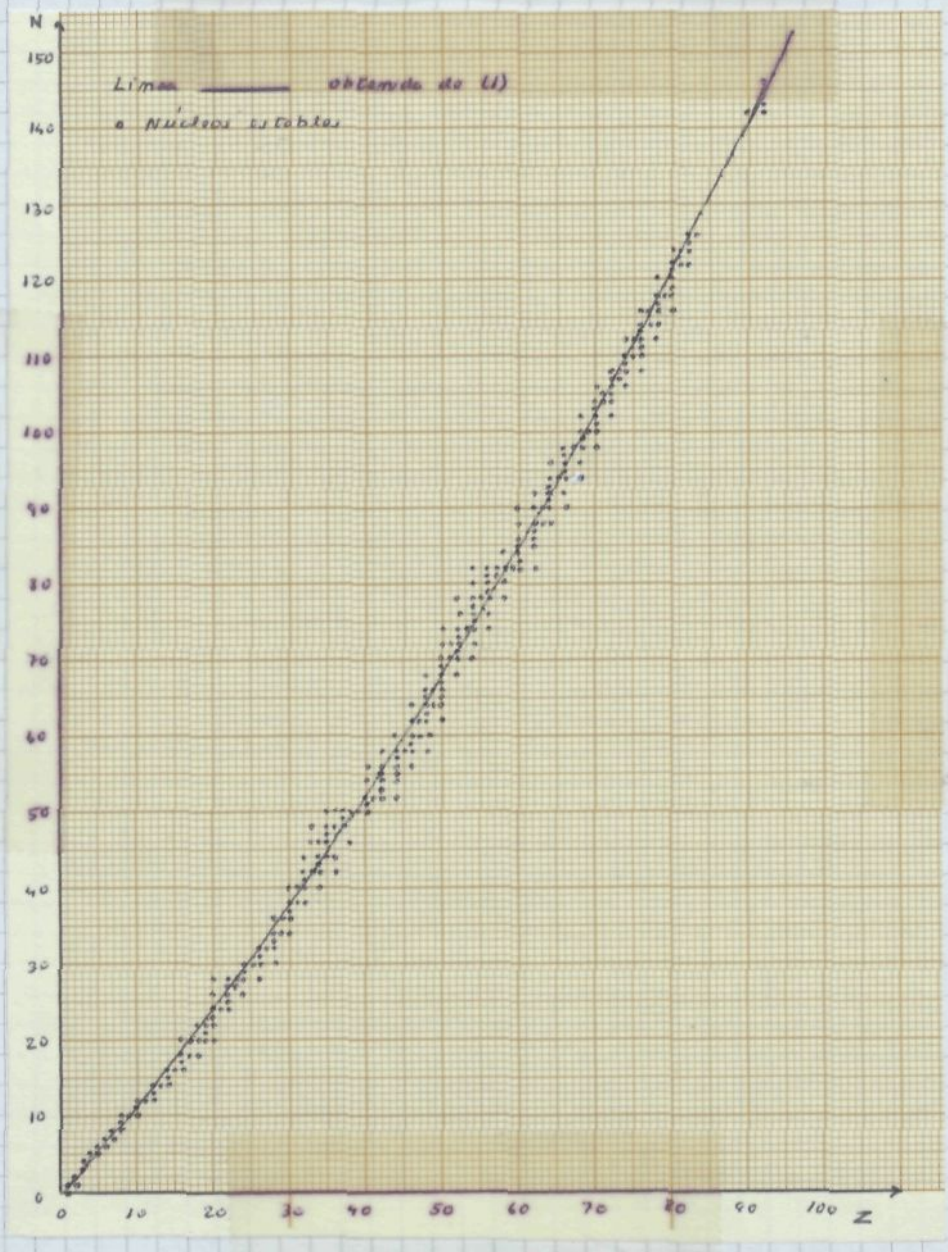
$$= 7.85\ MeV$$

$$(B(208, 82)/A)_{exp} = 7.86\ MeV$$

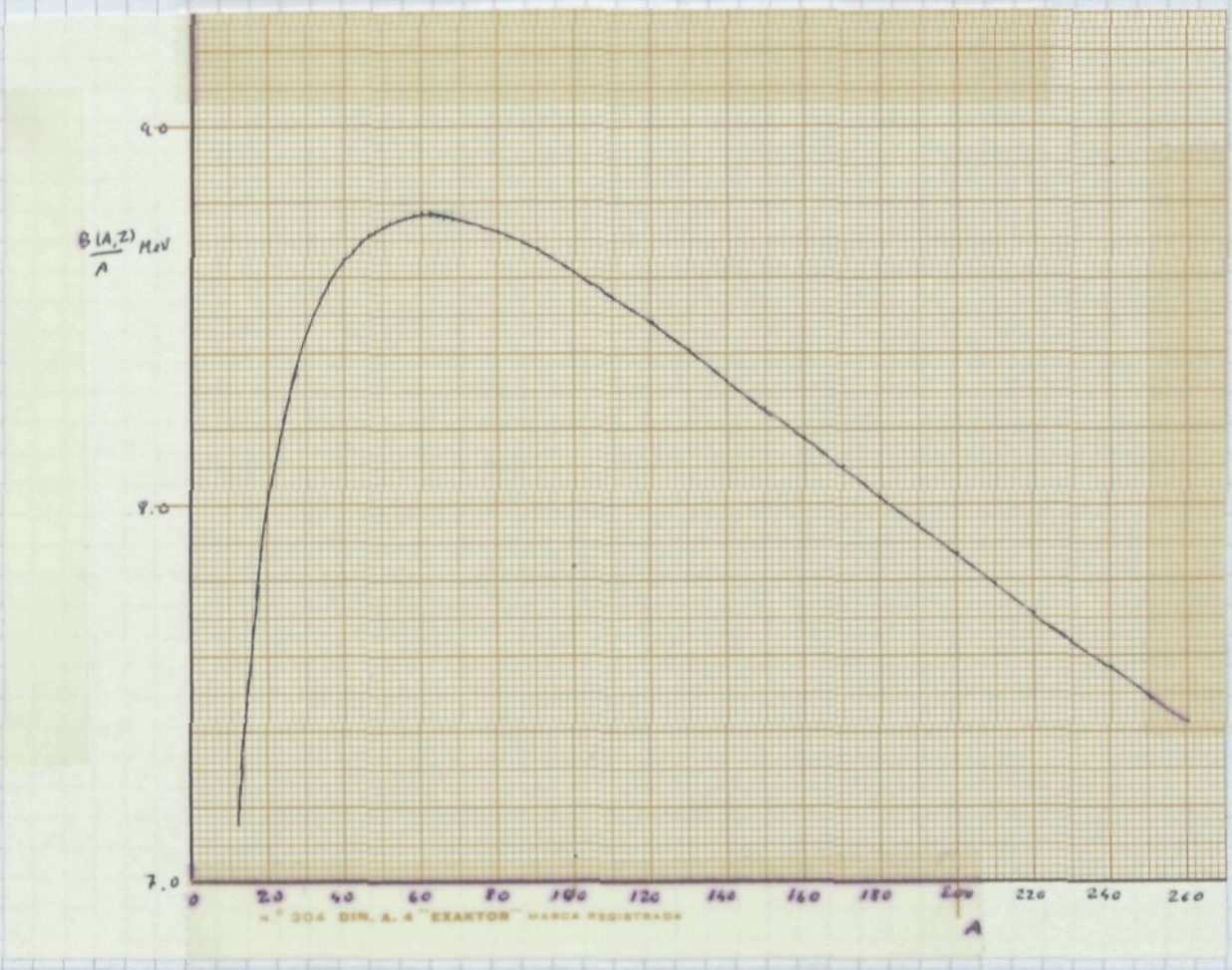
Sin tener en cuenta el término de apareamiento y para un A dado para calcular el Z correspondiente a los núcleos mas estable basta ver el máximo de $B(A,Z)$ con respecto a Z (recordar $(N-Z) = A - 2Z$)

$$\frac{\partial B(A,Z)}{\partial Z} = 0 \quad \Rightarrow \quad -2a_3 \frac{Z}{A^{1/3}} + 4a_4 (A - 2Z)\frac{1}{A} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$Z = \frac{A}{2} \frac{1}{1 + \frac{a_3}{4a_4} A^{2/3}} = \frac{A}{2} \frac{1}{1 + 0.00748\, A^{2/3}} \qquad (1)$$



Teniendo en cuenta (24.3) (sin el término de apareamiento) y (26.1) se obtiene fácilmente $B(A,Z)/A$ y ésta cantidad se representa en la próxima figura



De acuerdo con esta curva el núcleo con mayor energía de ligadura por nucleón ve da para $A = 62$, $Z = 27.7$ y $B(Z,A)/A = 8.763$ MeV. En la realidad el núcleo más estable es el $^{56}_{26}Fe$, en buen acuerdo con el resultado anterior.

En general la cantidad que se mide con más precisión es la masa del átomo neutro expresada en unidades de masa atómica unificadas (u.a.m.), que como hemos dicho antes es $M(^{12}_{6}C)c^2/12$. La fórmula (24.3) da para este núcleo $B(12,6) = 88.913$ MeV. La masa del núcleo es 11178.115 MeV y la del átomo, despreciando la energía de ligadura de los electrones, 11181.181 MeV = 12.003 u.a.m., en buen acuerdo. La energía de ligadura de los electrones se puede estimar con la fórmula de Thomas-Fermi

$$E_b = 20.94\, Z^{7/3}\ eV \qquad (1)$$

Teniendo esta en cuenta la energía del átomo de $^{12}_{6}C$ es 11184.179 = 12.003 uam.

Una situación familiar en física atómica y subatómica es que un estado Σ tenga energía suficiente para hacer una transición espontánea a un estado Y, emitiendo simultaneamente una o más partículas. Ejemplos usuales en física nuclear son

$$(A,Z)^* \longrightarrow (A,Z) + \gamma \qquad \text{Desintegración gamma}$$

$$(A,Z) \longrightarrow (A,Z+1) + e + \bar{\nu}_e \qquad \text{Desintegración beta} \qquad (1)$$

$$(A,Z) \longrightarrow (A-4,Z-2) + \alpha \qquad \text{Desintegración } \alpha$$

donde $(A,Z)^*$ indica un estado excitado del núcleo (A,Z)

Es usual definir el <u>ritmo de transición</u>, W, de una desintegración como la probabilidad de que la transición considerada tenga lugar en un segundo. Supongamos que en el instante $t=0$ tenemos una asamblea formada por $N(0)$ estados iniciales y sea este número $N(t)$ en el instante $t>0$. Entonces de la definición de W

$$dN(t) = -W N(t)\, dt \qquad (2)$$

de donde

$$N(t) = N(0)\, e^{-Wt} \qquad (3)$$

que es la famosa <u>ley de desintegración exponencial</u>. Se introduce, frecuentemente la <u>vida media</u>, τ, definida como

$$\tau \equiv \frac{1}{W} \qquad (4)$$

y por tanto

$$N(t) = N(0)\, e^{-t/\tau} \qquad (5)$$

Notar que $N(t=\tau) = N(0)/e$. En ocasiones se introduce la <u>semi-vida</u>, λ, que es el tiempo que transcurre para que quede exactamente la mitad de la población original. Claramente

$$\lambda = \tau \ln 2 = 0.693\ldots \tau \qquad (6)$$

Dentro del marco de la mecánica cuántica la ley de desintegración exponencial es muy difícil o imposible de justificar. Supongamos que en el instante $t=0$ se prepara un sistema físico en un estado inestable y normalizado $|B(0)\rangle \equiv |B\rangle$, que

se deja evolucionar bajo la acción de un hamiltoniano H independiente del tiempo, hasta un instante $t>0$. En este momento hacemos una medida para averiguar si el sistema se ha desintegrado, esto es, si $|B(t)\rangle \perp |B(0)\rangle$. La probabilidad $P(t)$ de encontrar el sistema en el estado original es

$$P(t) = |A(t)|^2 = |\langle B | e^{-iHt/\hbar} | B\rangle|^2 \tag{1}$$

con $A(t) \equiv \langle B(0) | B(t)\rangle$. Es frecuente suponer que $P(t) = e^{-t/\tau}$, donde τ es la vida media del estado considerado. Para $t \downarrow 0$, y suponiendo $|B\rangle \in D(H)$, se tiene

$$A(t) = 1 - \frac{it}{\hbar}\langle B|H|B\rangle + O(t^2) \tag{2}$$

Por ser H autoadjunto, $\langle B|H|B\rangle$ es real y, por tanto

$$P(t) = 1 + O(t^2) \qquad t \downarrow 0 \tag{3}$$

En consecuencia, la ley de desintegración exponencial debe fallar a tiempos suficientemente pequeños. También se puede probar que si el hamiltoniano H es inferiormente acotado e si $|B\rangle$ tiene proyección no nula sobre algún estado ligado de H, la ley de desintegración exponencial dejará de ser válida a tiempos suficientemente grandes. Estos efectos a $t \downarrow 0$ y para grandes valores de t no han sido comprobados experimentalmente.

Si un núcleo puede desintegrarse, no es posible saber en que instante lo hará. Por el principio de indeterminación energía tiempo, el estado inicial, que no es estacionario, carecerá de energía bien definida, presentando ésta una indeterminación

$$\Delta E \sim \frac{\hbar}{\tau} \tag{4}$$

En mecánica cuántica, el valor esperado de un observable se interpreta como la media de los valores medidos en un gran número, N, de sistemas preparados de idéntica forma. En otras palabras, si llevamos a cabo la medida de la energía para un número grande, N, de núcleos en el estado inicial encontraremos valores que no serán idénticos. Si en la medida i encontramos el resultado E_i, entonces la energía media viene dada por

$$\langle E\rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} E_i \tag{5}$$

La indeterminación en la energía viene dada por

$$\Gamma = \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left(E_i^2 - \langle E \rangle^2 \right) \right\}^{1/2} \qquad (1)$$

y el principio de indeterminación de Heisenberg nos dice que en situación ideal

$$\Gamma = \frac{\hbar}{\tau} = \frac{6.582\,122\,0\,(20) \times 10^{-22}\ \text{MeVs}}{\tau} \qquad (2)$$

y Γ recibe el nombre de <u>anchura natural del nivel</u> o simplemente <u>anchura</u>. Se puede relacionar Γ con la probabilidad de encontrar el valor E al realizar una medida. En términos de funciones de onda

$$|\Psi(\vec{r}; t)|^2 = |\Psi(\vec{r}; 0)|^2 e^{-wt} \qquad (3)$$

Para un estado estacionario, se puede escribir $\Psi(\vec{r}; t) = \Psi(\vec{r}; 0)\, e^{-iEt/\hbar}$, donde E es su energía. Para un estado inestable se puede escribir

$$\Psi(\vec{r}; t) = e^{-i\langle E \rangle t/\hbar - wt/2} \Psi(\vec{r}; 0) \qquad (4)$$

que cumple (3). Al no tener el estado una energía bien definida se puede considerar este como una superposición de estados de energía bien definida

$$\Psi(\vec{r}; t) = \Psi(\vec{r}; 0) \int_{-\infty}^{+\infty} dE\ a(E)\ e^{-iEt/\hbar} \qquad (5)$$

donde $a(E)$ es proporcional a la amplitud de probabilidad de hallar ~~el~~ estado con energía E. De (4) y (5)

$$e^{-wt/2} = \int_{-\infty}^{+\infty} dE\ a(E)\ e^{-i(E - \langle E \rangle)t/\hbar} \qquad (6)$$

y por tanto

$$a(E) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_0^{\infty} dt\ e^{\left[i \frac{E - \langle E \rangle}{\hbar} - \frac{1}{2} w \right] t} = \frac{i}{2\pi} \frac{1}{(E - \langle E \rangle) + i \frac{1}{2} \hbar w} \qquad (5)$$

y la densidad de probabilidad de que al medir hallemos el valor E es proporcional a

$$|a(E)|^2 = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{(E - \langle E \rangle)^2 + (\Gamma/2)^2} \qquad (6)$$

y que convenientemente normalizada da la densidad de probabilidad

$$P(E) = \frac{1}{\pi} \frac{(\Gamma/2)}{(E - \langle E \rangle)^2 + (\Gamma/2)^2} \tag{1}$$

La forma de esta distribución se llama Lorentziana y su medida permite determinar $\langle E \rangle$ y Γ.

Sucede frecuentemente que un determinado estado inicial inestable puede decaer en más de un estado final. Si es $W(i)$ la probabilidad de transición al estado final i, la probabilidad de transición total es

$$W = \sum_i W(i) \tag{2}$$

y por tanto

$$\Gamma = \sum_i \Gamma(i) \tag{3}$$

$$\frac{1}{\tau} = \sum_i \frac{1}{\tau(i)} \tag{4}$$

La cantidad

$$B(i) \equiv \frac{\Gamma(i)}{\Gamma} \tag{5}$$

que se denomina anchura relativa (Branching ratio)

Como ejemplo consideremos algunas desintegraciones de partículas

i) π^0. Esta partícula tiene $J^\pi = 0^-$, $T = 1$, $T_3 = 0$ y

$$m = 134.9764\ (6)\ MeV/c^2$$
$$\tau = (8.4 \pm 0.6) \times 10^{-17}\ s. \tag{6}$$

y sus principales canales de desintegración son

$$\pi^0 \longrightarrow \gamma + \gamma \qquad \Gamma(2\gamma)/\Gamma = 0.98798\ (32)$$
$$\pi^0 \longrightarrow e^+ + e^- + \gamma \qquad \Gamma(e^+e^-\gamma)/\Gamma = 0.01198\ (32) \tag{7}$$

La anchura es

$$\Gamma = \frac{\hbar}{\tau} = (7.84 \pm 0.56) \times 10^{-6}\ MeV \tag{8}$$

Notar que en este caso $\Gamma \ll (\Delta m)c^2$

ii) ρ^+ . Esta partícula tiene $J^P = 1^-$, $I = 1$, $I_3 = +1$ y

$$m = 769.9\ (8)\ \text{MeV}$$

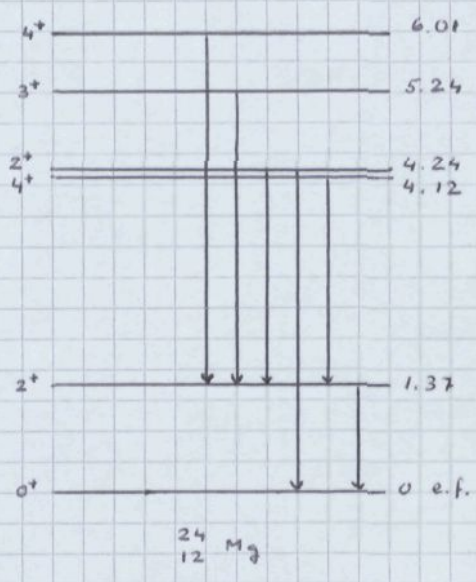
$$\Gamma = 151.2\ (12)\ \text{MeV}$$

y prácticamente siempre se desintegra en el canal $\pi^+\pi^0$. Notar que en este caso la m corresponde a la $\langle E \rangle$ media de (31.1) . La vida media correspondiente a esta anchura es $\tau = 4.353\ (35) \times 10^{-24}$ s , imposible de medir directamente.

Pasemos a hacer algunas consideraciones energéticas sobre las desintegraciones que hemos considerado en (28.1)

1) Desintegraciones gamma

En la figura adjunta se da el diagrama de niveles en el que se muestra el estado fundamental y los estados excitados con energía de excitación $\leq$ 6.01 MeV del $^{24}_{12}Mg$. Para cada nivel se da J^π (a la izquierda) y la energía de excitación, en MeV, a la derecha. Las flechas indican posibles desintegraciones y de los distintos niveles. El nivel 4.24 MeV se desintegra tanto al 2^+ como al 0^+ con anchuras relativas del 28% y 72% respectivamente.



Evidentemente las transiciones de un estado más excitado a uno menos excitado o al fundamental son siempre energéticamente posibles, pero algunas de ellas, debido a los números cuánticos que caracterizan el estado inicial y el final, son muy poco probables y no han sido dibujadas en la figura. Volveremos más adelante sobre este tema.

Veamos cual es la frecuencia del fotón emitido. Supongamos que el núcleo inicial de masa M_i se halla en reposo y a continuación se desintegra. El núcleo final de masa M_f y el fotón salen en direcciones opuestas con idéntico momento p. La ley de conservación de la energía implica



$$M_i c^2 = pc + \sqrt{M_f^2 c^4 + p^2 c^2} \tag{1}$$

de donde la frecuencia del fotón emitido es

$$\nu = \frac{1}{h} pc = \frac{1}{h} \frac{M_i^2 - M_f^2}{2M_i} c^2 \tag{2}$$

Ahora bien $M_i = M_f + \Delta E / c^2$, donde ΔE es la diferencia de energía entre el estado inicial y el final. Entonces

$$\nu = \frac{\Delta E}{h} \frac{(1 + \Delta E / 2 M_f c^2)}{(1 + \Delta E / M_f c^2)} \tag{3}$$

Tanto en sistemas atómicos como en los nucleares $\Delta E / M_f c^2 \ll 1$ y por tanto (3) se puede escribir en la forma aproximada

$$\nu = \frac{\Delta E}{h} \left(1 - \frac{\Delta E}{2 M_f c^2} \right) \tag{4}$$

donde el término $\Delta E / 2 M_f c^2$ es debido a haber tenido en cuenta el retroceso del núcleo final. En las transiciones atómicas ΔE es, con mucho, del orden del KeV mientras que en los nucleares puede ser de varios MeV y como M_f es la misma en ambos casos, la corrección debida al retroceso es totalmente despreciable en átomos, pero no puede lo mismo en la desintegración y de los núcleos.

2) <u>Desintegraciones alpha</u>

Recordemos que estas desintegraciones son las del tipo

$$(A, Z) \longrightarrow (A-4, Z-2) + \alpha \tag{5}$$

La energía liberada en esta desintegración es

$$Q_\alpha = -B(A, Z) + B(A-4, Z-2) + B(4, 2) \tag{6}$$

y se debe tener que $Q_\alpha \geq 0$ para que esta transición pueda tener lugar y esto implica que

$$B(4, 2) \geq B(A, Z) - B(A-4, Z-2) \tag{7}$$

Suponiendo los núcleos inicial y final en el estado fundamental y usando la fórmula de masas y suponiendo $A \gg 4$, $Z \gg 2$ y suponiendo que Z viene dada

por (26.1), entonces

$$B(4,2) \geq 4 \frac{dB(A,Z)}{dA} = 4\left\{ A \frac{d[B(A,Z)/A]}{dA} + \frac{B(A,Z)}{A} \right\}$$

De la figura de la página 27 se ve que si $A \gtrsim 120$ entonces

$$\frac{d[B(A,Z)/A]}{dA} \simeq -7.6 \times 10^{-3} \text{ MeV} \qquad (1)$$

y como experimentalmente se sabe que

$$B(4,2) = 28.30 \text{ MeV} \qquad (2)$$

entonces

$$\frac{B(A,Z)}{A} \leq (7.075 + 7.6 \times 10^{-3} A) \text{ MeV} \qquad (3)$$

Trazando la recta $B/A = 7.075 + 7.6 \times 10^{-3} A$ en la figura de la página 27 se ve que si $A \gtrsim 152$ la desintegración α es, en principio, energéticamente posible. En realidad para $144 \leq A \leq 206$ se conocen 7 núcleos emisores α entre los que se encuentran en la naturaleza; su existencia implica que su vida media es comparable o mayor que la edad de la Tierra (4×10^9 años). Cuando se encuentra un núcleo que se desintegra α para este rango de A se encuentra que la energía de la partícula α emitida (que coincide prácticamente con el valor de Q_α) es normalmente menor de 3 MeV. Veremos, más adelante, que cuanto menor sea Q_α mayor es la vida media; es, por tanto, cierto que muchos núcleos en el intervalo considerado pueden presentar $Q_\alpha > 0$ y se puedan desintegrar α, pero no es posible detectar esta desintegración pues su vida media es demasiado larga. Para $Z \geq 82$ se encuentran en la naturaleza muchos núcleos que emiten partículas α, muchos con vidas medias cortas. ¿Por qué se encuentran si su vida media es corta? Muchos de los núcleos pesados que se encuentran en la Tierra han sido producidos en estrellas muy pesadas que murieron como supernovas. Tales explosiones pueden producir elementos muy pesados incluyendo <u>elementos transuránicos</u> y su desintegración α los irá haciendo bajar en la tabla periódica en pasos de $\Delta A = -4$. Cada desintegración α aumenta el cociente N/Z hasta que una desintegración beta acerca de nuevo el núcleo a la línea de estabilidad. Este descenso es retardado de forma muy importante si cualquiera de los núcleos encontrados tiene una vida me-

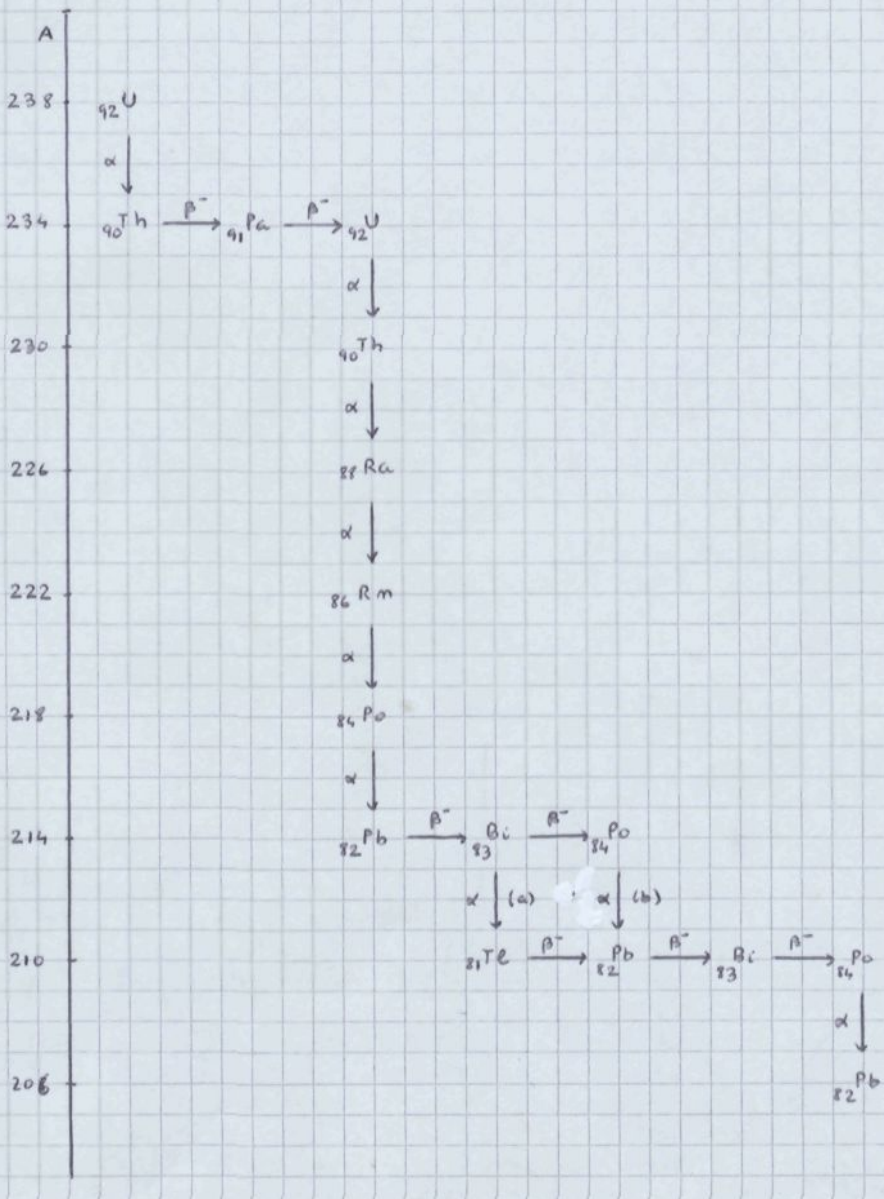
cia comparable a la edad presente de la Tierra. Tales núcleos son

$$^{235}_{92}U \qquad \tau = 1.0 \times 10^9 \text{ años}$$

$$^{238}_{92}U \qquad \tau = 6.5 \times 10^9 \text{ años} \qquad (4)$$

$$^{232}_{90}Th \qquad \tau = 2.0 \times 10^9 \text{ años}$$

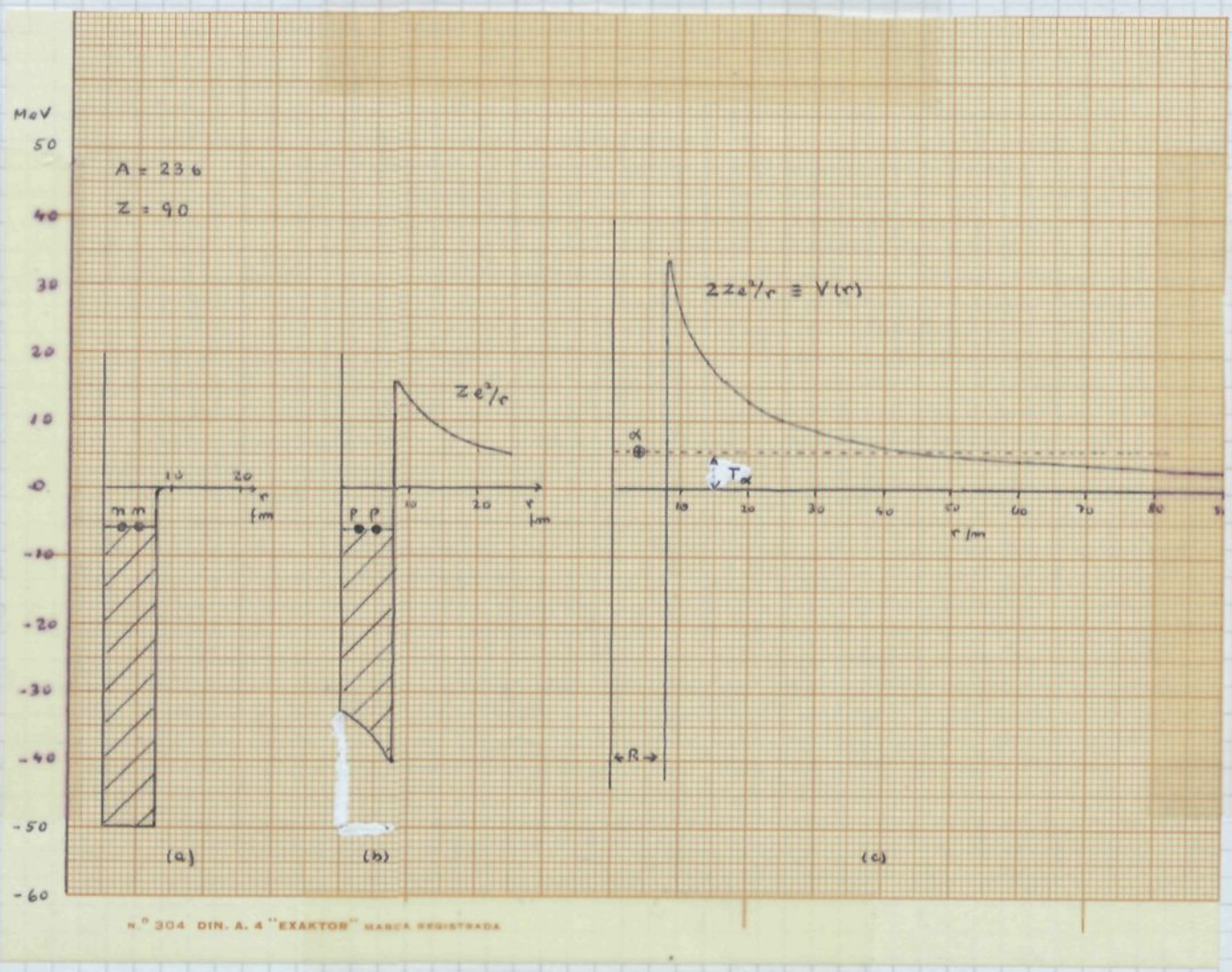
Sus vidas medias tan extraordinariamente grandes hace posible que aun queden apreciables cantidades de los mismos en la Tierra para poderlos encontrar. Más aún su lenta desintegración elimenta, en cada uno de los tres casos, una cadena de <u>equilibrio</u> <u>secular</u> en la que pueden aparecer núcleos emisores α con vidas medias muy cortas, para terminar en algún isótopo estable del plomo. En la próxima figura se da la cadena del $^{238}_{92}U$



	Q_α (MeV)	τ
	4.27	6.45×10^9 años
	4.86	3.53×10^5 años
	4.77	1.12×10^5 años
	4.87	2.31×10^3 años
	5.59	5.51 días
	6.11	4.40 min.
(a)	5.62	94 días
(b)	7.83	2.37×10^{-4} s.
	5.41	200 días

Series análogas se originan en el $^{235}_{92}U$ y en el $^{232}_{90}Th$ que terminan, respectivamente, en el $^{207}_{82}Pb$ y $^{208}_{82}Pb$. Notar que las tres series corresponden a $A\ (\text{mód } 4) = 2, 3, 0$ respectivamente. Los miembros de la serie $A\ (\text{mód } 4) = 1$ se han producido en el laboratorio y no se ha encontrado que en ella aparezca ningún elemento con vida media suficientemente larga para que estos se puedan encontrar en la naturaleza.

Veamos ahora como estiman la vida media de un núcleo que se desintegra α. Consideremos la siguiente figura



N.° 304 DIN. A. 4 "EXAKTOR" MARCA REGISTRADA

Las figuras (a) y (b) esquematizan dos potenciales, el primero para neutrones dentro del núcleo y el segundo para protones. Para núcleos pesados, la energía de separación de un nucleón es de unos 6 MeV, de forma que los nucleones llenan todos los niveles hasta alrededor de 6 MeV por debajo de la energía total. Si dos protones y dos neutrones de los menos ligados se amalgaman para formar una partícula α, que tiene una energía de ligadura de 28.30 MeV, entonces

ces ésta quedará con energía positiva dentro del pozo (c) si $T_\alpha < 2Ze^2/R \equiv V(R)$, donde T_α es la energía cinética de la partícula α a distancia infinita del núcleo si puede atravesar la barrera de potencial. $Q_\alpha = T_\alpha$, si despreciamos los efectos de retroceso del núcleo. En la aproximación WBK el coeficiente de transmisión de la barrera viene dado por

$$T = e^{-2K} \quad , \quad K = \frac{1}{\hbar} \int_R^b dx \left[2M_\alpha (V(x) - Q_\alpha) \right]^{1/2} \tag{1}$$

donde $b = 2Z\alpha\hbar c / Q_\alpha$, siendo α la constante de estructura fina. De aquí

$$K = \left(\frac{4M_\alpha Z\alpha c}{\hbar} \right)^{1/2} \int_R^b dx \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{b}} = \left(\frac{4M_\alpha Z\alpha c\, b}{\hbar} \right)^{1/2} \left\{ \arccos\sqrt{\frac{R}{b}} - \sqrt{\frac{R}{b}\left(1 - \frac{R}{b}\right)} \right\}$$

donde para realizar la integral hemos hecho el cambio de variables $x = b\cos^2\theta$. Como en general $b \gg R$

$$K = \left(\frac{4M_\alpha Z\alpha c\, b}{\hbar} \right)^{1/2} \left\{ \frac{\pi}{2} - 2\sqrt{\frac{R}{b}} \right\} =$$

$$= 2\pi Z\alpha \sqrt{\frac{M_\alpha c^2}{2Q_\alpha}} - 4\sqrt{\frac{R\, Z\alpha\, M_\alpha c^2}{\hbar c}} \tag{2}$$

Si $V \simeq \sqrt{2Q_\alpha / M_\alpha}$ es la velocidad de la partícula α dentro del núcleo, entonces hace $V/2R$ intentos por segundo de atravesar la barrera y por tanto la probabilidad de transición por unidad de tiempo es (Z = número atómico del núcleo final)

$$W = \frac{c}{R} \sqrt{\frac{Q_\alpha}{2M_\alpha c^2}} \exp\left\{ 8\sqrt{\frac{R Z\alpha M_\alpha c^2}{\hbar c}} - 4\pi Z\alpha \sqrt{\frac{M_\alpha c^2}{2Q_\alpha}} \right\} \tag{3}$$

Esta fórmula ajusta bien los datos experimentales si se toma $R = 1.35 \times A^{1/3}$ fm.

3. Desintegraciones β

Se suele designar con el nombre de desintegración β o β^- el proceso

$$(A, Z) \longrightarrow (A, Z+1) + e^- + \bar{\nu}_e \tag{4}$$

que a nivel de constituyentes del núcleo es debida a la desintegración de uno

de los neutrones ligados en el núcleo ($n \to p + e^- + \bar{\nu}_e$), quedando ligado el protón producido. En un nucleo rico en protones se puede dar la <u>desintegración β^+</u>:

$$(A, Z) \longrightarrow (A, Z-1) + e^+ + \nu_e \qquad (1)$$

o tambien puede el núcleo capturar uno de los electrones de la corteza atómica y tienen lugar

$$e^- + (A, Z) \longrightarrow (A, Z-1) + \nu_e \qquad (2)$$

que es el llamado <u>captura de electrones</u>. A nivel de constituyentes estos dos últimos procesos corresponden a $p \to n + e^+ + \nu_e$ y $e + p \to n + \nu_e$, respectivamente, que si bien no son permitidos energéticamente para nucleones libres, lo pueden ser para nucleones ligados en el núcleo.

Los núcleos estables yacen, aproximadamente, sobre la curva de la figura de la página 26. ¿Que sucede cuando los núcleos estan lejos de la zona de estabilidad? Una posibilidad es acercarse hacia esta zona mediante desintegraciones $\beta^\pm$ o captura de electrones. Como en todos estos procesos el núcleo inicial y final tiene la misma A, nos conviene investigar $B(A,Z)$ para A fijo como función de Z. Consideremos por ejemplo el núcleo de $A = 101$. En la figura damos la masa de un átomo con $A = 101$ versus Z deducida a partir de la fórmula másica (24.3) incluyendo la energía de ligadura de los electrones (27.1) (ver próxima página). Hemos calculado las masas atómicas $M_A(A,Z)$ en lugar de las nucleares $M(A,Z)$ pues en terminos de las masas nucleares las condiciones energéticas que se deben cumplir para que puedan tener lugar los procesos anteriores son

$$Q_\beta \equiv [\, M(A,Z) - M(A,Z+1) - M_e \,] c^2 > 0 \qquad \text{Desintegración } \beta^-$$

$$Q_\beta \equiv [\, M(A,Z) - M(A,Z-1) - M_e \,] c^2 > 0 \qquad \text{Desintegración } \beta^+ \qquad (3)$$

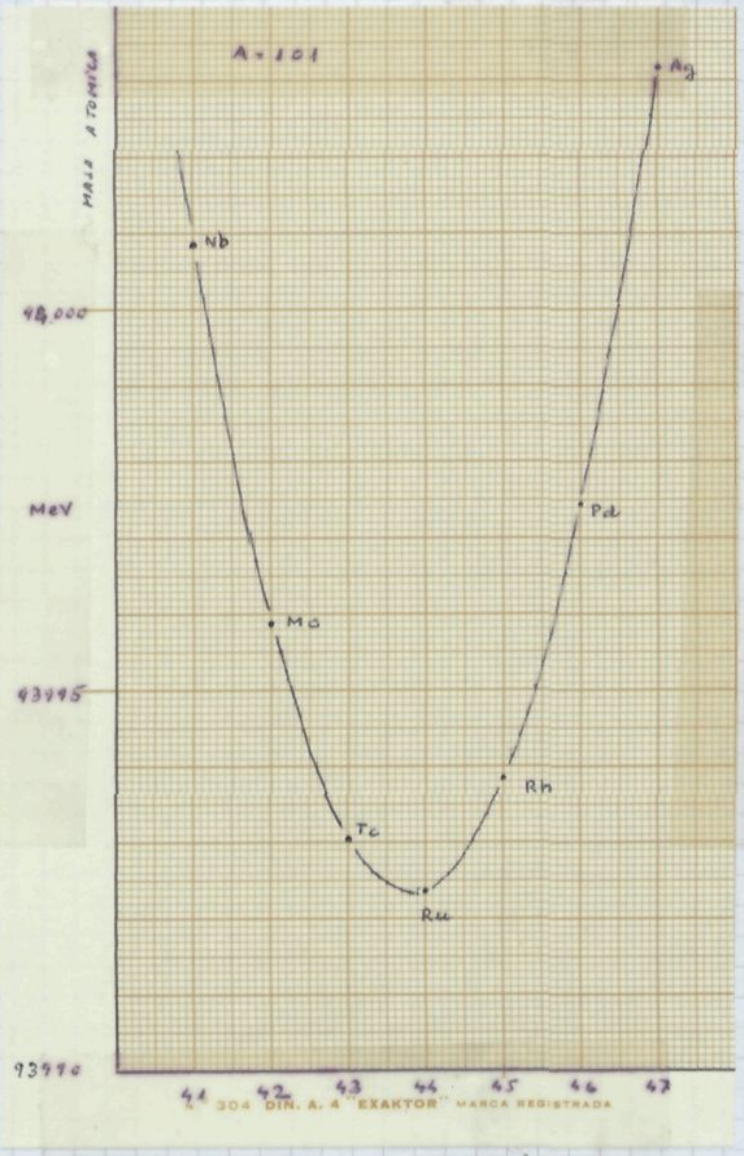
$$Q_\beta \equiv [\, M(A,Z) + M_e - M(A,Z-1) \,] c^2 > 0 \qquad \text{Captura de electrones}$$

mientras que en términos de masas atómicas se escriben

$$Q_\beta \equiv [\, M_A(A,Z) - M_A(A,Z+1) \,] c^2 > 0$$

$$Q_\beta \equiv [\, M_A(A,Z) - M_A(A,Z-1) - 2M_e \,] c^2 > 0 \qquad (4)$$

$$Q_\beta \equiv [\, M_A(A,Z) - M_A(A,Z-1) \,] c^2 > 0$$

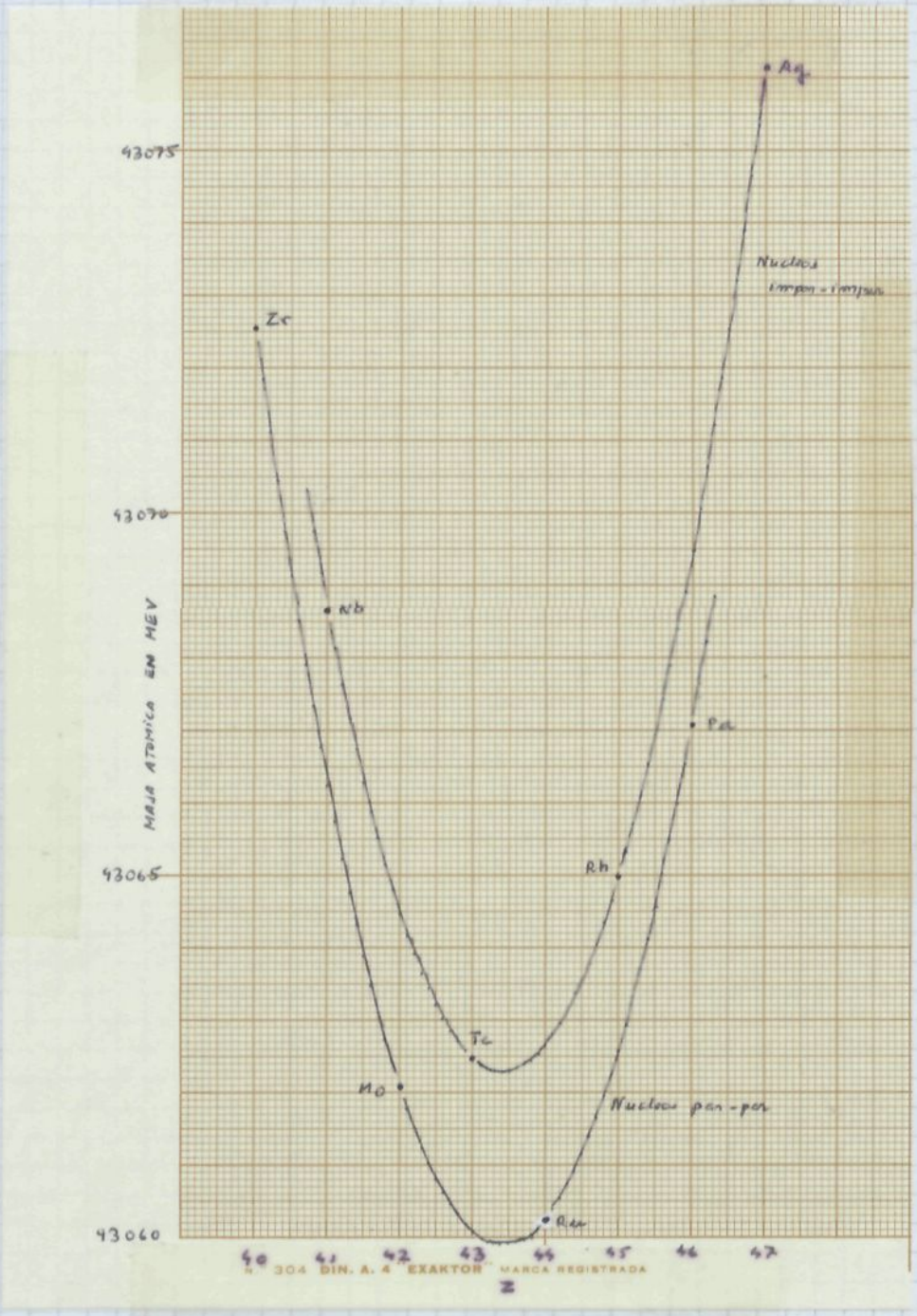


donde no se han tenido en cuenta las energías electrónicas de ligadura, que son siempre muy pequeños. Entonces en la rama de la izquierda al pasar de $Z = 41 \to 42 \to 43 \to 44$ la masa atómica decrece en cada paso y por tanto la transición β^- puede ocurrir en cada uno de ellos. En la rama de la derecha al pasar de $47 \to 46 \to 45 \to 44$ la energía decrece en cada paso y en cada uno de ellos se puede producir una captura electrónica o por desintegración β^+, pues en cada paso el descenso es mayor que $2 M_e c^2 \simeq 1$ MeV. En realidad la diferencia de masas entre el rodio y el rutenio es menor de 1 MeV y la transición sólo puede ir a través de captura electrónica. Vemos pues que de todos los núcleos de $A = 101$ solo el $^{101}_{44}Ru$ es estable.

Este resultado es muy general para núcleos con A = impar : si, en el cambio $Z \to Z+1$ el descenso en masa no es suficiente para permitir una desintegración β^-, entonces la transición $Z+1 \to Z$ es permitida por captura elec-

trónica y resulta que el único núcleo estable es el Z. Por tanto podemos predecir que los núcleos A = impar tiene un solo isobaro estable. Esta conclusión viene avalado por los hechos experimentales con una advertencia: Los núcleos con A muy grande son inestables frente a los desintegraciones α y por tanto la estabilidad discutida aquí no es absoluta sino unicamente frente a desintegraciones $\beta^{\pm}$ o captura de electrones.

Consideremos ahora A = 100. La situación viene dada en la figura siguiente.



Ahora la situación es distinta pues tenemos dos curvas; una para los nucleos con N y Z par y otra con N y Z impar, debido al último término de (24.3)

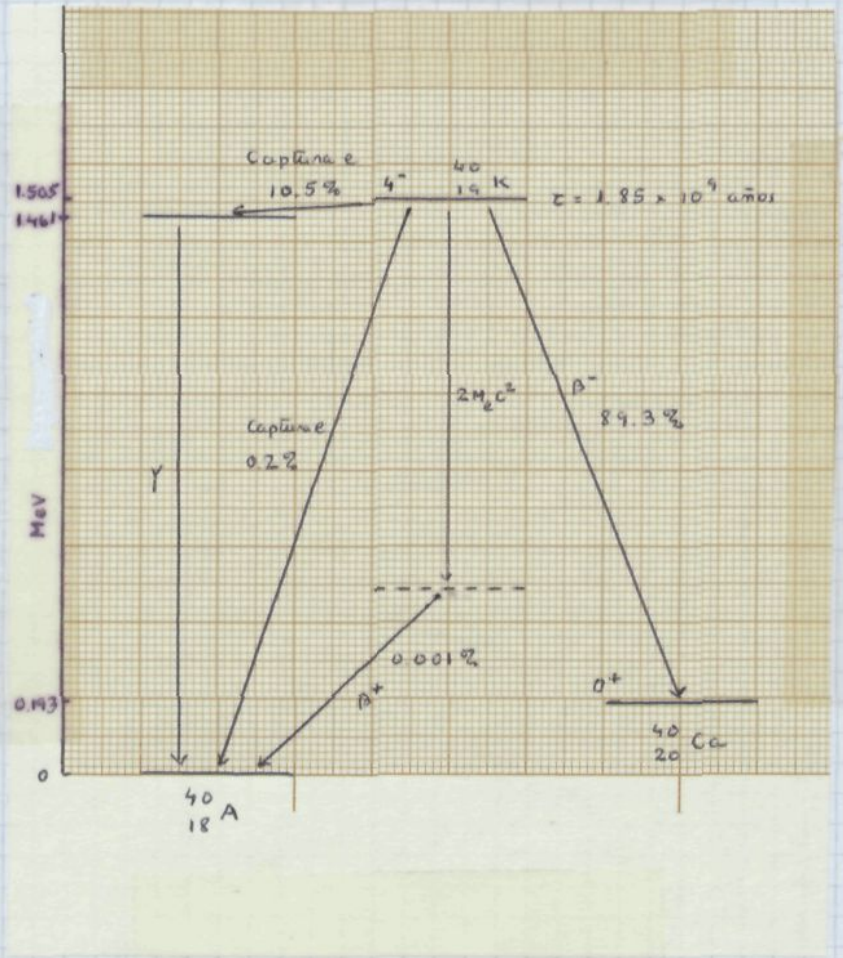
Un análisis idéntico al anterior sugiere dos conclusiones:

i) No hay núcleos estables impar-impar.

ii) Muchos núcleos par-par pueden tener más de un isóbaro estable.

La ii) es cierta y por ejemplo los isobaros $^{96}_{44}Ru$, $^{96}_{42}Mo$, $^{96}_{40}Zr$, son todos estables. La conclusión i) es casi cierta pues los únicos núcleos impar-impar que se conocen son $^{2}_{1}H$, $^{6}_{3}Li$, $^{10}_{5}B$ y $^{14}_{7}N$ para los que la fórmula de masas tiene una validez muy dudosa pues los efectos del llenado de capas es importante. Hay también dos excepciones entre núcleos pesados el $^{50}_{23}V$ y el $^{180}_{73}Ta$ que ocurren naturalmente con abundancias isotópicas del 0.25% y del 0.0123% pero su estabilidad es debida a que su vida media es tan larga que no ha podido ser observada. De momento no diremos nada sobre como calculan las vidas medias para estos procesos.

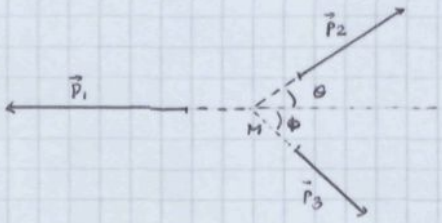
Los tres procesos que consideramos pueden coexistir como sucede en la desintegración del $^{40}_{19}K$:



Notar que cinemáticamente el proceso β^- es totalmente distinto de los casos de las desintegraciones γ y α, éstos dos últimos una partícula se desintegra en dos y de cinemá-

tica está totalmente determinada. Recordemos que en un proceso en el que intervienen n partículas, con masas fijas, son necesarias $3n-10$ variables para fijar totalmente la cinemática y por tanto en los procesos que estamos considerando son necesarias 3 variables

Consideremos una partícula de masa M que se desintegra en 3 de masas m_1, m_2 y m_3. Sean P^μ, p_1^μ, p_2^μ, p_3^μ los cuadrimomentos respectivos. Siempre podemos suponer la partícula original en reposo: $\vec{P} = 0$. Las leyes de conservación del momento y la energía ($c=1$, $p_i \equiv |\vec{p}_i|$) son



$$p_1 = p_2 \cos\theta + p_3 \cos\phi \qquad p_2 \sin\theta = p_3 \sin\phi \tag{1}$$

$$\sqrt{p_1^2 + m_1^2} + \sqrt{p_2^2 + m_2^2} + \sqrt{p_3^2 + m_3^2} = M$$

Queremos averiguar cuales son la energía máxima y mínima que corresponden a la partícula 3. De las dos primeras ecuaciones se deduce inmediatamente

$$p_3^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2 p_1 p_2 \cos\theta \tag{2}$$

Es evidente que el mínimo valor de $p_3 = 0$ que corresponde a $\theta = 0$ y $p_1 = p_2$. De la conservación de la energía se obtiene entonces que

$$4 (M-m_3)^2 p^2 = (M-m_3)^4 + m_1^4 + m_2^4 - 2(M-m_3)^2 m_1^2 - 2(M-m_3)^2 m_2^2 - 2m_1^2 m_2^2$$

$$= \left[(M-m_2-m_3)^2 - m_1^2 \right] \left[(M+m_2-m_3)^2 - m_1^2 \right] > 0 \tag{3}$$

pues $M > m_1 + m_2 + m_3$. El máximo de p_3 se produce para $\phi = 0$, $\theta = \pi$ y por tanto $p_3 = p_1 + p_2$; el momento de la 3 vendrá compensado con el de las otras dos que salen en sentido contrario. Entonces la última de (1) se escribe

$$\sqrt{p_1^2 + m_1^2} + \sqrt{(p_3 - p_1)^2 + m_2^2} + \sqrt{p_3^2 + m_3^2} = M \tag{4}$$

Ahora debemos lograr que para un p_3 fijo $z = \sqrt{p_1^2 + m_1^2} + \sqrt{(p_3 - p_1)^2 + m_2^2}$ sea mínimo e imponiendo la condición $\partial z / \partial p_1 = 0$ se obtiene

$$\frac{p_1}{\sqrt{p_1^2 + m_1^2}} = \frac{(p_3 - p_1)}{\sqrt{(p_3 - p_1)^2 + m_2^2}} \tag{5}$$

es decir, las partículas 1 y 2 tienen la misma velocidad. De aquí

$$p_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} p_3 \quad , \quad p_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} p_3 \tag{6}$$

y por tanto

$$z = \sqrt{p_1^2 + m_1^2} + \sqrt{p_2^2 + m_2^2} = \sqrt{p_3^2 + (m_1 + m_2)^2} \qquad (1)$$

En este límite todo sucede como si la partícula original se desintegrara en dos partículas una de masa m_3 y la otra de masa $(m_1 + m_2)$. De la última ecuación de (42.1) se obtiene que el valor máximo de p_3 es

$$p_3 = \frac{1}{2M} \lambda^{1/2}(x, y, z)$$

$$\lambda(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2x^2z^2 - 2y^2z^2 \qquad (\lambda \text{ de Källen}) \qquad (2)$$

$$x = M \quad , \quad y = m_1 + m_2 \quad , \quad z = m_3$$

y por tanto (restituyendo c)

$$m_3 c^2 \leq E_3 \leq \frac{1}{2M} \left[M^2 - (m_1 + m_2)^2 + m_3^2 \right] c^2 \qquad (3)$$

En el caso de las desintegraciones β^- la energía del electrón emitido es

$$M_e c^2 \leq E_e \leq \frac{1}{2M_i} \left[M_i^2 - (M_f + M_\nu)^2 + M_e^2 \right] c^2 \qquad (4)$$

y su momento

$$0 \leq p_e \leq \frac{1}{2M_i c} \lambda^{1/2} \left[M_i , M_f + M_\nu , M_e \right] \qquad (5)$$

4. Fisión

En la desintegración α el núcleo inicial pierde cuatro nucleones y esto es posible por la gran energía de ligadura de los nucleones en la partícula α : 7.08 MeV / nucleón. Sin embargo en el $^{12}_{6}C$ la energía de ligadura por nucleón es aun mayor : 7.6 MeV. y por tanto la desintegración de algunos núcleos muy pesados por emisión de $^{12}_{6}C$ es posible. Esta desintegración ha sido encontrada, pero es extraordinariamente rara. Sin embargo, todos estos procesos son parte de un espectro de posibilidades en las que un núcleo pesado se rompe en dos (o más) partes ; este espectro de posibilidades se extiende desde el caso en que se emite un núcleo ligero y uno pesado, hasta el caso en que los dos núcleos finales son de tamaños parecidos. Estos últimos procesos se llaman

de fisión espontánea. Un examen de la figura de la pág. 27 donde aparece la energía de ligadura de un núcleo versus A, prueba que este proceso es energéticamente posible si $A \gtrsim 100$. Por ejemplo

$$^{238}_{92}U \longrightarrow ^{145}_{57}La + ^{90}_{35}Br + 3n \qquad (1)$$

libera unos 156 MeV, que se distribuye entre los dos cuerpos finales. Los núcleos pesados son muy ricos en neutrones (Fig. pág 26) y por consiguiente este exceso de neutrones hace que en general los núcleos producidos sean muy ricos en neutrones y que además se liberen unos pocos neutrones. En el ejemplo (1) el $^{145}_{57}La$ sufre tres desintegraciones β^- sucesivas hasta terminar en $^{145}_{60}Nd$. El $^{90}_{35}Br$ es también inestable y en su cadena de desintegración aparecen transiciones β^- y emisión directa de neutrones terminando en $^{90}_{40}Zr$ o $^{89}_{39}Y$.

Aún cuando la fisión espontánea se espera que sea más probable a medida que aumente A, es en realidad un proceso muy poco frecuente incluso en el uranio. Por ejemplo la desintegración α del uranio tiene un ritmo de transición de $5 \times 10^{-18}\ s^{-1}$, mientras que el de la fisión es $3 \times 10^{-24} s^{-1}$, y por tanto la anchura relativa de esta última es 6×10^{-7}. Se puede probar que para núcleos más pesados el ritmo de transición de la fisión espontánea crece y que la anchura relativa crece con A y llega a ser el modo dominante de desintegración para $A > 260$. Hoy día el proceso de fisión espontánea tiene poca importancia, pero podría haber jugado un papel muy importante en la forma de desintegración de los elementos muy pesados creados en la explosión de una supernova.

En los núcleos con Z muy elevado se puede producir fisión inducida a base de transferir energía al núcleo. Una forma muy importante de hacerlo es mediante captura de neutrones lentos. Aquellos núcleos en los que la captura de neutrones lentos favorecen mucho el proceso de fisión se llaman fisionables. Ejemplos de estos son $^{235}_{92}U$ y $^{239}_{94}Pu$. Los productos de la fisión son un par de nucleos de $A \simeq 100-130$, dos o tres neutrones y energía. Los neutrones emitidos pueden, en circunstancias favorables, ser usados para producir nuevas fisiones y así obtener una reacción en cadena controlada o explosiva.

5. Fusión

De la figura de la página 27 se deduce que la energía de ligadura por nucleón en un núcleo presenta un máximo para $A \cong 60$. Por tanto se puede obtener energía por fisión de los núcleos pesados o por fusión de los núcleos ligeros. Reacciones de este tipo pueden ser una fuente muy importante de energía para la humanidad en el futuro. Las reacciones más prometedoras son

$$\begin{aligned} d + d &\longrightarrow {}^{3}_{2}He + n + 3.27\ MeV \\ d + d &\longrightarrow t + p + 4.03\ MeV \\ d + t &\longrightarrow n + \alpha + 17.56\ MeV \end{aligned} \qquad (1)$$

donde d significa deuterio (${}^{2}_{1}H$) y t tritio (${}^{3}_{1}H$). Téngase en cuenta que el tritio se desintegra β^- con $\tau = 17.7$ años y por tanto debe ser producido. Una forma posible es mediante la reacción

$$n + {}^{6}_{3}Li \longrightarrow {}^{4}_{2}He + t \qquad (2)$$

en la que la masa en reposo de los productos finales supera la de los iniciales en 4.79 MeV/c^2.

El inconveniente de todos estos procesos de fusión es que para que tengan lugar es necesario que los dos núcleos originales estén a una distancia del orden de 1 fm. Para lograrlo se debe vencer la barrera de la repulsión Coulombiana que para dos núcleos de cargas $Z_1|e|$ y $Z_2|e|$ es

$$V(r) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} = \frac{Z_1 Z_2 \alpha \hbar c}{r} \cong 1.44\ \frac{Z_1 Z_2}{r}\ MeV\ fm. \qquad (3)$$

o al menos dar a los núcleos iniciales energía suficiente para que la puedan atravesar con una cierta facilidad por efecto túnel. El método que hoy día se considera más adecuado es comprimir una mezcla de d-T y al mismo tiempo calentarla a algunos millones de grados (recordar que de la relación $k_B T$ y como $k_B = 8.617\,385\,(73) \times 10^{-5}\ eV\ K^{-1}$, entonces 1eV equivale a una temperatura de 11604 K.). Las reacciones d+d producen menos energía por proceso y necesitan temperaturas alrededor de 6 veces mayores, a la misma densidad, para obtener la misma energía.

¿De dónde provienen los núcleos? En el modelo cosmológico del Big Bang, cuando han transcurrido unos tres minutos desde el instante inicial el universo es suficientemente frío para que los neutrones y protones existentes empiezan a ligarse formando núcleos (nucleosíntesis original). Al terminarse este proceso todos los núcleos del universo son p y un residuo por ciento en peso de ^4_2He y diminutas cantidades de otros núcleos con $Z \leq 6$. En una estrella primitiva, formada por gran cantidad de hidrógeno, pueden tener lugar los procesos nucleares

$$\begin{aligned} {}^1_1H + {}^1_1H &\longrightarrow {}^2_1H + e^+ + \nu_e + 0.42007\ MeV \\ {}^2_1H + {}^1_1H &\longrightarrow {}^3_2He + \gamma + 5.49356\ MeV \\ {}^3_2He + {}^3_2He &\longrightarrow {}^4_2He + 2\,{}^1_1H + 12.85995\ MeV \end{aligned} \qquad (1)$$

que es equivalente a

$$4\,{}^1_1H \longrightarrow {}^4_2He + 2e^+ + 2\nu_e + 2\gamma + 24.68721\ MeV$$

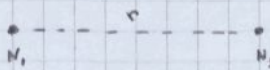
es decir la fusión de cuatro protones para formar una partícula α. Esta es la llamada cadena PP I, que es la fuente principal de energía en estrellas como el Sol. Cuando se ha quemado gran parte del hidrógeno inicial la estrella se contrae y se calienta iniciándose un conjunto de reacciones cuyo resultado es $3\,{}^4_2He \longrightarrow {}^{12}_6C$, esto es el quemado helio. En este proceso también se da la reacción ${}^4_2He + {}^{12}_6C \longrightarrow {}^{16}_8O + \gamma$ y en menor grado ${}^4_2He + {}^{16}_8O \rightarrow {}^{20}_{10}Ne + \gamma$

Posteriormente se empieza a quemar el $^{12}_6C$ y se van formando, en los interiores estelares, núcleos más pesados hasta llegar a $^{56}_{26}Fe$, que es el núcleo con mayor energía de ligadura por nucleón. No vamos a entrar en detalles pero la producción de núcleos más pesados es debida básicamente a cadenas $n + (A, Z) \rightarrow (A+1, Z) + \gamma$, donde los neutrones provienen de los últimos fases de la evolución estelar de estrellas muy pesadas.

II - FUERZAS NUCLEARES

Ya hemos visto que hay núcleos estables y como los protones se repelen debido a su carga deben existir fuerzas, mas intensas que las electromagnéticas, que sean capaces de ligar los nucleones. De las experiencias tipo Rutherford se ve que estas fuerzas deben ser de corto alcance (1 - 2 fm) Por otra parte el hecho de que la densidad nuclear sea constante se cree que es debido a que los potenciales nucleares son altamente repulsivos a muy cortas distancias (0.5 fm) y a la presencia de fuerzas tensoriales, de las que hablaremos más adelante.

Fue H. Yukawa, en 1935, el primero que intento, con éxito, formular una teoría de estas nuevas interacciones. Cualitativamente se puede proceder de la siguiente forma: Supongamos un estado inicial en el que hay dos nucleones en reposo de masa M y a una distancia r. Admitiremos



que la interacción es debida a que uno de ellos emite una partícula de masa m que puede ser capturada por el otro. En el estado inicial la energía del sistema es $2Mc^2$ y entre el proceso de emisión y el de captura la ley de conservación de la energía viene violada, al menos, en una cantidad $\Delta E = mc^2$ Evidentemente, no hay ningún problema si entre el proceso de captura y el de emisión transcurre un tiempo menor o igual que $\tau = \hbar/\Delta E$. En este tiempo la partícula emitida puede propagarse a lo sumo una distancia $d = c\tau = c\hbar/\Delta E = c\hbar/mc^2$. Entonces si $r > d$ los nucleones no pueden interaccionar, mientras que pueden hacerlo si $r < d$. La cantidad d es el llamado <u>alcance</u> de las fuerzas. En el caso de las fuerzas nucleares $d \simeq 1 - 2$ fm y por tanto la masa de la partícula causante de dichas fuerzas debe tener una masa $mc^2 = c\hbar/d \simeq 100 - 200$ MeV. Las fuerzas electromagnéticas son debidas al intercambio de fotones y como éstos tienen masa nula se dice que estas fuerzas son de alcance infinito. Las partículas de Yukawa son el $\pi^\pm$ descubierto por el equipo de C.F. Powell, en 1947, y el π^0 descubierto en Berkeley en 1950.

Hoy día sabemos que el π^+ y π^- son partícula y antipartícula y que sus propieda-

Son:

$\pi^{\pm}$: $J^{\pi} = 0^-$, $T = 1$

$M = 139.56995\ (35)\ MeV/c^2$ (1)

$\tau = 2.6030\ (24) \times 10^{-8}\ s$

$BR(\pi^+ \longrightarrow \mu^+ + \nu_\mu) = 99.98770\ (4)\ \%$

π^0 : $J^{\pi} = 0^-$, $T = 1$

$M = 134.9764\ (6)\ MeV/c^2$ (2)

$\tau = (18.4 \pm 0.6) \times 10^{-17}\ s$

$B.R.(\pi^0 \to \gamma + \gamma) = 98.798\ (32)\ \%$

$B.R\ (\pi^0 \to e^+ + e^- + \gamma) = 1.198\ (32)\ \%$

donde se han dado sólo aquellos "branching ratios" (B.R.) mayores del 1 %.

Veamos una forma posible de determinar la paridad del π^-. Un π^- puede ser capturado en onda S por un deuterón y se ha observado la reacción

$$\pi^- + d \longrightarrow n + n \qquad (3)$$

mediada por las interacciones fuertes. El deuterón tiene spin-paridad 1^+. El estado inicial tiene por tanto $J_i = 1$. En la notación $^{2S+1}L_J$, la conservación del momento angular implica que los estados finales posibles son $^3S_1$, $^3P_1$, $^1P_1$, $^3D_1$. Ahora bien el estado final tiene que ser totalmente antisimétrico bajo el intercambio de los dos neutrones y por tanto $(-1)^L (-1)^{S+1} = -1 \Rightarrow (-1)^{L+S} = 1$, y por tanto el estado final es forzosamente el $^3P_1$. Si indicamos por P_π la paridad del pión $P_\pi (-1)^0 (+1) = (+1)(+1)(-1)^1 \Rightarrow P_\pi = -1$.

De la misma forma en que lo hemos hecho para el neutrón y el protón es de esperar que, en la ausencia de interacciones electromagnéticas y débiles, los tres partículas sean indistinguibles. Las cargas eléctricas carecen de sentido. La desintegración dada para el π^+ es debida a las interacciones débiles, donde el μ^+ y el ν_μ es una nueva familia de leptones

μ^- : $J = 1/2$

$M = 105.65839\ (34)\ MeV/c^2$ (4)

$\tau = 2.19703\ (4) \times 10^{-6}\ s$

$B(\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu) \simeq 100\ \%$

ν_μ : $J = 1/2$

$M \leq 0.27\ MeV/c^2$ (1)

Además de la carga leptónica electrónica L_e que vale +1 para ν_e y e^-, -1 para sus antipartículas y cero para todas las restantes y que es conservada en todas las interacciones, también existe una carga leptónica muónica L_μ con iguales características $e \leftrightarrow \mu$. Más adelante veremos que si los neutrinos tienen masa entonces pueden existir procesos débiles en los que esto no sea cierto.

El π^0 se desintegra electromagnéticamente y por esto su vida media es mucho más corta. Veremos más adelante que

$$\frac{1}{\tau} = W \sim g^2\, Q^\alpha \quad , \quad \alpha > 1 \tag{2}$$

donde g es la constante de acoplamiento de la interacción responsable del proceso y Q la energía liberada en el mismo

Los piones sólo tienen carga eléctrica y bajo conjugación de carga

$$U_c\, |\pi^+\rangle = |\pi^-\rangle \quad , \quad U_c\, |\pi^0\rangle = |\pi^0\rangle \tag{3}$$

Al existir tres estados $T = 1$ y el problema que se plantea es como asociarlos a los estados $|T=1, T_3\rangle$. De (16.5) y con $T_\pm \equiv T_1 \pm i T_2$ se tiene, tomando la base usual, que

$$\langle T\, T_3' \,|\, T\, T_3\rangle = \langle \overline{T}\, \overline{T}_3' \,|\, \overline{T}\, \overline{T}_3\rangle^*$$

$$\langle T\, T_3' \,|\, T_\pm \,|\, T\, T_3\rangle = -\langle \overline{T}\, \overline{T}_3' \,|\, T_\mp \,|\, \overline{T}\, \overline{T}_3\rangle^* \quad , \quad \langle T\, T_3' \,|\, T_3 \,|\, T\, T_3\rangle = -\langle T\, \overline{T}_3' \,|\, T_3 \,|\, T\, \overline{T}_3\rangle^* \tag{4}$$

Para los núcleos se tiene que su carga (en unidades de la carga del protón)

$$Q = T_3 + \frac{1}{2} B \qquad \text{(Relación de Gell-Mann, Nishijima)} \tag{5}$$

donde B es el número de bariones ($\equiv A$). Si pretendemos ahora mantener esta relación, como para los piones $B = 0$, se tiene

$$|\pi^+\rangle = \alpha\, |1\,1\rangle \quad , \quad |\pi^0\rangle = \beta\, |1\,0\rangle \quad , \quad |\pi^-\rangle = \gamma\, |1\,-1\rangle \tag{6}$$

donde α, β y γ son fases. Teniendo en cuenta que

$$T_\pm\, |T\, T_3\rangle = \left[(T \mp T_3)(T \pm T_3 + 1) \right]^{1/2} |T\, T_3 \pm 1\rangle \tag{7}$$

y, las únicas condiciones independientes en (3.4), que son

$$\langle \pi^0 | T_+ | \pi^- \rangle = - \langle \pi^0 | T_- | \pi^+ \rangle^* \quad , \quad \langle \pi^+ | T_+ | \pi^0 \rangle = - \langle \pi^- | T_- | \pi^0 \rangle^* \tag{1}$$

se obtiene $\alpha \beta^* = - \beta \gamma^*$ como única condición y se suele elegir

$$|\pi^+\rangle = - |1,1\rangle \quad , \quad |\pi^0\rangle = |1,0\rangle \quad , \quad |\pi^-\rangle = |1,-1\rangle \tag{2}$$

Hemos visto que el $|\pi^0\rangle$ coincide con su antipartícula y es un estado propio de U_c con valor propio $+1$. También el fotón carece de cargas y por tanto es un estado propio de U_c con:

$$U_c |\gamma\rangle = - |\gamma\rangle \tag{3}$$

Los valores propios de U_c se conservan multiplicativamente en las reacciones fuertes y electromagnéticas y esta ley de conservación es violada por las interacciones débiles. Se tiene por ejemplo que

$$\frac{\Gamma(\pi^0 \longrightarrow \gamma + \gamma + \gamma)}{\Gamma(\pi^0 \longrightarrow \gamma + \gamma)} < 3.1 \times 10^{-8} \tag{4}$$

Si no existiera la ley de conservación de la conjugación de carga se esperaría que este cociente fuera de orden α.

Son muy pocas las partículas que coinciden con sus antipartículas y que, por tanto, tengan un valor propio de U_c bien definido. Para generalizar este concepto a todo tipo de partículas que sólo tengan carga eléctrica se introduce la G-paridad. El operador que implementa esta simetría es

$$U_G = U_c \, e^{-i\pi T_2} \tag{5}$$

Notemos que

$$e^{-i\pi T_2} |T T_3\rangle = \sum_{T_3'} \langle T T_3' | e^{-i\pi T_2} | T T_3 \rangle | T T_3' \rangle = \sum_{T_3'} d^T_{T_3' T_3}(\pi) | T T_3' \rangle \Rightarrow$$

$$e^{-i\pi T_2} | T, T_3 \rangle = (-1)^{T - T_3} | T, -T_3 \rangle \tag{6}$$

Entonces

$$U_G |\pi^\pm\rangle = - |\pi^\pm\rangle \quad , \quad U_G |\pi^0\rangle = - |\pi^0\rangle \tag{7}$$

es decir que la G-paridad de los piones es -1. Se suele escribir $I^G = 1^-$, como isospin y G-paridad de los piones

Veamos que en todo isomultiplete en el que la única carga no nula sea la eléctrica siempre se puede hacer la asignación de los estados físicos a la base $|I I_3\rangle$ de forma que las partículas sean estados propios de U_G con valor propio $C_n (-1)^I$, donde C_n es el valor propio de U_C para la partícula neutra del isomultiplete. Al querer mantener la relación de Gell-Mann - Nishijima se tiene que $Q = I_3$ y la cuantificación de la carga eléctrica implica que I es entero. Indiquemos por $|p(I_3)\rangle$ el estado de la partícula de isospin I y tercera componente I_3 y por tanto

$$|p(I_3)\rangle = \alpha(I_3)\,|I\,I_3\rangle \tag{1}$$

donde $\alpha(I_3)$ es una fase. Para la partícula neutra

$$U_G\,|p(0)\rangle = \alpha(0)\,U_G\,|I,0\rangle = \alpha(0)\,(-1)^I\,U_C\,|I0\rangle = (-1)^I\,U_C\,|p(0)\rangle = (-1)^I\,C_n\,|p(0)\rangle \tag{2}$$

Veamos como se transforma $|p(I_3)\rangle$ bajo U_G si $I_3 \neq 0$

$$U_G\,|p(I_3)\rangle = \alpha(I_3)\,U_G\,|\bar{I}\,I_3\rangle = \alpha(I_3)\,(-1)^{I-I_3}\,U_C\,|I,-I_3\rangle =$$

$$= (-1)^{I-I_3}\,\alpha(I_3)\,\alpha^*(-I_3)\,U_C\,|p(-I_3)\rangle = (-1)^{I-I_3}\,\alpha(I_3)\,\alpha^*(-I_3)\,|p(I_3)\rangle \tag{3}$$

Por otra parte (3.4) implica como condición sobre las fases $\alpha(I_3)$

$$\langle p(I_3+1)\,|\,I_+\,|\,p(I_3)\rangle = -\langle p(-I_3+1)\,|\,I_-\,|\,p(-I_3)\rangle^* \Rightarrow$$

$$\alpha(I_3)\,\alpha^*(I_3+1) = -\alpha(-I_3-1)\,\alpha^*(-I_3) \Rightarrow \alpha(I_3)\,\alpha(-I_3) = \alpha(I_3+1)\,\alpha(-I_3-1) \tag{4}$$

entonces el resultado deseado se obtiene tomando los $\alpha(I_3)$ reales y que cumplan $\alpha(I_3)\,\alpha(-I_3) = (-1)^I C_n$ y entonces para todos los miembros de este isomultiplete

$$U_G\,|p(I_3)\rangle = C_n\,(-1)^I\,|p(I_3)\rangle \tag{5}$$

que es el resultado deseado. Como las interacciones fuertes son invariantes bajo isospin y conjugación de carga, también la G-paridad es una buena simetría de las interacciones fuertes. Un sistema de N piones tiene G-paridad $(-1)^N$.

Antes de continuar vamos a ver como se puede reformular el principio de simetrización para nucleones. Dado un sistema de Z protones y N neutrones, es sólo necesario antisimetrizar su función de onda con respecto a todos los protones entre sí, y a todos los neutrones entre sí. Mas sin añadir ninguna hipótesis física, esto es sin generalizar el principio de antisimetrización, es posible extender formalmente el principio de exclusión a un sistema de nucleones, con el mero fin de unificar los formalismos, pero sin ninguna trascendencia física. Dada una función de onda de un sistema de protones y neutrones, debidamente antisimetrizada sobre protones y sobre neutrones, siempre se le puede asociar una función de onda de nucleones, totalmente antisimetrizada, y que equivale físicamente a aquélla: basta añadir a las variables de cada partícula una nueva variable, tercera componente del isospín, que reemplaza a los símbolos p y n y hecho esto en la función de onda primitiva, se antisimetriza la función resultante en todas las variables, incluidas las nuevas. Más concretamente, sea $\mathcal{H}_{Z,N}$ el subespacio de $\mathcal{H}_{Z+N}$ formado por aquellos estados en que las primeras Z variables se refieren a protones y las N últimas a neutrones, y que están antisimetrizados en las variables Z, por un lado, y en las variables N, por otro. Denotemos por $\mathcal{H}_{Z+N,A}$ la parte totalmente antisimétrica de $\mathcal{H}_{Z+N}$, y que se obtiene de $\mathcal{H}_{Z+N}$ por aplicación del antisimetrizador

$$A \equiv \frac{1}{(Z+N)!} \sum_{P \in S_{Z+N}} (-1)^{\pi(P)} P \tag{1}$$

donde la suma se extiende a los $(Z+N)!$ permutaciones P y $\pi(P)$ es la paridad de la permutación P. Notar que $A = A^{\dagger} = A^2$.

Es fácil probar que la aplicación

$$|\psi\rangle \in \mathcal{H}_{Z,N} \longrightarrow |\widetilde{\psi}\rangle = \binom{Z+N}{Z}^{1/2} A\,|\psi\rangle \in \mathcal{H}_{Z+N,A} \tag{2}$$

es una biyección isométrica de $\mathcal{H}_{Z,N}$ sobre $\mathcal{H}_{Z+N,A}$. Esta es la correspondencia aludida que asocia un estado de nucleones totalmente antisimétrico al estado inicial de protones y neutrones. Respecto a los observables, dado un observable $\mathcal{A}$ en $\mathcal{H}_{Z,N}$ que respete la indistinguibilidad entre protones y neu-

triones, el observable que se le asociará en el lenguaje de nucleones deberá dejar invariantes las predicciones físicas; tal observable se obtiene a través de la correspondencia (6.2):

$$\Sigma \longrightarrow \tilde{\Sigma} \equiv \binom{Z+N}{Z} A K \Sigma K A \tag{1}$$

donde K es el proyector ortogonal de $\mathcal{H}_{Z+N}$ sobre $\mathcal{H}_{Z,N}$. Nótese que $[\tilde{\Sigma}, P] = 0$ $\forall P \in S_{Z+N}$. En efecto

$$\langle \tilde{\Psi} | \tilde{\Sigma} | \tilde{\Psi} \rangle = \binom{Z+N}{Z}^2 \langle A\psi | A K \Sigma K A | A\psi \rangle = \binom{Z+N}{Z}^2 \langle A\psi | K \Sigma K | A\psi \rangle$$

Al desarrollar el elemento de matriz $\langle A\psi | K \Sigma K | A\psi \rangle$ aparecerá un factor $[(Z+N)!]^{-2}$ proveniente de los operadores A que allí intervienen (ver (6.1)); por otra parte, todo $(Z+N)!\, A|\psi\rangle$ contiene $(Z+N)!/Z!N!$ vectores distintos con estructura análoga a la de $|\psi\rangle$, y con coeficiente $Z!N!$. Todos estos vectores son anulados por K, excepto aquel en que todos los índices protón preceden a todos los índices neutrón. En consecuencia

$$\langle \tilde{\Psi} | \tilde{\Sigma} | \tilde{\Psi} \rangle = \binom{Z+N}{Z}^2 \frac{1}{[(Z+N)!]^2} [Z!N!]^2 \langle \psi | \Sigma | \psi \rangle = \langle \psi | \Sigma | \psi \rangle$$

como queríamos demostrar.

Para adelantar en nuestro conocimiento de las fuerzas nucleares consideremos el sistema ligado más simple: el deuterón, que es un estado ligado n-p. El sistema está ligado en el estado fundamental y las características de este son

$J^\pi = 1^+$

Energía de ligadura $B_d = 2.224\,575\,(9)$ MeV

Momento dipolar magnético $\mu_d = 0.857\,406\,(1)\ \mu_N$ (2)

Momento cuadrupolar eléctrico $\mathcal{Q}_d = 0.2860\,(15)$ fm^2

Teniendo en cuenta que $J = 1$, en la notación $^{2S+1}L_J$ los únicos estados posibles del deuterón son

$$^1P_1 \quad , \quad ^3S_1 \quad , \quad ^3P_1 \quad , \quad ^3D_1 \tag{3}$$

La completa antisimetrización de la función de onda implica que

$$(-1)^{L}\,(-1)^{S+1}\,(-1)^{T+1} = -1 \qquad (1)$$

y por tanto los estados posibles son

$$^1P_1\,,\ T=0\ ;\quad ^3S_1\,,\ T=0\ ;\quad ^3P_1\,,\ T=1\ ;\quad ^3D_1\,,\ T=0 \qquad (2)$$

Los estados P tienen paridad negativa y por tanto el único estado ligado del deuterón será de la forma

$$|d;\,1^+\rangle = \cos\omega\,|^3S_1;\,T=0\rangle + \sin\omega\,|^3D_1;\,T=0\rangle \qquad (3)$$

Notar que para el deuterio $T=0$. Fijemonos que si hubieramos obtenido $T=1$ hubieran aparecido problemas pues, en ausencia de electromagnetismo, hubieramos esperado tambien estados ligados (pp) y (nn), que no existen en la naturaleza. Como la energía de ligadura del deuterón es muy baja, podríamos achacar a las fuerzas electromagnéticas la ausencia de un estado ligado (pp), pero sería mucho más difícil explicar la ausencia del (nn).

Veamos como escribir comodamente (3) en la representación de posiciones. Para el momento angular orbital las funciones propias de $\vec{L}^2$ y L_3 son los armonicos esféricos que cumplen

$$\vec{L}^2\,Y_L^M(\theta,\phi) = \hbar^2 L\,(L+1)\,Y_L^M(\theta,\phi)\ ,\qquad L_3\,Y_L^M(\theta,\phi) = \hbar M\,Y_L^M(\theta,\phi) \qquad (4)$$

Consideremos el operador de spin $\vec{S}$ cuyas componentes en la base

$$\hat{e}_1 = (1,0,0)\ ,\qquad \hat{e}_2 = (0,1,0)\ ,\qquad \hat{e}_3 = (0,0,1) \qquad (5)$$

son

$$S_1 = \hbar\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix}\ ,\quad S_2 = \hbar\begin{pmatrix}0&0&i\\0&0&0\\-i&0&0\end{pmatrix}\ ,\quad S_3 = \hbar\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \qquad (6)$$

y generan una representación $\mathcal{D}^{(1)}$. Para $\vec{S}^2$ y S_3 los valores propios simultaneos

$$\vec{S}^2\,\chi_\mu = \hbar^2 2\,\chi_\mu\ ,\qquad S_3\,\chi_\mu = \hbar\mu\,\chi_\mu \qquad (7)$$

vienen dados por

$$\vec{\chi}_{\pm1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\,(\hat{e}_1 \pm i\hat{e}_2)\ ,\qquad \vec{\chi}_0 = \hat{e}_3 \qquad (8)$$

Estos vectores se han elegido de forma que estén normalizados según

$$\vec{\chi}_\mu^{\,*} \cdot \vec{\chi}_{\mu'} = \delta_{\mu\mu'} \tag{1}$$

y que su fase relativa esté de acuerdo con el convenio de Condon - Shortley

$$S_\mu \vec{\chi}_\lambda = (-1)^\mu \hbar \sqrt{2}\, C(1\,1\,1;\, \mu+\lambda, -\mu, \lambda)\, \vec{\chi}_{\mu+\lambda} \tag{2}$$

que no es más que un caso particular de la relación general

$$J_\mu |JM\rangle = (-1)^\mu \hbar \sqrt{J(J+1)}\, C(J\,1\,J;\, M+\mu, -\mu, M)\, |J, M+\mu\rangle \tag{3}$$

Si se define el momento angular total como $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$, interesa hallar los vectores propios simultáneos de $\vec{L}^2$, $\vec{S}^2$, $\vec{J}^2$ y J_3, que se indican mediante la notación $\vec{\mathcal{Y}}^{\,L}_{JM}(\theta,\phi)$ y deben satisfacer las ecuaciones

$$\vec{L}^2\, \vec{\mathcal{Y}}^{\,L}_{JM}(\theta,\phi) = \hbar^2 L(L+1)\, \vec{\mathcal{Y}}^{\,L}_{JM}(\theta,\phi) \quad , \quad \vec{S}^2\, \vec{\mathcal{Y}}^{\,L}_{JM}(\theta,\phi) = \hbar^2 2\, \vec{\mathcal{Y}}^{\,L}_{JM}(\theta,\phi)$$

$$\vec{J}^2\, \vec{\mathcal{Y}}^{\,L}_{JM}(\theta,\phi) = \hbar^2 J(J+1)\, \vec{\mathcal{Y}}^{\,L}_{JM}(\theta,\phi) \quad , \quad J_3\, \vec{\mathcal{Y}}^{\,L}_{JM}(\theta,\phi) = \hbar M\, \vec{\mathcal{Y}}^{\,L}_{JM}(\theta,\phi) \tag{4}$$

y vienen dados por

$$\vec{\mathcal{Y}}^{\,L}_{JM}(\theta,\phi) = \sum_\mu C(L\,1\,J;\, M-\mu, \mu, M)\, Y_L^{M-\mu}(\theta,\phi)\, \vec{\chi}_\mu \tag{5}$$

Evidentemente para un J dado los valores posibles de L son $|J-1|, J, J+1$. Se prueba fácilmente que

$$\left[\vec{\mathcal{Y}}^{\,L}_{JM}(\theta,\phi)\right]_\mu = (-1)^M C(L\,1\,J;\, M+\mu, -\mu, M)\, Y_L^{M+\mu}(\theta,\phi) \tag{6}$$

$$\int d\Omega\, \vec{\mathcal{Y}}^{\,L'\,*}_{J'M'}(\theta,\phi) \cdot \vec{\mathcal{Y}}^{\,L}_{JM}(\theta,\phi) = \delta_{JJ'}\, \delta_{LL'}\, \delta_{MM'} \tag{7}$$

En esta notación la función de onda del deuteron (8.3) se puede escribir

$$\vec{\Psi}_M(\vec{r}) = \cos\omega\, \frac{1}{r} f_S(r)\, \vec{\mathcal{Y}}^{\,0}_{1M}(\theta,\phi) + \sin\omega\, \frac{1}{r} f_D(r)\, \vec{\mathcal{Y}}^{\,2}_{1M}(\theta,\phi) \tag{8}$$

donde las funciones de onda radiales $f_S(r)$ y $f_D(r)$ y el parámetro ω se deben determinar usando la ecuación de Schrödinger, después de haber fijado el potencial de interacción. La condición de normalización

$$\int d^3r \; \vec{\Psi}^{*}_{M}(\vec{r}) \cdot \Psi_{M}(\vec{r}) = 1 \qquad (1)$$

implica

$$\cos^2\omega \int_0^\infty dr \; |f_S(r)|^2 + \sin^2\omega \int_0^\infty dr \; |f_D(r)|^2 = 1 \qquad (2)$$

Veamos ahora cual es el momento dipolar magnético del deuterón. En muy buena aproximación, el operador momento magnético, en unidades de magnetones nucleares, viene la expresión

$$\vec{\mu} = \vec{L}_p + g_p \vec{S}_p + g_n \vec{S}_n \qquad (3)$$

tomando $\hbar = 1$. Los factores giromagnéticos son

$$g_p/2 = +2.792\,847\,39\,(6) \qquad (4)$$
$$g_n/2 = -1.913\,042\,8\,(5)$$

Como las masas del protón y del neutrón son muy parecidas, la distancia del protón al centro de masas es la mitad de la distancia relativa $p-n$, y $\vec{L}_p = \vec{L}/2$, siendo $\vec{L}$ el momento angular orbital relativo $p-n$

El momento magnético se define

$$\mu_{el} \equiv \langle 1\,1 \,|\, \mu_3 \,|\, 1\,1 \rangle \qquad (5)$$

siendo $|1\,1\rangle$ el estado (1.3) con $J_3 = +1$. Como $\vec{\mu}$ es un operador vectorial

$$\langle L'S\,J\,J|\,\mu_3\,|LS\,J\,J\rangle = \frac{1}{J(J+1)} \langle L'S\,J\,J \,|\, J_3\,(\vec{\mu}\cdot\vec{J})\,|LS\,J\,J\rangle = \frac{1}{J+1} \langle L'S\,J\,J|\,(\vec{\mu}\cdot\vec{J})\,|LS\,J\,J\rangle \qquad (6)$$

Además como

$$\vec{L}\cdot\vec{J} = \frac{1}{2}\left[\vec{J}^2 + \vec{L}^2 - \vec{S}^2\right]$$

$$\vec{J}\cdot\vec{S}_n = \vec{J}\cdot(\vec{S} - \vec{S}_p) = \frac{1}{2}\left[\vec{J}^2 - \vec{L}^2 + \vec{S}^2\right] - \vec{J}\cdot\vec{S}_p$$

$$\vec{J}\cdot\vec{S}_p = \vec{J}\,(\vec{S} - \vec{S}_n) = \frac{1}{2}\left[\vec{J}^2 - \vec{L}^2 + \vec{S}^2\right] - \vec{J}\cdot\vec{S}_n$$

$$g_p\,\vec{J}\cdot\vec{S}_p + g_n\,\vec{J}\cdot\vec{S}_n = \frac{1}{2}\left[g_p\,\vec{J}\cdot\vec{S}_p + g_n\,\vec{J}\cdot\vec{S}_n\right] + \frac{1}{4}(g_p+g_n)\left[\vec{J}^2 - \vec{L}^2 + \vec{S}^2\right]$$

$$- \frac{1}{2}\,g_p\,\vec{S}_n\vec{J} - \frac{1}{2}\,g_n\,\vec{S}_p\cdot\vec{J}$$

y por tanto

$$\vec{\mu}.\vec{J} = \frac{1}{4}(g_p + g_n + 1)\vec{J}^2 + \frac{1}{4}(g_p + g_n - 1)(\vec{S}^2 - \vec{L}^2) + \frac{1}{2}(g_p - g_n)\vec{J}.(\vec{S}_p - \vec{S}_n) \quad (1)$$

Como la función de onda del deuterón es totalmente simétrica en las variables de spin el valor esperado del último término es nulo y así obtenemos

$$\mu_d = \frac{1}{2}(g_p + g_n)\cos^2\omega + \frac{1}{4}(3 - g_p - g_n)\sin^2\omega \quad (2)$$

y teniendo en cuenta el valor experimental de μ se obtiene $\sin^2\omega \simeq 0.039$ y por tanto la probabilidad de la onda D es del orden del 4%. Al construir el estado (8.3) hemos tenido en cuenta que para el deuterón el spin-paridad era 1^+. Si hubiéramos supuesto spin-paridad 1^- entonces la función de onda hubiera sido

$$|d;1^-\rangle = \cos\omega'\ |{}^1P_1;T=0\rangle + \sin\omega'\ |{}^3P_1;T=1\rangle$$

y hubiéramos obtenido

$$\mu_d = \frac{1}{2}\cos^2\omega' + \frac{1}{4}(1 + g_p + g_n)\sin^2\omega'$$

que hubiera conducido al valor imposible $\sin^2\omega' \simeq 1.88$

Veamos que sucede con el momento cuadripolar eléctrico. En unidades de la carga del protón el momento cuadripolar eléctrico se define

$$Q_d = \langle 11|\ 3z_p^2 - r_p^2\ |11\rangle \quad (3)$$

donde $\vec{r}_p$ son las coordenadas del protón en el sistema centro de masa. Como $\vec{r}_p = \vec{r}/2$, siendo $\vec{r}$ la posición relativa p-n, se tiene

$$Q = \sqrt{\frac{\pi}{5}}\ \langle 11|\ r^2 Y_2^0(\theta,\phi)\ |11\rangle \quad (4)$$

Tengamos en cuenta (9.8) y (9.5). De esta última

$$\vec{\mathcal{Y}}^0_{11} = Y_0^0(\theta,\phi)\,\vec{\chi}_{+1}$$

$$\vec{\mathcal{Y}}^2_{11} = \sqrt{\frac{3}{5}}\,Y_2^2(\theta,\phi)\,\vec{\chi}_{-1} - \sqrt{\frac{3}{10}}\,Y_2^1(\theta,\phi)\,\vec{\chi}_0 + \frac{1}{\sqrt{10}}\,Y_2^0(\theta,\phi)\,\vec{\chi}_1 \quad (5)$$

y por tanto

$$Q_a = \sqrt{\frac{\pi}{5}} \int_0^\infty dr\, r^2 \int d\Omega\, Y_2^0(\Omega) \left\{ \cos\omega\, f_S^*(r)\, Y_0^{0*}(\Omega)\, \vec{\chi}_{+1}^{\,*} + \sin\omega\, f_D^*(r) \left[\sqrt{\frac{3}{5}}\, Y_2^{2*}(\Omega)\, \vec{\chi}_{-1}^{\,*} - \right.\right.$$

$$\left. - \sqrt{\frac{3}{10}}\, Y_2^{1*}(\Omega)\, \vec{\chi}_0^{\,*} + \frac{1}{\sqrt{10}}\, Y_2^{0*}(\Omega)\, \vec{\chi}_{+1}^{\,*} \right] \Big\} \cdot \Big\{ \cos\omega\, f_S(r)\, Y_0^0(\Omega)\, \vec{\chi}_{+1} +$$

$$+ \sin\omega\, f_D(r) \left[\sqrt{\frac{3}{5}}\, Y_2^2(\Omega)\, \vec{\chi}_{-1} - \sqrt{\frac{3}{10}}\, Y_2^1(\Omega)\, \vec{\chi}_0 + \frac{1}{\sqrt{10}}\, Y_2^0(\Omega)\, \vec{\chi}_{+1} \right] \Big\} =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{5}} \int_0^\infty dr\, r^2 \int d\Omega \left\{ \cos^2\omega\, |f_S(r)|^2\, Y_0^{0*}(\Omega)\, Y_0^0(\Omega)\, Y_2^0(\Omega) + \right.$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{10}} \cos\omega \sin\omega \left[f_S^*(r)\, f_D(r)\, Y_0^{0*}(\Omega)\, Y_2^0(\Omega)\, Y_2^0(\Omega) + f_D^*(r)\, f_S(r)\, Y_2^{0*}(\Omega)\, Y_0^0(\Omega)\, Y_2^0(\Omega) \right]$$

$$\left. + \sin^2\omega\, |f_D(r)|^2 \left[\frac{3}{5}\, Y_2^{2*}(\Omega)\, Y_2^2(\Omega)\, Y_2^0(\Omega) + \frac{3}{10}\, Y_2^{1*}(\Omega)\, Y_2^1(\Omega)\, Y_2^0(\Omega) + \frac{1}{10}\, Y_2^{0*}(\Omega)\, Y_2^0(\Omega)\, Y_2^0(\Omega) \right] \right\}$$

Recordamos que

$$\int d\Omega\, Y_{L_3}^{M_3*}(\Omega)\, Y_{L_2}^{M_2}(\Omega)\, Y_{L_1}^{M_1}(\Omega) = \left[\frac{(2L_1+1)(2L_2+1)}{4\pi\,(2L_3+1)} \right]^{1/2} C(L_1 L_2 L_3;\, M_1 M_2 M_3)\, C(L_1 L_2 L_3;\, 0\,0\,0)$$

y entonces las únicas integrales no nulas para este cálculo son

$$\int d\Omega\, Y_2^{0*}(\Omega)\, Y_0^0(\Omega)\, Y_2^0(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$\int d\Omega\, Y_2^{2*}(\Omega)\, Y_2^2(\Omega)\, Y_2^0(\Omega) = -\frac{2}{7}\sqrt{\frac{5}{4\pi}}$$

$$\int d\Omega\, Y_2^{1*}(\Omega)\, Y_2^1(\Omega)\, Y_2^0(\Omega) = +\frac{1}{7}\sqrt{\frac{5}{4\pi}}$$

$$\int d\Omega\, Y_2^{0*}(\Omega)\, Y_2^0(\Omega)\, Y_2^0(\Omega) = +\frac{2}{7}\sqrt{\frac{5}{4\pi}}$$

De aquí.

$$Q_a = \frac{1}{10} \left\{ \sqrt{2} \sin\omega \cos\omega\, \mathrm{Re} \left[\int_0^\infty dr\, r^2\, f_S^*(r)\, f_D(r) \right] \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \sin^2\omega \int_0^\infty dr\, r^2\, |f_D(r)|^2 \right\} \qquad (1)$$

lo cual muestra más claramente que en el caso anterior la necesidad de la onda D para explicar las propiedades del deuterón. Un cálculo preciso de (1) exige conocer las funciones de onda radiales. Como $\sin^2\omega \simeq 0.039$

$$\phi(\vec{x}) = \int d^3x' \; \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

$r \equiv |\vec{x}|$, $r' \equiv |\vec{x}'|$ $\qquad \vec{x}\,\vec{x}' \equiv r r' \cos\theta$

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta}} = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{r'}{r}\cos\theta + \frac{r'^2}{r^2}}} = r > r' =$$

$$= \frac{1}{r} \sum_{L=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^L \cdot P_L(\cos\theta) = \sum_{L=0}^{\infty} \frac{(r')^L}{r^{L+1}} \frac{4\pi}{2L+1} \sum_{M=-L}^{+L} Y_L^{M\,*}(\hat{x}')\, Y_L^M(\hat{x})$$

$$\phi(\vec{x}) = \sum_{L=0}^{\infty} \sum_{M=-L}^{+L} \frac{4\pi}{2L+1} \left\{ \underbrace{\int d^3x' \; r'^L \; Y_L^M(\hat{x}')\, \rho(\vec{x}')}_{} \right\} Y_L^M(\hat{x})$$

q_L^M . momentos multipolares $\qquad q_L^{M\,*} = (-1)^M q_L^M$

$$q_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int d^3x' \; \rho(\vec{x}') = \frac{Q}{\sqrt{4\pi}}$$

$$q_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int d^3x' \; (x' - iy')\, \rho(x') = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \; (d_x - i\, d_y)$$

$$\vec{d} \equiv \int d^3x' \; \vec{x}' \; \rho(x')$$

$$q_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int d^3x' \; z' \; \rho(x') = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\, d_z$$

$$Q_{ij} \equiv \int d^3x' \; \rho(x') \; (3x_i' x_j' - \vec{x}'^2 \delta_{ij})$$

$$q_2^2 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \int d^3x' \; (x' - iy')^2 \rho(x') = \frac{1}{12}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \; (Q_{11} - 2iQ_{12} - Q_{22})$$

$$q_2^1 = -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \; (Q_{13} - i\, Q_{23}) \qquad q_2^0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4\pi}} \; Q_{33}$$

y suponemos que el primer término es dominante

$$\mathrm{Re}\left[\int_0^\infty dr\, r^2 f_S^*(r)\, f_D(r)\right] \simeq 10.7\ fm^2 \qquad (1)$$

lo cual nos indica que el deuterón es un objeto muy extenso, lo cual no es de extrañar si se tiene en cuenta su pequeña energía de ligadura.

Una fuerza de tipo central no puede mezclar estados de momentos angulares distintos pues $[\vec{L}^2,\ V_c(r)] = 0$. De los resultados anteriores se ve que las fuerzas entre nucleones deben ser tales que L no sea un buen número cuántico. Un potencial que se usa para la descripción del deuterón es

$$V = V_c(r) + V_T(r)\ S_{12} \quad , \quad S_{12} \equiv 3(\vec{\sigma}_1.\hat{r})(\vec{\sigma}_2.\hat{r}) - \vec{\sigma}_1.\vec{\sigma}_2 \qquad (2)$$

Donde $\vec{\sigma}_1$ y $\vec{\sigma}_2$ son las matrices de Pauli correspondientes a las dos partículas. Este potencial adicional se llama <u>potencial tensorial</u>. Introduciendo el spin total $\vec{S} = \hbar(\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2)/2$ se obtiene

$$S_{12} = \frac{2}{\hbar^2}\left[3(\vec{S}.\hat{r})^2 - \vec{S}^2\right] \qquad (3)$$

pues

$$\frac{2}{\hbar^2}\left[3(\vec{S}.\hat{r})^2 - \vec{S}^2\right] = \frac{1}{2}\left[3(\vec{\sigma}_1\hat{r} + \vec{\sigma}_2.\hat{r})^2 - (\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[3\left(1 + 1 + 2(\vec{\sigma}_1\hat{r})(\vec{\sigma}_2.\hat{r})\right) - 3 - 3 - 2\vec{\sigma}_1.\vec{\sigma}_2\right] = S_{12}$$

Es fácil comprobar que si H es el Hamiltoniano del sistema

$$[\vec{L}^2, H] \neq 0 \quad , \quad [\vec{S}^2, H] = [\vec{J}^2, H] = [J_3, H] = [U_p, H] = 0 \qquad (4)$$

y por tanto el conjunto de los números cuánticos (S, J, M, Π) pueden ser usados para ayudar a caracterizar los estados propios del hamiltoniano. Podremos escribir usando los armónicos esféricos vectoriales

$$\mathcal{Y}^M_{LSJ}(\hat{r}) \equiv \sum_\mu C(LSJ;\ M-\mu, \mu, M)\, Y_L^{M-\mu}(\theta,\phi)\, \chi_S^\mu \qquad (5)$$

donde χ_S^μ son las funciones de onda normalizadas para spin total S y tercera componente μ, con fases elegidas según el convenio habitual, la función de onda como

$$\psi^{\Pi}_{SJM}(\vec{r}) = \sum_{L} F^{(S)}_{L}(r)\; \mathcal{Y}^{M}_{LSJ}(\hat{r}) \qquad (1)$$

Estudiaremos por separado los casos posibles $S = 0, 1$.

i) $S = 0 \Rightarrow J = L$ y $\Pi = (-1)^{L}$ En este caso la función de onda puede factorizarse $F^{(0)}_{J}(r)\; \mathcal{Y}^{M}_{J0J}(\hat{r})$ y como $S_{12}\, \mathcal{Y}^{M}_{J0J}(\hat{r}) = 0$ y $\vec{L}^2\, \mathcal{Y}^{M}_{J0J}(\hat{r}) = \hbar^2 J(J+1)\, \mathcal{Y}^{M}_{J0J}(\hat{r})$ se obtiene

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr}\right) + \frac{\hbar^2 J(J+1)}{2\mu r^2} + V_c(r) \right\} F^{(0)}_{J}(r) = E\, F^{(0)}_{J}(r) \qquad (2)$$

ii) $S = 1 \Rightarrow L = |J-1|, J, J+1$ y debemos distinguir dos casos:

ii a) Si $\Pi = (-1)^{J}$, entonces la función de onda puede factorizarse en la forma $F^{(1)}_{J}(r)\; \mathcal{Y}^{M}_{J1J}(\hat{r})$, pues si introducimos $Q \equiv (\vec{S}\cdot\hat{r})^2/\hbar^2$ es inmediato comprobar que

$$[Q, \vec{J}^2] = [Q, U_p] = 0 \quad , \quad Q^2 = Q \qquad (3)$$

y por tanto

$$Q\, \mathcal{Y}^{M}_{J1J}(\hat{r}) = \mathcal{Y}^{M}_{J1J}(\hat{r}) \qquad (4)$$

de donde la ecuación radial es

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\right) + \frac{\hbar^2 J(J+1)}{2\mu r^2} + V_c(r) + 2V_T(r) \right\} F^{(1)}_{J}(r) = E\, F^{(1)}_{J}(r) \qquad (5)$$

ii b) Si $\Pi = (-1)^{J+1}$, como sucede en el deuterón, entonces la función de onda total se puede escribir

$$\psi^{M}(\vec{r}) = F^{(1)}_{J-1}(r)\; \mathcal{Y}^{M}_{J-1,1,J}(\hat{r}) + F^{(1)}_{J+1}\; \mathcal{Y}^{M}_{J+1,1,J}(\hat{r}) \qquad (6)$$

Por otra parte

$$Q\, \mathcal{Y}^{M}_{J-1,1,J} = \frac{J+1}{2J+1}\; \mathcal{Y}^{M}_{J-1,1,J} + \frac{\sqrt{J(J+1)}}{2J+1}\; \mathcal{Y}^{M}_{J+1,1,J}$$

$$Q\, \mathcal{Y}^{M}_{J+1,1,J} = \frac{\sqrt{J(J+1)}}{2J+1}\; \mathcal{Y}^{M}_{J-1,1,J} + \frac{J}{2J+1}\; \mathcal{Y}^{M}_{J+1,1,J} \qquad (7)$$

y se obtiene inmediatamente

$$\left\{ \frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \frac{J(J+1)}{r^2} \right) + E - V_C(r) + \frac{2(J-1)}{2J+1} V_T(r) \right\} F^{(1)}_{J-1}(r) = 6 \frac{\sqrt{J(J+1)}}{2J+1} V_T(r) F^{(1)}_{J+1}(r)$$

$$\left\{ \frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \frac{J(J+1)}{r^2} \right) + E - V_C(r) + \frac{2(J+2)}{2J+1} V_T(r) \right\} F^{(1)}_{J+1}(r) = 6 \frac{\sqrt{J(J+1)}}{2J+1} V_T(r) F^{(1)}_{J-1}(r) \qquad (1)$$

En realidad para el deuterón muchas veces se usan funciones de onda parametrizadas de la forma

$$f_S(r) = \sum_{j=1}^{n} C_j e^{-m_j r} \quad , \quad f_D(r) = \sum_{j=1}^{n} D_j e^{-m_j r} \left(1 + \frac{3}{m_j r} + \frac{3}{(m_j r)^2} \right) \qquad (2)$$

donde los parámetros están constreñidos por las condiciones $f_S(r) \sim r$ y $f_D(r) \sim r^3$ cuando $r \to 0$.

Se obtiene información sobre los potenciales nucleares no sólo del estudio de núcleos más complejos, sino también del estudio de los procesos de colisión entre nucleones. En (I. 17) hemos dado la expresión de la sección eficaz diferencial en términos de los elementos de matriz del operador de transición. Es frecuente introducir la <u>amplitud de difusión</u> definida como

$$f(\vec{p}_i \longrightarrow \vec{p}_f) = -(2\pi\hbar)^2 \frac{p_i}{\hbar v_i} T_{E_i}(\hat{p}_f, \hat{p}_i) \qquad (3)$$

con lo que (I. 17. 2) se escribe

$$\frac{d\sigma(\vec{p}_i \longrightarrow \vec{p}_f)}{d\Omega_f} = |f(\vec{p}_i \longrightarrow \vec{p}_f)|^2 \qquad (4)$$

Para potenciales centrales $f(\vec{p}_i \to \vec{p}_f)$ depende solo de $p \equiv |\vec{p}_i| = |\vec{p}_f|$ y de $\cos\theta = \hat{p}_i \cdot \hat{p}_f$ y se suele escribir

$$\frac{d\sigma(p,\theta)}{d\Omega} = |f(p, \cos\theta)|^2 \qquad (5)$$

Como los polinomios de Legendre $P_L(\cos\theta)$ forman una base completa se puede escribir

$$f(p, \cos\theta) = \sum_{L=0}^{\infty} (2L+1) f_L(p) P_L(\cos\theta) \qquad (6)$$

y se puede demostrar que la unitariedad de la matriz de colisión implica que $f_L(p)$ pueda escribirse como

$$f_L(p) = \frac{e^{i\delta_L(p)} \sin\delta_L(p)}{k} \quad , \quad p = \hbar k \quad , \quad \delta_L^*(p) = \delta_L(p) \qquad (7)$$

donde los $\delta_L(p)$ son los llamados <u>defasajes</u>. De estas expresiones se obtiene inmediatamente que la sección eficaz total elástica viene dada por

$$\sigma_{el}(p) = \sum_{L=0}^{\infty} \sigma_{el}^{(L)}(p) \quad , \qquad \sigma_{el}^{(L)}(p) \equiv \frac{4\pi}{k^2}(2L+1)\sin^2\delta_L(p) \tag{1}$$

En potenciales de corto alcance se puede probar

$$k^{2L+1}\cot g\,\delta_L(p) = -\frac{1}{a_L} + \frac{1}{2}r_L k^2 + O(k^4) \tag{2}$$

Para bajas energías sólo las ondas $L=0$ son importantes y a_0 y r_0 tienen ambas dimensiones de longitud y se suelen denominar <u>longitud de colisión</u> y <u>alcance efectivo</u> respectivamente. Un análisis de los resultados experimentales a bajas energías permite encontrar

$$\begin{aligned}
T=1 \qquad & a_{pp} = -17.0 \pm 0.2 \text{ fm} && r_{pp} = 2.83 \pm 0.03 \text{ fm} \\
& a_{nn} = -17.6 \pm 1.5 \text{ fm} && r_{nn} = 3.2 \pm 1.6 \text{ fm} \\
& a_{pn} = -23.175 \pm 0.013 \text{ fm} && r_{pn} = 2.76 \pm 0.07 \text{ fm} \\
T=0 \qquad & a_{pn} = +5.419 \pm 0.007 \text{ fm} && r_{pn} = 1.754 \pm 0.008 \text{ fm.}
\end{aligned} \tag{3}$$

Si las interacciones fuertes son invariantes bajo $SU_T(2)$ es de esperar que en $T=1$ $a_{pp} = a_{nn} = a_{pn}$ y $r_{pp} = r_{nn} = r_{pn}$. Aunque la igualdad de los alcances efectivos es bien satisfecha, la longitud de colisión a_{np} es marcadamente distinta de la $a_{pp} \simeq a_{nn}$. Si bien la discrepancia parece ser muy grande, se puede explicar perfectamente suponiendo que el potencial (np) es más atractivo que el (nn) o (pp) en un 2%, y no se puede afirmar que esta diferencia no sea debida a la diferencia de masas entre el $\pi^\pm$ y el π^0, que son las partículas que median las fuerzas nucleares.

En la literatura se encuentran potenciales realistas deducidos de datos experimentales complementados por resultados teóricos que contienen multiples términos. Su forma más general es

$$V_{NN} = V_C + V_{LS}\,\vec{L}\cdot\vec{S} + V_\sigma\,\vec{\sigma}_1\cdot\vec{\sigma}_2 + V_T\,S_{12} + V_{\sigma p}\,(\vec{\sigma}_1\cdot\vec{p})(\vec{\sigma}_2\cdot\vec{p}) + V_{LL}\,Q_{12} \tag{4}$$

donde V_i $(i = C, LS, \ldots)$ son a su vez funciones del tipo

$$V_i = V_i^{(0)}(r, p, L) + V_i^{(1)}(r, p, L)\,\vec{\tau}_1\cdot\vec{\tau}_2 \tag{5}$$

donde $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, $\hat{p} \equiv (\vec{p}_1 - \vec{p}_2)/2$, $Q_{12} \equiv [(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{L})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{L}) + (\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{L})(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{L})]/2$.

Con un agrupamiento conveniente de los términos en (16.4) se pueden individualizar en el potencial N-N partes de la interacción que reflejan propiedades específicas del sistema de dos nucleones y que históricamente se conocen con el nombre de fuerza de Wigner, Majorana, Bartlett, Heisenberg y Serber

i) <u>Fuerza de Wigner</u> : son las fuerzas ordinarias de tipo central y que no dependen del spin ni del isospin de los nucleones

$$V_W = V_W(r) \tag{1}$$

ii) <u>Fuerza de Majorana</u> : son un primer ejemplo de fuerzas de intercambio e introducen una dependencia en el potencial de la propiedad de simetría de las funciones de onda bajo el intercambio de las coordenadas espaciales de los nucleones

$$V_M = (-1)^L V_M(r) = V_M(r)\, P_x \tag{2}$$

donde P_x es el operador que intercambia las coordenadas espaciales de los dos nucleones

iii) <u>Fuerza de Bartlett</u> : Son fuerzas que cambian de signo según la simetría de la función de onda de spin de los nucleones :

$$V_B = (-1)^{S+1} V_B(r) = V_B(r)\, P_\sigma \quad , \quad P_\sigma = \frac{1}{2}(1 + \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \tag{3}$$

En efecto $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 = 2\vec{S}^2/\hbar^2 - 3$ con $S \equiv \hbar(\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2)/2$ y para estados de spin bien definido

$$P_\sigma = \frac{1}{2} + S(S+1) - \frac{3}{2} = S(S+1) - 1 \begin{cases} 1 & S=1 \\ -1 & S=0 \end{cases}$$

iv) <u>Fuerza de Heisenberg</u> : Son definidas

$$V_H = V_H(r)\, P_x\, P_\sigma \tag{4}$$

Se puede introducir

$$P_\tau = \frac{1}{2}(1 + \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2) \tag{5}$$

cuyo comportamiento es idéntico a P_σ pero referido al isospin. Obviamente el actuar sobre un sistema de dos nucleones $P_x P_\sigma P_\tau = -1$ y entonces se suele escribir

$$P_x = -\frac{1}{4}\,(1 + \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2)\,(1 + \vec{\tau}_1 \vec{\tau}_2) \qquad (1)$$

d) <u>Fuerzas de Serber</u> : son una combinación de las fuerzas de Wigner y de Majorana

$$V_S = V(r)\,(1 + P_x) \qquad (2)$$

y por tanto actúan sólo en estados de L = par, lo que refleja el hecho de que en estos estados la interacción es mucho más fuerte que para L = impar.

Si bien es imposible hoy día deducir el potencial N-N de primeros principios, volveremos más adelante a su origen

A distancias grandes ($r \gtrsim 2$ fm) la fuerza nuclear es debida al intercambio de un pión y se puede demostrar que

$$V_{OPEP}(\vec{r}) = \frac{f_n^2}{4\pi\hbar c}\,\frac{m_\pi c^2}{3}\,(\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2)\left\{(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2)\,f_c(\mu_\pi r) + S_{12}\,f_t(\mu_\pi r)\right\}$$

$$f_c(x) = \frac{e^{-x}}{x}\,, \qquad f_t(x) = \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2}\right)e^{-x} \qquad (3)$$

$$S_{12} = \frac{3}{r^2}\,(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{r})\,(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{r}) - (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2)$$

$$f_n^2/4\pi\hbar c = 0.08\,, \qquad \mu_\pi = \frac{m_\pi c}{\hbar} = 0.7\ \text{fm}^{-1}$$

La naturaleza atractiva o repulsiva de este potencial depende de los estados de spín e isospín

$S = 0 \quad T = 0 \qquad \langle (\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2)\,(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \rangle = \{2T(T+1) - 3\}[2S(S+1) - 3] = +9$

$S = 1 \quad T = 1 \qquad \langle (\vec{\tau}_1 \vec{\tau}_2)\,(\vec{\sigma}_1 \cdot \sigma_2) \rangle = +1$

$S = 1 \quad T = 0$
$S = 0 \quad T = 1$
$\Big\}\ \langle (\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2)\,(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \rangle = -3$

III - EL MODELO DE CAPAS

Uno de los modelos nucleares más interesantes y el único que consideraremos aquí es el llamado modelo de capas. En su versión más simple se supone que el conjunto de nucleones del núcleo crean un potencial medio en el que se mueven de forma prácticamente independiente los nucleones. En otras palabras, el potencial medio admite una serie de niveles energéticos estacionarios (orbitales) que son los que ocupan los nucleones, cuyas interacciones residuales despreciaremos. Si suponemos el potencial medio anclado en el origen de coordenadas y cada nucleón tiene, en este modelo, tres coordenadas espaciales, entonces estamos usando $3(A+1)$ coordenadas espaciales para describir un sistema de A nucleones. De momento nos olvidaremos de este problema.

Inmediatamente surge la pregunta: ¿Cómo puede ser que un nucleón ocupe una órbita el tiempo suficiente para que este concepto tenga sentido si el nucleón esta rodeado por muchos otros nucleones? Normalmente el recorrido libre medio de un nucleón energético ($E \gtrsim 10$ MeV) que se mueva en la materia nuclear es del orden de 2 fm. Si esto se aplicara a los núcleos es prácticamente imposible que un nucleón permanezca en una órbita. Sin embargo, el principio de exclusión de Pauli resuelve esta dificultad: colisiones con cambio de orbita no pueden suceder pues esto implica un intercambio de energía en el que un nucleón pierde energía y esto, a su vez, implica la transición de este nucleón a una orbita de menor energía; pero todas estas órbitas ya estan ocupadas y la transición, y, por tanto, la colisión con cambio de órbita, no puede tener lugar.

Es bien sabido que en física atómica existen los llamados números mágicos ($Z = 2, 10, 18, 36, 54, 80, 86 \ldots$) que se ponen de manifiesto, por ejemplo, en el hecho de que si se estudia la energía de separación de un electrón, ésta presenta máximos para dichos valores de Z. También aquí aparecen unos números mágicos nucleares que son

$$2, 8, 20, 28, 50, 82, 126 \qquad (1)$$

Cuando el número de protones (Z) o el de neutrones (N), o ambos, en un núcleo tiene uno de estos valores la energía nucleon de ligadura es mayor que la esperada y otras propiedades nucleares se comportan como si el número mágico de nucleones formara una capa cerrada de estados análogos a las capas cerradas de la estructura atómica.

Intentemos determinar un potencial medio $V(\vec{r})$ para dar una explicación de los números mágicos. Para ello propondremos un $V(r)$; determinaremos sus niveles resolviendo la ecuación de Schrödinger; llenaremos los niveles energéticos y determinaremos sus números mágicos y si estos no coinciden con los dados probaremos otro potencial. Consideremos de momento potenciales centrales $V(r)$; es bien sabido que la ecuación de Schrödinger es entonces separable en coordenadas esféricas y la función de onda se puede escribir

$$\psi_{em}(\vec{r}) = R_e(r)\, Y_e^m(\theta, \phi) \tag{1}$$

donde $R_e(r)$, llamada función de onda radial, satisface la ecuación radial en onda ℓ

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr}\right) + \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2\mu r^2} + V(r) \right\} R_e(r) = E\, R_e(r) \tag{2}$$

La resolución de esta ecuación, imponiendo las condiciones de integrabilidad y de regularidad en el origen, nos proporciona los niveles energéticos para onda ℓ y que se caracterizan por un número entero $n \geq 1$, siendo $(n-1)$ el número de nodos en $(0, \infty)$. Consideremos un par de ejemplos

c) <u>Oscilador armónico tridimensional</u>

Consideremos

$$V(r) = -V_0 + \frac{1}{2}\mu\omega^2 r^2 \qquad , V_0 > 0 \tag{3}$$

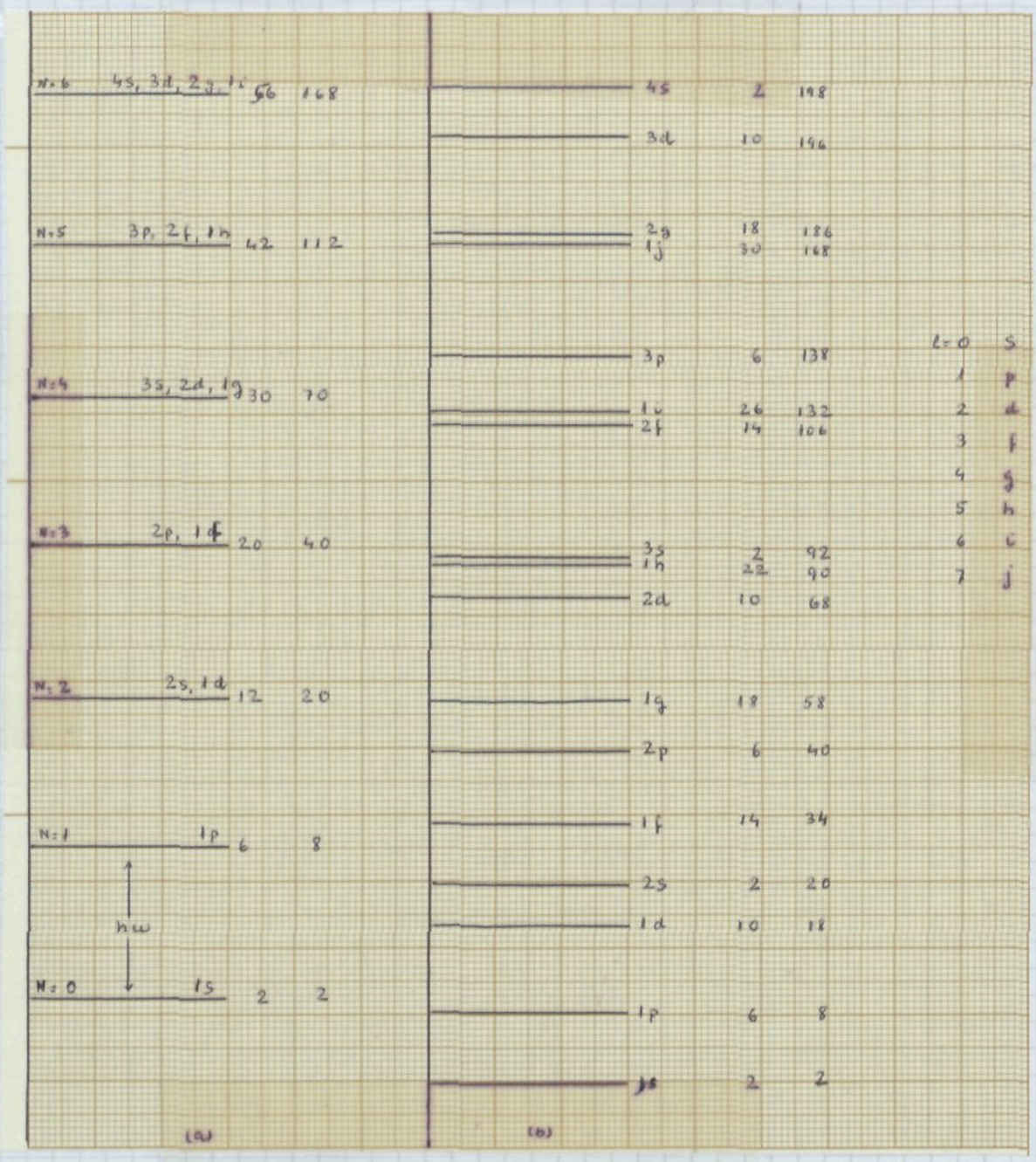
entonces (2) se puede resolver exactamente y los niveles energéticos son

$$E_{n\ell} = \hbar\omega\left[2(n-1) + \ell + 3/2\right] - V_0 \tag{4}$$

donde para un dado $n \geq 1$ (entero), ℓ puede tomar los valores $0, 1, 2, \ldots$

Además para un l dado los valores de su tercera componente m puede tomar los valores $m = l, l-1, \ldots, -(l-1), -l$. Los niveles son equidistantes y los números mágicos deberían corresponder al llenado de los mismos. Nótese que la multiplicidad del nivel correspondiente a $2(n-1)+l = N$, con $N = 0, 1, 2, 3, \ldots$ es $(N+1)(N+2)/2$ si no tenemos en cuenta el spin y $(N+1)(N+2)$ al tenerlo en cuenta. Entonces los números mágicos para neutrones y protones serán

$$2, \ 8, \ 20, \ 40, \ 70, \ 112, \ 168 \qquad (1)$$



En la figura y para una escala arbitraria de energías se dan los detalles del espectro del oscilador armónico isotrópo. Se dan los niveles (n,l) de cada nivel;

el número de protones o neutrones que caben en el y en la columna de la derecha los números mágicos correspondientes

En la misma figura (parte b) se consideran idénticos resultados para el pozo cuadrado infinito

$$V(r) = \begin{cases} 0 & 0 \leq r \leq a \\ \infty & r > a \end{cases} \qquad (1)$$

Las energías vienen dadas en unidades $(\hbar^2/2\mu a^2)$. Tampoco en este caso los números mágicos son los deseados.

Nuestro fracaso en reproducir los números mágicos deseados no es muy sorprendente si tenemos en cuenta el siguiente razonamiento. Consideremos el potencial entre dos nucleones

$$V_{12} = V_0 f(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \qquad (2)$$

donde V_0 es la intensidad central del potencial y f describe su forma que se supone de muy corto alcance. Una buena aproximación del potencial central que actúa sobre el nucleón 1 se obtiene promediando (2) sobre todas las posiciones posibles del nucleón 2, teniendo en cuenta la distribución de los nucleones en el núcleo $\rho(\vec{x}_2)$.

$$V(1) = V_0 \int d^3x_2 \; f(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)\, \rho(\vec{x}_2) \qquad (3)$$

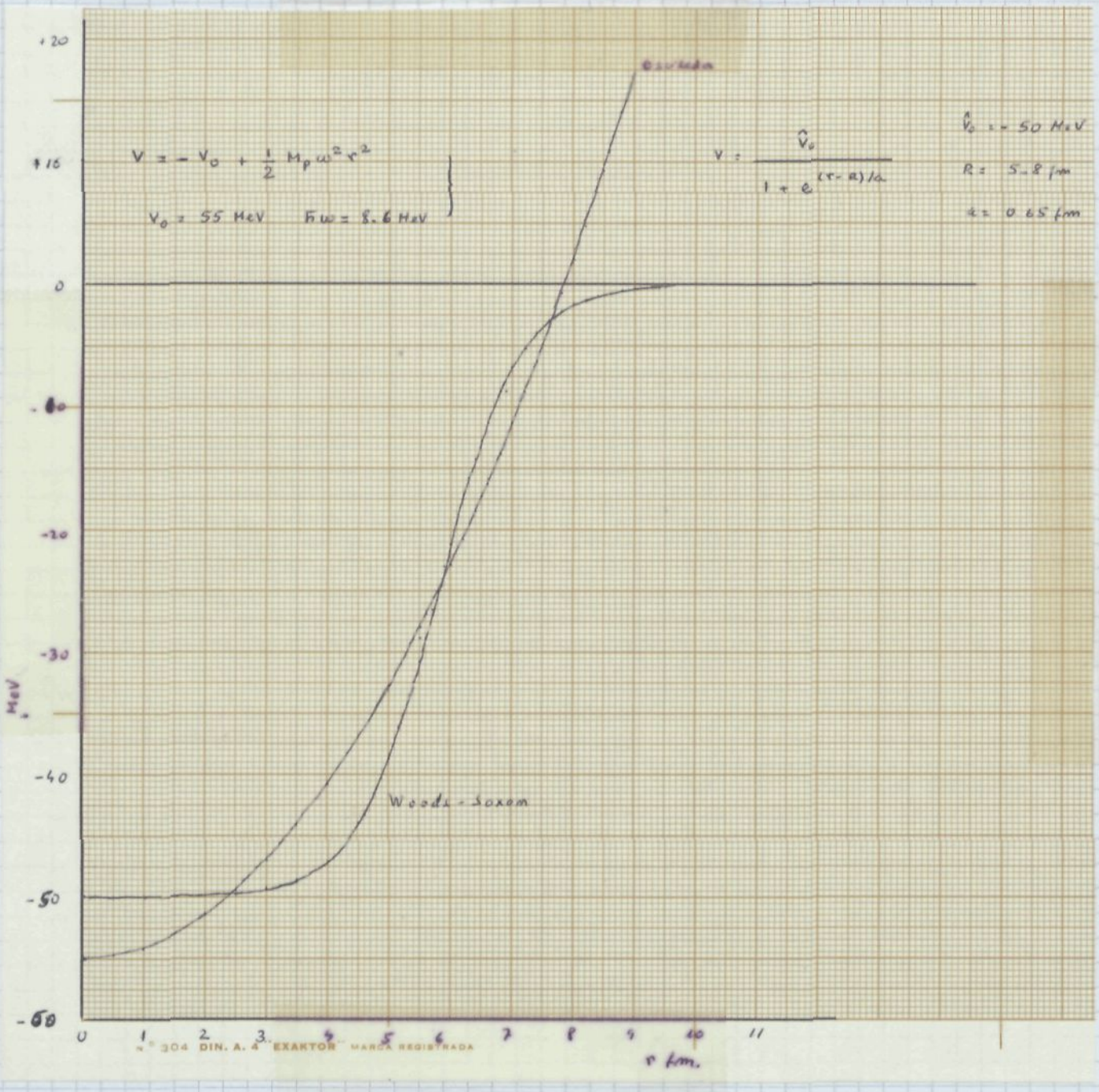
Si el alcance es suficientemente pequeño se puede aproximar $\rho(\vec{x}_2)$ por $\rho(\vec{x}_1)$ y por tanto el potencial medio actuando sobre el nucleón 1 es

$$V(1) \cong V_0 C \rho(\vec{x}_1) \quad , \quad C \equiv \int d^3x \, f(\vec{x}) \qquad (4)$$

y por tanto el potencial visto por una partícula es proporcional a la densidad nuclear. Entonces, de acuerdo con (I - 22.1) sería mucho más realista tomar un potencial de la forma

$$V(r) = - V_0 \frac{1}{1 + e^{(r-c)/a}} \qquad \text{(potencial de Woods - Saxon)} \qquad (5)$$

En la figura de la página siguiente se compara (5) con un oscilador armónico

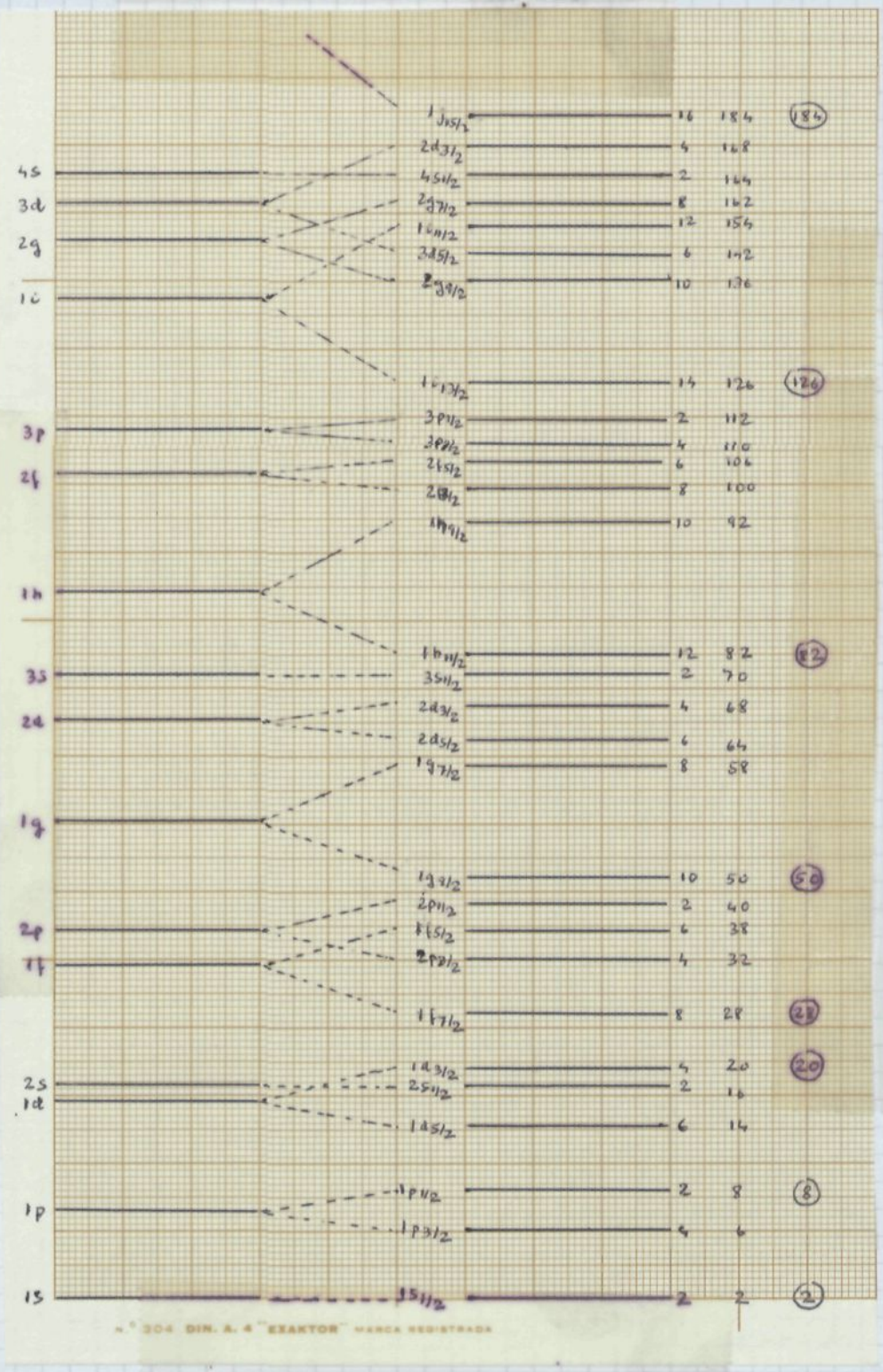


com parámetros realistas. Em la parte izquierda de la figura de la próxima página se da un espectro típico de este potencial, que como vemos tampoco ajusta bien los números mágicos nucleares

Un paso decisivo en el desarrollo del modelo de capas fue darse cuenta que los números mágicos se obtenían de una forma natural al añadir al potencial central un término de interacción spin - órbita relativamente intenso

$$V_{es} = - V_1(r)\, \vec{l} \cdot \vec{s} \qquad (1)$$

donde $\vec{l}$ y $\vec{s}$ son los momentos angulares orbitales y de spin del nucleón, cuyo origen parece ser debido en gran parte al término $\vec{L} \cdot \vec{S}$ del potencial entre dos nucleones:



N.° 304 DIN. A. 4 "EXAKTOR" MARCA REGISTRADA

Demónos cuenta que si $\vec{j} = \vec{\ell} + \vec{s}$ entonces

$$\vec{\ell}.\vec{s} = \frac{1}{2}\left[\vec{j}^2 - \vec{\ell}^2 - \vec{s}^2\right] \qquad (1)$$

Entonces los niveles $n\ell$ del potencial central se desdoblan, si $\ell \neq 0$, en los niveles $n\ell_{\ell+1/2}$ y $n\ell_{\ell-1/2}$, donde el subíndice indica el valor de j. En primer orden de teoría de perturbaciones

$$\Delta E_{n\ell_j} = -\int_0^\infty dr\, r^2 R^2_{n\ell}(r)\, \Psi^2_{\ell}(r) \left\{ \frac{\hbar^2}{2}\left[j(j+1) - \ell(\ell+1) - 3/4 \right] \right\} \qquad (2)$$

Cálculo de niveles por X. Viñas

$$V(r) = V_C(r) + V_{LS}\,(\vec{l}.\vec{s})$$

$$V_C(r) = -V_0 \frac{1}{1 + e^{(r-c)/a}} \qquad V_0 = 44\ MeV \quad , a = 0.67\ fm \quad , c = 1.27 A^{1/3}\ fm \quad A = 208$$

$$V_{LS} = +\frac{\lambda}{r} \frac{V_0}{\left[1 + e^{(r-c)/a}\right]^2} \frac{1}{a} e^{(r-c)/a} \qquad \lambda = 0.348636$$

Estado	-E MeV $\lambda = 0$	-E MeV
$1s_{1/2}$	39.95	39.95
$1p_{3/2}$	36.00	36.12
$1p_{1/2}$	36.00	35.76
$1d_{5/2}$	31.24	31.61
$1d_{3/2}$	31.24	30.72
$2s_{1/2}$	29.51	29.51
$1f_{7/2}$	25.77	26.52
$1f_{5/2}$	25.77	24.85
$2p_{3/2}$	23.15	23.39
$2p_{1/2}$	23.15	22.67
$1g_{9/2}$	19.69	20.94
$1g_{7/2}$	19.69	18.24
$2d_{5/2}$	16.41	16.99
$2d_{3/2}$	16.41	15.55
$3s_{1/2}$	15.25	15.25

Estado	-E MeV $\lambda = 0$	-E MeV
$1h_{11/2}$	13.06	14.94
$1h_{9/2}$	13.06	10.98
$2f_{7/2}$	9.448	10.41
$2f_{5/2}$	9.448	8.157
$3p_{3/2}$	7.979	8.273
$3p_{1/2}$	7.979	7.386
$1i_{13/2}$	5.986	8.561
$1i_{11/2}$	5.986	3.179
$2g_{9/2}$	2.513	3.830
$2g_{7/2}$	2.513	0.8548
$3d_{5/2}$	1.477	1.965
$3d_{3/2}$	1.477	0.7710
$4s_{1/2}$	1.385	1.385
$1j_{15/2}$	no ligado	1.872
$1j_{13/2}$	no ligado	no ligado

y por tanto si $\ell \neq 0$

$$E_{n\ell j=\ell+1/2} - E_{n\ell j=\ell-1/2} = -(2\ell+1)\int_0^\infty dr\, r^2\, V_f(r)\, R^2_{n\ell}(r) \qquad (1)$$

Con una elección conveniente del potencial central $V(r)$ (por ejemplo (4.51)) y de $V_f(r)$ que se suele tomar de la forma $(1/r)(dV(r)/dr)$, se reproducen bien los números mágicos nucleares, con resultados parecidos a los dados en la figura de la página anterior.

En la versión más simple del modelo de capas, el denominado modelo unipartícular extremo (extreme single-particle model) se supone que, en el estado fundamental, los movimientos de los nucleones están dinámicamente apareados de forma que muchas propiedades nucleares son debidas a un posible nucleón desaparedado. Se supone también que los estados protón y neutrón se llenan de forma independiente, esto es, que el estado ocupado por un neutrón es independiente del número de protones del núcleo y viceversa. En tal modelo, todos los núcleos par-par tienen spin cero, los núcleos con A impar tienen el momento angular total igual al de la partícula desaparedada y para los núcleos impar-impar no podemos hacer ninguna predicción pues no sabemos como se acoplan los momentos angulares totales de los dos nucleones desaparedados

Veamos algunos ejemplos, teniendo en cuenta la figura de la página 6.

$^{35}_{17}Cl$	$Z = 17$	$N = 18$	$J = 3/2$	$(1d_{3/2})$
$^{41}_{21}Sc$	$Z = 21$	$N = 20$	$J = 7/2$	$(1f_{7/2})$
$^{17}_{8}O$	$Z = 8$	$N = 9$	$J = 5/2$	$(1d_{5/2})$
$^{55}_{26}Fe$	$Z = 26$	$N = 29$	$J = 3/2$	$(2p_{3/2})$

y en todos los casos la predicción teórica coincide con el resultado experimental. Consideremos $^{14}_{7}N$, esto es $Z = 7$ y $N = 7$. Entonces tanto el protón como el neutrón desaparedados se encuentran en el nivel $1p_{1/2}$ y por tanto el spin total puede ser $J = 0$ ó $J = 1$. En realidad su spin-paridad es 1^+, siendo su paridad la predicha por este modelo.

El operador momento magnético de un núcleo debido al momento angular orbital

y de spin de sus nucleones se define como

$$\vec{\mu} = \mu_N \sum_{k=1}^{A} \left(g_k^{(e)} \vec{\ell}_k + g_k \vec{s}_k \right) / \hbar \qquad (1)$$

donde μ_N es el magnetón nuclear, $g_k^{(p)} = 1$, $g_k^{(n)} = 0$ y g_p y g_n están definidos en (II - 10.4). El momento magnetico del núcleo se define como

$$\mu = \langle J J | \mu_3 | J J \rangle \qquad (2)$$

Si $J = 0$ evidentemente $\mu = 0$ y esto se aplica en particular al estado fundamental de los núcleos par-par.

En el modelo unipartículas extremo, el momento angular de dos nucleones apareados se cancela y lo mismo sucede con su momento magnético y por tanto μ es totalmente debido al nucleón desaparedado en los nucleos con A impar. Entonces usando (II.- 10.6)

$$\mu = \frac{\mu_N}{\hbar} \langle \ell\, 1/2\; j\, j | g^{(n,p)} \vec{\ell}_3 + g_{n,p} s_3 | \ell\, 1/2\; j\, j \rangle =$$

$$= \frac{\mu_N}{\hbar^3 j(j+1)} \langle \ell\, 1/2\; j\, j | j_3 \left[g^{(n,p)} (\vec{\ell}.\vec{j}) + g_{n,p} (\vec{s}.\vec{j}) \right] | \ell\, 1/2\; j\, j \rangle =$$

$$= \frac{\mu_N}{\hbar^2 (j+1)} \langle \ell\, 1/2\; j\, j | \frac{\hbar^2}{2} \left[g^{(n,p)} \left[j(j+1) + \ell(\ell+1) - 3/4 \right] + g_{n,p} \left[j(j+1) + 3/4 - \ell(\ell+1) \right] \right] | \ell\, 1/2\; j\, j \rangle$$

$$= \frac{\mu_N}{2(j+1)} \langle \ell\, 1/2\; j\, j | g^{(n,p)} \left[j(j+1) + \ell(\ell+1) - 3/4 \right] + g_{n,p} \left[j(j+1) + 3/4 - \ell(\ell+1) \right] | \ell\, 1/2\; j\, j \rangle$$

y por tanto:

$$\text{Si } j = \ell + 1/2 \qquad \mu = \mu_n \left\{ g^{(p,n)} (j - 1/2) + \frac{1}{2} g_{p,n} \right\} \qquad (3)$$

$$\text{Si } j = \ell - 1/2 \qquad \mu = \frac{\mu_n}{2(j+1)} j \left\{ g^{(p,n)} (2j + 3) - g_{p,n} \right\}$$

Por tanto

$$\text{neutrones} \quad \begin{cases} j = \ell + 1/2 & \mu/\mu_n = -1.913 \\ j = \ell - 1/2 & \mu/\mu_n = +1.913\; j/(j+1) \end{cases} \qquad (4)$$

$$\text{protones} \quad \begin{cases} j = \ell + 1/2 & \mu/\mu_n = j + 2.293 \\ j = \ell - 1/2 & \mu/\mu_n = j\,(j - 1.293)/(j+1) \end{cases} \qquad (5)$$

El acuerdo entre teoría y experiencia no es demasiado satisfactorio, como se deduce de la tabla siguiente

Núcleo	Nucleón desaparedo	j	μ/μ_n	$(\mu/\mu_n)_{exp}$
$^{3}_{1}H$	p $1s_{1/2}$	1/2	+ 2.793	+ 2.97888
$^{3}_{2}He$	n $1s_{1/2}$	1/2	- 1.913	- 2.12776
$^{7}_{3}Li$	p $1p_{3/2}$	3/2	+ 3.793	+ 3.25644
$^{9}_{4}Be$	n $1p_{3/2}$	3/2	- 1.913	- 1.17776
$^{11}_{5}B$	p $1p_{3/2}$	3/2	+ 3.793	+ 2.68885
$^{11}_{6}C$	n $1p_{3/2}$	3/2	- 1.913	- 1.03000
$^{13}_{6}C$	n $1p_{1/2}$	1/2	+ 0.638	+ 0.70244
$^{13}_{7}N$	p $1p_{1/2}$	1/2	- 0.264	+ 0.32221
$^{15}_{7}N$	p $1p_{1/2}$	1/2	- 0.264	- 0.28311
$^{15}_{8}O$	n $1p_{1/2}$	1/2	+ 0.638	+ 0.71899
$^{17}_{8}O$	n $1d_{5/2}$	5/2	- 1.913	- 1.89377
$^{17}_{9}F$	p $1d_{5/2}$	5/2	+ 4.793	+ 4.72224
$^{19}_{9}F$	p $1d_{5/2}$	5/2	+ 4.793	+ 2.62888

Para núcleos más pesados los valores experimentales para A impar acostumbran a estar entre los dos valores dados en (8.4) si es un neutrón el desaparedo y entre los dados en (8.5) si es un protón el desaparedo. Estas líneas correspondientes a $l = j \pm 1/2$ se suelen llamar <u>líneas de Schmidt</u> Entre los núcleos pesados la única excepción es el $^{237}_{94}Np$.

¿Cuáles son los motivos de estas discrepancias? Podemos dar una lista de algunas de ellas:

i) Hemos supuesto que los nucleones ligados tienen el mismo momento magnético intrínseco que los libres y esto es probablemente incorrecto

ii) El modelo que estamos considerando que predice correctamente J^{π} de los núcleos de A impar supone que todo el spin nuclear es debido al nucleón desaparedo. Sin embargo, el mismo J^{π} puede obtenerse con movimientos de los nucleones más complicados en los que no se hallan aparados los (A-1) Entonces la función de ondas nuclear puede ser una combinación lineal de todos los estados con J^{π} dado. Este fenómeno se llama <u>mezcla de confi-</u>

guraciones. Esto hace muy dudosa la validez del cálculo anterior.

iii) La existencia de las fuerzas nucleares significa que hay corrientes en el núcleo debido al intercambio de piones cargados. Estas corrientes deben contribuir al momento magnético

iv) En núcleos ligeros hay un efecto que debería ser tenido en cuenta. Es el hecho de que para describir el sistema usamos $3(A+1)$ variables espaciales en lugar de las $3A$ necesarias.

Evidentemente intentan corregir todos estos efectos desbordan nuestras posibilidades, pero debemos dejar claro que a pesar de todo esto no existe un método de calcular con éxito total los momentos magnéticos nucleares.

IV - TEORIA CUANTICA DE LA RADIACION

Para explicar las transiciones radiativas en sistemas atómicos y nucleares es necesario desarrollar una teoría cuántica de la radiación, y esto exige la introducción del concepto de campo cuantificado. En un tratamiento riguroso de este problema se parte de las ecuaciones covariantes, bajo el grupo de Poincaré, que describen la interacción de luz y materia, y se procede a su cuantificación preservando el carácter covariante. Para hacer aquí el desarrollo lo más simple posible introduciremos la cuantificación del campo electromagnético únicamente. El precio más importante a pagar por esta simplificación es la pérdida aparente de la invariancia relativista de la teoría.

Es sabido que en la electrodinámica clásica, y en ausencia de fuentes, se puede elegir para describir el campo electromagnético el llamado gauge de Coulomb o transversal, en el que el potencial escalar $\phi(\vec{r};t)$ es idénticamente nulo y el potencial vector $\vec{A}(\vec{r};t)$ satisface las ecuaciones

$$\Box \vec{A}(\vec{r};t) \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\vec{A}(\vec{r};t) = 0 \qquad \text{(ecuación de d'Alembert)}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{r};t) = 0 \qquad \text{(condición de transversabilidad)} \tag{1}$$

En este capítulo supondremos elegido un sistema de unidades en el que $\hbar = c = 1$. En términos del potencial vector los campos eléctrico y magnético son

$$\vec{E}(\vec{r};t) = -\frac{\partial \vec{A}(\vec{r};t)}{\partial t} \quad , \quad \vec{B}(\vec{r};t) = \vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r};t) \tag{2}$$

De (1) y (2) se deduce inmediatamente

$$\Box \vec{E}(\vec{r};t) = 0 \qquad \Box \vec{B}(\vec{r};t) = 0 \tag{3}$$

Interesa también recordar que la energía, momento y momento angular total del campo electromagnético vienen dados, respectivamente, por

$$E = \frac{1}{8\pi}\int d^3r \left[\,|\vec{E}(\vec{r};t)|^2 + |\vec{B}(\vec{r};t)|^2\,\right] \quad , \quad \vec{P} = \frac{1}{4\pi}\,\mathrm{Re}\int d^3r \left[\,\vec{E}(\vec{r};t)\times\vec{B}^*(\vec{r};t)\,\right]$$

$$\vec{J} = \frac{1}{4\pi}\,\mathrm{Re}\int d^3r \left\{\,\vec{r}\times\left[\,\vec{E}(\vec{r};t)\times\vec{B}^*(\vec{r};t)\,\right]\right\} \tag{4}$$

expresiones en las que se utiliza notación compleja, pues si bien los campos eléctricos y magnéticos clásicos son cantidades siempre reales, el uso formal de campos complejos, cuyas partes reales son las únicas significativas, facilita mucho el tratamiento matemático. Las integraciones en (1.4) se hallan extendidas a todo el espacio, y debido a las leyes de conservación el resultado de la integración es independiente del instante de tiempo t considerado.

Para hallar la solución de (1.1), tengamos en cuenta que las ondas planas

$$\vec{\epsilon}\, e^{ikx} \quad y \quad \vec{\epsilon}\, e^{-ikx}, \qquad kx \equiv \omega t - \vec{k}.\vec{r}, \qquad \omega \equiv |\vec{k}| \tag{4}$$

forman un conjunto completo de soluciones de la ecuación de d'Alembert, por lo que $\vec{A}(\vec{r};t)$ se puede escribir como combinación lineal (¡continua!) de las mismas. Fijado $\vec{k}$ definamos una base para $\vec{\epsilon}$, formada por tres vectores $\vec{\epsilon}(\vec{k},i)$ reales $i = 1, 2, 3$, tales que

$$\vec{\epsilon}(\vec{k},i).\vec{\epsilon}(\vec{k},j) = \delta_{ij}, \qquad \vec{\epsilon}(\vec{k},i) \times \vec{\epsilon}(\vec{k},j) = \epsilon_{ijl}\,\vec{\epsilon}(\vec{k},l) \tag{2}$$

Estos vectores forman, por tanto, un triedro ortonormal de orientación positiva. Una elección conveniente de estos vectores, cuando

$$\vec{k} \equiv (\omega \operatorname{sen}\theta \cos\phi,\ \omega \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi,\ \omega\cos\theta) \tag{3}$$

es

$$\begin{aligned}
\vec{\epsilon}(\vec{k},1) &\equiv (\cos\theta\cos\phi,\ \cos\theta \operatorname{sen}\phi,\ -\operatorname{sen}\theta)\\
\vec{\epsilon}(\vec{k},2) &\equiv (-\operatorname{sen}\phi,\ \cos\phi,\ 0)\\
\vec{\epsilon}(\vec{k},3) &\equiv (\operatorname{sen}\theta\cos\phi,\ \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi,\ \cos\theta) \equiv \hat{k} = \vec{k}/\omega
\end{aligned} \tag{4}$$

Nótese que en las ondas planas $\vec{\epsilon}\, e^{\mp ikx}$, $\vec{\epsilon}$ describe la dirección de $\vec{E}$, esto es, la <u>polarización</u>.

De todo esto se deduce que la solución real más general de la ecuación d'Alembert es

$$\vec{A}(\vec{r};t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{3}\int \frac{d^3k}{\sqrt{\omega}}\left[\vec{\epsilon}(\vec{k},i)\,a(\vec{k},i)\,e^{-ikx} + \vec{\epsilon}(\vec{k},i)\,a^{*}(\vec{k},i)\,e^{+ikx}\right] \tag{5}$$

donde $a(\vec{k},i)$ son tres funciones arbitrarias. Al imponer la condición de transversalidad para todo t se obtiene inmediatamente $a(\vec{k},3) = 0$, y, por tan-

to la suma en (2.5) puede restringirse a los valores $i = 1, 2$. El hecho de que haya únicamente dos amplitudes independientes para cada valor de $\vec{k}$ corresponde a la propiedad bien conocida de que la luz sólo tiene dos polarizaciones independientes.

En lugar de los vectores de <u>polarización lineal</u> $\vec{\epsilon}(\vec{k}, i)$ $i = 1, 2$, es útil introducir los de <u>polarización dextrogira</u> y <u>levogira</u>

$$\vec{\epsilon}(\vec{k}, \pm 1) = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\epsilon(\vec{k}, 1) \pm i \epsilon(\vec{k}, 2) \right] \tag{1}$$

que cumplen, si $\lambda = \pm 1$,

$$\vec{\epsilon}^{\,*}(\vec{k}, \lambda) \cdot \vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda') = \delta_{\lambda\lambda'} \quad , \quad \vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda) \times \vec{\epsilon}^{\,*}(\vec{k}, \lambda') = \frac{1}{2i\omega} (\lambda + \lambda') \vec{k}$$

$$\vec{k} \times \vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda) = -i \lambda \omega \epsilon(\vec{k}, \lambda) \tag{2}$$

Introduciendo

$$a(\vec{k}, \pm 1) = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \left[a(\vec{k}, 1) \mp i a(\vec{k}, 2) \right] \tag{3}$$

se obtiene para el potencial vector la <u>descomposición en ondas planas</u>

$$A(\vec{r}; t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\lambda = \pm 1} \int \frac{d^3k}{\sqrt{\omega}} \left[\vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda) a(\vec{k}, \lambda) e^{-ikx} + \vec{\epsilon}^{\,*}(\vec{k}, \lambda) a^*(\vec{k}, \lambda) e^{+ikx} \right] \tag{4}$$

y usando las relaciones (1.2) y (2) resultan para los campos las expresiones

$$\vec{E}(\vec{r}; t) = \frac{i}{2\pi} \sum_{\lambda = \pm 1} \int d^3k \sqrt{\omega} \left[\vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda) a(\vec{k}, \lambda) e^{-ikx} - \vec{\epsilon}^{\,*}(\vec{k}, \lambda) a^*(\vec{k}, \lambda) e^{+ikx} \right]$$

$$\vec{B}(\vec{r}; t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\lambda = \pm 1} \int d^3k \sqrt{\omega} \, \lambda \left[\vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda) a(\vec{k}, \lambda) e^{-ikx} + \vec{\epsilon}^{\,*}(\vec{k}, \lambda) a^*(\vec{k}, \lambda) e^{+ikx} \right] \tag{5}$$

A partir de (1.4), para un t cualquiera, por ejemplo $t = 0$, se pueden calcular la energía y el momento, sustituyendo en ellos las expresiones (5). La integración sobre $\vec{r}$ es inmediata y las funciones delta resultantes permiten realizar una de las integraciones sobre momentos. Usando finalmente las relaciones (2):

$$E = \int d^3k \, \omega \sum_{\lambda = \pm 1} |a(\vec{k}, \lambda)|^2 \quad , \quad \vec{P} = \int d^3k \, \vec{k} \sum_{\lambda = \pm 1} |a(\vec{k}, \lambda)|^2 \tag{6}$$

Por tanto, en lenguaje de fotones, podemos decir que $|a(\vec{k},\lambda)|^2$ representa el número medio de fotones de energía ω, momento $\vec{k}$, y polarización dexto ($\lambda=+1$) o levo ($\lambda=-1$), presentes en el campo. De igual modo que en una onda plana $\vec{\epsilon}\, e^{-ikx}$ las densidades de energía y momento son proporcionales a ω, $\vec{k}$, tomando ondas de extensión finita en direcciones transversales a $\vec{k}$ puede probarse que λ mide la helicidad del fotón, esto es, la componente del momento angular total de la onda en la dirección de su propagación. Resumiendo $a(\vec{k},\lambda)$ puede interpretarse como la amplitud de probabilidad de presencia en el campo de un fotón de energía $\omega=|\vec{k}|$, momento $\vec{k}$ y helicidad λ.

Hasta aquí todos los resultados obtenidos son puramente clásicos. Para pasar a su versión cuantificada sustituiremos las <u>amplitudes</u> $a(\vec{k},\lambda)$ y $a^*(\vec{k},\lambda)$ en (3.4) y (3.5) por los <u>operadores</u> $a(\vec{k},\lambda)$ y $a^+(\vec{k},\lambda)$ que <u>aniquilan</u> y <u>crean</u>, respectivamente, un fotón de energía $\omega=|\vec{k}|$, momento $\vec{k}$ y helicidad λ, a saber, con función de onda $(2\pi)^{-3/2}\,\vec{\epsilon}(\vec{k},\lambda)\,e^{-ikx}$, y que, dado el carácter bosónico de los fotones, satisfacen las reglas de conmutación

$$[\,a(\vec{k},\lambda)\,,\,a(\vec{k}',\lambda')\,]=[\,a^+(\vec{k},\lambda)\,,\,a^+(\vec{k}',\lambda')\,]=0$$

$$[\,a(\vec{k},\lambda)\,,\,a^+(\vec{k}',\lambda')\,]=\delta_{\lambda\lambda'}\,\delta(\vec{k}-\vec{k}') \qquad (1)$$

Los operadores $\vec{A}$, $\vec{E}$ y $\vec{B}$ que así resultan son operadores autoadjuntos.

Conviene notar que el operador $\vec{A}$ aparece como «suma» sobre momentos y helicidades de

$$\left(\frac{4\pi}{2\omega}\right)^{1/2}\left[\,a_\alpha\, f_\alpha + a_\alpha^+\, f_\alpha^*\,\right] \qquad (2)$$

indicando por $\alpha\equiv(\vec{k},\lambda)$, y f_α la función de onda del fotón que $a(\vec{k},\lambda)$ destruye. El factor que antecede hubiera sido la unidad de haber usado el sistema Gauss racionalizado y una normalización covariante Lorentz para los estados. Para posterior referencia, escribimos

$$\vec{A}(\vec{r};t)=\int d^3k\,\sqrt{\frac{4\pi}{2\omega}}\sum_{\lambda=\pm1}\left[\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\,\vec{\epsilon}(\vec{k},\lambda)\,e^{-ikx}\,a(\vec{k},\lambda)+\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\,\vec{\epsilon}^{\,*}(\vec{k},\lambda)\,e^{+ikx}\,a^+(\vec{k},\lambda)\right] \qquad (3)$$

Si para el operador energía, que a partir de ahora se designará por H_{rad} se adopta la expresión primera de (1.4), un cálculo análogo al

realizado antes conduce a

$$H_{rad} = \frac{1}{2} \int d^3k \; \omega \sum_{\lambda=\pm 1} [\, a^+(\vec{k},\lambda)\, a(\vec{k},\lambda) + a(\vec{k},\lambda)\, a^+(\vec{k},\lambda) \,] \tag{1}$$

y, por tanto, su valor esperado en el vacío, en lugar de ser cero, como sería de esperar, resulta infinito. La forma de resolver esta dificultad es utilizar para H_{rad} la expresión

$$H_{rad} = \frac{1}{8\pi} \int d^3r \; : [\, \vec{E}^2(\vec{r};t) + \vec{B}^2(\vec{r};t) \,] : \tag{2}$$

donde mediante : .... : se indica el <u>producto normal de Wick</u>, equivalente a la prescripción de que siempre que aparezcan varios operadores creación y aniquilación en un monomio deben reordenarse, como si conmutaran, hasta que los de aniquilación queden a la derecha de los de creación. En consecuencia,

$$H_{rad} = \int d^3k \; \omega \sum_{\lambda=\pm 1} a^+(\vec{k},\lambda)\, a(\vec{k},\lambda) \tag{3}$$

La sustitución de (1) por (3), esto es, el uso de productos normales de Wick, es físicamente equivalente a una <u>renormalización</u> del origen de energías, al tomar como tal origen el valor esperado en el vacío de H_{rad}. La misma prescripción deberá emplearse para la asignación de operadores a las distintas expresiones clásicas en que intervenga el campo electromagnético, como son en particular las dadas en (1.4).

Al ser ahora las componentes del campo electromagnético operadores, se impone estudiar sus reglas de conmutación. Como ilustración calcularemos el conmutador de dos componentes del campo eléctrico. Teniendo en cuenta la transcripción cuántica de (3.5) y las reglas de conmutación (4.1) se obtiene

$$[\, E_j(\vec{r};t),\, E_\ell(\vec{r}';t') \,] = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\lambda=\pm 1} \int d^3k \; \omega \, [\, \epsilon_j(\vec{k},\lambda)\, \epsilon_\ell^*(\vec{k},\lambda)\, e^{-ik(x-x')} - \epsilon_j^*(\vec{k},\lambda)\, \epsilon_\ell(\vec{k},\lambda)\, e^{+ik(x-x')} \,] \tag{4}$$

y usando

$$\sum_{\lambda=\pm 1} \epsilon_j(\vec{k},\lambda)\, \epsilon_\ell^*(\vec{k},\lambda) = \delta_{j\ell} - \frac{k_j k_\ell}{\omega^2} \tag{5}$$

podemos escribir

$$[\, E_j(\vec{r},t),\, E_e(\vec{r}\,';t')\,] = -\frac{i}{2\pi^2}\int \frac{d^3k}{\omega}\,[\,\omega^2\delta_{ej} - k_j k_e\,]\, e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')}\, \operatorname{sen}\omega(t-t') \tag{1}$$

Introduciendo la función

$$D(\vec{r};t) \equiv -\frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3k}{\omega}\, e^{+i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, \operatorname{sen}\omega t \tag{2}$$

se obtiene inmediatamente

$$[\, E_j(\vec{r};t),\, E_e(\vec{r}\,';t')\,] = -4\pi i\left(\delta_{je}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_e}\right) D(\vec{r}-\vec{r}\,';t-t') \tag{3}$$

De forma totalmente análoga se puede deducir

$$[\, B_j(\vec{r};t),\, B_e(\vec{r}\,';t')\,] = -4\pi i\left(\delta_{je}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_e}\right) D(\vec{r}-\vec{r}\,';t-t') \tag{4}$$

$$[\, E_j(\vec{r};t),\, B_e(\vec{r}\,';t')\,] = 4\pi i\,\epsilon_{jer}\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial x_r}\, D(\vec{r}-\vec{r}\,';t-t') \tag{5}$$

usándose para obtener este último conmutador la relación

$$\sum_{\lambda=\pm 1} \lambda\, \epsilon_j(\vec{k},\lambda)\, \epsilon_e^{*}(\vec{k},\lambda) = -i\,\epsilon_{jer}\frac{k_r}{\omega} \tag{6}$$

Estas reglas de conmutación fueron originalmente deducidas por Jordan y Pauli, en 1928.

Algunas propiedades importantes de la función $D(\vec{r};t)$, deducibles de su definición, son

$$D(\vec{r};0) = 0 \quad , \quad D(-\vec{r};-t) = -D(\vec{r};t) \quad , \quad \Box D(\vec{r};t) = 0$$
$$\left[\partial D(\vec{r};t)/\partial t\right]_{t=0} = -\delta(\vec{r}) \quad , \quad \left[\partial D(\vec{r};t)/\partial x_k\right]_{t=0} = 0 \tag{7}$$

Si en (2) integramos sobre $\hat{k}$ resulta

$$D(\vec{r};t) = -\frac{1}{2\pi^2 r}\int_0^{\infty} d\omega\, \operatorname{sen}\omega r\, \operatorname{sen}\omega t \tag{8}$$

Expresando los senos en forma exponencial y teniendo en cuenta las propiedades de la delta de Dirac se puede escribir finalmente

$$D(\vec{r};t) = \frac{1}{4\pi r}\left[\,\delta(r+t) - \delta(r-t)\,\right] \tag{9}$$

por lo que $D(\vec{r};t)$ tiene soporte sobre el cono de luz $|\vec{r}| = |t|$. Luego siempre que no puedan conectarse dos puntos del espacio-tiempo mediante una señal luminosa, cada componente del campo electromagnético en uno de estos puntos será un observable compatible con cada componente del otro. En realidad, la naturaleza singular de los conmutadores revela que el campo en un punto es una idealización matemática, y que sólo tienen sentido sus promedios con funciones prueba de $\vec{r}, t$. Si tales promedios se realizan, los conmutadores se hacen finitos, y conducen a relaciones de indeterminación entre las variables campo promediadas sobre regiones de espacio-tiempo. La justificación física de tales relaciones fue hecha en un trabajo clásico de Bohr y Rosenfeld, en 1933., quienes mostraron que la causa de las mismas reside en lo siguiente: la medición del campo medio en una pequeña región I_1 del espacio-tiempo puede realizarse viendo su efecto sobre un cuerpo cargado macroscópico, situado en I_1. Pero la posición y momento de esta sonda están sujetos a las relaciones de indeterminación de Heisenberg; la imprecisión $\Delta\vec{x}$ origina la aparición de un momento dipolar eléctrico y su campo asociado, mientras que $\Delta\vec{p}$ da origen a una corriente, que a su vez crea un campo magnético. Este campo electromagnético incontrolable producido por la sonda afecta al campo medio en otra región I_2, siempre que I_2 caiga en la zona de influencia causal tipo luz de I_1. Y puede demostrarse que la imprecisión asociada a la existencia de este campo perturbador es justamente del orden predicho por las relaciones de indeterminación provenientes de las reglas de conmutación (6.3), (6.4) y (6.5)

Las relaciones de indeterminación entre componentes de campos medios carecen de importancia cuando es muy grande el número de fotones presentes en el estado en un volumen $\sim \lambda^3$, siendo λ la longitud de onda de dichos fotones. En este caso las fluctuaciones cuánticas son despreciables y el campo electromagnético admite la descripción clásica.

Finalmente de (6.3), (6.4) y (6.5) y de las propiedades de $D(\vec{r};t)$ dadas en (6.7) se obtienen las reglas de conmutación a tiempos iguales

$$[\, E_j(\vec{r},t)\,,\, E_\ell(\vec{r}';t)\,] = [\, B_j(\vec{r},t)\,,\, B_\ell(\vec{r}';t)\,] = 0$$

$$[\, E_j(\vec{r},t)\,,\, B_\ell(\vec{r}';t)\,] = -4\pi i\, \varepsilon_{jes}\, \frac{\partial}{\partial x_s}\, \delta(\vec{r}-\vec{r}') \qquad (1)$$

Se puede demostrar fácilmente que la variable $A_j(\vec{r};t)$ y su momento conjugado, que en nuestras unidades es $\Pi_j(\vec{r};t) = (4\pi)^{-1}\,\partial A_j(\vec{r};t)/\partial t$, satisfacen las reglas de conmutación

$$[\,A_j(\vec{r};t)\,,\,A_\ell(\vec{r}';t)\,] = [\,\Pi_j(\vec{r};t)\,,\,\Pi_\ell(\vec{r}';t)\,] = 0$$

$$[\,A_j(\vec{r};t)\,,\,\Pi_\ell(\vec{r}';t)\,] = i\,\delta_{j\ell}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}') \tag{1}$$

totalmente análogas a las reglas de conmutación entre las variables canónicas q_j y p_ℓ de la mecánica. Es frecuente también, en lugar de nuestra forma de proceder, postular las relaciones (1), y de aquí, usando (4.3), deducir las reglas de conmutación (4.1)

Hasta aquí hemos considerado únicamente el campo de la radiación electromagnética libre, cuyo hamiltoniano en el formalismo de la teoría cuántica de campos es

$$H_{rad} = \frac{1}{8\pi}\int d^3r\ :[\,\vec{E}^2(\vec{r},0) + \vec{B}^2(\vec{r};0)\,]: \tag{2}$$

Para estudiar la interacción de tal campo con un sistema de N partículas tengamos en cuenta que el hamiltoniano total será de la forma

$$H = H_{rad} + H_m + H_I \tag{3}$$

donde H_m denota el hamiltoniano de la parte material, esto es, de las N partículas consideradas (por ejemplo, en el caso de átomos será el Hamiltoniano de los Z electrones en interacción mutua y con el núcleo atómico, y en el caso de núcleos, el de sus A nucleones en interacción entre sí). La parte H_I corresponde al hamiltoniano de interacción entre las N partículas y el campo de radiación, que en la aproximación no relativista y en la hipótesis de aditividad de las interacciones de las partículas constituyentes se puede escribir como

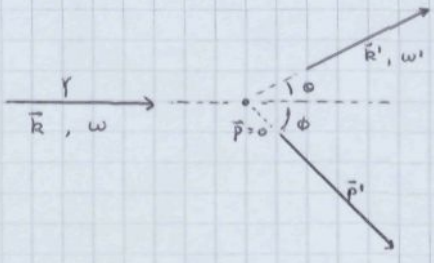
$$H_I = \sum_{i=1}^{N}\left\{ -\frac{e_i}{m_i}\,\vec{A}(\vec{r}_i;0)\cdot\vec{p}_i - \tilde{\mu}_i\,g_i\,\vec{S}_i\cdot\vec{B}(\vec{r}_i;0) + \frac{e_i^2}{2m_i}:\vec{A}^2(\vec{r}_i;0):\right\} \tag{4}$$

donde e_i es la carga, m_i la masa, $\tilde{\mu}_i \equiv -\mu_B$ si «i» es un electrón, $\tilde{\mu}_i \equiv \mu_N$ si «i» es un núcleo, g_i el factor giromagnético y $\vec{S}_i$ el spin.

Como primera aplicación interesante de la teoría de interacción luz-materia deduciremos la sección eficaz para la colisión elástica de fotones suaves con electrones libres prácticamente en reposo, es decir, la llamada <u>colisión Compton</u> a bajas energías

$$\gamma(\vec{k},\lambda) + e^-(\vec{p},\mu) \longrightarrow e^-(\vec{p}',\mu') + \gamma(\vec{k}',\lambda') \tag{1}$$

donde especificamos los momentos y polarizaciones de cada una de las partículas consideradas. El cálculo se limitará a energías del fotón incidente mucho menores que la de reposo del electrón, es decir, $\omega \ll m_e$.



$$\omega + m_e = \omega' + \sqrt{\vec{p}'^2 + m_e^2}$$

$$\omega = \omega' \cos\theta + p' \cos\phi \tag{2}$$

$$0 = \omega' \sin\theta - p' \sin\phi$$

De las dos últimas ecuaciones se obtiene

$$p'^2 = \omega^2 + \omega'^2 - 2\omega\omega' \cos\theta \tag{3}$$

De la primera

$$\sqrt{p'^2 + m_e^2} = \omega - \omega' + m_e \Rightarrow \quad p'^2 + m_e^2 = \omega^2 + \omega'^2 + m_e^2 - 2\omega\omega' + 2m_e\omega - 2m_e\omega' \tag{4}$$

y de (3) y (4) eliminando p'^2

$$\omega = \omega' \left(1 + \frac{\omega}{m_e} - \frac{\omega}{m_e} \cos\theta \right) \tag{5}$$

Despreciando términos de orden ω/m_e se obtiene que $\omega' = \omega$, esto es, no hay transferencia de energía del fotón al electrón.

El Hamiltoniano de interacción H_I para el proceso considerado viene dado por (8.4) con $N=1$. En primer orden de teoría de perturbaciones sólo el último término de H_I puede dar contribución, aniquilando el fotón incidente y creando el fotón saliente, con una amplitud de transición de orden e^2. Por este motivo es necesario considerar también los términos de segundo orden en H_I en el desarrollo perturbativo, que a través de los dos primeros términos de H_I dan una contribución también de orden e^2, a este proceso. Pero teniendo en cuenta la estructura explícita de H_I y la de la serie perturbativa

se puede probar que si $\omega \gg$ energías cinéticas de los electrones, esta nueva contribución es despreciable frente a la del término diamagnético.

Para obtener, bajo estos supuestos, la sección eficaz diferencial en la aproximación de Born, de forma sencilla, tengamos en cuenta que si $\omega \ll m_e$ podemos suponer el electrón anclado en el origen, con función de onda dada simplemente por su spinor de polarización y utilizar (I-17.2) correspondiente a la difusión simple. La amplitud de difusión será

$$\langle f | H_1 | i \rangle = \frac{\alpha}{2m_e} (\alpha^+_{\mu'} \alpha_\mu) \langle \vec{k}', \epsilon(\vec{k}'\lambda') | : \vec{A}^2(0) : | \vec{k}, \epsilon(\vec{k}\lambda) \rangle =$$

$$= \frac{\alpha}{4\pi^2 m_e \omega} (\alpha^+_{\mu'} \alpha_\mu) \vec{\epsilon}^*(\vec{k}'\lambda') \cdot \vec{\epsilon}(\vec{k}\lambda) \qquad (1)$$

de donde

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{m_e^2} | \vec{\epsilon}^*(\vec{k}', \lambda') \cdot \vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda) |^2 | \alpha^+_{\mu'} \alpha_\mu |^2 \qquad (2)$$

Si promediamos sobre las polarizaciones iniciales del electrón y sumamos sobre las finales

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{m_e^2} | \vec{\epsilon}^*(\vec{k}', \lambda') \cdot \epsilon(\vec{k}, \lambda) |^2 \qquad (3)$$

Es interesante observar que esta misma fórmula, multiplicada por Z^4 y cambiando $m_e \to m$, describe a bajas energías la sección eficaz de fotones sobre cualquier blanco (libre y en reposo) de carga $\pm Ze$ y masa m. La estructura posible del blanco no se revela cuando la longitud de onda del proyectil incidente es grande en comparación con el tamaño de aquel.

Si suponemos que el fotón inicial no está polarizado entonces debemos promediar sobre λ y sumar sobre λ' y usando 15.5)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{m_e^2} \frac{1}{2} \sum_{\lambda=\pm1} \sum_{\lambda'=\pm1} | \vec{\epsilon}^*(\vec{k}', \lambda') \cdot \vec{\epsilon}(\vec{k}\lambda) |^2 =$$

$$= \frac{\alpha^2}{2m_e^2} \sum_{\lambda=\pm1} \sum_{\lambda'=\pm1} \epsilon^*_i(\vec{k}'\lambda') \epsilon_i(\vec{k}\lambda) \epsilon^*_j(\vec{k}\lambda) \epsilon_j(\vec{k}'\lambda')$$

$$= \frac{\alpha^2}{2m_e^2} \left\{ \delta_{ij} - \hat{k}_i \hat{k}_j \right\} \left\{ \delta_{ij} - \hat{k}'_i \hat{k}'_j \right\} = \frac{\alpha^2}{2m_e^2} \left\{ 1 + (\hat{k} \cdot \hat{k}')^2 \right\} \qquad (4)$$

Si θ es el ángulo que forma el fotón saliente con el entrante

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{m_e^2} \frac{1}{2} (1 + \cos^2\theta) \tag{1}$$

y la sección eficaz total es

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{\alpha}{m_e}\right)^2 \qquad \text{(sección eficaz Thomson)} \tag{2}$$

y su valor es $\sigma = 0.665\ 246\ 15\ (18)$ barn. La longitud

$$r_0 \equiv \frac{\alpha}{m_e} = 2.817\ 940\ 92\ (38)\ fm \tag{3}$$

recibe el nombre de <u>radio clásico del electrón</u>, porque una distribución clásica de carga, que en total sume la carga del electrón, debe tener un radio de este orden si se quiere que su energía electrostática sea del orden de la energía en reposo del electrón.

En este caso de electrones, y en orden α^2, es posible calcular la sección eficaz para cualquier valor de w, llamándose <u>fórmula de Klein - Nishina</u> la expresión obtenida: ($x \equiv w/m_e$)

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{\alpha}{m_e}\right)^2 \cdot \frac{3}{4} \left\{ \frac{1+x}{x^3} \left[\frac{2x(1+x)}{1+2x} - \ln(1+2x) \right] + \frac{\ln(1+2x)}{2x} - \frac{1+3x}{(1+2x)^2} \right\} \tag{4}$$

Sus límites son

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{\alpha}{m_e}\right)^2 \times \begin{cases} 1 - 2x + O(x^2) & x \ll 1 \\ \dfrac{3}{8x} \left[\ln 2x + \dfrac{1}{2} + O\left(\dfrac{\ln x}{x}\right) \right] & x \gg 1 \end{cases} \tag{5}$$

Se podría esperar que para una partícula de masa m la desviación de la fórmula de Thomson fuera importante solo cuando $w \gtrsim m$, como sucede en el caso de los electrones. Esto, sin embargo, no es así, pues debido a las interacciones fuertes, para los hadrones, como son el protón y el neutrón, las desviaciones de la fórmula de Thomson tienen lugar antes de lo esperado. Así, por ejemplo, para protones, cuando $w \simeq 150$ MeV, que corresponde aproximadamente a la masa del pión, la sección eficaz total empieza a crecer considerablemente con la

energía, mostrando estructuras resonantes a las mismas energías que en la difusión MN. Esta es la resonancia $\Delta(1232)$ que consideraremos más adelante.

Hasta aquí hemos considerado el campo clásico como superposición de funciones de onda del fotón con energía ω, momento $\vec{k}$ y helicidad λ. Si bien estas ondas planas son muy útiles en problemas de teoría de colisiones, para desarrollar la teoría de la radiación resulta más conveniente construir los campos como superposición de ondas asociadas a estados fotónicos de energía ω, momento angular J, tercera componente M y paridad Π, ya que los estados atómicos y nucleares que emiten o absorben fotones tienen generalmente estos números cuánticos bien definidos. Nuestro primer problema será determinar una base completa con tales números cuánticos en los que poder después desarrollar los operadores campo.

Siendo $\vec{A}(\vec{r},t)$ un campo vectorial polar, bajo paridad se transforma según la ley

$$A(\vec{r};t) \xrightarrow{P} A'(\vec{r};t) = -A(-\vec{r};t) \tag{1}$$

por lo que

$$\vec{E}(\vec{r};t) \xrightarrow{P} \vec{E}'(\vec{r};t) = -\vec{E}(-\vec{r};t)$$

$$\vec{B}(\vec{r};t) \xrightarrow{P} \vec{B}'(\vec{r};t) = +\vec{B}(-\vec{r};t) \tag{2}$$

Si $\vec{A}$ tiene una paridad Π bien definida, esto es, si

$$A'(\vec{r};t) = \Pi \vec{A}(\vec{r};t) \tag{3}$$

lo mismo ocurre con $\vec{E}$ y $\vec{B}$

$$\vec{E}'(\vec{r};t) = \Pi \vec{E}(\vec{r};t) \quad , \quad \vec{B}'(\vec{r};t) = \Pi \vec{B}(\vec{r};t) \tag{4}$$

Los tres campos tienen, pues, la misma paridad, y ésta es la paridad del fotón asociado. Usualmente se define como paridad de un fotón la de su campo magnético; la razón estriba en que éste, por ser axial, se transforma bajo $\hat{L}$ como una función escalar componente a componente.

Según la paridad se introducen dos tipos de radiaciones electromagnéticas:

1. Radiación EJ ó eléctrica 2^J-polar: Los fotones correspondientes tienen energía ω, momento angular J y paridad $(-1)^J$.

2. Radiación MJ o magnética 2^J-polar: Los fotones correspondientes tienen energía ω, momento angular J y paridad $(-1)^{J+1}$.

El hecho de que la energía sea ω significa que la dependencia temporal de la función de onda del fotón es de la forma $e^{-i\omega t}$, factor que de momento omitiremos. Antes hemos introducido $\vec{\mathcal{Y}}^{L}_{JM}(\theta,\phi)$ (II-9.5) que son estados propios simultáneos de $\vec{L}^2$, $\vec{S}^2$, $\vec{J}^2$, J_3. y de su definición es inmediato comprobar que su paridad es $(-1)^L$.

Para la radiación MJ el potencial vector (o más propiamente la amplitud de potencial vector asociada al fotón), $\vec{A}_{JM}(\vec{r};\omega;m)$ (donde m = magnético), tiene paridad $(-1)^{J+1}$ y su expresión más general es

$$\vec{A}_{JM}(\vec{r};\omega;m) = C_J(m)\, \mathcal{J}_J(\omega r)\, \vec{\mathcal{Y}}^{J}_{JM}(\hat{r}) \tag{1}$$

donde $C_J(m)$ es una constante de normalización que fijaremos más adelante. Por otra parte, la ecuación de d'Alembert exige

$$(\Delta + \omega^2)\, \vec{A}_{JM}(\vec{r};\omega;m) = 0 \tag{2}$$

por lo que $\mathcal{J}_J(\omega r)$ satisfará la ecuación

$$\frac{d^2 \mathcal{J}_J(x)}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{d\mathcal{J}_J(x)}{dx} + \left(1 - \frac{J(J+1)}{x^2}\right)\mathcal{J}_J(x) = 0 \tag{3}$$

típica de las funciones de Bessel esféricas. La condición de regularidad en $r \to 0$ fuerza a que $\mathcal{J}_J(\omega r) \propto j_J(\omega r)$, y por tanto

$$\vec{A}_{JM}(\vec{r};\omega;m) = C_J(m)\, j_J(\omega r)\, \vec{\mathcal{Y}}^{J}_{J,M}(\hat{r}) \tag{4}$$

Se puede comprobar que la condición de transversalidad (1.1) está satisfecha, pues se demuestra fácilmente que

$$\vec{\nabla}\cdot\left(R(r)\,\vec{\mathcal{Y}}^{L}_{JM}(\hat{r})\right) = \sqrt{\frac{L+1}{2L+3}}\, \delta_{J,L+1}\, Y^{M}_{L+1}(\hat{r})\left[\frac{dR(r)}{dr} - \frac{L}{r}R(r)\right] -$$

$$- \sqrt{\frac{L}{2L-1}}\, \delta_{J,L-1}\, Y^{M}_{L-1}(\hat{r})\left[\frac{dR(r)}{dr} + \frac{L+1}{r}R(r)\right] \tag{5}$$

Para EJ el potencial vector $A_{JM}(\vec{r};\omega;e)$ (e = eléctrico) tiene paridad $(-1)^J$, proce-

diendo como antes se obtiene que su expresión más general es

$$\vec{A}_{JM}(\vec{r};\omega;e) = C_{J+1}(e)\, j_{J+1}(\omega r)\, \vec{\mathcal{Y}}^{J+1}_{JM}(\hat{r}) + C_{J-1}(e)\, j_{J-1}(\omega r)\, \vec{\mathcal{Y}}^{J-1}_{JM}(\hat{r}) \tag{1}$$

Para hallar la relación entre $C_{J+1}(e)$ y $C_{J-1}(e)$ se debe imponer la condición de transversalidad:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_{JM}(\vec{r};\omega;e) = -C_{J+1}(e)\sqrt{\frac{J+1}{2J+1}}\left\{\frac{d\, j_{J+1}(\omega r)}{dr} + \frac{J+2}{r}\, j_{J+1}(\omega r)\right\} Y^M_J(\hat{r}) +$$

$$+ C_{J-1}(e)\sqrt{\frac{J}{2J+1}}\left\{\frac{d\, j_{J-1}(\omega r)}{dr} - \frac{J-1}{r}\, j_{J-1}(\omega r)\right\} Y^M_J(\hat{r}) \tag{2}$$

Pero como

$$j_m'(z) = j_{m-1}(z) - \frac{m+1}{z}\, j_m(z)$$

$$j_m'(z) = -j_{m+1}(z) + \frac{m}{z}\, j_m(z) \tag{3}$$

entonces

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_{JM}(\vec{r};\omega;e) = -\omega\, j_J(\omega r)\, Y^M_J(\hat{r})\left\{\sqrt{\frac{J+1}{2J+1}}\; C_{J+1}(e) + \sqrt{\frac{J}{2J+1}}\; C_{J-1}(e)\right\} \tag{4}$$

Luego la expresión deseada es

$$\vec{A}_{JM}(\vec{r};\omega;e) = C_J(e)\left\{-\sqrt{\frac{J}{2J+1}}\; j_{J+1}(\omega r)\, \vec{\mathcal{Y}}^{J+1}_{JM}(\hat{r}) + \sqrt{\frac{J+1}{2J+1}}\; j_{J-1}(\omega r)\, \vec{\mathcal{Y}}^{J-1}_{JM}(\hat{r})\right\} \tag{5}$$

donde $C_J(e)$ es una constante de normalización que se fijará más adelante.

Para fotones de una energía ω bien definida, las ecuaciones de Maxwell en el vacío conducen a

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \quad , \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \quad , \quad \vec{\nabla}\times\vec{B} = -i\omega\vec{E} \quad , \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = i\omega\vec{B} \tag{6}$$

donde

$$\vec{E} = i\omega\vec{A} \quad , \quad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \tag{7}$$

Si $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son soluciones de (4), también lo son $\vec{B}_d \equiv -\vec{E}$ y $\vec{E}_d \equiv +\vec{B}$, que son los llamados campos duales. Para que el campo de la radiación MJ sea dual de EJ una elección posible de las constantes de normalización es

$$C_J(e) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \qquad C_J(m) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \tag{8}$$

Ahora usando

$$\int_0^\infty dr\ r^2\ j_m(kr)\ j_m(k'r) = \frac{\pi}{2k^2}\ \delta(k-k') \tag{1}$$

se obtiene

$$\int d^3r\ \vec{A}^*_{J'M'}(\vec{r};\omega';\lambda') \cdot \vec{A}_{JM}(\vec{r};\omega;\lambda) = \frac{1}{\omega^2}\ \delta(\omega-\omega')\ \delta_{\lambda\lambda'}\ \delta_{JJ'}\ \delta_{MM'} \qquad , \lambda,\lambda' = e,m \tag{2}$$

De todo lo dicho se desprende que en la segunda cuantificación el operador potencial vector puede escribirse

$$\vec{A}(\vec{r};t) = \int_0^\infty d\omega\ \omega^2 \sqrt{\frac{4\pi}{2\omega}} \sum_{JM} \sum_{\lambda} \left\{ \vec{A}_{JM}(\vec{r};\omega;\lambda)\, e^{-i\omega t}\, a_{JM}(\omega;\lambda) + \vec{A}^*_{JM}(\vec{r};\omega;\lambda)\, e^{+i\omega t}\, a^+_{JM}(\omega,\lambda) \right] \tag{3}$$

donde $a_{JM}(\omega;\lambda)$ y $a^+_{JM}(\omega;\lambda)$ son los operadores aniquilación y creación, respectivamente, de las correspondientes ondas multipolares y satisfacen las reglas de conmutación

$$\begin{aligned} &[\, a_{JM}(\omega;\lambda)\ ,\ a_{J'M'}(\omega',\lambda')\,] = [\, a^+_{JM}(\omega;\lambda)\ ,\ a^+_{J'M'}(\omega';\lambda')\,] = 0 \\ &[\, a_{JM}(\omega;\lambda)\ ,\ a^+_{J'M'}(\omega';\lambda')\,] = \frac{1}{\omega^2}\ \delta(\omega-\omega')\ \delta_{\lambda\lambda'}\ \delta_{JJ'}\ \delta_{MM'} \end{aligned} \tag{4}$$

La validez de (3), adoptando (4), se deduce de (4.3), teniendo en cuenta que el operador $a^+_{JM}(\omega;\lambda)$ crea un fotón con función de onda $\vec{A}_{JM}(\vec{r};\omega;\lambda)\, e^{-i\omega t}$ y que $\sum_\alpha [\, a_\alpha t_\alpha + a^+_\alpha t^*_\alpha\,]$ es invariante bajo cambios «unitarios» de base, compatibles con el número cuántico ω.

Por otra parte se obtiene, sin demasiadas dificultades, que

$$H_{rad} = \int_0^\infty d\omega\ \omega^2 \left\{ \omega \sum_{JM} \sum_{\lambda}\ a^+_{JM}(\omega;\lambda)\ a_{JM}(\omega;\lambda) \right\} \tag{5}$$

como era de esperar.

Vamos a calcular la probabilidad de transición de un estado inicial $|i\rangle$ a un estado final $|f\rangle$. Nos limitaremos a procesos de emisión en que el estado inicial carece de fotones y está caracterizado por un vector $|\Psi_i\rangle$, correspondiente a la parte material, con números cuánticos internos E_i, J_i, M_i, Π_i bien definidos, mientras que en el estado final hay un fotón

en un estado multipolar $|\omega J M \lambda\rangle$ de función de onda $\vec{A}_{JM}(\vec{r};\omega;\lambda)$ y el sistema material está descrito por $|\Psi_f\rangle$, con números cuánticos definidos E_f, J_f, M_f, Π_f.

En lo que sigue supondremos que el sistema material está en reposo, y despreciaremos el retroceso del sistema material final. En otras palabras, $|\Psi_i\rangle$, $|\Psi_f\rangle$ serán los vectores estado normalizados del sistema material eliminando el movimiento del centro de masas. La validez de esta aproximación ha sido discutida en la página I-33. Debiendo conservarse la energía en el proceso es evidente que para que la transición pueda tener lugar se debe cumplir

$$E_i = E_f + \omega \tag{1}$$

En realidad, el estado inicial, cuya desintegración estudiamos, no tiene una energía bien definida, de acuerdo con el principio de indeterminación. A la anchura ΔE_i de esta energía contribuye el propio proceso aquí considerado. Si todos los canales de desintegración del sistema inicial son de tipo electromagnético o débil, ΔE_i será despreciable frente a las imprecisiones experimentales. Aquí nos limitaremos a suponer que el estado $|\Psi_i\rangle$ es estacionario para H_m, e igualmente haremos con $|\Psi_f\rangle$.

De acuerdo con la <u>regla de oro de Fermi</u> la probabilidad de emisión $\Gamma_{i\to f}$, por unidad de tiempo, de un fotón del tipo $JM\lambda$ y cualquier energía (que forzosamente debe ser $\omega = E_i - E_f$) en la transición de $|\Psi_i\rangle$ a $|\Psi_f\rangle$, viene dada por

$$\Gamma_{i\to f} = 2\pi\, |\langle f|\, H_1\, |i\rangle|^2\, \omega^2 \tag{2}$$

donde se ha tenido en cuenta que la densidad de estados finales es ω^2, debido a la normalización escogida para los estados multipolares.

Puesto que H_1 es escalar bajo rotaciones e invariante bajo paridad, es evidente que en una transición $(J_i M_i \Pi_i) \longrightarrow (J_f M_f \Pi_f)$ las únicas radiaciones multipolares $(JM\Pi)$ permitidas son aquellas que satisfacen

$$|J_i - J_f| \le J \le J_i + J_f \quad , \quad M = M_i - M_f \quad , \quad \Pi = \Pi_i \Pi_f \tag{3}$$

De las expresiones para $\vec{A}_{JM}(\vec{r};\omega;\lambda)$ dadas por (13.4) y (14.5) se deduce

que $\vec{A}_{00}(\vec{r}; \omega; \lambda) \equiv 0$, esto es, no hay fotones con $J = 0$, por lo que las transiciones radiativas monopolares ($J = 0$) no existen. Teniendo esto en cuenta y las limitaciones (16.3), se determinan fácilmente cuáles son las transiciones multipolares eléctricas y magnéticas de menor J permitidas para unos valores dados de $(J_i \Pi_i)$ y $(J_f \Pi_f)$. Los resultados aparecen en la tabla siguiente

		MULTIPOLOS ELECTRICOS	MULTIPOLOS MAGNÉTICOS
$J_i \neq J_f$	$\Pi_i \Pi_f = (-1)^{J_i - J_f}$	$J = \lvert J_i - J_f \rvert$	$J = \lvert J_i - J_f \rvert + 1$ No existe si J_i o J_f son nulos
	$\Pi_i \Pi_f = (-1)^{J_i - J_f + 1}$	$J = \lvert J_i - J_f \rvert + 1$ No existe si J_i o J_f son nulos	$J = \lvert J_i - J_f \rvert$
$J_i = J_f \neq 0$	$\Pi_i \Pi_f = +1$	$J = 2$ No existe si $J_i = J_f = 1/2$	$J = 1$
	$\Pi_i \Pi_f = -1$	$J = 1$	$J = 2$ No existe si $J_i = J_f = 1/2$
$J_i = J_f = 0$	Cualquiera	No existe	No existe.

Busquemos ahora una expresión explícita del elemento de matriz que aparece en (16.2). De los dos bloques de la derecha del desarrollo (15.3) sólo el segundo contribuye a la emisión y el elemento de matriz del operador $\vec{A}(\vec{r}; 0)$ entre los estados fotónicos considerados es

$$\langle 1 \text{ fotón } (\omega J M \lambda) \mid \vec{A}(\vec{r}; 0) \mid \text{vacío} \rangle = \sqrt{\frac{4\pi}{2\omega}}\, \vec{A}^{*}_{JM}(\vec{r}; \omega; \lambda) \tag{1}$$

Se obtiene por tanto

$$\langle f \mid H_1 \mid i \rangle = \sqrt{\frac{4\pi}{2\omega}} \sum_{j=1}^{N} \int dV\, \Psi_f^{+} \left\{ -\frac{e_j}{m_j}\, \vec{A}^{*}_{JM}(\vec{r}_j; \omega, \lambda) \cdot \vec{p}_j - \right. \tag{2}$$

$$\left. - g_j \tilde{\mu}_j\, \vec{S}_j \cdot \left[\vec{\nabla}_j \times \vec{A}^{*}_{JM}(\vec{r}_j; \omega; \lambda) \right] \right\} \Psi_i$$

donde dV indica el elemento de volumen de las $3N$ coordenadas de las que dependen las funciones de onda inicial Ψ_i y final Ψ_f. [No hay que olvidar que la expresión anterior se ha obtenido en el supuesto de que los sistemas materiales se hallan «anclados» en el origen de coordenadas, por lo que no hay ninguna restricción sobre los valores de las $3N$ coordenadas. De haber realizado el cálculo sin esta hipótesis, las funciones de onda intrínsecas dependerían de $3(N-1)$ coordenadas libres; las expresiones (16.2) y (17.2) seguirían siendo válidas si se limita la integración a estas $3(N-1)$ coordenadas intrínsecas (suponiendo que la transformación «$\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N \longrightarrow \vec{R} = (\sum m_j)^{-1} \sum m_j \vec{r}_j$, $3(N-1)$ coordenadas intrínsecas» tiene jacobiano igual a la unidad), las $3N$ coordenadas $\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N$ se someten a la ligadura $\vec{R} = 0$, y por Ψ_i, Ψ_f se denotan ahora las funciones de onda intrínsecas].

Aunque la integración sobre cada una de las variables $\vec{r}_i$ se extiende a todo el espacio, la extensión finita del sistema material permite limitarla a efectos prácticos a una región esférica de radio del orden del radio medio R del sistema considerado. Los radios nucleares son cantidades relativamente bien definidas y siguen la ley $R \simeq 1.2\, A^{1/3}$ fm, donde A es el número de nucleones. En átomos, y en el marco del modelo de Thomas-Fermi, el radio de una esfera que contenga todos los electrones menos uno es prácticamente independiente de Z y vale $R \simeq 2.5$ Å. Como en la mayoría de las transiciones radiativas nucleares $\omega \sim 1$ MeV y en las atómicas $\omega \sim 1$ eV (excepción notable puede ser la emisión de rayos X), resulta

$$\begin{aligned} \omega R &\sim 10^{-2} A^{1/3} && \text{en núcleos} \\ \omega R &\sim 10^{-3} && \text{en átomos} \end{aligned} \qquad (1)$$

estimaciones éstas que permiten, dentro de la aproximación en que nos movemos, sustituir las funciones esféricas de Bessel que aparecen en la expresión de $\vec{A}_{JM}(\vec{r}; \omega; \lambda)$ por sus comportamientos asintóticos

$$j_J(\omega r) \underset{\omega r \to 0}{\sim} \frac{(\omega r)^J}{(2J+1)!!} \qquad (2)$$

El cálculo de los diversos términos que aparecen en (17.2) es engorroso y se obtiene

$$\Gamma_{fi}(JM;\omega;e) = \frac{8\pi(J+1)}{J[(2J+1)!!]^2}\,\omega^{2J+1}\,|\,Q_{fi}(JM;\omega) + Q'_{fi}(JM;\omega)\,|^2$$

$$\Gamma_{fi}(JM;\omega;m) = \frac{8\pi(J+1)}{J[(2J+1)!!]}\,\omega^{2J+1}\,|\,M_{fi}(JM;\omega) + M'_{fi}(JM;\omega)\,|^2 \qquad (1)$$

donde

$$Q_{fi}(JM;\omega) = \sum_{j=1}^{N} e_j \int dV\; r_j^J\; Y_J^{M*}(\hat{r}_j)\;\Psi_f^+\,\Psi_i \qquad (2)$$

$$Q'_{fi}(JM;\omega) = -\frac{i\omega}{J+1}\sum_{j=1}^{N} g_j\tilde{\mu}_j \int dV\; r_j^J\; Y_J^{M*}(\hat{r}_j)\;\vec{\nabla}_j\cdot[\,\Psi_f^+\,(\vec{r}_j\times\vec{S}_j)\,\Psi_i\,]$$

y

$$M_{fi}(JM;\omega) = -\frac{1}{J+1}\sum_{j=1}^{N}\frac{e_j}{m_j}\int dV\; r_j^J\; Y_J^{M*}(\hat{r}_j)\;\vec{\nabla}_j\cdot(\Psi_f^+\,\vec{L}_j\,\Psi_i)$$

$$M'_{fi}(JM;\omega) = -\sum_{j=1}^{N} g_j\tilde{\mu}_j \int dV\; r_j^J\; Y_J^{M*}(\hat{r}_j)\;\vec{\nabla}_j\cdot(\Psi_f^+\,\vec{S}_j\,\Psi_i) \qquad (3)$$

Para darse cuenta de la importancia relativa de los distintos términos que aparecen en las expresiones (1) y de las diversas transiciones multipolares conviene hacer algunas estimaciones de sus órdenes de magnitud. En tales estimaciones supondremos que el efecto de un operador $\vec{\nabla}$ es dar una contribución de orden R^{-1}, $\vec{L}$ una de orden 1, $g\vec{S}$ una de orden 1 y $\vec{r}$ una de orden R, y que además $J \geq 1$. Teniendo todo esto en cuenta

$$\left|\frac{Q'_{fi}(JM;\omega)}{Q_{fi}(JM;\omega)}\right| \approx \frac{\omega}{m} \sim \begin{cases} 10^{-6} & \text{en átomos} \\ 10^{-3} & \text{en núcleos} \end{cases}$$

$$\left|\frac{M'_{fi}(JM;\omega)}{M_{fi}(JM;\omega)}\right| \sim 1 \qquad (4)$$

de donde se deduce que Q'_{fi} será en general despreciable frente a Q_{fi}, mientras que M_{fi} y M'_{fi} serán de órdenes de magnitud comparables.

Si para una transición $(J_i M_i \Pi_i) \longrightarrow (J_f M_f \Pi_f)$ la radiación EJ está permitida,

entonces la próxima radiación eléctrica permitida, de existir, sería la 2^{J+2}-polar, y lo mismo sucede para las magnéticas. Suponiendo que para los cálculos de ordenes de magnitud $Y_J^M(\hat{r}) \sim 1$ se obtiene

$$\frac{\Gamma_{fi}(J+2, M; w; \lambda)}{\Gamma_{fi}(J, M; w, \lambda)} \sim (wR)^4 \sim \begin{cases} 10^{-12} & \text{en átomos} \\ 10^{-9} A^{4/3} & \text{en núcleos} \end{cases} \qquad (1)$$

por lo que tanto para las radiaciones eléctricas como para las magnéticas bastará tener en cuenta la transición de orden más bajo permitida.

Por otra parte, si en una determinada transición radiativa la emisión 2^J-polar más baja permitida es una eléctrica (magnética), la siguiente permitida en orden creciente de J, de existir, sería una 2^{J+1}-polar magnética (eléctrica), y se deduce fácilmente que

$$\frac{\Gamma_{fi}(J+1; M, w, m)}{\Gamma_{fi}(J; M; w; e)} \sim \frac{w^2}{m^2} \sim \begin{cases} 10^{-12} & \text{en átomos} \\ 10^{-6} & \text{en núcleos} \end{cases} \qquad (2)$$

$$\frac{\Gamma_{fi}(J+1; \vec{E}, w; e)}{\Gamma_{fi}(J; M; w, m)} \sim w^2 m^2 R^4 \sim \begin{cases} 1 & \text{en átomos} \\ 10^{-3} A^{4/3} & \text{en núcleos} \end{cases}$$

De todas estas estimaciones de órdenes de magnitud se deducen inmediatamente las siguientes conclusiones, como norma general:

1º - <u>Sistemas atómicos</u>. Si la transición 2^J-polar de orden más bajo permitida es una eléctrica, entonces ésta es la dominante y su probabilidad de transición puede calcularse mediante (19.1) despreciando el término Q'_{fi}. Todas las demás son despreciables. Si la primera permitida es una magnética, entonces la 2^{J+1}-polar eléctrica, en caso de existir, es de orden de magnitud pequeño y debe ser tenida en cuenta.

2º - <u>Sistemas nucleares</u>. Si la transición 2^J-polar de orden más bajo permitida es una eléctrica, ésta es la dominante y su probabilidad puede calcularse mediante (19.1) omitiendo Q'_{fi}. Todas las demás transiciones son despreciables. Si la primera permitida es una magnética, las restantes transiciones multipolares serán despreciables (salvo, quizá, la siguiente de tipo eléctrico, que para bastantes núcleos con $A \gg 1$ puede competir favorablemente con la magnética anterior).

En muchos casos el estado material inicial no está polarizado, ni se mide la polarización del estado final; en tal supuesto, la cantidad de interés es

$$\Gamma_{fi}(J;\omega,\lambda) \equiv \frac{1}{2J_i+1}\sum_{M_i}\sum_{M_f}\Gamma_{fi}(JM;\omega;\lambda) \tag{1}$$

Esta suma puede llevarse a cabo fácilmente teniendo en cuenta que las amplitudes definidas en (19.2) y (19.3) son elementos de matriz de operadores tensoriales de orden J, y utilizando el teorema de Wigner-Eckart así como las propiedades de ortogonalidad de los coeficientes de Clebsch-Gordan.

Puesto que las interacciones fuertes son invariantes bajo el grupo $SU_T(2)$ de rotaciones en el espacio de isospín, y estas interacciones dominan sobre las electromagnéticas, es posible utilizar en la especificación de los estados nucleares los números cuánticos T y T_3 que corresponden, respectivamente, al isospín y a su tercera componente. La probabilidad de emisión espontanea 2^J-polar para una transición $jm\,T\,T_3 \longrightarrow j'm'T'T_3$ viene dada por (19.1) y teniendo en cuenta que $|Q'_{fi}| \ll |Q_{fi}|$, las fórmulas (19.2) y (19.3) se pueden escribir en el marco del formalismo de isospín como

$$Q = \langle j'm'T'T_3 | \sum_{i=1}^{A} \frac{|e|}{2}(1+\tau_{3i})\, r_i^J\, Y_J^{m-m'*}(\hat{r}_i) | jm\,T\,T_3\rangle \tag{2}$$

$$M = \langle j'm'T'T_3 | \sum_{i=1}^{A} \frac{|e|}{2m_N}\,\vec{\nabla}_i\left[r_i^J\, Y_J^{m-m'*}(\hat{r}_i)\right]\cdot$$

$$\cdot\left\{(1+\tau_{3i})\frac{\vec{L}_i}{J+1} + \frac{1}{2}\left[(\mu_p+\mu_n)+(\mu_p-\mu_n)\tau_{3i}\right]\vec{\sigma}_i\right\} | jm\,T\,T_3\rangle \tag{3}$$

donde m_N ($\simeq m_p \simeq m_n$) es la masa del nucleón, $|e|$ es la carga del protón y $\vec{\tau}$ las matrices de isospín, para las que usamos la misma representación que para las matrices de Pauli. Los μ_p y μ_n son los momentos magnéticos del protón y del neutrón (en magnetones nucleares $|e|/2m_p$) y están relacionados a los factores giromagnéticos por $\mu_p = g_p/2$ y $\mu_n = g_n/2$.

Los operadores que aparecen en (2) y (3) se pueden descomponen en una parte isoescalar y otra que es la tercera componente de un isovector.

Por tanto, T_3' debe ser igual a T_3 para que la transición ocurra, lo cual es obvio pues el estado inicial y final tienen idéntico (A, Z). Asimismo, se obtienen las reglas de selección de isospín

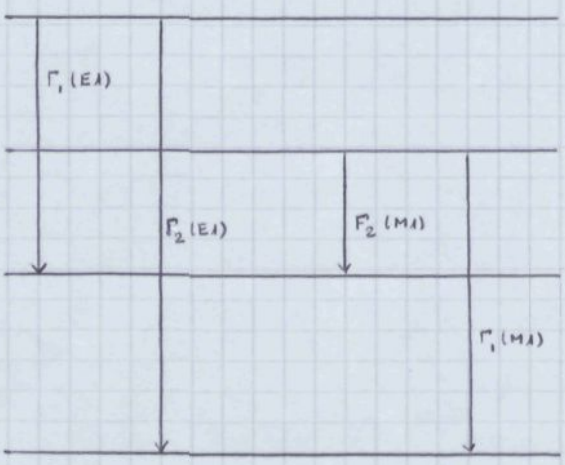
a) La parte isoescalar sólo permite transiciones $T' = T$

b) La parte isovectorial permite las transiciones $|T - T'| = 1$ y las $T = T'$ si $T_3 \neq 0$ (Tengase en cuenta que $C(T1T; T_3 0 T_3)$ es proporcional a T_3)

Empecemos considerando las transiciones E1. La parte isoescalar Q^e de Q se puede escribir

$$Q^e = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{|e|}{2} A \langle j' m' T T_3 | R^*_{m-m'} | j m T T_3 \rangle \qquad (1)$$

donde $\vec{R}$ es el vector posición del centro de masas del núcleo. La expresión anterior ha sido obtenida utilizando las fórmulas anteriores en que los $3A$ coordenadas se suponían libres. En realidad, como ya advertimos, las expresiones siguen siendo válidas usando funciones de onda internas a condición de sustituir las $\vec{r}_i$ por las coordenadas relativas al centro de masa, con lo que para núcleos el operador $\vec{R}$ que aparece en (1) debe ser sustituido por 0. Por tanto $Q^e = 0$ y podemos anunciar la <u>regla aproximada de Thaimon y Gamba</u>: las únicas transiciones E1 permitidas son $|T - T'| = 1$ y las $T = T'$ si $T_3 \neq 0$. Como aplicación de esta regla de selección consideraremos las transiciones E1 en $^{14}_{7}N$ $(T_3 = 0)$.



Teniendo en cuenta que las probabilidades de transición para las E1 dependen de la energía como ω^3, en la hipótesis de que ambas tuvieran elementos de ma-

triz nucleares del mismo orden de magnitud sería de esperar que $\Gamma_2(E1) / \Gamma_1(E1) \simeq$ $\simeq (5.691/3.379)^3 \simeq 4.8$. De acuerdo con la regla de selección anunciada antes $\Gamma_2(E1) = 0$, y experimentalmente se encuentra que $\Gamma_2(E1) / \Gamma_1(E1) = 0.62$

Para las transiciones dipolares magnéticas la parte isoescalar M^e de M es:

$$M^e = \frac{|e|}{4m_N}\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,\vec{\chi}^*_{m-m'} \cdot \langle j'm'T'T_3 \mid \sum_{i=1}^{A}\left[\vec{L}_i + (\mu_p+\mu_n)\vec{\sigma}_i\right] \mid jmTT_3\rangle \qquad (1)$$

como resulta de (21.3) usando la relación $\vec{\nabla}\left[r\,Y^{m-m'}_1(\hat{r})\right] = (3/4\pi)^{1/2}\vec{\chi}_{m-m'}$. Llamando $\vec{J}$ al operador momento angular total

$$M^e = \frac{|e|}{4m_N}\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,\vec{\chi}^*_{m-m'} \cdot \langle j'm'T'T_3 \mid \vec{J} + (\mu_p+\mu_n-1/2)\sum_{i=1}^{A}\vec{\sigma}_i \mid jmTT_3\rangle \qquad (2)$$

y como el elemento de matriz de $\vec{J}$ es nulo ($\vec{J}$ transforma el estado inicial en otro de igual energía, y, por tanto, ortogonal al estado final)

$$M^e = \frac{|e|}{4m_N}\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,(\mu_p+\mu_n-1/2)\,\vec{\chi}^*_{m-m'} \cdot \langle j'm'T'T_3 \mid \sum_{i=1}^{A}\vec{\sigma}_i \mid jmTT_3\rangle \qquad (3)$$

Un razonamiento análogo permite escribir la parte isovectorial M^v de M como

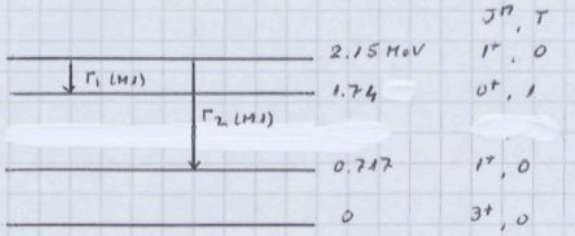
$$M^v = \frac{|e|}{4m_N}\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,\vec{\chi}^*_{m-m'} \cdot \langle j'm'T'T_3 \mid \sum_{i=1}^{A}\left[\vec{L}_i + (\mu_p-\mu_n)\sigma_i\right]\tau_{3i} \mid jmTT_3\rangle \qquad (4)$$

Teniendo en cuenta que $\mu_p - \mu_n \simeq 4.706$ y que $\mu_p + \mu_n - 1/2 = 0.380$, es de esperar que en las transiciones M1 domine, en general, la parte isovectorial sobre la isoescalar. Como en núcleos con $T_3 = 0$ las transiciones $T' = T$ sólo pueden ir a través de la parte isoescalar, es presumible que en tales núcleos las transiciones $T' = T$ queden deprimidas frente a las $T' \neq T$ por un factor de orden $(0.380/4.706)^2 \simeq 6.5 \times 10^{-3}$ (<u>regla de Morpurgo</u>)

Consideremos la figura de la página anterior. Dado que las probabilidades de transición para las M1 dependen de la energía como ω^3, en la hipótesis de que ambas tuvieran el elemento de matriz nuclear del mismo orden de magnitud sería de esperar que $\Gamma_1(M1) / \Gamma_2(M1) \simeq (3.945/1.633)^3 \simeq 14.1$. De acuerdo con la regla de Morpurgo la transición $\Gamma_1(M1)$ debe estar fuertemente deprimida, y experimentalmente se encuentra que $\Gamma_1(M1) / \Gamma_2(M1) = 0.042$.

Otro ejemplo de la validez de la regla de Morpurgo se encuentra en las

desintegraciones M1 de algunos niveles del $^{10}_{5}B$ ($T_3 = 0$). Si los elementos de matriz nucleares son del mismo orden de magnitud $\Gamma_2(M1) / \Gamma_1(M1) \simeq (1.433/0.51)^3 \simeq 43$ según la regla de Morpurgo $\Gamma_2(M1)$ debe estar fuertemente deprimida; experimentalmente se encuentra $\Gamma_2(M1)/\Gamma_1(M1) \simeq 0.77$.



Un grave inconveniente que se encuentra al intentar realizar cálculos con funciones de onda nucleares es que las partes intrínsecas de éstas se desconocen en la mayoría de los casos. Al adoptar un modelo nuclear como el de capas, en el que se supone que los nucleones se mueven bajo un potencial creado por ellos mismos, anclado en el origen de coordenadas, conduce a funciones de onda dependiente de 3A coordenadas, de forma tal que su centro de masas no está libre. Las correcciones a realizar para corregir este defecto del centro de masas plantean problemas muy difíciles y a veces no bien definidos en los casos prácticos. Para transiciones eléctricas con $J \geq 2$ y magnéticas, las correcciones son muy dependientes del modelo y se estiman pequeñas y aquí las ignoraremos. Se puede ver que para transiciones EJ, en el modelo de partícula independiente los efectos del retroceso del núcleo quedan bien simulados dotando al nucleón activo de una carga efectiva $|e| \epsilon_J$, con

$$\epsilon_J = 1 - (Z/A)\,\delta_{J1} \qquad \text{para protones}$$
$$\epsilon_J = -(Z/A)\,\delta_{J1} \qquad \text{para neutrones} \tag{1}$$

Así pues, en este modelo los ritmos de transición EJ y MJ, en ausencia de polarizaciones, podrían escribirse, teniendo en cuenta (19.1), (21.2) y (21.3) como

$$\Gamma^{EJ}(n\ell j \longrightarrow n'\ell' j') = \frac{8\pi(J+1)}{J[(2J+1)!!]^2}\,\frac{\alpha\,\epsilon_J^2\,\omega^{2J+1}}{2j+1}\sum_{mm'} |\langle n\ell\, 1/2\, jm | r^J Y_J^{m-m'}(\hat{r}) | n'\ell'\, 1/2\, j'm'\rangle|^2 \tag{2}$$

$$\Gamma^{MJ}(n\ell j \longrightarrow n'\ell' j') = \frac{8\pi(J+1)}{J\,i\,[(2J+1)!!]^2}\,\frac{\alpha\,\omega^{2J+1}}{m_N^2\,(2j+1)}\sum_{mm'} |\langle n\ell\, 1/2\, jm | O_M | n'\ell'\, 1/2\, j'm'\rangle|^2$$

con

$$O_M \equiv \vec{\nabla}[r^J Y_J^{m-m'}(\hat{r})] \cdot \left\{ a\,\frac{\vec{J}}{J+1} + \frac{b}{2}\,\vec{\sigma} \right\} \tag{3}$$

donde si la partícula que participa en la transición magnética es un

$$\begin{array}{lll} \text{protón} & a = 1 & b = \mu_p - 1/(J+1) \\ \text{neutrón} & a = 0 & b = \mu_n \end{array} \qquad (1)$$

Es evidente que la sumas sobre polarizaciones que aparece en (24.2) es realizable mediante la introducción del teorema de Wigner - Eckart y las propiedades de los coeficientes de Clebsh - Gordan. Aparecerán también integrales que contienen las funciones radiales de la partícula que interviene en la transición en el estado $n\ell$ y en el $n'\ell'$. Si nos limitamos a considerar las transiciones dominantes en que $J = |j - j'|$ y tomamos

$$R_{n\ell}(r) = \begin{cases} (3/R^3)^{1/2} & r \leq R \\ 0 & r > R \end{cases} \qquad (2)$$

se puede demostrar que

$$\Gamma_e(J; j \to j') = \frac{2(J+1)}{J\,[(2J+1)!!]^2} \left(\frac{3}{J+3}\right)^2 \alpha\, \epsilon_J^2\, (\omega R)^{2J}\, \omega\, S(j, J, j') \qquad (3)$$

$$\Gamma_m(J; j \to j') = \frac{2(J+1)}{J\,[(2J+1)!!]^2} \left(\frac{3}{J+3}\right)^2 \frac{\alpha}{(m_N R)^2}\, b_J^2\, J^2\, (\omega R)^{2J}\, \omega\, S(j, J, j')$$

donde si la partícula que participa en la transición es un

$$\begin{array}{lll} \text{protón} & b_J = \mu_p - 1/(J+1) & \epsilon_J = 1 - (Z/A)\,\delta_{J1} \\ \text{neutrón} & b_J = \mu_n & \epsilon_J = -(Z/A)\,\delta_{J1} \end{array} \qquad (4)$$

Por otra parte

$$S(j, J, j') = \frac{(2j_> + 1)}{(2j+1)} \frac{(j_> - 1/2)!}{(j_< - 1/2)!} \frac{(2j_<)!!}{(2j_>)!!} \frac{(2J+1)!!}{J!} \qquad (5)$$

donde $j_>$ y $j_<$ son el mayor y menor, respectivamente, de j y j'. Como es evidente de (4) $S(j, J, j')$ será del orden de la unidad.

Para la medida de las anchuras de las transiciones radiativas se suelen introducir las <u>unidades Weisskopf</u>, definidas como

$$\Gamma_W(EJ) = \frac{2(J+1)}{J\,[(2J+1)!!]^2}\left(\frac{3}{J+3}\right)^2 \alpha\, r_0^{2J} A^{2J/3} \omega^{2J+1}$$

$$\Gamma_W(MJ) = \frac{20(J+1)}{J\,[(2J+1)!!]^2}\left(\frac{3}{J+3}\right)^2 \frac{\alpha}{m_N^2} r_0^{2J-2} A^{2(J-1)/3} \omega^{2J+1} \qquad (1)$$

que son las que resultarían de (25.3) si ponemos $S(j, J, j') = 1$, $R = r_0 A^{1/3}$, $\epsilon_J = 1$ $(b_J J)^2 = 10$ Si tomamos $r_0 = 1.2$, $\omega = 1\,MeV$ y $A = 1$ estas unidades vienen dadas en la tabla siguiente:

J	$\frac{\Gamma_W(EJ)}{A^{2J/3}\,(\omega/MeV)^{2J+1}}$ (en eV)	$\frac{\Gamma_W(MJ)}{A^{2(J-1)/3}\,(\omega/MeV)^{2J+1}}$ (en eV)
1	6.75×10^{-2}	2.07×10^{-2}
2	4.79×10^{-8}	1.47×10^{-8}
3	2.23×10^{-14}	6.86×10^{-15}
4	7.02×10^{-21}	2.16×10^{-21}
5	1.58×10^{-27}	4.84×10^{-28}

Recuérdese que $\Gamma = 1\,eV$ implica $\tau = 6.582122\,(20) \times 10^{-16}\,s$

V - ECUACIONES DE ONDA RELATIVISTAS

Para obtener la ecuación de Schrödinger, para una partícula libre y de spin cero, una manera formal de proceder es partir de la ecuación $E = \vec{p}^2/2m$ y realizar en ella las sustituciones $E \longrightarrow i\partial_t$, $\vec{p} \longrightarrow -i\vec{\nabla}$ y hacer actuar el operador así obtenido sobre la función de onda. En procesos en los que las partículas que intervienen tienen velocidades próximas a la de la luz o en los que hay transformación de masa en energía la cinemática adecuada es la relativista. La primera ecuación de onda relativista fue obtenida por O. Klein y W. Gordon en 1926 y es la famosa ecuación de Klein-Gordon. Para ello partiremos de la ecuación $p^\mu p_\mu = m^2$. [Usaremos la métrica Minkowskiana $g^{\mu\nu} \equiv (1, -1, -1, -1)$] y haciendo

$$p_\mu \longrightarrow i\partial_\mu \tag{1}$$

obtenemos la ecuación

$$(\Box + m^2)\,\phi(x) \equiv (\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\,\phi(x) = 0 \qquad \text{(Ecuación de Klein-Gordon)} \tag{2}$$

donde suponemos que $\phi(x)$, en general complejo, se comporta como un escalar bajo el grupo de Poincaré

$$\begin{aligned} x &\longrightarrow x' = \Lambda x + a \\ \phi(x) &\longrightarrow \phi'(x') = \phi(x) \end{aligned} \tag{3}$$

Procedamos ahora a hallar la solución general de (2), que podemos escribir a través de su transformada de Fourier

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4p\ \hat{\phi}(p)\, e^{-ip\cdot x} \tag{4}$$

Como (4) debe ser solución de (2), entonces

$$(p^2 - m^2)\,\hat{\phi}(p) = 0 \tag{5}$$

por lo que $\hat{\phi}(p)$ tiene el soporte en el hiperboloide másico $\Omega(m)$:

$$\Omega(m) = \Omega_+(m) \cup \Omega_-(m) \quad , \quad \Omega_\pm(m) \equiv \left\{ p^\mu : p^2 = m^2,\ p^0 \gtrless 0 \right\} \tag{6}$$

esto es

$$\hat{\phi}(p) = (2\pi)^{-1} \delta(p^2 - m^2)\, \tilde{\phi}(p) \tag{1}$$

Por tanto la solución más general de la ecuación de Klein-Gordon es

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4p\ \delta(p^2 - m^2)\, \tilde{\phi}(p)\, e^{-ip\cdot x} \tag{2}$$

donde $\tilde{\phi}(p)$ es una función arbitraria definida sobre $\Omega(m)$. Teniendo en cuenta que

$$\delta(p^2 - m^2) = \frac{1}{2E(\vec{p})} \left\{ \delta[p^0 - E(\vec{p})] + \delta[p^0 + E(\vec{p})] \right\}, \quad E(\vec{p}) \equiv \sqrt{m^2 + \vec{p}^2} \tag{3}$$

la solución se puede escribir como

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2E(\vec{p})} \left\{ \tilde{\phi}(E, \vec{p})\, e^{-iEt + i\vec{p}\cdot\vec{x}} + \tilde{\phi}(-E, \vec{p})\, e^{+iEt + i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right\} \tag{4}$$

esto es

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\Omega(m)} \frac{d^3p}{2|p^0|}\, \tilde{\phi}(p)\, e^{-ip\cdot x} \tag{5}$$

El hecho de que esta integral se halle extendida a todo $\Omega(m)$ nos dice que la ecuación de Klein-Gordon tiene soluciones tanto de energía positiva como de negativa. Notemos además que $d^3p / 2|p^0|(2\pi)^3$ es el elemento de volumen invariante Poincaré en $\Omega(m)$

En orden a definir un producto escalar en el espacio de las soluciones de la ecuación de Klein-Gordon notemos que si $\phi_1(x)$ y $\phi_2(x)$ son soluciones de dicha ecuación, entonces

$$\partial_\mu \left\{ i\, \phi_1^*(x) \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi_2(x) \right\} = 0 \tag{6}$$

$$a(x) \overleftrightarrow{\partial}^\mu b(x) \equiv a(x)\, [\partial^\mu b(x)] - [\partial^\mu a(x)]\, b(x)$$

Definiremos el producto escalar como

$$(\phi_1, \phi_2) \equiv i \int d^3x\ \phi_1^*(t, \vec{x}) \overleftrightarrow{\partial}_t \phi_2(t, \vec{x}) \tag{7}$$

donde la integral se halla extendida a todo el espacio y en virtud de (6) se

valor es independiente del instante t_0 para el que se calcule. Veamos como expresar (2.7) en términos de $\tilde{\phi}(p)$. Sustituyendo los análogos de (2.5) en (2.7)

$$(\phi_1, \phi_2) = \frac{i}{(2\pi)^6} \int d^3x \int_{\Omega(m)} \frac{d^3p}{2|p^0|} \int_{\Omega(m)} \frac{d^3p'}{2|p'^0|} \tilde{\phi}_1^*(p') \tilde{\phi}_2(p) e^{-i(\vec{p}-\vec{p}')\cdot\vec{x}} (-ip^0 - ip'^0)$$

de donde

$$(\phi_1, \phi_2) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\Omega(m)} \frac{d^3p}{2|p^0|} \epsilon(p^0) \tilde{\phi}_1^*(p) \tilde{\phi}_2(p) \qquad (1)$$

donde $\epsilon(p^0) = \pm 1$ si $p^0 \gtrless 0$. De aquí se ve claramente que éste producto escalar es invariante Poincaré. Este producto escalar conduce a una métrica indefinida pues si $\tilde{\phi}(p)$ tiene soporte en $\Omega_\pm(m)$, entonces $(\phi, \phi) \gtrless 0$.

Si sólo pretendemos considerar partículas libres de ecuación de Klein-Gordon es aceptable en el sentido de que si consideramos únicamente los $\tilde{\phi}(p)$ con soporte en $\Omega_+(m)$, entonces el conjunto de las soluciones con el producto escalar considerado constituye un espacio de Hilbert. Notar sin embargo que el hecho de que la variedad de los estados realizables contiene sólo soluciones de energía positiva tiene varias consecuencias en relación a los operadores que representan observables físicos. Notemos en particular que las soluciones $e^{-ip\cdot x}$ con $p \in \Omega_+(m)$ representan estados con momento $\vec{p}$ y energía $E(\vec{p}) = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2} > 0$. Sin embargo, el operador $\vec{x} = i\vec{\nabla}_p$ no puede interpretarse como el operador posición, pues no es autoadjunto:

$$(\phi_1, \vec{x}\,\phi_2) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2|p^0|} \tilde{\phi}_1^*(p)\, i\vec{\nabla}_p \phi_2(p) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2|p^0|} \left\{ \left(-i\vec{\nabla}_p + \frac{i\vec{p}}{\vec{p}^2 + m^2} \right) \tilde{\phi}_1^*(p) \right\} \phi_2(p) \neq (\vec{x}\,\phi_1, \phi_2)$$

Se puede probar que un operador posición aceptable es el llamado <u>operador de posición de Newton - Wigner</u>

$$\vec{q} = i\vec{\nabla}_p - \frac{1}{2} \frac{i\vec{p}}{\vec{p}^2 + m^2} \qquad (2)$$

Se puede demostrar entonces que la función de onda que representa una partícula localizada en $\vec{x}_0$ en $t_0 = 0$ no es $\delta(\vec{x} - \vec{x}_0)$, como en el caso no relativista,

sino una función $\psi_{\vec{x}_0}(\vec{x})$ cuya extensión en el espacio es del orden de $1/m$ (longitud Compton de la partícula) y después cae a cero exponencialmente. Esto no es muy sorprendente pues para localizar una partícula en una región $\ll 1/m$, es necesario que actúen agentes externos con energía $\gg m$, de forma que la creación de pares no puede ser evitada y el formalismo de una sola partícula se hace totalmente insostenible.

La situación es sin embargo imposible cuando se supone que la partícula de Klein-Gordon está en interacción. Aún cuando en $t=0$ elijamos $\tilde{\phi}(p)$ con soporte en $\Omega_+(m)$, la evolución temporal, en general, hará aparecer estados con soporte en $\Omega_-(m)$, es decir existirá una probabilidad no nula de encontrar la partícula en un estado de energía negativa, lo cual, a priori, es difícil de interpretar físicamente. En resumen, que una teoría totalmente consistente para una única partícula relativista sólo puede formularse en el caso de una partícula libre.

La forma de evitar todos estos problemas es considerar que $\phi(x)$ no representa la función de ondas de una partícula de spin cero, sino que $\phi(x)$ es el operador campo para partículas de spin cero, capaz de crear y destruir dichas partículas y las correspondientes antipartículas. Si en la segunda integral de (2.4) hacemos el cambio $\vec{p} \to -\vec{p}$ e introducimos $a(\vec{p}) \equiv \tilde{\phi}(E, \vec{p})$, $b^+(\vec{p}) \equiv \tilde{\phi}(-E, -\vec{p})$ entonces

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\Omega_+(m)} \frac{d^3p}{2E(\vec{p})} \left[a(\vec{p})\, e^{-ip\cdot x} + b^+(\vec{p})\, e^{+ip\cdot x} \right] \tag{1}$$

donde $a^+(\vec{p})$ [$a(\vec{p})$] es el operador creación [aniquilación] de partículas y $b^+(\vec{p})$ [$b(\vec{p})$] es el operador creación [aniquilación] de antipartículas y se postulan para ellos las relaciones de conmutación

$$[a(\vec{p}), a^+(\vec{p}')] = [b(\vec{p}), b^+(\vec{p}')] = (2\pi)^3\, 2E(\vec{p})\, \delta(\vec{p}-\vec{p}') \tag{2}$$

siendo nulos todos los restantes conmutadores. Notar que si $\phi^+(x) = \phi(x)$ entonces $b(\vec{p}) = a(\vec{p})$, es decir partículas y antipartículas coinciden.

Indicaremos por $|0\rangle$ el estado de vacío definido como

$$a(\vec{p})\,|0\rangle = b(\vec{p})\,|0\rangle = 0 \qquad \forall\, \vec{p} \tag{1}$$

Lo supondremos normalizado de la forma $\langle 0|0\rangle = 1$. A partir del vacío y por actuación reiterada de los operadores creación y aniquilación construiremos estados con cualquier número de partículas y/o antipartículas. El espacio sustentado por estos estados se suele llamar <u>espacio de Fock</u>. Así, por ejemplo, el estado de una partícula es

$$|\vec{p}\rangle = a^{+}(\vec{p})\,|0\rangle \tag{2}$$

y de acuerdo con (1) y (4.2) su normalización es

$$\langle \vec{p}\,|\,\vec{p}\,'\rangle = (2\pi)^3\, 2E(\vec{p})\,\delta(\vec{p}-\vec{p}\,') \tag{3}$$

Veamos como calcular el conmutador de dos campos:

$$[\,\phi(x)\,,\,\phi^{+}(y)\,] =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^6}\int\frac{d^3p}{2E(\vec{p})}\int\frac{d^3p'}{2E(\vec{p}\,')}\,\Big[\,a(\vec{p})\,e^{-ip\cdot x} + b^{+}(\vec{p})\,e^{+ip\cdot x}\,,\; a^{+}(\vec{p}\,')\,e^{+ip'\cdot y} + b(\vec{p}\,')\,e^{-ip'\cdot y}\,\Big] =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p}{2E(\vec{p})}\int\frac{d^3p'}{2E(\vec{p}\,')}\;2E(\vec{p})\,\delta(\vec{p}-\vec{p}\,')\,\Big[\,e^{-ip\cdot(x-y)} - e^{ip\cdot(x-y)}\,\Big]$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p}{2E(\vec{p})}\,\Big[\,e^{-ip\cdot(x-y)} - e^{+ip\cdot(x-y)}\,\Big]$$

Cambiando en la segunda integral $\vec{p}$ por $-\vec{p}$

$$[\,\phi(x)\,,\,\phi^{+}(y)\,] = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p}{2E(\vec{p})}\;e^{+i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}\,\Big[\,e^{-iE(\vec{p})(x^0-y^0)} - e^{+iE(\vec{p})(x^0-y^0)}\,\Big]$$

Introduciendo la función invariante

$$\Delta(x\,;m^2) \equiv -\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p}{E(\vec{p})}\;e^{+i\vec{p}\cdot\vec{x}}\;\mathrm{sim}\,[\,E(\vec{p})\,x^0\,] \tag{4}$$

y obtenemos

$$[\,\phi(x)\,,\,\phi^{+}(y)\,] = i\,\Delta(x-y\,;m^2) \tag{5}$$

$$[\,\phi(x)\,,\,\phi(y)\,] = [\,\phi^{+}(x)\,,\,\phi^{+}(y)\,] = 0$$

Los dos últimos se obtienen de un cálculo similar al realizado.

Es evidente que $\Delta(x;m^2)\Big|_{x^0=0} = 0$ y como la función es invariante

$$\Delta(x;m^2) = 0 \qquad , \quad \forall\, x^2 < 0 \tag{1}$$

y por tanto si $(x-y)^2 < 0$ los conmutadores (5.5) son todos nulos. Esta es la llamada condición de microcausalidad y garantiza que observables, construídos a partir de los campos, conmutan cuando se hallan referidos a puntos separados por una distancia de tipo tiempo, como era de esperar físicamente. De su definición también se deduce

$$\partial_{x_i} \Delta(x;m^2)\Big|_{x^0=0} = 0 \qquad , \quad \partial_{x_0} \Delta(x;m^2)\Big|_{x^0=0} = -\delta(\vec{x}) \tag{2}$$

La ecuación de Klein-Gordon puede derivarse de la densidad Lagrangiana

$$L(x) = :\partial_\mu \phi^+(x)\, \partial^\mu \phi(x): - m^2 :\phi^+(x)\,\phi(x): \tag{3}$$

mediante las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial \phi_\alpha} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi_\alpha)} = 0 \tag{4}$$

donde ϕ_α son, en general, las distintas componentes del campo. Se define el operador momento $\Pi(x)$ asociado al campo $\phi(x)$ como

$$\Pi(x) \equiv \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 \phi(x))} = \partial^0 \phi^+(x) \tag{5}$$

Notemos entonces que de (5.5) y de las propiedades de $\Delta(x;m^2)$

$$\delta(x^0-y^0)\,[\,\phi(x)\,,\,\Pi(y)\,] = i\,\delta^{(4)}(x-y) \tag{6}$$

$$\delta(x^0-y^0)\,[\,\phi(x)\,,\,\phi(y)\,] = \delta(x^0-y^0)\,[\,\Pi(x)\,,\,\Pi(y)\,] = 0$$

que son las típicas reglas de conmutación de una variable y su momento conjugado.

Si $\phi^+(x) = \phi(x)$ entonces el desarrollo anterior se lleva a cabo a partir de la densidad Lagrangiana

$$L(x) = \frac{1}{2} :\partial^\mu \phi(x)\, \partial_\mu \phi(x): - \frac{1}{2} m^2 :\phi(x)\,\phi(x): \tag{7}$$

El hecho de que la ecuación de Klein-Gordon contiene derivadas segundas en el tiempo hizo pensar, durante algunos años, que era el origen de las dificultades de su interpretación como ecuación de onda para una partícula. P.A.M. Dirac, en 1928, propuso para un electrón libre una ecuación que no adolecíera de este "defecto", la famosa ecuación de Dirac

$$[\, i\gamma^\mu \partial_\mu - m \,]\, \psi(x) = 0 \tag{1}$$

donde las matrices γ^μ son una representación irreducible del álgebra engendrada por los γ^μ y que satisfacen

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2 g^{\mu\nu} \tag{2}$$

Se sabe que el álgebra generada por γ^μ es un álgebra de Clifford definida en un espacio Minkowskiano y por tanto tiene una única representación irreducible de orden 4. Hoy día sabemos que ésta ecuación es la adecuada para describir partículas libres de spin 1/2.

Notar que de la ecuación (1)

$$0 = [\, i\gamma^\nu \partial_\nu + m \,]\, [\, i\gamma^\mu \partial_\mu - m \,]\, \psi(x) = -\, [\, \gamma^\nu \gamma^\mu \partial_\nu \partial_\mu + m^2 \,]\, \psi(x)$$

$$= -\left\{ \frac{1}{2} (\gamma^\nu \gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma^\nu) \partial_\nu \partial_\mu + m^2 \right\} \psi(x) = -\left\{ \partial^\mu \partial_\mu + m^2 \right\} \psi(x)$$

y por tanto vemos que la condición (2) garantiza que cada una de las cuatro componentes de $\psi(x)$ satisface la ecuación de Klein-Gordon, que como hemos visto garantiza la relación correcta entre $\vec{p}$ y $E(\vec{p})$.

Vamos a empezar probando que para todo elemento (a, Λ) del grupo propio ortocrono de Poincaré se puede determinar una matriz $S(\Lambda)$ tal que bajo la transformación

$$\begin{aligned} x &\longrightarrow x' = \Lambda x + a \\ \psi(x) &\longrightarrow \psi'(x') = S(\Lambda)\, \psi(x) \end{aligned} \tag{3}$$

la ecuación de Dirac permanece invariante. De $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu\, x^\nu + a^\mu$ se obtiene

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\nu} = \Lambda^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial x'^\nu} = \Lambda^\nu{}_\mu\, \partial'_\nu \tag{4}$$

Entonces (7.1) se puede escribir

$$[\, i\gamma^\mu \Lambda^\nu{}_\mu \partial'_\nu - m \,] S^{-1}(\Lambda)\, \psi'(x') = 0 \quad \Rightarrow \quad [\, i \Lambda^\nu{}_\mu S(\Lambda) \gamma^\mu S^{-1}(\Lambda) \partial'_\nu - m \,] \psi'(x') = 0$$

y para la covariancia se debe cumplir $\Lambda^\nu{}_\mu S(\Lambda) \gamma^\mu S^{-1}(\Lambda) = \gamma^\nu$, o equivalentemente

$$S^{-1}(\Lambda)\, \gamma^\mu\, S(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu\, \gamma^\nu \tag{1}$$

Veamos la unididad de $S(\Lambda)$. Supongamos que existieran dos matrices $S_1(\Lambda)$ y $S_2(\Lambda)$ que cumplieran (1), entonces

$$S_1^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu S_1(\Lambda) = S_2^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu S_2(\Lambda) \quad \Rightarrow \quad [\, S_2(\Lambda) S_1^{-1}(\Lambda) \,] \gamma^\mu = \gamma^\mu [\, S_2(\Lambda) S_1^{-1}(\Lambda) \,]$$

y el lema de Schur nos dice que $S_2(\Lambda) = C\, S_1(\Lambda)$, donde C es una constante y al menos localmente siempre podemos elegir

$$\det [\, S(\Lambda) \,] = +1 \tag{2}$$

con lo que $S(\Lambda)$ queda unívocamente determinada.

Veamos cual es la $S(\Lambda)$ correspondiente a una transformación infinitesimal de Lorentz

$$\Lambda^\mu{}_\nu = g^\mu{}_\nu + \delta\omega^\mu{}_\nu \qquad , \quad \delta\omega_{\mu\nu} = -\delta\omega_{\nu\mu} \tag{3}$$

Escribamos

$$S(\Lambda) = I - \frac{i}{4} A^{\mu\nu} \delta\omega_{\mu\nu} \tag{4}$$

e intentemos determinar $A^{\mu\nu} = -A^{\nu\mu}$. Usando (1)

$$[\, I + \frac{i}{4} A^{\alpha\beta} \delta\omega_{\alpha\beta} \,] \gamma^\mu [\, I - \frac{i}{4} A^{\gamma\delta} \delta\omega_{\gamma\delta} \,] = [\, g^\mu{}_\nu + \delta\omega^\mu{}_\nu \,] \gamma^\nu \quad \Rightarrow$$

$$\left\{ \frac{i}{4} A^{\alpha\beta} \gamma^\mu - \frac{i}{4} \gamma^\mu A^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha} \gamma^\beta \right\} \delta\omega_{\alpha\beta} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{i}{2} [\, A^{\alpha\beta} \gamma^\mu - \gamma^\mu A^{\alpha\beta} \,] - g^{\mu\alpha} \gamma^\beta + g^{\mu\beta} \gamma^\alpha = 0$$

y se comprueba inmediatamente que

$$S(\Lambda) = I - \frac{i}{4} \sigma^{\mu\nu} \delta\omega_{\mu\nu} \qquad , \quad \sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2} [\, \gamma^\mu, \gamma^\nu \,] \tag{5}$$

Antes de continuar veamos algunos propiedades útiles de las γ^μ, que vienen definidas por (7.2)

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2 g^{\mu\nu} \tag{1}$$

$$\gamma_5 \equiv \frac{i}{4!} \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\rho = -i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \quad , \quad \epsilon^{0123} = +1 \tag{2}$$

$$\gamma_5 \gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma_5 = 0 \tag{3}$$

$$\gamma^0 \gamma^0 = \gamma_5 \gamma_5 = +I \quad , \quad \gamma^i \gamma^i = -I \quad i = 1, 2, 3 \tag{4}$$

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \Rightarrow \sigma^{0i} = i \gamma^0 \gamma^i \, , \quad \sigma^{ij} = i \gamma^i \gamma^j \quad i \neq j = 1, 2, 3 \tag{5}$$

En la métrica usada siempre se pueden elegir las γ^μ de forma que

$$\gamma^\mu = \gamma^0 \gamma^{\mu +} \gamma^0 \Rightarrow \gamma^{0+} = \gamma^0 \, , \quad \gamma^{i+} = -\gamma^i \, , \quad \gamma_5^+ = \gamma_5 \, , \quad \sigma^{\mu\nu} = \gamma^0 \sigma^{\mu\nu +} \gamma^0 \tag{6}$$

Siempre se pueden encontrar matrices C y $\bar{C}$ tales que

$$C \gamma^\mu C^{-1} = -\gamma^{\mu\, T} \quad , \quad \bar{C} \gamma^\mu \bar{C}^{-1} = \gamma^{\mu\, T} \tag{7}$$

Obviamente

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = +4 \quad , \quad \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = -2 \gamma^\nu \quad , \quad \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu = +4 g^{\nu\rho} \tag{8}$$

Si $\not{a} = \gamma^\mu a_\mu$ donde a_μ es un cuadrivector arbitrario

$$\mathrm{Tr}\,(\not{a}_1 \not{a}_2 \cdots \not{a}_{2m+1}) = 0 \quad , \quad \mathrm{Tr}\,(\gamma_5) = 0$$

$$\mathrm{Tr}\,(\not{a}_1 \not{a}_2 \cdots \not{a}_m) = (a_1 \cdot a_2)\,\mathrm{Tr}\,(\not{a}_3 \cdots \not{a}_m) - (a_1 \cdot a_3)\,\mathrm{Tr}\,(\not{a}_2 \cdots \not{a}_m) + \cdots + (a_1 \cdot a_m)\,\mathrm{Tr}\,(\not{a}_2 \cdots \not{a}_{m-1}) \tag{9}$$

$$= 4 \sum_P (-1)^{\pi(P)} (a_{P_1} \cdot a_{P_2}) \cdots (a_{P_{m-1}} \cdot a_{P_m}) \qquad m = \text{par}$$

donde la suma se extiende sobre todas las permutaciones dadas tal que $P_\nu < P_{\nu+1}$, siendo $\pi(P)$ la paridad de la permutación P. En particular

$$\mathrm{Tr}\,(\not{a}_1 \not{a}_2) = 4 (a_1 \cdot a_2) \tag{10}$$

$$\mathrm{Tr}\,(\not{a}_1 \not{a}_2 \not{a}_3 \not{a}_4) = 4 [(a_1 \cdot a_2)(a_3 \cdot a_4) - (a_1 \cdot a_3)(a_2 \cdot a_4) + (a_1 \cdot a_4)(a_2 \cdot a_3)] \tag{11}$$

$$\mathrm{Tr}\,(\not{a}_1 \not{a}_2 \gamma_5) = 0 \tag{12}$$

$$\mathrm{Tr}\,(\not{a}_1 \not{a}_2 \not{a}_3 \not{a}_4 \gamma_5) = +4i \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} a_1^\mu a_2^\nu a_3^\lambda a_4^\rho \tag{13}$$

Hay muchas representaciones equivalentes de las matrices γ^μ que son usadas en la práctica, según el problema que se estudie. Aquí nos limitaremos a dar la <u>representación de Dirac</u>

$$\gamma^0 = \begin{vmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{vmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{vmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{vmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{vmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{vmatrix} \tag{1}$$

$$\sigma^{0i} = i \begin{vmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{vmatrix}, \quad \sigma^{ij} = \varepsilon_{ijk} \begin{vmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{vmatrix}$$

$$\mathcal{C} = \gamma^0 \gamma^2, \quad \mathcal{T} = -i\gamma^1\gamma^3$$

Es útil introducir las matrices $\Gamma^{(A)}$ $A = 1, 2, \ldots, 16$ definidas como

$$\begin{array}{l} I \\ \gamma^0, \; i\gamma^1, \; i\gamma^2, \; i\gamma^3 \\ \gamma^0\gamma^1, \; \gamma^0\gamma^2, \; \gamma^0\gamma^3, \; i\gamma^2\gamma^3, \; i\gamma^3\gamma^1, \; i\gamma^1\gamma^2 \\ i\gamma^0\gamma_5, \; \gamma^1\gamma_5, \; \gamma^2\gamma_5, \; \gamma^3\gamma_5 \\ \gamma_5 \end{array} \tag{2}$$

y sus propiedades más importantes son

i) $$[\Gamma^{(A)}]^2 = I \quad , \quad \forall A \tag{3}$$

ii) Si $\Gamma^{(A)}$ se multiplica por las 16 matrices $\Gamma^{(B)}$ se vuelven a obtener todas las matrices del cuadro salvo factores de módulo 1

iii) Para cada $\Gamma^{(A)}$ $(A \neq 1)$ es posible encontrar una $\Gamma^{(B)}$ tal que

$$\Gamma^{(A)} = - \Gamma^{(B)} \Gamma^{(A)} \Gamma^{(B)} \quad , \quad A \neq 1 \tag{4}$$

iv) Se tiene

$$\mathrm{Tr}\,[\Gamma^{(A)}] = 4 \quad , \quad \mathrm{Tr}\,[\Gamma^{(A)}] = 0 \quad \text{si} \quad A \neq 1 \tag{5}$$

v) Las 16 matrices son linealmente independientes. En efecto supongamos

$$\sum_{A=1}^{16} a_A \Gamma^{(A)} = 0 \Rightarrow a_B \Gamma^{(B)} + \sum_{A \neq B} a_A \Gamma^{(A)} = 0 \Rightarrow a_B + \sum_{A \neq B} a_A \Gamma^{(A)} \Gamma^{(B)} = 0$$

pero $\Gamma^{(A)}\Gamma^{(B)}$ es, salvo un factor de módulo 1, una matriz del cuadro distinta de $\Gamma^{(A)}$ y tomando trazas $a_B = 0$. Q.E.D.

vi) Dada una matriz cualquiera Σ de orden 4 es inmediato ver que

$$\Sigma = \frac{1}{4} \sum_{A=1}^{16} \mathrm{Tr}\left[\Sigma\, \Gamma^{(A)}\right] \Gamma^{(A)} \tag{1}$$

vii) si F y G son matrices arbitrarias de orden cuatro

$$F_{\alpha\sigma}\, G_{\beta\rho} = \frac{1}{4} \sum_{A=1}^{16} \Gamma^{(A)}_{\beta\sigma} \left[F\, \Gamma^{(A)} G\right]_{\alpha\rho} \qquad \text{(Reordenación de Fierz)} \tag{2}$$

donde $\Sigma_{\alpha\beta}$ significa el elemento $\alpha\beta$ de la matriz Σ. En efecto de (1) se deduce

$$\Sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} \sum_{A=1}^{16} \Sigma_{\gamma\lambda}\, \Gamma^{(A)}_{\lambda\gamma}\, \Gamma^{(A)}_{\alpha\beta}$$

Consideremos una matriz tal que $(\Sigma)_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\sigma}\, \delta_{\beta\rho}$, entonces

$$\delta_{\alpha\sigma}\, \delta_{\beta\rho} = \frac{1}{4} \sum_{A=1}^{16} \delta_{\gamma\sigma}\, \delta_{\rho\lambda}\, \Gamma^{(A)}_{\lambda\gamma}\, \Gamma^{(A)}_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} \sum_{A=1}^{16} \Gamma^{(A)}_{\alpha\beta}\, \Gamma^{(A)}_{\rho\sigma}$$

y

$$F_{\alpha\sigma}\, G_{\rho\beta} = F_{\alpha\alpha'}\, G_{\beta'\beta}\, \delta_{\alpha'\sigma}\, \delta_{\rho\beta'} = \frac{1}{4} \sum_{A=1}^{16} F_{\alpha\alpha'}\, G_{\beta'\beta}\, \Gamma^{(A)}_{\alpha'\beta'}\, \Gamma^{(A)}_{\rho\sigma} =$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{A=1}^{16} \Gamma^{(A)}_{\rho\sigma} \left[F\, \Gamma^{(A)} G\right]_{\alpha\beta} \qquad \text{Q.E.D.}$$

Volvamos al desarrollo de la ecuación de Dirac. De (8.5) y usando (9.6)

$$S(\Lambda)\, \gamma^0\, S(\Lambda)^+ = \left[I - \frac{i}{4} \sigma^{\mu\nu}\, \delta\omega_{\mu\nu}\right] \gamma^0 \left[I + \frac{i}{4} \sigma^{\mu\nu\,+}\, \delta\omega_{\mu\nu}\right] =$$

$$= \gamma^0 - \frac{i}{4} \left(\sigma^{\mu\nu}\, \gamma^0 - \gamma^0\, \sigma^{\mu\nu\,+}\right) \delta\omega_{\mu\nu} = \gamma^0$$

y por continuidad se tiene que para cualquier transformación de Lorentz propia

$$S(\Lambda)\, \gamma^0\, S^+(\Lambda) = \gamma^0 \tag{3}$$

En el estudio de la ecuación de Dirac es útil introducir

$$\bar{\psi}(x) \equiv \psi^+(x)\, \gamma^0 \tag{4}$$

que en el caso libre satisface la ecuación

$$i\, \partial_\mu\, \bar{\psi}(x)\, \gamma^\mu + m\, \bar{\psi}(x) = \bar{\psi}(x) \left[i \gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu + m\right] = 0 \tag{5}$$

y de (7.3) y (3)

$$\bar{\psi}(x) \longrightarrow \bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x)\, S^{-1}(\Lambda) \tag{6}$$

Es interesante saber como se transforman bajo los elementos del grupo propio de Poincaré cantidades como $\bar{\psi}(x) A \psi(x)$, donde A es una matriz de orden 4. Como A se puede escribir como combinación lineal de $I, \gamma^\mu, \gamma^\mu\gamma^\nu, \gamma^\mu\gamma_5, \gamma_5$ bastara considerar

$$\bar{\psi}(x)\,\psi(x) \longrightarrow \bar{\psi}'(x')\,\psi'(x') = \bar{\psi}(x)\,\psi(x) \qquad S$$

$$\bar{\psi}(x)\,\gamma^\mu\,\psi(x) \longrightarrow \bar{\psi}'(x')\,\gamma^\mu\,\psi'(x') = \Lambda^\mu{}_\nu\,\bar{\psi}(x)\,\gamma^\nu\,\psi(x) \qquad V$$

$$\bar{\psi}(x)\,\gamma^\mu\gamma^\nu\,\psi(x) \longrightarrow \bar{\psi}'(x')\,\gamma^\mu\gamma^\nu\,\psi'(x') = \Lambda^\mu{}_\lambda\,\Lambda^\nu{}_\beta\,\bar{\psi}(x)\,\gamma^\lambda\gamma^\beta\,\psi(x) \qquad T \qquad (1)$$

$$\bar{\psi}(x)\,\gamma^\mu\gamma_5\,\psi(x) \longrightarrow \bar{\psi}'(x')\,\gamma^\mu\gamma_5\,\psi'(x') = \Lambda^\mu{}_\nu\,\bar{\psi}(x)\,\gamma^\nu\gamma_5\,\psi(x) \qquad A$$

$$\bar{\psi}(x)\,\gamma_5\,\psi(x) \longrightarrow \bar{\psi}'(x')\,\gamma_5\,\psi'(x') = \bar{\psi}(x)\,\gamma_5\,\psi(x) \qquad P$$

donde S, V, T, A, P indican, respectivamente, escalar, vector, tensor, axial y pseudoescalar bajo la acción de $\mathcal{P}$ y teniendo en cuenta la paridad.

Consideremos ahora el problema de hallar la solución más general de la ecuación de Dirac. Esta puede escribirse como

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int d^4p\; e^{-ip\cdot x}\,\hat{\psi}(p) \qquad (2)$$

y como $\psi(x)$ debe ser solución de (7.1), entonces $\hat{\psi}(p)$ debe satisfacer

$$(\not{p} - m)\,\hat{\psi}(p) = 0 \qquad (3)$$

y como además $(p^2 - m^2)\,\hat{\psi}(p) = 0$, el soporte de $\hat{\psi}(p)$ debe estar en $\Omega(m)$. Como antes escribamos

$$\hat{\psi}(p) = (2\pi)^{\frac{1}{2}}\,\delta(p^2 - m^2)\,\tilde{\psi}(p) \qquad (4)$$

y por tanto la solución más general se puede escribir

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\Omega(m)} \frac{d^3p}{2|p^0|}\,\tilde{\psi}(p)\,e^{-ip\cdot x}, \qquad (\not{p} - m)\,\tilde{\psi}(p) = 0 \qquad (5)$$

Notemos que si $\psi_1(x)$ y $\psi_2(x)$ son soluciones de la ecuación de Dirac, entonces

$$\partial_\mu\,[\,\bar{\psi}_1(x)\,\gamma^\mu\,\psi_2(x)\,] = 0 \qquad (6)$$

y como en el caso anterior definimos el producto escalar como

$$(\psi_1, \psi_2) \equiv \int d^3x\ \bar{\psi}_1(x)\,\gamma^0\,\psi_2(x) = \int d^3x\ \psi_1^+(x)\,\psi_2(x) \tag{1}$$

Notemos que su valor es independiente del instante t para el que se realice el cálculo, es invariante Lorent y $(\psi,\psi) \geq 0$. Vemos pues como el conjunto de todas las soluciones de la ecuación de Dirac forman un espacio de Hilbert bajo el producto escalar que acabamos de definir. En términos de $\tilde{\psi}(p)$

$$(\psi_1, \psi_2) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{(2p^0)^2}\ \tilde{\psi}_1^+(p)\,\psi_2(p) \tag{2}$$

Dificultades análogas a las que aparecen en la ecuación de Klein-Gordon surgen aquí al interpretar la ecuación de Dirac como ecuación de ondas relativista para una sola partícula. Así, por ejemplo, tampoco aquí el operador $\vec{x}$ puede interpretarse como operador posición. En efecto la ecuación de Dirac se puede escribir en forma Hamiltoniana como

$$i\,\frac{\partial\,\psi(x)}{\partial t} = \left[\, i\gamma^0\vec{\gamma}\cdot\vec{\partial} + m\gamma^0 \,\right]\psi(x) \equiv H\,\psi(x) \tag{3}$$

Entonces si $\vec{x}$ fuera el operador posición, el operador velocidad sería

$$\vec{v} = i\,[\,H, \vec{x}\,] = -\gamma^0\vec{\gamma} \tag{4}$$

y los valores propios de cualquiera de sus componentes serían ± 1, lo cual indica claramente que ni $\vec{x}$ es el operador posición, ni $\vec{v}$ el operador velocidad. No vamos a discutir más este punto, que se resolverá al considerar $\psi(x)$ como operador campo.

Volvamos al problema de escribir las soluciones de la ecuación de Dirac. Hemos visto que la solución más general es

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4p\ \delta(p^2 - m^2)\,\tilde{\psi}(p)\,e^{-ip\cdot x} \tag{5}$$

donde $\tilde{\psi}(p)$ con soporte en $\Omega(m)$ debe cumplir

$$(\not{p} - m)\,\tilde{\psi}(p) = 0 \tag{6}$$

y por tanto la solución más general es

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4p \; \delta(p^2 - m^2)(m + \not{p}) \chi(p) e^{-ip\cdot x}$$

donde $\chi(p)$ es una función arbitraria definida en $\Omega(m)$. De aquí

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\Omega_+(m)} \frac{d^3p}{2E(\vec{p})} \left\{ (m + \not{p}) \chi(p) e^{-ip\cdot x} + (m - \not{p}) \chi(-p) e^{+ip\cdot x} \right\} \tag{1}$$

Consideremos las ecuaciones

$$(\not{p} - m) u(\vec{p}, \lambda) = 0 \quad , \quad (\not{p} + m) v(\vec{p}, \lambda) = 0 \quad , \quad p^\mu \in \Omega_+(m) \tag{2}$$

Es fácil ver que estas ecuaciones homogéneas tienen, cada una de ellas, dos soluciones independientes y además como $(m + \not{p})\chi(p)$ [$(m - \not{p})\chi(p)$] es solución de la primera [segunda] podemos escribir

$$\begin{aligned} (m + \not{p}) \chi(p) &= \sum_\lambda u(\vec{p}, \lambda) a(\vec{p}, \lambda) \\ (m - \not{p}) \chi(-p) &= \sum_\lambda v(\vec{p}, \lambda) b^*(\vec{p}, \lambda) \end{aligned} \tag{3}$$

y entonces la solución más general puede escribirse como

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\Omega_+(m)} \frac{d^3p}{2E(\vec{p})} \sum_\lambda \left[u(\vec{p}, \lambda) a(\vec{p}, \lambda) e^{-ip\cdot x} + v(\vec{p}, \lambda) b^*(\vec{p}, \lambda) e^{+ip\cdot x} \right] \tag{4}$$

donde λ es una variable dicotómica que distingue las dos soluciones independientes de las ecuaciones (2). Notar que en la representación de Dirac se puede elegir

$$u(\vec{p}, \lambda) \equiv [E(\vec{p}) + m]^{1/2} \begin{vmatrix} \alpha(\hat{p}, \lambda) \\ \dfrac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E(\vec{p}) + m} \alpha(\hat{p}, \lambda) \end{vmatrix} \quad , \quad v(\vec{p}, \lambda) \equiv [E(\vec{p}) + m]^{1/2} \begin{vmatrix} \dfrac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E(\vec{p}) + m} \alpha(\hat{p}, -\lambda) \\ \alpha(\hat{p}, -\lambda) \end{vmatrix}$$

$$\alpha(\hat{p}, +) = \begin{vmatrix} e^{-i\phi/2} \cos(\theta/2) \\ e^{+i\phi/2} \sin(\theta/2) \end{vmatrix} \quad , \quad \alpha(\hat{p}, -) = \begin{vmatrix} -e^{-i\phi/2} \sin(\theta/2) \\ e^{+i\phi/2} \cos(\theta/2) \end{vmatrix} \tag{5}$$

y puede probarse que estos son estados con helicidades bien definidas.

Las normalizaciones son

$$u^+(\vec{p},\lambda)\,u(\vec{p},\lambda') = v^+(\vec{p},\lambda)\,v(\vec{p},\lambda') = 2E(\vec{p})\,\delta_{\lambda\lambda'} \tag{1}$$

y

$$\bar{u}(\vec{p},\lambda)\,u(\vec{p},\lambda') = 2m\,\delta_{\lambda\lambda'} \quad , \quad \bar{v}(\vec{p},\lambda)\,v(\vec{p},\lambda') = -2m\,\delta_{\lambda\lambda'}$$

$$\bar{v}(\vec{p},\lambda)\,u(\vec{p},\lambda') = \bar{u}(\vec{p},\lambda)\,v(\vec{p},\lambda') = 0 \tag{2}$$

Una relación útil es

$$\sum_\lambda u(\vec{p}\lambda)\,\bar{u}(\vec{p},\lambda) = \not{p} + m$$

$$\sum_\lambda v(\vec{p}\lambda)\,\bar{v}(\vec{p},\lambda) = \not{p} - m \tag{3}$$

En la segunda cuantificación la expresión del campo viene dada por

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{2E(\vec{p})} \sum_\lambda \left[u(\vec{p},\lambda)\,a(\vec{p},\lambda)\,e^{-ip\cdot x} + v(\vec{p},\lambda)\,b^+(\vec{p},\lambda)\,e^{+ip\cdot x}\right] \tag{4}$$

donde $a(\vec{p},\lambda)$ $[a^+(\vec{p},\lambda)]$ es el operador de destrucción [creación] de partículas y $b(\vec{p},\lambda)$ $[b^+(\vec{p},\lambda)]$ el de destrucción [creación] de antipartículas y para los que se definen las relaciones de anticonmutación

$$\left\{ a(\vec{p},\lambda)\,,\, a^+(\vec{p}',\lambda')\right\} = \left\{ b(\vec{p},\lambda)\,,\, b^+(\vec{p}',\lambda')\right\} = (2\pi)^3\,2E(\vec{p})\,\delta_{\lambda\lambda'}\,\delta(\vec{p}-\vec{p}') \tag{5}$$

siendo nulos todos los restantes anticonmutadores. Como en el caso anterior se define el espacio de Fock.

Veamos las reglas de anticonmutación de los campos

$$\left\{ \psi_\alpha(x)\,,\,\bar{\psi}_\beta(y)\right\} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{2E}\,\frac{d^3p'}{2E'}\,\sum_{\lambda\lambda'}\,2E\,\delta(\vec{p}-\vec{p}')\,\delta_{\lambda\lambda'}\cdot$$

$$\cdot\left\{ u_\alpha(\vec{p}\lambda)\,\bar{u}_\beta(\vec{p}',\lambda')\,e^{-ip\cdot x + ip'\cdot y} + v_\alpha(\vec{p}\lambda)\,\bar{v}_\beta(\vec{p}',\lambda')\,e^{ip\cdot x - ip'\cdot y}\right\} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{2E(\vec{p})} \sum_\lambda \left[u_\alpha(\vec{p},\lambda)\,\bar{u}_\beta(\vec{p},\lambda)\,e^{-ip\cdot(x-y)} + v_\alpha(\vec{p}\lambda)\,\bar{v}_\beta(\vec{p},\lambda)\,e^{+ip\cdot(x-y)}\right] =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{2E(\vec{p})} \left[(\not{p}+m)_{\alpha\beta}\,e^{-ip\cdot(x-y)} + (\not{p}-m)_{\alpha\beta}\,e^{+ip\cdot(x-y)}\right] =$$

$$= \left[i\not{\partial}_x + m\right]_{\alpha\beta}\,\frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{2E(\vec{p})} \left[e^{-ip\cdot(x-y)} - e^{+ip\cdot(x-y)}\right]$$

Introduciendo

$$S(x;m) \equiv (i\not{\partial} + m)\,\Delta(x;m^2) \tag{1}$$

y siguiendo el mismo procedimiento se obtiene

$$\{\psi(x),\ \bar{\psi}(y)\} = i\,S(x-y;m)$$
$$\{\psi(x),\ \psi(y)\} = \{\bar{\psi}(x),\ \bar{\psi}(y)\} = 0 \tag{2}$$

que cumplen el principio de microcausalidad como era de esperar.

La ecuación de Dirac se deduce de la densidad Lagrangiana

$$L(x) = \frac{i}{2} :\bar{\psi}(x)\,\gamma^\mu\,\partial_\mu\,\psi(x): - \frac{i}{2} :\partial_\mu\bar{\psi}(x)\,\gamma^\mu\,\psi(x): - m :\bar{\psi}(x)\,\psi(x): \tag{3}$$

la cual, salvo una cuadridivergencia, es equivalente a

$$L(x) = i :\bar{\psi}(x)\,\gamma^\mu\,\partial_\mu\,\psi(x): - m :\bar{\psi}(x)\,\psi(x): \tag{4}$$

De esta última ecuación se deduce que el operador momento $\pi(x)$ conjugado de $\psi(x)$ es

$$\pi(x) \equiv \frac{\partial L(x)}{\partial(\partial_0\psi(x))} = i\,\psi^+(x) \tag{5}$$

y de (2) se deducen fácilmente

$$\delta(x^0-y^0)\{\psi(x),\ \pi(y)\} = i\,\delta^{(4)}(x-y)$$
$$\delta(x^0-y^0)\{\psi(x),\ \psi(y)\} = \delta(x^0-y^0)\{\pi(x),\ \pi(y)\} = 0 \tag{6}$$

Es lícito preguntarse qué hubiera sucedido si hubiéramos cuantificado el campo de Dirac usando conmutadores. Entonces los partículas de spin 1/2 aparecerían como bosones, su energía no estaría acotada inferiormente y se violaría el principio de microcausalidad. En realidad, existe un teorema que, bajo condiciones muy débiles, establece la conocida conexión spin - estadística.

Consideremos ahora la paridad que como sabemos se implementa por un operador unitario U_p tal que

$$U_P\, a(\vec{p},\lambda)\, U_P^{-1} = \eta_P\, a(-\vec{p},-\lambda) \quad , \quad U_P\, b(\vec{p},\lambda)\, U_P^{-1} = -\eta_P^*\, b(-\vec{p},-\lambda) \tag{1}$$

donde se han elegido paridades opuestas para la partícula y la antipartícula para obtener, como veremos, una ley de transformación local para los campos. $\eta_P = \pm 1$ es la paridad intrínseca de la partícula, como se deduce inmediatamente de (1) con $U_P |0\rangle = |0\rangle$. Para los campos tenemos

$$U_P\, \psi(x)\, U_P^{-1} = \frac{1}{(2\pi)^3}\, \eta_P \int \frac{d^3p}{2\tilde{E}} \sum_\lambda \left[u(\vec{p}\lambda)\, a(-\vec{p},-\lambda)\, e^{-ip\cdot x} - v(\vec{p}\lambda)\, b^+(-\vec{p},-\lambda)\, e^{+ipx} \right]$$

$$= \eta_P\, \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2\tilde{E}} \sum_\lambda \left[u(-\vec{p}-\lambda)\, a(\vec{p}\lambda)\, e^{-ip\cdot \mathcal{P}x} - v(-\vec{p}-\lambda)\, b^+(\vec{p},\lambda)\, e^{+ip\cdot \mathcal{P}x} \right]$$

donde $\mathcal{P}x = (x^0, -\vec{x})$. Como

$$u(-\vec{p},-\lambda) = i\gamma^0\, u(\vec{p},\lambda) \quad , \quad v(-\vec{p},-\lambda) = -i\gamma^0\, v(\vec{p},\lambda) \tag{4}$$

se obtiene inmediatamente que

$$U_P\, \psi(x)\, U_P^{-1} = i\eta_P\, \gamma^0\, \psi(\mathcal{P}x) \tag{2}$$

Esto explica los nombres introducidos en (12.1).

Como además

$$u(\vec{p},\lambda) = -i\lambda\, \mathcal{C}\, \bar{v}^T(\vec{p},\lambda) \quad , \quad v(\vec{p}\lambda) = -i\lambda\, \mathcal{C}\, \bar{u}^T(\vec{p}\lambda)$$

$$u(\vec{p},\lambda) = -\lambda\, \mathcal{T}\, u^*(\vec{p},\lambda) \quad , \quad v(\vec{p}\lambda) = +\lambda\, \mathcal{T}\, v^*(-\vec{p},\lambda) \tag{3}$$

donde $\mathcal{C}$ y $\mathcal{T}$ son las matrices introducidas en (9.7), entonces si U_C y U_T son los operadores unitario y antiunitario correspondientes, respectivamente, a la conjugación de carga e inversión temporal y

$$U_C\, a(\vec{p},\lambda)\, U_C^{-1} = +i\eta_C\, \lambda\, b(\vec{p},\lambda) \quad , \quad U_C\, b(\vec{p},\lambda)\, U_C^{-1} = -i\eta_C^*\, \lambda\, a(\vec{p},\lambda)$$

$$U_T\, a(\vec{p},\lambda)\, U_T^{-1} = -\eta_T\, a(-\vec{p},\lambda) \quad , \quad U_T\, b(\vec{p},\lambda)\, U_T^{-1} = \eta_T^*\, \lambda\, b(-\vec{p},\lambda) \tag{4}$$

Las leyes de transformación de los campos son

$$U_C\, \psi(x)\, U_C^{-1} = \eta_C\, \mathcal{C}\, \bar{\psi}^T(x)$$

$$U_T\, \psi(x)\, U_T^{-1} = \eta_T\, \mathcal{T}\, \psi(\mathcal{T}x) \qquad \mathcal{T}x = (-x^0, \vec{x}) \tag{5}$$

Evidentemente todo esto último se puede repetir para el campo escalar

$$U_P\, a(\vec{p})\, U_P^{-1} = \eta_P\, a(-\vec{p}) \quad , \quad U_P\, b(\vec{p})\, U_P^{-1} = \eta_P^*\, b(-\vec{p})$$

$$U_C\, a(b)\, U_C^{-1} = \eta_C\, b(\vec{p}) \quad , \quad U_C\, b(\vec{p})\, U_C^{-1} = \eta_C^*\, a(\vec{p}) \qquad (4)$$

$$U_T\, a(\vec{p})\, U_T^{-1} = \eta_T\, a(-\vec{p}) \quad , \quad U_T\, b(\vec{p})\, U_T^{-1} = \eta_T^*\, b(-\vec{p})$$

y entonces

$$U_P\, \phi(x)\, U_P^{-1} = \eta_P\, \phi(Px) \quad , \quad U_C\, \phi(x)\, U_C^{-1} = \eta_C\, \phi^+(x) \quad , \quad U_T\, \phi(x)\, U_T^{-1} = \eta_T\, \phi(Tx) \qquad (24)$$

VI - INTERACCIONES Y SECCIONES EFICACES

En el formalismo Lagrangiano la interacción entre campos se expresa añadiendo a la densidad Lagrangiana libre $L_0(x)$, que es la suma de las densidades Lagrangianas libres de cada uno de los campos que se consideran, la llamada densidad Lagrangiana de interacción $L_I(x)$, que depende de los distintos campos que se han considerado, de forma que

$$L(x) = L_0(x) + L_I(x) \tag{1}$$

Consideraremos interacciones locales, es decir que $L_I(x)$ está formada por una suma algebraica finita de términos, cada uno de los cuales está construido a partir de los campos o/y derivados de orden finito de los mismos, todos en el mismo punto del espacio-tiempo. Como ejemplo simple podemos considerar un campo escalar autoadjunto en autointeracción

$$L(x) = \frac{1}{2} :\partial_\mu \phi(x)\, \partial^\mu \phi(x): - \frac{1}{2} m^2 :\phi(x)\phi(x): - \frac{1}{4!} g :\phi^4(x): \tag{2}$$

donde el último término es el de interacción y g es una constante adimensional que recibe el nombre de constante de acoplamiento y que mide, de alguna forma, la intensidad de la interacción. Siempre se exige que los términos que describan la interacción sean invariantes bajo las transformaciones del grupo propio de Poincaré, para asegurar la conservación del momento y del momento angular total y que los resultados no dependan del sistema inercial elegido.

En situaciones físicas las ecuaciones de los campos en interacción son demasiado complicadas, en general, para determinar soluciones exactas y es necesario recurrir a métodos aproximados. Un tratamiento completo de este problema constituiría un curso de teoría cuántica de campos, por lo cual nos limitaremos a algunos resultados que necesitaremos.

Supongamos un proceso general de colisión

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_{m_i} \longrightarrow B_1 + B_2 + \cdots + B_{m_f} \tag{3}$$

en el que se prepara un estado inicial ($t = -\infty$) que consiste de n_i partículas $A_1, A_2, \ldots A_{n_i}$ tan alejadas las unas de las otras que no interaccionan entre sí. Al entrar en la región de interacción empieza la colisión y finalmente emergen n_f partículas $B_1, B_2, \ldots, B_{n_f}$ en el estado final ($t = +\infty$). Indiquemos por $|i\rangle$ y $|f\rangle$ los estados inicial y final, respectivamente en la imagen de interacción. La amplitud de la probabilidad de transición del estado inicial $|i\rangle$ al final $|f\rangle$, $A(i \to f)$, puede expresarse como un elemento de matriz

$$A(i \longrightarrow f) = \langle f | S | i \rangle \equiv S_{fi} \tag{1}$$

donde el operador S (matriz S u operador de colisión) es un operador lineal (la evolución temporal conserva las superposiciones lineales) que debe ser unitario (las probabilidades de todos los posibles estados finales deben sumar uno y los estados asintóticos forman un conjunto completo)

$$S S^{+} = S^{+} S = I \tag{2}$$

La importancia de conocer la matriz S es clara: todas las cantidades medibles en procesos de colisión pueden expresarse en términos de elementos de matriz de S. Muchos de estos elementos de matriz se anulan y las transiciones correspondientes están totalmente prohibidas. En primer lugar existen las reglas de superselección y los números cuánticos asociados (carga eléctrica, univalencia, etc) son rigurosamente conservados, es decir S deja estable cada espacio coherente. En segundo lugar, el principio de la invariancia relativista exige que S conmute con los operadores unitarios $U(a, \Lambda)$ correspondientes al grupo propio ortocrono de Poincaré

$$U^{-1}(a, \Lambda)\, S\, U(a, \Lambda) = S \tag{3}$$

Corolarios inmediatos de (3) son la conservación de la energía - momento P^{μ} y del momento angular $M^{\mu\nu}$:

$$[P^{\mu}, S] = [M^{\mu\nu}, S] = 0 \tag{4}$$

La primera de estas expresiones muestra que S es diagonal en la representación de momentos. Si los estados inicial y final tienen ma-

4-momentos P_i^μ y P_f^μ bien definidos, entonces podemos escribir

$$\langle f|S|i\rangle = \langle f|i\rangle - i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_i - P_f)\langle f|T|i\rangle \qquad (1)$$

donde hemos separado los elementos de la matriz S en dos términos: $\langle f|i\rangle$, el único que aparece si $S = I$ (no interacción) y el término que contiene $\langle f|T|i\rangle \equiv T_{fi}$ que es totalmente debido a la interacción. El elemento de matriz T_{fi} está definido únicamente cuando $P_f = P_i$ y (2.3) implica

$$T_{fi} \equiv \langle f|T|i\rangle = \langle f|U^{-1}(\Lambda,a)\, T\, U^{-1}(\Lambda,a)|i\rangle = \langle f'|T|i'\rangle = T_{f'i'} \qquad (2)$$

donde $|i'\rangle \equiv U(a,\Lambda)|i\rangle$, $|f'\rangle \equiv U(a,\Lambda)|f\rangle$ y esto establece la invariancia Poincaré de los elementos de la matriz T.

La probabilidad de la transición (1.3) sera $|A(i\to f)|^2 = |\langle f|S|i\rangle|^2$. Notemos, sin embargo, que para estados con momento bien determinado entonces $S_{fi} \propto \delta^{(4)}(P_f - P_i)$ y por tanto $|S_{fi}|^2 \propto \delta^{(4)}(P_f - P_i)\,\delta^{(4)}(P_f - P_i)$, expresión que no esta bien definida matemáticamente, pues aunque una de estas deltas es necesaria para expresar el hecho de que el cuadrimomento es conservado en este proceso, la otra puede reemplazarse de manera formal por $\delta^{(4)}(0)$, que es una cantidad divergente. La razón física de esta divergencia es que cuando los cuadrimomentos inicial y final están bien definidos, ambos estados son invariantes (salvo fases) bajo traslaciones espacio-temporales; consecuentemente la región de interacción se extiende a todo el espacio-tiempo y el concepto de partícula asintóticamente libre tiene un significado dudoso.

Se puede proceder de dos formas: no considerar estados con momento bien definido pues éstos representan situaciones límite no normalizables que nunca pueden conseguirse o usar la prescripción de "switching on and off" la interacción. Si bien la primera alternativa es más satisfactoria desde el punto de vista físico, usaremos la segunda en aras de la sencillez. Consideremos, para establecer la interacción, una función $g(x)$, con valores que satisfacen $0 \le g(x) \le 1$. En los puntos donde $g(x) = 0$ [$g(x) = 1$] la interacción está ausente [actúa con

toda su intensidad], mientras que si $0 < g(x) < 1$ la interacción actúa sólo parcialmente. Si $g(x)$ es distinta de cero sólo en una región finita del espacio tiempo, las partículas iniciales y finales en el proceso de colisión se moverán asintóticamente ($t \to \mp \infty$) como si fueran libres y la transición de $|i\rangle$ a $|f\rangle$ estará mediada por un operador de colisión unitario $S(g)$. Esta matriz $S(g)$ no es invariante bajo traslaciones espacio-temporales, ya que la función peso $g(x)$ no lo es. En consecuencia la energía-momento no serán conservados por $S(g)$ y en lugar de (3.1) obtenemos

$$\langle f | S(g) | i \rangle = \langle f | i \rangle - i (2\pi)^4 \tilde{g}(p_f - p_i) \langle f | T(g) | i \rangle \qquad (1)$$

con

$$\tilde{g}(p) \equiv \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4x \, e^{i p \cdot x} g(x) \qquad (2)$$

El operador de colisión físicamente relevante S se define como el límite de $S(g)$ cuando $g(x) \longrightarrow 1$, para todo x, y la expresión (1) se ha escrito de forma que $T(g) \longrightarrow T$ en este límite. La correspondiente probabilidad de transición inducida por $S(g)$ será $|\langle f | S(g) | i \rangle|^2$ y si, como sucede generalmente, $\langle f | i \rangle = 0$, entonces

$$|S_{fi}(g)|^2 = (2\pi)^8 |\tilde{g}(p_f - p_i)|^2 |T_{fi}(g)|^2 \qquad (3)$$

Pero

$$|\tilde{g}(p_f - p_i)|^2 = \frac{1}{(2\pi)^8} \int d^4x \, g(x) \, e^{i x \cdot (p_f - p_i)} \int d^4y \, g(y) \, e^{i y \cdot (p_f - p_i)}$$

$$\simeq \frac{1}{(2\pi)^4} \delta(p_f - p_i) \int d^4y \, g(y) \qquad (\text{cuando } g(x) \to 1) \qquad (4)$$

Puesto que $\int d^4y \, g(y)$ representa el volumen medio de espacio-tiempo en el que tiene lugar la interacción, vemos que la probabilidad de transición por unidad de volumen espacio-temporal inducido por $S(g)$

$$W_{i \to f}(g) \equiv |S_{fi}(g)|^2 \Big/ \int d^4y \, g(y) \qquad (5)$$

tiende a un límite bien definido $W_{i \to f}$ cuando $g(x) \to 1$

$$W_{i\to f} = (2\pi)^4 \delta(P_f - P_i) |T_{fi}|^2 \tag{1}$$

que de forma natural interpretamos como la probabilidad de transición por unidad de volumen espacio-temporal del estado inicial $|i\rangle$ al estado final $|f\rangle$, inducida por el operador de colisión S. Las cantidades $W_{i\to f}$ son claramente invariantes Poincaré.

En la práctica, sin embargo, la cantidad de interés es la probabilidad de transición $W_{i\to \Delta f}$ por unidad de volumen espacio-temporal desde un estado inicial $|i\rangle$ a cualquier estado final $|f\rangle$ cuyos números cuánticos estén en un cierto conjunto Δf. Entonces

$$W_{i\to \Delta f} = \int_{\Delta f} W_{i\to f}\, d\rho_f \tag{2}$$

donde el elemento de medida $d\rho_f$ debe ser tal que el proyector $P_{\Delta f}$ en el subespacio lineal engendrado por todos los estados finales $|f\rangle$ con números cuánticos $f \in \Delta f$ tenga la expresión

$$P_{\Delta f} = \int_{\Delta f} d\rho_f\, |f\rangle\langle f| \tag{3}$$

En el miembro de la derecha de (2) y (3) se toma un solo estado vector final $|f\rangle$ para cada conjunto individual de números cuánticos finales en el intervalo de integración.

Por ejemplo, supongamos que los estados de colisión vienen caracterizados dando los cuadrimomentos, helicidades y los otros números cuánticos discretos necesarios para caracterizar las partículas. Sólo los cuadrimomentos son variables continuas y para la evaluación de $d\rho_f$ los restantes números cuánticos α (helicidades, cargas, ...) pueden ser olvidados con el bien entendido que como es usual el símbolo de integración en (2) y (3) incorpora, si es necesario, sumas discretas en las variables α. Si todas las partículas finales son distintas, esto es distinguibles, el estado final $|f\rangle$ se tomará simplemente como el producto tensorial de los estados monoparticulares

$$|f\rangle = |\vec{p}_{a_1}\alpha_{a_1};\ \vec{p}_{a_2}\alpha_{a_2};\ \dots;\ \vec{p}_{a_{m_f}}\alpha_{m_f}\rangle \tag{4}$$

y suponiendo

$$\langle \vec{p}, \alpha \mid \vec{p}', \alpha' \rangle = (2\pi)^3 \, 2E(\vec{p}) \, \delta(\vec{p} - \vec{p}') \, \delta_{\alpha\alpha'} \tag{1}$$

entonces

$$d\rho_f = \prod_{i=1}^{m_f} \frac{d^3 p_{B_i}}{(2\pi)^3 2E_{B_i}} \tag{2}$$

que es una medida invariante Poincaré. Si en el estado final hay partículas idénticas y para no contar más estados finales de los que existen realmente la cantidad (2) debe dividirse por el número de permutaciones redundantes entre las partículas idénticas.

Consideremos ahora el proceso

$$A_1 + A_2 \longrightarrow B_1 + B_2 + \cdots + B_m \tag{3}$$

y procedamos al cálculo de su <u>sección eficaz</u> que se obtiene dividiendo la probabilidad de transición por unidad de volumen espacio-temporal $W_{i \to f}$ por $\rho_{A_1} \rho_{A_2} \mid \vec{v}_{A_1} - \vec{v}_{A_2} \mid$, donde ρ_{A_i} $(i = 1, 2)$ es el número de partículas A_i por unidad de volumen espacial en el haz inicial que en nuestra notación es $\rho_{A_i} = 2E_{A_i}$ y $\mid \vec{v}_{A_i} - \vec{v}_{A_2} \mid$ es la velocidad relativa. La cantidad $\rho_{A_1} \rho_{A_2} \mid \vec{v}_{A_i} - \vec{v}_{A_2} \mid$ es invariante Lorentz y en el sistema en que A_2 está en reposo

$$\rho_{A_1} \rho_{A_2} \mid \vec{v}_{A_1} - \vec{v}_{A_2} \mid = 4 E_{A_1} E_{A_2} \mid \vec{v}_{A_1} - \vec{v}_{A_2} \mid = 4 M_{A_2} \mid \vec{p}_{A_1} \mid \tag{4}$$

Introduzcamos la variable de Mandelstam

$$s \equiv (p_{A_1} + p_{A_2})^2 \tag{5}$$

y en el sistema de referencia considerado

$$s = M_{A_1}^2 + M_{A_2}^2 + 2 M_{A_2} \sqrt{M_{A_1}^2 + \vec{p}_{A_1}^{\,2}} \quad \Rightarrow$$

$$\mid \vec{p}_{A_1} \mid = \frac{1}{2M_{A_2}} \lambda^{1/2} (s, M_{A_1}^2, M_{A_2}^2) \tag{6}$$

y por tanto

$$\rho_{A_1} \rho_{A_2} \mid \vec{v}_{A_1} - \vec{v}_{A_2} \mid = 2 \lambda^{1/2} (s, M_{A_1}^2, M_A^2) \tag{7}$$

Si por ejemplo, deseamos calcular la sección eficaz total para el proceso (6.3) cuando las partículas incidentes no están polarizadas y no se miden las polarizaciones finales, se obtiene inmediatamente

$$\sigma(s) = \frac{(2\pi)^{4-3n}}{2\lambda^{1/2}(s, M_{A_1}^2, M_{A_2}^2)} \overline{\sum_{\text{pol inic.}}} \sum_{\text{pol fin.}} \int \prod_{f=1}^{n} \frac{d^3 p_f}{2E_f} \delta(P_i - P_f) \, |\langle f|T|i\rangle|^2 \tag{1}$$

donde hemos supuesto partículas indistinguibles. Otra forma equivalente de (1) es

$$\sigma(s) = \frac{(2\pi)^{4-3n}}{2\lambda^{1/2}(s, M_{A_1}^2, M_{A_2}^2)} \overline{\sum_{\text{pol inic.}}} \sum_{\text{pol fin}} \int \prod_{j=1}^{n} d^4 p_j \, \delta(p_j^2 - m_j^2) \, \theta(p_j) \; \delta(P_i - P_f) \, |\langle f|T|i\rangle|^2 \tag{2}$$

donde $\theta(p_j) = 1$ si $p_j^0 > 0$ y cero en otros casos.

Consideremos en particular el caso

$$A_1 + A_2 \longrightarrow A_3 + A_4 \tag{3}$$

Suponiendo $A_1 \neq A_2$ y $A_3 \neq A_4$, entonces la sección eficaz total es

$$\sigma(s) = \frac{1}{2\lambda^{1/2}(s, M_1^2, M_2^2)} \frac{1}{(2\pi)^2} \overline{\sum_{p.i}} \sum_{p.f} \int \frac{d^3 p_3}{2E_3} \frac{d^3 p_4}{2E_4} \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \, |\langle f|T|i\rangle|^2 \tag{4}$$

Es bien sabido que para un proceso en el que intervengan N partículas toda la cinemática queda determinada dando $3N - 10$ variables. En este caso en que $N = 4$ debemos dar además de la s otra variable que elegiremos que sea la invariante.

$$t = (p_3 - p_1)^2 \tag{5}$$

Entonces la sección eficaz diferencial es

$$\frac{d\sigma(s,t)}{dt} = \frac{1}{8\pi^2 \lambda^{1/2}(s, M_1^2, M_2^2)} \overline{\sum_{p.i}} \sum_{p.f} \int \frac{d^3 p_3}{2E_3} \frac{d^3 p_4}{2E_4} \delta[t - (p_3 - p_1)^2] \, \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \, |\langle f|T|i\rangle|^2$$

$$= \frac{1}{8\pi^2 \lambda^{1/2}(s, M_1^2, M_2^2)} \overline{\sum_{p.i}} \sum_{p.f} |\langle f|T|i\rangle|^2 \int \frac{d^3 p_3}{2E_3} \frac{d^3 p_4}{2E_4} \delta[t - (p_3 - p_1)^2] \, \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \tag{6}$$

pues $|\langle f|T|i\rangle|^2$ es una constante para s y t fijos. Procedamos al cálculo

de la integral. Como es invariante se puede realizar su cálculo en el sistema centro de masas. ($\vec{p}_2 = -\vec{p}_1$, $\vec{p}_4 = -\vec{p}_3$)

$$I \equiv \int \frac{d^3 p_3}{2 E_3(\vec{p}_3)} \frac{d^4 p_4}{2 E_4(\vec{p}_4)} \delta\left[t - (p_3 - p_4)^2\right] \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)$$

$$= \int \frac{d^3 p_3}{4 E_3(\vec{p}_3) E_4(\vec{p}_3)} \delta\left[t - M_1^2 - M_3^2 + 2E_1(\vec{p}_1) E_3(\vec{p}_3) + 2|\vec{p}_1||\vec{p}_3| \cos\theta\right] \delta\left(E_1(\vec{p}_1) + E_2(\vec{p}_1) - E_3(\vec{p}_3) - E_4(\vec{p}_3)\right]$$

$$= \frac{\pi}{4} \int d|\vec{p}_3|\, |\vec{p}_3|^2 \frac{1}{E_3(\vec{p}_3) E_4(\vec{p}_3) |\vec{p}_1| |\vec{p}_3|} \delta\left(E_1(\vec{p}_1) + E_2(\vec{p}_1) - E_3(\vec{p}_3) - E_4(\vec{p}_3)\right)$$

$$= \frac{\pi}{4} |\vec{p}_3|^2 \frac{1}{E_3(\vec{p}_3) E_4(\vec{p}_3) |\vec{p}_1| |\vec{p}_3|} \frac{E_3(\vec{p}_3) E_4(\vec{p}_3)}{|\vec{p}_3| \left(E_3(\vec{p}_3) + E_4(\vec{p}_3)\right)} = \frac{\pi}{4 |\vec{p}_1|} \frac{1}{E_3(\vec{p}_3) + E_4(\vec{p}_3)}$$

$$= \frac{\pi}{4} \frac{2\sqrt{s}}{\lambda^{1/2}(s, M_1^2, M_2^2)} \frac{1}{\sqrt{s}} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\lambda^{1/2}(s, M_1^2, M_2^2)}$$

y por tanto la expresión deseada es

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{16 \pi \lambda(s, M_1^2, M_2^2)} \overline{\sum_{p.i}} \sum_{p.f} |\langle f | T | i \rangle|^2 \qquad (1)$$

En ocasiones se prefiere calcular $(d\sigma/d\Omega)$ en el sistema centro de masas, donde θ es el ángulo que forma $\vec{p}_3$ con $\vec{p}_1$. Se tiene

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{C.M} = \frac{1}{2\pi} \frac{dt}{d(\cos\theta)} \frac{d\sigma}{dt} \qquad (2)$$

Como $t = M_1^2 + M_3^2 + 2E_1(\vec{p}_1) E_3(\vec{p}_3) + 2|\vec{p}_1||\vec{p}_3| \cos\theta$, entonces $dt/d(\cos\theta) = 2|\vec{p}_1||\vec{p}_3|$ y como

$$|\vec{p}_1|_{CM} = \frac{1}{2\sqrt{s}} \lambda^{1/2}(s, M_1^2, M_2^2) \quad , \quad |\vec{p}_3|_{CM} = \frac{1}{2\sqrt{s}} \lambda^{1/2}(s, M_3^2, M_4^2)$$

se obtiene

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{CM} = \frac{1}{64 \pi^2 s} \frac{\lambda^{1/2}(s, M_3^2, M_4^2)}{\lambda^{1/2}(s, M_1^2, M_2^2)} \overline{\sum_{p.i}} \sum_{p.f} |\langle f | T | i \rangle|^2 \qquad (3)$$

Otro proceso interesante es la desintegración

$$A \longrightarrow B_1 + B_2 + \ldots + B_m \qquad (4)$$

La anchura para este proceso se obtiene dividiendo la probabilidad de transición por unidad de volumen de espacio-tiempo por el número de partículas de tipo A por unidad de volumen. Suponiendo A en reposo se obtiene inmediatamente

$$\Gamma = \frac{(2\pi)^{4-3n}}{2M_A} \sum_{p_i} \sum_{p_f} \int \prod_{i=1}^{n} \frac{d^3p_i}{2E_i}\, \delta(p_A - p_1 - p_2 - \dots - p_n)\, |\langle f|T|i\rangle|^2 \tag{4}$$

Consideremos

$$A_1 \longrightarrow A_2 + A_3 \tag{2}$$

en cuyo caso $|\langle f|T|i\rangle|^2$ es una constante pues la cinemática es fija. Entonces

$$\Gamma = \frac{1}{8\pi^2 M_1} \sum_{p_i} \sum_{p_f} |\langle f|T|i\rangle|^2 \int \frac{d^3p_2}{2E_2} \frac{d^3p_3}{2E_3}\, \delta(p_1 - p_2 - p_3)$$

La integral invariante se calcula fácilmente con el resultado

$$I = \int \frac{d^3p_2}{2E_2} \frac{d^3p_3}{2E_3}\, \delta(p_1 - p_2 - p_3) = \frac{\pi}{2M_1^2}\, \lambda^{1/2}(M_1^2, M_2^2, M_3^2)\, \theta(M_1)\, \theta[M_1^2 - (M_2+M_3)^2] \tag{3}$$

donde las funciones paso implican que la desintegración sólo puede tener lugar si $M_1 > M_2 + M_3$. Entonces

$$\Gamma = \frac{\lambda^{1/2}(M_1^2, M_2^2, M_3^2)}{16\pi M_1^3} \sum_{p_i} \sum_{p_f} |\langle f|T|i\rangle|^2 \tag{4}$$

Se sabe de mecánica cuántica que el operador de colisión puede escribirse formalmente como

$$S = \mathcal{P}\left\{ \exp\left(-i \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, H_I(t) \right) \right\} \tag{5}$$

donde $H_I(t)$ es el Hamiltoniano de interacción en la representación de interacción. El símbolo $\mathcal{P}$ es el de ordenación temporal

$$\mathcal{P}(H(t_1) H(t_2) \dots H(t_n)) = H(t_{i_1}) H(t_{i_2}) \dots H(t_{i_n}) \qquad t_{i_1} \geq t_{i_2} \geq \dots \geq t_{i_n} \tag{6}$$

En teoría cuántica de campos se puede probar que la matriz S puede expresarse formalmente como

$$S = P\left\{ \exp\left(i \int d^4x \, L_I(x) \right) \right\} \tag{1}$$

donde $L_I(x)$ es la densidad Lagrangiana de interacción en la representación de interacción. Ahora

$$P\left(L_I(x_1) L_I(x_2) \cdots L_I(x_m) \right) = L_I(x_{i_1}) L_I(x_{i_2}) \cdots L_I(x_{i_m}) \tag{2}$$

si $x^0_{i_1} \geq x^0_{i_2} \cdots \geq x^0_{i_m}$ La ambigüedad que se puede originar en (2) cuando dos coordenadas temporales son iguales es inmaterial pues

$$\left[L_I(x) \, , \, L_I(y) \right] = 0 \quad \text{si} \quad (x-y)^2 < 0 \tag{3}$$

que es una consecuencia de las relaciones de conmutación de los campos y del hecho de que el número de campos fermiónicos en $L_I(x)$ debe ser siempre par para que la interacción sea relativísticamente invariante. Evidentemente al ser $L_I(x)$ autoadjunto la matriz S, dada en (1), es formalmente unitaria.

Si nos limitamos a primer orden en teoría de perturbaciones

$$\langle f | S | i \rangle = \langle f | i \rangle + i \int d^4x \, \langle f | L_I(x) | i \rangle \tag{4}$$

y como si P^μ es el operador cuadrimomento, se tiene que para cualquier operador $O(x)$,

$$O(x) = e^{-iP\cdot x} \, O(0) \, e^{+iP\cdot x}$$

entonces

$$\langle f | S | i \rangle = \langle f | i \rangle + i (2\pi)^4 \delta(P_f - P_i) \langle f | L_I(0) | i \rangle$$

y por tanto

$$\langle f | T | i \rangle = - \langle f | L_I(0) | i \rangle \tag{5}$$

en primer orden de teoría de perturbaciones.

VII - INTERACCIONES DEBILES

Historicamente las interacciones debiles fueron introducidas para explicar las desintegraciones beta de los núcleos atómicos y fue E. Fermi, en 1934, que formuló una teoría para estas desintegraciones. La historia del desarrollo de la teoría de las desintegraciones beta y en general de las desintegraciones débiles es muy interesante pues ha jugado un papel crucial en muchos instantes críticos de la teoría cuántica de campos.

El caso más simple de una desintegración débil es la del muón

$$\mu^- \longrightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu \tag{1}$$

En la versión moderna de la teoría cuántica de la radiación el Lagrangiano de interacción se escribe como

$$L_{em}(x) = e\, J^{\mu}_{em.}(x)\, A_\mu(x) \tag{2}$$

donde $A_\mu(x)$ es el operador potencial vector asociado al campo electromagnético y $J^{\mu}_{em}(x)$ es la corriente electromagnetica asociada a la partícula de carga e. Si consideramos electrones se tiene que

$$J^{\mu}_{em}(x) \equiv \bar{\psi}(x)\, \gamma^{\mu}\, \psi(x) \tag{3}$$

donde $\psi(x)$ es el operador campo de los electrones. y esta interacción es el punto de partida de toda la electrodinámica cuántica (Q.E.D) de S. Tomonaga, J. Schwinger y R. P. Feynman.

E. Fermi introdujo la idea de formular la teoría de las desintegraciones beta partiendo de un Lagrangiano de interacción que fuera un escalar construido a partir del producto de dos corrientes. Teniendo esto como punto de partida y la no conservación de la paridad postulada, en 1956, por T.D. Lee y C. N. Yang para describir procesos débiles leptónicos a bajas energías se puede usar un Lagrangiano de interacción

$$L(x) = \frac{G}{\sqrt{2}}\, L^{\dagger}_{\mu}(x)\, L_\mu(x) \tag{4}$$

donde la corriente leptónica viene dada por

$$L^{\mu}(x) \equiv \sum_{i} \bar{\psi}_{i}(x)\, \gamma^{\mu}(1+\gamma_5)\, \psi_{\nu_i}(x) \tag{1}$$

donde $i = e, \mu, \tau$ son los tres leptones existentes

$$M_e = 0.510\,999\,06\,(15)\ \text{MeV} \qquad \tau_e > 2.7 \times 10^{23}\ \text{años}$$

$$M_\mu = 105.658\,389\,(34)\ \text{MeV} \qquad \tau_\mu = 2.1973\,(4) \times 10^{-6}\ \text{s} \tag{2}$$

$$M_\tau = 1777.1\,(5)\ \text{MeV} \qquad \tau_\tau = 2.956\,(31) \times 10^{-13}\ \text{s}$$

Los neutrinos correspondientes ν_e, ν_μ, ν_τ tienen

$$\begin{aligned} M_{\nu_e} &\leq 7.0\ \text{eV} \\ M_{\nu_\mu} &\leq 0.27\ \text{MeV} \\ M_{\nu_\tau} &\leq 31\ \text{MeV} \end{aligned} \tag{3}$$

y en los cálculos que siguen los supondremos sin masa.

La constante de acoplamiento débil, G, de (1.4)

$$G/(\hbar c)^3 = 1.166\,39\,(2) \times 10^{-5}\ \text{GeV}^{-2} \tag{4}$$

El hecho que $[G] = M^{-2}$ indica que esta teoría es sólo una teoría efectiva y hoy día se dispone de la teoría electrodébil que no presenta esta dificultad y que a bajas energías es equivalente a (1.4)

El hecho de que (1) contenga un termino vectorial y uno axial, con la misma intensidad, significa que en las interacciones débiles la violación de paridad es máxima. Por otra parte es evidente que en esta formulación los números cuánticos leptónicos L_e, L_μ y L_τ son todos ellos conservados.

Indiquemos por (p_1^μ, λ_1) el momento y spin del muón inicial y por (p_1^μ, λ_1) (p_2^μ, λ_2) y (p_3^μ, λ_3) los momentos y helicidades de e^-, $\bar{\nu}_e$, ν_μ, respectivamente. El elemento de matriz T correspondiente, en primer orden de teoría de perturbaciones (VI-10.5), viene dado por

$$T_{fi} = -\langle p_1\lambda_1, p_2\lambda_2, p_3\lambda_3 \,|\, \frac{G}{\sqrt{2}}\, L_\mu^{+}(0)\, L^{\mu}(0) \,|\, p\lambda \rangle \tag{5}$$

Teniendo en cuenta el desarrollo de los campos en operadores creación y aniquilación se obtiene inmediatamente que de los nueve terminos de (1.4) solo uno contribuye

$$T_{fi} = -\frac{G}{\sqrt{2}} \langle p_1 \lambda_1, p_2 \lambda_2, p_3 \lambda_3 | [\bar{\psi}_e(0) \gamma^\mu (1+\gamma_5) \psi_{\nu_e}(0)] [\bar{\psi}_\mu(0) \gamma_\mu (1+\gamma_5) \psi_{\nu_\mu}(0)]^\dagger | p, \lambda_1 \rangle$$

$$= -\frac{G}{\sqrt{2}} \langle p_1 \lambda_1, p_2 \lambda_2, p_3 \lambda_3 | [\bar{\psi}_e(0) \gamma^\mu (1+\gamma_5) \psi_{\nu_e}(0)] [\bar{\psi}_{\nu_\mu}(0) \gamma_\mu (1+\gamma_5) \psi_\mu(0)] | p, \lambda_1 \rangle$$

$$= -\frac{G}{\sqrt{2}} \bar{u}(\vec{p}_1, \lambda_1) \gamma^\mu (1+\gamma_5) \not{\epsilon}(\vec{p}_2 \lambda_2) \quad \bar{u}(p_3 \lambda_3) \gamma_\mu (1+\gamma_5) u(\vec{p} \lambda) \qquad (4)$$

Entonces

$$\overline{\sum_\lambda} \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} |T_{fi}|^2 = \frac{G^2}{2} \frac{1}{2} \sum_\lambda \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} [\bar{u}(\vec{p}_1, \lambda_1) \gamma^\mu (1+\gamma_5) \not{\epsilon}(\vec{p}_2 \lambda_2)] [\bar{u}(\vec{p}_3 \lambda_3) \gamma_\mu (1+\gamma_5) u(\vec{p} \lambda)]$$

$$\cdot [\bar{\not{\epsilon}}(\vec{p}_2 \lambda_2) \gamma^\nu (1+\gamma_5) u(p, \lambda_1)]^\dagger [\bar{u}(\vec{p} \lambda) \gamma_\nu (1+\gamma_5) u(\vec{p}_3 \lambda_3)]^\dagger$$

$$= \frac{G^2}{4} \sum_{\lambda \lambda_3} [\bar{u}(\vec{p}_3 \lambda_3) \gamma_\mu (1+\gamma_5) u(\vec{p} \lambda)] [\bar{u}(\vec{p} \lambda) \gamma_\nu (1+\gamma_5) u(\vec{p}_3 \lambda_3)]^\dagger \cdot$$

$$\sum_{\lambda_1 \lambda_2} [\bar{u}(\vec{p}_1, \lambda_1) \gamma^\mu (1+\gamma_5) \not{\epsilon}(\vec{p}_2 \lambda_2)] [\bar{\not{\epsilon}}(\vec{p}_2 \lambda_2) \gamma^\nu (1+\gamma_5) u(p, \lambda_1)]^\dagger$$

y usando (V-15.3)

$$\overline{\sum_\lambda} \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} |T_{fi}|^2 = \frac{G^2}{4} \mathrm{Tr}[\gamma_\mu (1+\gamma_5)(\not{p} + m) \gamma_\nu (1+\gamma_5) \not{p}_3] \mathrm{Tr}[\gamma^\mu (1+\gamma_5) \not{p}_2 \gamma^\nu (1+\gamma_5)(\not{p}_1 + m_1)] \qquad (2)$$

Ahora bien

$$\mathrm{Tr}[\gamma_\mu (1+\gamma_5)(\not{p} + m) \gamma_\nu (1+\gamma_5) \not{p}_3] = 2\,\mathrm{Tr}[\gamma_\mu (\not{p} + m) \gamma_\nu \not{p}_3 (1-\gamma_5)]$$

$$= 2\,\mathrm{Tr}[\gamma_\mu \not{p} \gamma_\nu \not{p}_3] - 2\,\mathrm{Tr}[\gamma_\mu \not{p} \gamma_\nu \not{p}_3 \gamma_5]$$

$$= 8[p_\mu p_{3\nu} - g_{\mu\nu}(p \cdot p_3) + p_\nu p_{3\mu} - i \epsilon_{\mu\alpha\nu\beta} p^\alpha p_3^\beta]$$

$$\mathrm{Tr}[\gamma^\mu (1+\gamma_5) \not{p}_2 \gamma^\nu (1+\gamma_5)(\not{p}_1 + m_1)] = 2\,\mathrm{Tr}[\gamma^\mu \not{p}_2 \gamma^\nu (\not{p}_1 + m_1)(1-\gamma_5)]$$

$$= 8[p_2^\mu p_1^\nu - g^{\mu\nu}(p_2 \cdot p_1) + p_2^\nu p_1^\mu - i \epsilon^{\mu\gamma\nu\delta} p_{2\gamma} p_{1\delta}]$$

De donde

$$\overline{\sum_{\lambda}} \sum_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} |T_{fi}|^2 = 16 G^2 \left\{ p_\mu p_{3\nu} - g_{\mu\nu}(p\cdot p_3) + p_\nu p_{3\mu} - i\epsilon_{\mu\alpha\nu\beta} p^\alpha p_3^\beta \right\} \cdot$$

$$\cdot \left\{ p_2^\mu p_1^\nu - g^{\mu\nu}(p_2\cdot p_1) + p_2^\nu p_1^\mu - i\epsilon^{\mu\gamma\nu\delta} p_{2\gamma} p_{1\delta} \right\} =$$

$$= 16 G^2 \left\{ 2(p p_1)(p_2 p_3) + 2(p p_2)(p_1 p_3) + \epsilon_{\mu\alpha\nu\beta}\epsilon^{\mu\gamma\nu\delta} p^\alpha p_{2\gamma} p_{1\delta} p_3^\beta \right\}$$

Ahora bien

$$\epsilon_{\mu\alpha\nu\beta}\epsilon^{\mu\gamma\nu\delta} = -2\left(g_\alpha^\gamma g_\beta^\delta - g_\alpha^\delta g_\beta^\gamma\right) \tag{1}$$

y por tanto

$$\overline{\sum_{\lambda}} \sum_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} |T_{fi}|^2 = 64 G^2 (p\cdot p_2)(p_1\cdot p_3) \tag{2}$$

y así obtenemos para la anchura (VI-9.1)

$$\Gamma = \frac{1}{2M(2\pi)^5} \int \frac{d^3p_1}{2E_1} \frac{d^3p_2}{2E_2} \frac{d^3p_3}{2E_3} \delta(p - p_1 - p_2 - p_3)\, 64 G^2 (p\cdot p_2)(p_1\cdot p_3) \tag{3}$$

Como en esta experiencia no se observan los neutrinos empezaremos integrando sobre p_2 y p_3. Se debe llevar a cabo la integral invariante

$$I^{\mu\nu} = \int \frac{d^3p_2}{2E_2} \frac{d^3p_3}{2E_3} \delta(q - p_2 - p_3)\, p_2^\mu p_3^\nu \tag{4}$$

El resultado es de la forma $A g^{\mu\nu} + B Q^\mu Q^\nu$ donde A y B son funciones de Q^2. En el sistema en que $Q^\mu = (Q^0, 0)$ se calcula como antes $I^\mu{}_\mu$ y $Q_\mu I^{\mu\nu} Q_\nu$ de donde se deducen A y B con el resultado

$$I^{\mu\nu} = \frac{\pi}{24} \theta(q^0)\,\theta(Q^2)\left[g^{\mu\nu} Q^2 + 2 Q^\mu Q^\nu \right] \tag{5}$$

y por tanto

$$\Gamma = \frac{G^2}{48\pi^4 M_\mu} \int \frac{d^3p}{E} \theta(M_\mu - E_e)\,\theta\left[(p_\mu - p_e)^2\right] \left\{ 2\left[p_\mu (p_\mu - p_e)\right]\left[p_e (p_\mu - p_e)\right] + (p_\mu - p_e)^2 (p_\mu\cdot p_e) \right\}$$

donde hemos puesto $p \to p_\mu$, $p_1 \to p_e$. Entonces

$$p_\mu\cdot(p_\mu - p_e) = M_\mu (M_\mu - E_e) \qquad p_e\cdot(p_\mu - p_e) = M_\mu E_e - M_e^2$$

$$(p_\mu - p_e)^2 = M_\mu^2 + M_e^2 - 2 M_\mu E_e \qquad p_\mu\cdot p_e = M_\mu E_e$$

y las funciones paso implican

$$0 \leq |\vec{p}_e| \leq (M_\mu^2 - M_e^2)/2M_\mu \qquad (1)$$

Obtenemos por tanto

$$\Gamma = \frac{G^2}{48\pi^4} \int d\Omega_e \int a|p_e|\,|p_e|^2 \frac{1}{E_e} \left\{ 3M_\mu^2 E_e + 3M_e^2 E_e - 2M_\mu M_e^2 - 4M_\mu E_e^2 \right\}$$

esto es

$$\Gamma = \frac{G^2}{12\pi^3} \int_0^{(M_\mu^2 - M_e^2)/2M_\mu} a|p_e|\,|p_e|^2 \frac{1}{E_e} \left[3M_\mu^2 E_e + 3M_e^2 E_e - 2M_\mu M_e^2 - 4M_\mu E_e^2 \right] \qquad (2)$$

Si despreciamos M_e^2 frente a M_μ^2 entonces $|p_e|_{max} = M_\mu/2$. Introduzcamos $x \equiv |p_e|/|p_e|_{max} = 2|p_e|/M_\mu$, $0 \leq x \leq 1$ y $E_e = M_\mu x/2$ que es una buena aproximación salvo muy cerca de $x = 0$. Entonces obtenemos, en esta aproximación

$$\Gamma = \frac{G^2 M_\mu^5}{192\pi^3} \qquad (3)$$

Teniendo en cuenta (2.2) y (2.4) se obtiene $\tau = 2.187305(79) \times 10^{-6}$ s. Si no hubiéramos hecho la aproximación de despreciar M_e^2 frente a M_μ^2 el resultado hubiera sido

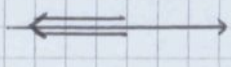
$$\Gamma = \frac{G^2 M_\mu^5}{192\pi^3} \left(1 - 8\frac{M_e^2}{M_\mu^2} \right) \qquad (4)$$

y por tanto $\tau = 2.187713(79) \times 10^{-6}$ s . En realidad para hacer una comparación precisa con el valor experimental se deben tener en cuenta las correcciones radiativas y la posibilidad de las desintegraciones $\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu + \gamma$, $\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu + e^+ + e^-$.

Antes de continuar debemos hacer una aclaración. En la amplitud de transición (3.1) el cuadrispinor que describe el neutrino aparece siempre en la combinación $(1+\gamma_5)\,u(\vec{p},\lambda)$. Si su masa es nula y se tienen en cuenta (V-10+1) y (V-15.5)

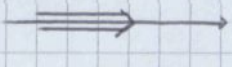
$$(1+\gamma_5)\,u(\vec{p};\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{1}{|\vec{p}|} & \alpha(\hat{p},\lambda) \\ \vec{\sigma}\cdot\hat{p}\,\alpha(\hat{p},\lambda) \end{vmatrix} = \frac{1}{|\vec{p}|} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha(\hat{p},\lambda) \\ 2\lambda\,\alpha(\hat{p},\lambda) \end{vmatrix} = \frac{1}{|\vec{p}|} \begin{vmatrix} (1-2\lambda)\,\alpha(\hat{p},\lambda) \\ -(1-2\lambda)\,\alpha(\hat{p},\lambda) \end{vmatrix} \qquad (5)$$

y por tanto los neutrinos siempre tienen la helicidad $\lambda = -1/2$



neutrino (1)

y similarmente



antineutrino (2)

Consideremos de nuevo la densidad Lagrangiana (1.4) y vamos a calcular la sección eficaz para el proceso

$$\nu_\mu (p_1, \lambda_1) + e (p_2 \lambda_2) \longrightarrow \mu (p_3 \lambda_3) + \nu_e (p_4 \lambda_4) \tag{3}$$

Entonces

$$T = -\frac{G}{\sqrt{2}} \left[\bar{u} (\vec{p}_4 \lambda_4) \gamma^\mu (1+\gamma_5) u (\vec{p}_2 \lambda_2) \right] \left[\bar{u} (\vec{p}_3 \lambda_3) \gamma_\mu (1+\gamma_5) u (\vec{p}_1 \lambda_1) \right] \tag{4}$$

y por tanto, teniendo en cuenta que el neutrino entrante tiene una helicidad bien definida,

$$\overline{\sum} \sum |T|^2 = \frac{G^2}{4} \mathrm{Tr} \left\{ \not{p}_4 \gamma^\mu (1+\gamma_5) (\not{p}_2 + m_2) \gamma^\nu (1+\gamma_5) \right\} \mathrm{Tr} \left\{ (\not{p}_3 + m_3) \gamma_\mu (1+\gamma_5) \not{p}_1 \gamma_\nu (1+\gamma_5) \right\}$$

$$= G^2 \mathrm{Tr} \left\{ \not{p}_4 \gamma^\mu \not{p}_2 \gamma^\nu (1+\gamma_5) \right\} \mathrm{Tr} \left\{ \not{p}_3 \gamma_\mu \not{p}_1 \gamma_\nu (1+\gamma_5) \right\} =$$

$$= 16 G^2 \left\{ p_4^\mu p_2^\nu - g^{\mu\nu} (p_4 \cdot p_2) + p_4^\nu p_2^\mu + i \epsilon^{\alpha\mu\beta\nu} p_{4\alpha} p_{2\beta} \right\} \cdot$$

$$\cdot \left\{ p_{3\mu} p_{1\nu} - g_{\mu\nu} (p_3 \cdot p_1) + p_{3\nu} p_{1\mu} + i \epsilon_{\gamma\mu\delta\nu} p_3^\gamma p_1^\delta \right\}$$

$$= 16 G^2 \left\{ 2 (p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) + 2 (p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) + 2 (p_1 \cdot p_2)(p_3 p_4) - 2 (p_1 \cdot p_4)(p_2 p_3) \right\}$$

$$= 64 G^2 (p_1 p_2)(p_3 p_4)$$

Introduciendo $s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2$ se obtiene

$$\overline{\sum} \sum |T|^2 = 16 G^2 (s - m_2^2)(s - m_3^2) \tag{5}$$

El hecho de que esta cantidad sólo dependa de s y no aparezca $t = (p_3 - p_2)^2$ indica que la colisión tiene lugar con momento angular orbital $\ell = 0$. Entonces de (VI-8.3) se obtiene inmediatamente que la sección eficaz total es

$$\sigma = \frac{G^2}{\pi}\,\frac{1}{s}\,(s-m_3^2)^2 = 1.686207(59)\times 10^{-38}\,cm^2\,\frac{s}{GeV^2}\left(1-\frac{m_3^2}{s}\right)^2 \qquad (1)$$

y para $s \gg m_3^2$ se obtiene $\sigma \sim G^2 s/\pi$, que salvo factores numéricos es un resultado obtenible por argumentos dimensionales., pues $[G] = M^{-2}$ $[s] = M^2$ y $[\sigma] = M^{-2}$. En el caso de colisiones en onda s se puede probar que la unitariedad de la matriz S implica que si $s \gg m_e^2$ entonces $\sigma < 2\pi/s$, desigualdad que se viola para s suficientemente grandes. Vemos pues que la teoría efectiva que estamos considerando sólo puede ser válida, a lo sumo, para

$$\sqrt{s} < (2\pi^2/G^2)^{1/4} \cong 600\ GeV \qquad (2)$$

En realidad, como discutiremos más adelante, la teoría debe ser modificada mucho antes.

Se podría pensar que quizás el problema se pudiera resolver calculando en esta teoría efectiva los términos de orden superior en potencias de G. Estos términos resultan ser infinitos lo cual es típico de prácticamente todos los cálculos de orden superior en teoría mecántica de campos. Hay unas teorías llamadas <u>renormalizables</u> en las que todos los infinitos pueden reabsorverse en una redefinición de las constantes (masas y constantes de acoplamiento) que aparecen en ella. La teoría de Fermi no es renormalizable y sólo es una teoría efectiva de una renormalizable: la teoría electrodébil.

Continuemos con la teoría efectiva de Fermi. En 1958, R. P. Feynman y M. Gell-Mann hicieron la hipótesis de que la densidad Lagrangiana de interacción era de la forma

$$L(x) = \frac{G}{\sqrt{2}}\,J_\mu^\dagger(x)\,J^\mu(x) \qquad (3)$$

donde la corriente $J^\mu(x)$ se podía escribir como

$$J^\mu(x) = L^\mu(x) + J^\mu(x) \qquad (4)$$

donde $L^\mu(x)$ es la corriente leptónica dada antes (2.1) y $J^\mu(x)$ es una corriente hadrónica., suma de una corriente vectorial hadrónica $V^\mu(x)$ y una corriente axial hadrónica $A^\mu(x)$., donde hemos indicado con el nombre de

hadrón toda partícula que tiene interacciones fuertes (y por supuesto electromagnéticas y débiles). Los hadrones se dividen en dos grandes familias: los *mesones* que tienen spin entero y los *bariones* que lo tienen semi-impar. De todos los hadrones sólo el protón es estable y los restantes se desintegran vía las distintas interacciones. Muchos se desintegran vía las interacciones fuertes y suelen llamarse *resonancias* y entonces su vida media es extraordinariamente corta. Todos los mesones tienen número bariónico $B = 0$, mientras que los bariones conocidos tienen todos $B = 1$ y por tanto partícula y antipartícula no pueden coincidir. Para clasificar los hadrones se introduce también la *extrañeza*, S, y la *hipercarga*, $Y = B + S$ que son conservados en las interacciones fuertes y electromagnéticas. A continuación damos algunos propiedades de los hadrones más usuales

Mesones

Pion $I^G(J^P) = 1^-(0^-)$, $S = 0$

$\pi^\pm$ $m = 139.56995(35)$ MeV $\tau = 2.6030(24) \times 10^{-8}$ s

$\mu^+ \nu_\mu$ 99.9877 0(4) %

π^0 $m = 134.9764(6)$ MeV $\tau = 8.4(6) \times 10^{-17}$ s

$\gamma\gamma$ 98.798(32) %

$e^+ e^- \gamma$ 1.198(32) %

Kaon $I(J^P) = 1/2(0^-)$, $S = +1$

K^+ $m = 493.677(16)$ MeV $\tau = 1.2371(29) \times 10^{-8}$ s

$\mu^+ \nu_\mu$ 63.51(18) %

$\pi^+ \pi^0$ 21.16(14) %

$\pi^+ \pi^+ \pi^-$ 5.59(5) %

$\pi^+ \pi^0 \pi^0$ 1.73(4) %

$\pi^0 \mu^+ \nu_\mu$ 3.18(8) %

$\pi^0 e^- \nu_e$ 4.82(6) %

K^0 $m = 497.672(31)$ MeV

Hablaremos más adelante de su desintegración.

Bariones

Nucleón	$I(J^P) = 1/2\ (1/2^+)$	$S = 0$	
	p	$m = 938.2723\,1(28)$ MeV	$\tau > 1.6 \times 10^{25}$ años
	n	$m = 939.5653(28)$ MeV	$\tau = 887.0(20)$ s
		$p\, e^- \bar{\nu}_e$ 100 %	
Lambda	$I(J^P) = 0\ (1/2^+)$	$S = -1$	
	Λ	$m = 1115.684(6)$ MeV	$\tau = 2.632(20) \times 10^{-10}$ s
		$p\,\pi^-$ 63.9(5) %	
		$n\,\pi^0$ 35.8(5) %	
Sigma	$I(J^P) = 1\ (1/2^+)$	$S = -1$	
	Σ^+	$m = 1189.37(7)$ MeV	$\tau = 0.799(4) \times 10^{-10}$ s
		$p\,\pi^0$ 51.57(30)	
		$n\,\pi^+$ 48.30(30)	
	Σ^0	$m = 1192.55(8)$ MeV	$\tau = 7.4(7) \times 10^{-20}$ s
		$\Lambda\,\gamma$ 100. %	
	Σ^-	$m = 1197.436(33)$	$\tau = 1.479(11) \times 10^{-10}$ s
		$n\,\pi^-$ 99.848(5) %	
Cascada	$I(J^P) = 1/2\ (1/2^+)$	$S = -2$	
	Ξ^0	$m = 1314.9(6)$ MeV	$\tau = 2.90(9) \times 10^{-10}$ s
		$\Lambda\,\pi^0$ 99.54(5) %	
	Ξ^-	$m = 1321.32(13)$ MeV	$\tau = 1.639(15) \times 10^{-10}$ s
		$\Lambda\,\pi^-$ 99.887(35) %	

Puesto que la densidad Lagrangiana debe conmutar con el operador carga eléctrica Q, pues ésta se conserva en todas las interacciones, entonces es evidente que $\Delta Q = +1$ para la corriente hadrónica. Esto significa que $\langle f | J^\mu(x) | i \rangle$ es nulo a no ser que $\Delta Q \equiv Q_i - Q_f = +1$, donde Q_i (Q_f) es la carga eléctrica de las partículas no leptónicas en el estado inicial (final).

Para fijar las propiedades de $J^\mu(x)$ vamos a considerar alguna evidencia experimental que nos ayude en este propósito. Cuando a finales de los años cuarenta y principios de los cincuenta el número de hadrones fue

creciendo se observó que una serie de procesos de producción, que tenían lugar vía las interacciones fuertes, no ocurrían nunca a pesar de no violarse ninguna de las leyes de conservación conocidas. Fue M. Gell-Mann el que, en 1953, dio la solución a este problema introduciendo el número cuántico de extrañeza S que se conserva en las interacciones fuertes y electromagnéticas, pero no en las débiles. Para todas las partículas

$$Q = T_3 + \frac{1}{2} Y = T_3 + \frac{1}{2} (B + S) \tag{1}$$

que es la llamada relación de Gell-Mann - Nishijima (discutiremos más adelante su ampliación a partículas encantadas etc)

La primera propiedad importante es que la corriente $J^\mu(x)$ satisface las reglas $\Delta S = 0$ y $\Delta S = 1$, esto es que es la combinación lineal de dos términos uno con $\Delta S = 0$ y otro con $\Delta S = 1$. Como $S = 2(Q - T_3) - B$ y Q, T_3 y B son conservadas por las interacciones electromagnéticas y fuertes, procesos con $\Delta S = \pm 2$ solo pueden tener lugar en orden superior al primero en las interacciones débiles y por tanto son muy improbables. Por ejemplo se sabe que

$$\frac{\Gamma(\Xi^- \longrightarrow n \pi^-)}{\Gamma(\Xi^- \longrightarrow \Lambda \pi^-)} < 1.9 \times 10^{-5} \tag{2}$$

Notar que $J^\mu(x)$ es tal que si $\Delta S = \pm 1$ también $\Delta Q = \Delta S = \pm 1$ y procesos en los que $\Delta S = -\Delta Q$ sólo pueden suceder en ordenes superiores en las interacciones débiles. Se encuentra por ejemplo

$$\frac{\Gamma(\Sigma^+ \longrightarrow n e^+ \nu_e)}{\Gamma(\Sigma^+ \to p \pi^0 \text{ y } n \pi^+)} < 5 \times 10^{-6} \tag{3}$$

Estos y otros hechos experimentales pueden ser explicados mediante la expresión de $J^\mu(x)$ dada por N. Cabibbo en 1963

$$J^\mu(x) = L^\mu(x) + J^\mu(x)$$

$$J^\mu(x) = \cos\theta \left[V^{(0)\mu}(x) + A^{(0)\mu}(x) \right] + \sin\theta \left[V^{(1)\mu}(x) + A^{(1)\mu}(x) \right] \tag{4}$$

$$\theta = 0.2319 \quad (5)$$

donde θ es el llamado ángulo de Cabibbo. Todas estas corrientes cumplen la condición $\Delta Q = +1$. Las $V_\mu^{(0)}(x)$ y $A_\mu^{(0)}(x)$ no cambian la extrañeza ($\Delta S = 0$) mientras que $V_\mu^{(1)}(x)$ y $A_\mu^{(1)}$ cumplen $\Delta S = \Delta Q = +1$. Recordemos que las interacciones fuertes son invariantes bajo $SU_T(2)$. La corriente electromagnética $J_{em}^\mu(x)$ que se acopla al potencial vector $A_\mu(x)$ (1.2) y que es conservada puede escribirse

$$J_{em}^\mu(x) = \bar{\psi}_N(x)\,\gamma^\mu\,\frac{1}{2}(1+\tau_3)\,\psi_N(x) + \bar{\psi}_\Sigma(x)\,\gamma^\mu\,\rho_3\,\psi(x) + \cdots \qquad (1)$$

donde ρ_3 es T_3 en la representación $T=1$ en que la matriz ρ_3 es diagonal. Esta corriente electromagnética es conservada

$$\partial_\mu J_{em}^\mu(x) = 0 \qquad (2)$$

y es la suma de una corriente isoescalar y la componente 0 de un isovector. Vemos pues que si bien las interacciones electromagnéticas no son invariantes bajo $SU_T(2)$, tienen leyes de transformación sencillas bajo este grupo. Algo análogo sucede en las interacciones débiles: $V^{(0)\mu}(x)$ y $A^{(0)\mu}(x)$ se transforman como la componente (-1) de un isovector bajo $SU_T(2)$, mientras que $V^{(1)\mu}(x)$ y $A^{(1)\mu}(x)$ se transforman bajo $SU_T(2)$ como la componente $(-1/2)$ de un operador tensorial con $T = 1/2$. La asignación de componentes es consecuencia inmediata de (10.1) $\quad \Delta Q = \Delta T_3 + \Delta S/2$.

Las desintegraciones débiles tales como $n \longrightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$, donde aparece la pareja de leptones, se denominan semi-leptónicas y son debidas al termino $L^\mu(x)\,J_\mu^\dagger(x) + h.c$ de (1.4) y las reglas de violación del isospín vendrán determinadas por $J_\mu(x)$ y se cumplirán salvo conexiones electromagnéticas. Las transiciones tales como $\Lambda \to p\pi^-$ en las que no aparece la pareja de leptones son llamadas no-leptónicas y son mediadas por $J_\mu(x)\,J^{\mu\dagger}(x)$., y aquí las leyes de violación del isospín son mas complejas. Consideremos por ejemplo el proceso $\Lambda \to p\pi^-$ y $\Lambda \to n\pi^0$. El estado inicial y los finales son los estados de isospín

$$|\Lambda\rangle = |0\,0\rangle \qquad (3)$$

$$|\pi^- p\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\,|3/2\;-1/2\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}\,|1/2\;-1/2\rangle \quad , \quad |n^0 n\rangle = -\sqrt{\frac{2}{3}}\,|3/2\;-1/2\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\,|1/2\;-1/2\rangle$$

y ambos son procesos con $\Delta S = S_i - S_f = -1$. De acuerdo con (7.3) y (10.4) el elemento de matriz T para este proceso es

$$T = -\frac{G}{\sqrt{2}} \cos\theta \sin\theta \, \langle \pi N | \left[V_\mu^{(0)}(0) + A_\mu^{(0)}(0) \right] \left[V^{(1)\mu}(0) + A^{(1)\mu}(0) \right]^+ | \Lambda \rangle$$

Como el término con $\Delta S = 0$ se transforma como un isovector y el $\Delta S = +1$ como un operador tensorial con $I = 1/2$, el operador que media esta transición tiene una parte con $I = 1/2$ y una parte con $I = 3/2$. Por razones no totalmente bien establecidas parece que la parte con $I = 1/2$ es la dominante y que $T \propto \langle \pi N | O^{1/2}_{-1/2} | \Lambda \rangle$ donde O se transforma como la componente $I_3 = -1/2$ de un operador tensorial con $I = 1/2$. Teniendo en cuenta el teorema de Wigner-Eckart, (11.3) y (VII-9.4) se obtiene

$$R \equiv \frac{\Gamma(\Lambda \to p\pi^-)}{\Gamma(\Lambda \to n\pi^0)} = \left\{ \frac{\lambda(M_\Lambda^2, M_p^2, M_{\pi^-}^2)}{\lambda(M_\Lambda^2, M_n^2, M_{\pi^0}^2)} \right\}^{1/2} \frac{|\langle \pi^- p | O^{1/2}_{-1/2} | \Lambda \rangle|^2}{|\langle \pi^0 n | O^{1/2}_{-1/2} | \Lambda \rangle|^2} =$$

$$= 2 \left\{ \frac{\lambda(M_\Lambda^2, M_p^2, M_{\pi^-}^2)}{\lambda(M_\Lambda^2, M_n^2, M_{\pi^0}^2)} \right\}^{1/2} = 2 \times 0.9673 = 1.935 \qquad (1)$$

y el valor experimental es $R = 1.785\,(25)$, que está en buen acuerdo con (1) pues no se han tenido en cuenta, en los elementos de matriz, posibles correcciones electromagnéticas de orden α.

Siguiendo el mismo tipo de razonamiento se encuentra

$$R \equiv \frac{\Gamma(\Xi^- \to \Lambda\pi^-)}{\Gamma(\Xi^0 \to \Lambda\pi^0)} = 2 \frac{M_{\Xi^0}}{M_{\Xi^-}} \left\{ \frac{\lambda(M_{\Xi^-}^2, M_\Lambda^2, M_{\pi^-}^2)}{\lambda(M_{\Xi^0}^2, M_\Lambda^2, M_{\pi^0}^2)} \right\}^{1/2} = 2 \times 1.0282 = 2.056 \qquad (2)$$

mientras que el valor experimental es $R = 1.775\,(55)$.

Empecemos discutiendo $V_\mu^{(0)}(x)$. Recordemos la expresión (11.2) que nos dice que la corriente electromagnética es conservada. En términos de esta corriente el operador carga eléctrica (unidades de la carga del protón) se puede escribir

$$Q(t) = \int_t d^3x \; J^0_{em}(t; \vec{x}) \qquad (3)$$

y satisface la ecuación

$$\frac{dQ(t)}{dt} = 0 \qquad (4)$$

Si $|\phi\rangle$ describe el estado de una partícula que interacciona fuertemente, su carga viene dada por $\langle \phi | Q(t) | \phi \rangle$ y (4) prueba que esta cantidad es indepen-

diente del tiempo. Por tanto $\langle \phi | Q(t) | \phi \rangle = \langle \phi | Q(-\infty) | \phi \rangle$. Puesto que en $t=-\infty$ las interacciones fuertes, que son de corto alcance, no producen interacción entre la partícula ϕ y los restantes, se puede poner $\langle \phi | Q(t) | \phi \rangle = \langle \phi | Q_\phi(-\infty) | \phi \rangle$, donde Q_ϕ es el operador carga cuando sólo se tiene en cuenta en $J^\mu_{em}(x)$ el término correspondiente a la ϕ. Entonces podemos concluir que la presencia de las interacciones fuertes no produce nueva renormalización de la carga eléctrica.

R.P. Feynman and M. Gell-Mann, en 1958, desarrollaron una idea previa de S.S. Gerstein y J.B. Zeldovitch, de 1955, y usaron este hecho de que una corriente conservada implica la no renormalización de la carga educida para explicar el hecho observado de que las constantes de acoplamiento en las desintegraciones beta y del muón fueran iguales después de tener en cuenta las correcciones radiativas. Ellos propusieron que

$$\partial_\mu V^{(0)\mu}(x) = 0 \tag{1}$$

Además la corriente electromagnética es la tercera componente del isovector

$$\vec{J}^\mu(x) = \bar{\psi}_N(x) \gamma^\mu \frac{\vec{\tau}}{2} \psi_N(x) + \bar{\psi}_\Xi(x) \gamma^\mu \vec{\rho} \psi_\Xi(x) + \cdots \tag{2}$$

y postularon que $V^{(0)\mu}(x)/\sqrt{2}$, la parte isovectorial de la corriente electromagnética y $V^{(0)\mu\dagger}(x)/\sqrt{2}$ transformaban bajo $SU_I(2)$ como las componentes $I_3 = -1, 0, +1$, respectivamente, de un isovector con $I=1$, esto es

$$V^{(0)\mu}(x) = \sqrt{2}\, T^\mu_{-1}(x) \tag{3}$$

Evidentemente, (1) no implica (2) pero (2) implica (1).

Como primera prueba de esta teoría consideremos la desintegración

$$\pi^+ \longrightarrow \pi^0 + e^+ + \nu_\mu \tag{4}$$

El Lagrangiano que media este proceso es evidentemente

$$L(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} G \cos\theta \left(V^{(0)\mu}(x) + A^{(0)\mu}(x) \right) L^+_\mu(x) \tag{5}$$

y necesitamos el elemento de matriz

$$T = -\frac{1}{\sqrt{2}} G \cos\theta \langle \pi^0 | V^{(0)\mu}(0) + A^{(0)\mu}(0) | \pi^+ \rangle \bar{u}(p_\nu \lambda_\nu) \gamma_\mu (1+\gamma_5) v(p_e \lambda_e) \tag{6}$$

La paridad implica que sólo la parte vectorial pueda contribuir a este proceso y escribiendo p, p_1, $p_2\lambda_2$, $p_3\lambda_3$ para el π^+, π^0, e^+ y ν_e se tiene

$$T = -\frac{1}{\sqrt{2}} G\cos\theta \langle \pi^0 | V^{(0)\mu}(0) | \pi^+ \rangle \bar{u}(p_3\lambda_3)\gamma_\mu(1+\gamma_5) v(p_2\lambda_2) \qquad (1)$$

Argumentos de covariancia nos dicen que

$$\langle \pi^0 | V^{(0)\mu}(0) | \pi^+ \rangle = \sqrt{2}\, F(q^2)(p+p_1)^\mu + G(q^2)(p-p_1)^\mu \qquad q^\mu \equiv p^\mu - p_1^\mu \qquad (2)$$

El hecho de que la corriente sea conservada exige que $G(q^2)=0$, cuando se desprecia la diferencia de masa entre los piones pues $q_\mu \langle \pi^0 | V^{(0)\mu}(0) | \pi^+ \rangle \equiv 0$. Más aún el hecho de que se cumpla (13.3) implica que $F(q^2)$ no es mas que el factor de forma electromagnético del pión, normalizado a $F(0)=1$.

La suma sobre normalizaciones finales implica

$$\sum_{\lambda_2\lambda_3} [\bar{u}(p_3\lambda_3)\gamma_\mu(1+\gamma_5)v(p_2\lambda_2)][\bar{v}(p_2\lambda_2)\gamma_\nu(1+\gamma_5)u(p_3\lambda_3)] =$$

$$= \mathrm{Tr}[\not{p}_3\gamma_\mu(1+\gamma_5)(\not{p}_2 + m_2)\gamma_\nu(1+\gamma_5)] = 2\,\mathrm{Tr}[\not{p}_3\gamma_\mu\not{p}_2\gamma_\nu(1+\gamma_5)]$$

$$= 8[p_{3\mu}p_{2\nu} - g_{\mu\nu}(p_2\cdot p_3) + p_{3\nu}p_{2\mu} + i\epsilon_{\alpha\mu\beta\nu}p_3^\alpha p_2^\beta] \qquad (3)$$

y teniendo en cuenta (1), (2) y (3)

$$\sum_{\lambda_2\lambda_3} |T|^2 = 8G^2\cos^2\theta\,|F(q^2)|^2[-(p+p_1)^2(p_2\cdot p_3) + 2[(p+p_1)\cdot p_2][(p+p_1)\cdot p_3]]$$

y usando (VI-9.1)

$$\Gamma = \frac{4G^2\cos^2\theta}{M(2\pi)^5}\int \frac{d^3p_1}{2E_1}\frac{d^3p_2}{2E_2}\frac{d^3p_3}{2E_3}\,\delta(p-p_1-p_2-p_3)\,|F(q^2)|^2[-(p+p_1)^2(p_2\cdot p_3) + 2[(p+p_1)\cdot p_2][(p+p_1)\cdot p_3]] \qquad (5)$$

Teniendo en cuenta la integral (4.4), si despreciamos la masa del electrón lo cual es una buena aproximación, podemos usar (4.5) y además suponemos que $F(q^2) \simeq F(0) = 1$. Entonces

$$\Gamma = \frac{G^2\cos^2\theta}{24(2\pi)^4 M}\int \frac{d^3p_1}{E_1}\left\{4\lambda(q^2, M^2, M_1^2)\right\}\theta(q^0)\,\theta(q^2) =$$

$$= \frac{G^2\cos^2\theta}{6(2\pi)^4 M}\int_0^\infty dq^2\,\lambda(q^2, M^2, M_1^2)\int \frac{d^3p_1}{E_1}\,\delta[q^2-(p-p_1)^2]\,\theta(q^0)$$

$$= \frac{G^2\cos^2\theta}{42(2\pi)^3 M^3}\int_0^{(M-M_1)^2} du\;\lambda^{3/2}(u, M^2, M_1^2)$$

De aquí

$$\Gamma = \frac{G^2 \cos^2\Theta}{8\pi (2\pi)^3} M^5 g(M_1^2/M^2) \tag{1}$$

$$g(x) = 1 - 8x + 8x^3 - x^4 - 12x^2 \ln x$$

Si $M_1^2/M^2 \equiv 1 - x$ entonces $g(x) = (2\epsilon^5/5)(1 + \epsilon/2 + O(\epsilon^2)) = 4.697 \times 10^{-7}$ y por tanto $\Gamma = 0.409\ s^{-1}$ a comparar con el valor experimental $\Gamma = 0.394\ (13)\ s^{-1}$ en buen acuerdo con la predicción teórica.

La corriente $A_\mu^{(0)}(x)$ no puede ser conservada pues entonces la desintegración $\pi^+ \to e^+ \nu_e$ no existiría, contra la evidencia experimental. La parte de (10.4) responsable de este proceso es

$$T = -\frac{1}{\sqrt{2}} G \cos\Theta \langle 0 | A_\mu^{(0)}(0) | \pi^+ \rangle \bar{u}(p_2 \lambda_2) \gamma^\mu (1+\gamma_5) v(p_1 \lambda_1) \tag{2}$$

donde p, (p_1, λ_1), (p_2, λ_2) son momentos y helicidades del π^+, e^+, ν_e respectivamente. Argumentos de covariancia implican que

$$\langle 0 | A_\mu^{(0)}(0) | \pi^+ \rangle = -i M f_\pi p_\mu \tag{3}$$

Si la corriente fuera conservada $f_\pi M p^2 = f_\pi M^3 = 0 \Rightarrow f_\pi = 0$ y la desintegración no tendría lugar. De aquí

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2} |T|^2 = \frac{1}{2} G^2 \cos^2\Theta\ M^2 f_\pi^2\ p_\mu p_\nu\ \mathrm{Tr}\left[\not{p}_2' \gamma^\mu (1+\gamma_5)(\not{p}_1 - M_1)\gamma^\nu (1+\gamma_5) \right]$$

$$= \frac{1}{2} G^2 \cos^2\Theta\ M^2 f_\pi^2\ p_\mu p_\nu\ 8\left[2 p_2^\mu p_1^\nu - g^{\mu\nu}(p_1 p_2) \right]$$

$$= 4 G^2 \cos^2\Theta\ M^2 f_\pi^2 \left[2(p\cdot p_1)(p\cdot p_2) - M^2 (p_1 \cdot p_2) \right]$$

$$= 2 G^2 \cos^2\Theta\ f_\pi^2\ M^2 M_1^2 (M^2 - M_1^2)$$

Usando (VI-9.4)

$$\Gamma = \frac{G^2 \cos^2\Theta}{8\pi} f_\pi^2\ M^5\ \frac{M_1^2}{M^2} \left(1 - \frac{M_1^2}{M^2}\right)^2 \tag{4}$$

Esta expresión es valida tanto para $\pi^+ \to e^+ \nu_e$ como para $\pi^+ \to \mu^+ \nu_\mu$. Teniendo en cuenta que

$$\Gamma(\pi^+ \to e^+ \nu_e) = 4.725\ (20) \times 10^3\ sec^{-1} \qquad \Gamma(\pi^+ \to \mu^+ \nu_\mu) = 3.84\,12\ (35) \times 10^7\ sec^{-1} \tag{5}$$

Entonces (16.4) reproduce los resultados experimentales $\pi^+ \to e^+ \nu_e$ y $\pi^+ \to \mu^+ \nu_\mu$ si tomamos, respectivamente,

$$|f_\pi| = 0.92 \text{ fm} \quad (20) \qquad |f_\pi| = 0.94 \text{ fm} \quad (43) \tag{1}$$

en buen acuerdo con el hecho de que f_π no depende del proceso considerado.

Notemos que a pesar de que el espacio físico $\pi^+ \to e^+ \nu_e$ es mucho mayor que $\pi^+ \to \mu^+ \nu_\mu$ el primer proceso es mucho menos frecuente que el segundo. Esto es debido al hecho que en el primero el electrón es muy energético y entonces si $m_e = 0$ se tendría



que está prohibido por conservación del momento angular. Esto es una prueba más de que el factor $(1+\gamma_5)$ que aparece en $\mathcal{L}^{\nu}(x)$ es esencial.

Consideremos finalmente la desintegración

$$n(p,\lambda) \longrightarrow p(p_1,\lambda_1) + e(p_2\lambda_2) + \bar{\nu}_e(p_3,\lambda_3) \tag{2}$$

En este caso

$$T = -\frac{G}{\sqrt{2}} \cos\theta \, \langle p\lambda | V_\mu^{(0)}(0) + A_\mu^{(0)}(0) | p_1\lambda_1\rangle \, \bar{u}(\vec{p}_2\lambda_2)\gamma_\mu(1+\gamma_5)v(\vec{p}_3\lambda_3) \tag{3}$$

Consideremos ahora los elementos de matriz de la corriente vectorial y axial que aparecen. Se puede demostrar usando argumentos de covariancia

$$\langle p\lambda | V_\mu^{(0)}(0) | p_1\lambda_1\rangle = \bar{u}(\vec{p}\lambda)\left[g_V(q^2)\gamma_\mu - i\frac{g_M(q^2)}{2M}\sigma_{\mu\nu}q^\nu - \frac{g_S(q^2)}{2M}q_\mu \right] u(\vec{p}_1\lambda_1)$$

$$\langle p\lambda | A_\mu^{(0)}(0) | p_1\lambda_1\rangle = \bar{u}(\vec{p}\lambda)\left[-g_A(q^2)\gamma_\mu\gamma_5 + \frac{g_P(q^2)}{2M}q_\mu\gamma_5 - i\frac{g_T(q^2)}{2M}\sigma_{\mu\nu}q^\nu\gamma_5 \right] u(\vec{p}_1\lambda_1) \tag{4}$$

donde $q^\mu \equiv p_1^\mu - p^\mu$ y M es la masa del nucleón. Las cantidades g_V, g_M, g_S, g_A g_P y g_T son funciones arbitrarias de q^2 que se denominan factores de forma vectorial, magnético, escalar, axial, pseudoescalar y tensorial respectivamente. Se puede probar además que son todos reales si es cierta la invariancia bajo la inversión temporal. No vamos a discutir todos estos factores de forma y como en la desintegración del neutrón y en las desintegraciones beta, en general, q^μ es muy pequeño nos quedaremos sólo con $g_V(q^2) \simeq g_V(0)$ y $g_A(q^2) = +g_A(0)$

La hipótesis (13.2) implica que $g_V(0) = 1$. Introduciremos además $\lambda \equiv g_A(0)$ y entonces

$$T = -\frac{G}{\sqrt{2}} \cos\theta \left[\bar{u}(\vec{p}\,\lambda) \gamma^\mu (1 - \lambda\gamma_5)\, u(\vec{p}_1 \lambda_1) \right] \left[\bar{u}(\vec{p}_2 \lambda_2)\, \gamma_\mu (1+\gamma_5)\, \nu(\vec{p}_3 \lambda_3) \right] \tag{1}$$

de donde un cálculo largo permite calcular la vida media del neutrón y se reproduce el valor experimental con

$$\lambda = 1.2573 \quad (28) \tag{2}$$

Consideremos ahora la desintegración β de un núcleo

$$(A, Z) \longrightarrow (A, Z+1) + e^- + \bar{\nu}_e \tag{3}$$

Debemos empezando el cálculo considerando

$$L_{fi} \equiv \langle f | \int d^4x\, L(x) | i \rangle \tag{4}$$

El estado inicial, $|i\rangle$, contiene un núcleo de función de onda $\Psi_i(\xi)$, donde ξ indica todas las coordenadas (espacio, spin, isospin) necesarias para describirlo. El estado final $|f\rangle$ contiene un núcleo con función de onda $\Psi_f(\xi)$, un electrón con momento $\vec{p}$ y helicidad λ y un antineutrino con momento $\vec{q}$ y helicidad μ. Suponemos que el electrón saliente tiene un momento bien definido pues no tendremos en cuenta, de momento, la interacción del electrón con el campo Coulombiano creado por el núcleo final. Entonces

$$L_{fi} = (2\pi)\, \delta(E_i - E_f) \left[\bar{u}(\vec{p}\,\lambda)\, \gamma_\mu (1+\gamma_5)\, \nu(\vec{q}\,\mu) \right] \cdot$$

$$\frac{G \cos\theta}{\sqrt{2}} \int d\xi\, \Psi_f^+(\xi) \sum_{m=1}^{A} \frac{1}{2}\, \tau_{m+} \left[\gamma^\mu (1 - \lambda\gamma_5) \right]_m e^{-i(\vec{p}+\vec{q})\cdot\vec{x}_m}\, \Psi_i(\xi) \tag{5}$$

Consideraremos sólo <u>transiciones permitidas</u> para las que se supone:

i) $\exp\{-i(\vec{p}+\vec{q})\cdot x_m\} \simeq 1$

ii) Los nucleones se supone que están en reposo

Comentemos estas aproximaciones. El integrando de (5) es distinto de cero sólo cuando los nucleones están dentro del volumen nuclear. La energía que se libera en una desintegración β es de unos pocos MeV y por tanto en la región

de integración $|(\vec{p}+\vec{q})\cdot x_m| \leq 1/20$. Más aún en un núcleo la velocidad, v, de los nucleones es $v/c \leq 0.2$. Las correcciones a las transiciones permitidas, debidas a la consideración de más términos en el desarrollo de la exponencial o a la velocidad no nula de los nucleones, en general, son menores del 1%. Es muy importante darse cuenta que para las transiciones permitidas tanto el electrón como el antineutrino tienen momento angular orbital nulo

Teniendo en cuenta la forma explícita de los cuadrispinores de Dirac (V-14.5) y la estructura de las matrices γ (V-10.1) se tiene

$$\gamma^0 \longrightarrow I \quad , \quad \gamma^K \longrightarrow \alpha^K \tag{1}$$

$$\gamma^0\gamma_5 \longrightarrow 0 \quad , \quad \gamma^K\gamma_5 \longrightarrow -\sigma^K$$

y por tanto

$$L_{fi} = (2\pi)\,\delta(E_i - E_f)\, M\, \frac{G\cos\theta}{\sqrt{2}}$$

$$M = \bar{u}(\vec{p},\lambda)\,\gamma^0(1+\gamma_5)\,v(\vec{q},\mu)\,M_F - \lambda\,\bar{u}(\vec{p}\lambda)\,\vec{\gamma}(1+\gamma_5)\,\bar{v}(\vec{q},\mu)\cdot\vec{M}_{GT}$$

$$M_F \equiv \int d\bar{x}\;\bar{\Psi}_f^+(\bar{x})\sum_{m=1}^{A}\frac{1}{2}\tau_{m+}\;\bar{\Psi}_i(\bar{x}) \tag{2}$$

$$\vec{M}_{GT} \equiv \int d\bar{x}\;\bar{\Psi}_f^+(\bar{x})\sum_{m=1}^{A}\frac{1}{2}\tau_{m+}\vec{\sigma}_m\;\bar{\Psi}_i(\bar{x})$$

De acuerdo con esto las transiciones β permitidas se pueden clasificar en dos grupos

i) <u>Transiciones de Fermi</u>. Son las mediadas por la parte vectorial de la interacción y satisfacen las reglas de selección

$$J_f - J_i = 0 \quad , \quad \text{No hay cambio de paridad} : \Pi_i = \Pi_f \tag{3}$$

ii) <u>Transiciones de Gamow-Teller</u>. Son las mediadas por la parte axial de la interacción y satisfacen las reglas de selección

$$J_f - J_i = 0, \pm 1 \quad , \quad J_i = 0 \not\longrightarrow J_f = 0 \tag{4}$$

No hay cambio de paridad : $\Pi_i = \Pi_f$

Si promediamos sobre polarizaciones iniciales y sumamos sobre las finales la cantidad de interes es

$$\overline{\sum_{p_i}}\sum_{p_f}\sum_{\lambda_\mu}|M|^2 = \overline{\sum_{p_i}}\sum_{p_f}\sum_{\lambda_\mu}\Big\{\bar u(\vec p\,\lambda)\left[M_F\gamma^0 - \lambda\vec M_{GT}\cdot\vec\gamma\right](1+\gamma_5)\,\nu(\vec q\,\mu)$$

$$\cdot\bar\nu(\vec q,\mu)\left[M_F^*\gamma^0 - \lambda\vec M_{GT}^*\cdot\vec\gamma\right](1+\gamma_5)\,u(\vec p\,\lambda)\Big\} \qquad (1)$$

Ahora bien

$$\overline{\sum_{p_i}}\sum_{p_f} M_F M_F^* = \overline{\sum_{p_i}}\sum_{p_f}|M_F|^2 \equiv |M_F|^2$$

$$\overline{\sum_{p_i}}\sum_{p_f} M_{GT}^i M_{GT}^{*j} = \frac{1}{3}\delta^{ij}\overline{\sum_{p_i}}\sum_{p_f}\vec M_{GT}\cdot\vec M_{GT}^* \equiv \frac{1}{3}\delta^{ij}|\vec M_{GT}|^2 \qquad (2)$$

$$\overline{\sum_{p_i}}\sum_{p_f} M_F M_{GT}^{i*} = \overline{\sum_{p_i}}\sum_{p_f} M_F^* M_{GT}^i = 0$$

por tanto

$$\overline{\sum_{p_i}}\sum_{p_f}\sum_{\lambda_\mu}|T|^2 = \sum_{\lambda_\mu}\Big\{|M_F|^2\,\bar u(\vec p\,\lambda)\gamma^0(1+\gamma_5)\nu(\vec q\,\mu)\,\bar\nu(\vec q\,\mu)\gamma^0(1+\gamma_5)u(\vec p\,\lambda)$$

$$+\frac{1}{3}\lambda^2|\vec M_{GT}|^2\,\bar u(\vec p\,\lambda)\gamma^i(1+\gamma_5)\nu(\vec q\,\mu)\,\bar\nu(\vec q\,\mu)\gamma^i(1+\gamma_5)u(\vec p\,\lambda)\Big\}$$

$$= |M_F|^2\,\mathrm{Tr}\left\{(\not p + m)\gamma^0(1+\gamma_5)\not q\,\gamma^0(1+\gamma_5)\right\} +$$

$$+\frac{1}{3}\lambda^2|\vec M_{GT}|^2\,\mathrm{Tr}\left\{(\not p+m)\gamma^i(1+\gamma_5)\not q\,\gamma^i(1+\gamma_5)\right\}$$

$$= 2|M_F|^2\,\mathrm{Tr}\left[\not p\,\gamma^0\not q\,\gamma^0\right] + \frac{2}{3}\lambda^2|\vec M_{GT}|^2\,\mathrm{Tr}\left[\not p\,\gamma^i\not q\,\gamma^i\right] =$$

$$= 8|M_F|^2\left[p^0q^0 - (\vec p\cdot\vec q) + p^0q^0\right] + \frac{8}{3}\lambda^2|\vec M_{GT}|^2\left[p^iq^i - g^{ii}(p\cdot q) + p^iq^i\right] =$$

$$= 8\left\{|M_F|^2\left(E_e E_\nu + \vec p\cdot\vec q\right) + \lambda^2|\vec M_{GT}|^2\left(E_e E_\nu - \frac{1}{3}\vec p\cdot\vec q\right)\right\} \qquad (3)$$

Entonces tenemos

$$\Gamma = \frac{(2\pi)}{(2\pi)^6}\int\frac{d^3p}{2E_e}\,\frac{d^3q}{2|\vec q|}\,\delta(E_{max} - E_e - q)\,\frac{G^2\cos^2\theta}{2}\,\overline{\sum_{p_i}}\sum_{p_f}\sum_{\lambda_\mu}|T|^2$$

donde E_{max} es la energía máxima del electrón. Realizando las integraciones angulares y usando la delta para integrar sobre q y teniendo en cuenta que $EdE = pdp$

$$\Gamma = \frac{1}{2\pi^3} G^2 \cos^2\theta \left[|M_F|^2 + \lambda^2 |\vec{M}_{GT}|^2 \right] \int_{m_e}^{E_{max}} dE_e \, p_e E_e (E_{max} - E_e)^2 \qquad (1)$$

En realidad el electron saliente y el núcleo final interaccionan electromagneticamente y cuando esto es tenido en cuenta la ecuación anterior debe ser sustituida por

$$\Gamma = \frac{1}{2\pi^3} G^2 \cos^2\theta \left[|M_F|^2 + \lambda^2 |\vec{M}_{GT}|^2 \right] \int_{m_e}^{E_{max}} dE_e \, p_e E_e (E_{max} - E_e)^2 F(Z, E_e) \qquad (2)$$

donde $F(Z, E_e)$ viene dada aproximadamente por

$$F(Z, E_e) = \frac{2(s+1)}{|\Gamma(2s+1)|^2} (2 p_e R)^{2(s-1)} e^{\pi\nu} |\Gamma(s + i\nu)|^2 \qquad (3)$$

$$s \equiv \sqrt{1 - Z^2\alpha^2} \quad , \quad \nu = \frac{Z\alpha}{v_e} \quad , \quad R = \text{radio nuclear}$$

donde α es la constante de estructura fina. En general se introduce

$$f \equiv \frac{1}{m_e^5} \int_{m_e}^{E_{max}} dE_e \, p_e E_e (E_{max} - E_e)^2 F(Z, E_e) \qquad (4)$$

y entonces la vida media es

$$(f\tau)^{-1} = \frac{G^2 \cos^2\theta}{2\pi^3} \left[|M_F|^2 + \lambda^2 |\vec{M}_{GT}|^2 \right] m_e^5 \qquad (5)$$

En general la dificultad estriba en calcular los elementos de matriz nucleares. En algunos casos muy especiales esto es simple. Consideremos

$$^{14}_{6}O\,(0^+;\, gs) \longrightarrow {}^{14}_{7}N^*(0^+;\, 2.3) + e^- + \bar{\nu}_e \qquad (6)$$

En este caso $|\vec{M}_{GT}|^2 = 0$ y $|M_F|^2$ es inmediatamente calculable pues los dos estados forman parte de un triplete de $T = 1$ y $|M_F|^2 = 2$ con lo que

$$(f\tau)^{-1}_{^{14}O} = \frac{G^2 \cos^2\theta}{\pi^3} m^5 \qquad (7)$$

Se conocen otras desintegraciones análogas $^{26}Al^* \to {}^{26}Mg$, $^{34}Cl \to {}^{34}S$, ... y todas ellas vienen bien descritas por (7)

No vamos a analizar aquí los términos $V_\mu^{(1)}(x)$ y $A_\mu^{(1)}(x)$, si bien apunta-

remos que están ligados con los anteriores mediante la simetría SU(3) de la que hablaremos más adelante.

Podemos resumir todo esto diciendo que la teoría fenomenológica de Fermi, a la que se añaden los desarrollos posteriores mencionados antes, da buena cuenta de todos los datos existentes a bajas energías.

Es necesario observar, sin embargo, que en ocasiones su poder predictivo es escaso. Por ejemplo consideremos las transiciones no leptónicas

$$B\left(\tfrac{1}{2}^+;\, p\,\lambda\right) \rightarrow B_1\left(\tfrac{1}{2}^+;\, p_1,\lambda_1\right) + M\left(0^-;\, p_2\right) \tag{1}$$

Argumentos de covariancia nos permiten escribir como expresión más general para el elemento de matriz T

$$T = \bar{u}\left(\vec{p}_1,\lambda_1\right)\left[A - B\gamma_5\right] u\left(\vec{p}\,\lambda\right) \tag{2}$$

donde A y B son constantes desconocidas. Entonces, usando (VI-9.5) y teniendo en cuenta que

$$\overline{\sum_{\lambda}}\sum_{\lambda_1} |T|^2 = \frac{1}{2}\sum_{\lambda}\sum_{\lambda_1}\left[\bar{u}\left(\vec{p}_1,\lambda_1\right)\left(A - B\gamma_5\right) u\left(\vec{p}\,\lambda\right)\right]\left[\bar{u}\left(\vec{p}\,\lambda\right)\left(A^* + B^*\gamma_5\right) u\left(\vec{p}_1,\lambda_1\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left[\left(\not{p}_1 + M_1\right)\left(A - B\gamma_5\right)\left(\not{p} + M\right)\left(A^* + B^*\gamma_5\right)\right] = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left[\left(|A|^2 + |B|^2\right)\not{p}_1\not{p} + \left(|A|^2 - |B|^2\right) M M_1\right]$$

$$= 2\left\{\left[|A|^2 + |B|^2\right](p\cdot p_1) + \left[|A|^2 - |B|^2\right] M M_1\right\}$$

$$= \left[|A|^2 + |B|^2\right]\left(M^2 + M_1^2 - M_2^2\right) + 2\left[|A|^2 - |B|^2\right] M M_1 =$$

$$= |A|^2\left[(M + M_1)^2 - M_2^2\right] + |B|^2\left[(M - M_1)^2 - M_2^2\right]$$

se obtiene

$$\Gamma = \frac{\sqrt{\lambda\left(M^2, M_1^2, M_2^2\right)}}{16\pi M^3}\left(|A_S|^2 + |A_P|^2\right) \tag{3}$$

$$A_S = A\sqrt{(M + M_1)^2 - M_2^2}\,, \qquad A_P = B\sqrt{(M - M_1)^2 - M_2^2}$$

La razón de los subíndices S y P es la siguiente: El estado final tiene como posibles valores del momento angular orbital $L = 0, 1$. El estado $L=0$ (S) sólo es posible a través de la parte de la interacción que viola la paridad (término A) y el estado P sólo a través del que la conserva (término B).

Si se desean determinar A_s y A_p, es necesario medir los parámetros de asimetría que discutiremos a continuación. Para definir estos parámetros debemos tener en cuenta que el elemento de matriz T dado en (22.2) se puede escribir exactamente en un formalismo bispinorial, suponiendo que el barión inicial esté en reposo, como

$$T = [2M\,(E(\vec{p}_1) + M_1)]^{1/2}\, \alpha^+(p_1,\lambda_1)\left[A - B\,\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}_1}{E(\vec{p}_1)+M_1}\right]\alpha(\vec{p}\,\lambda)$$

y como

$$|\vec{p}_1| = \frac{1}{2M}\,\lambda(M^2, M_1^2, M_2^2) \qquad , \qquad E(p_1) = \frac{1}{2M}\,(M^2 + M_1^2 - M_2^2)$$

se obtiene

$$T = \alpha^+(p,\lambda_1)\left\{A_s + A_p\,\vec{\sigma}\cdot\hat{q}\right\}\alpha(\vec{p}\,\lambda) \tag{1}$$

donde $\hat{q} \equiv -\hat{p}_1/|p_1|$ es el vector unitario en la dirección del mesón saliente. Indicaremos por θ y ϕ los ángulos esféricos de $\hat{q}$. Teniendo en cuenta que

$$A_s + A_p\,\vec{\sigma}\cdot\hat{q} = \begin{vmatrix} A_s + A_p\cos\theta & A_p\sin\theta\, e^{-i\phi} \\ A_p\sin\theta\, e^{i\phi} & A_s - A_p\cos\theta \end{vmatrix}$$

se obtienen que los estados finales son

$$|\psi_f^+\rangle = (A_s + A_p\cos\theta)\,\alpha + A_p\sin\theta\, e^{i\phi}\,\beta \tag{2}$$

$$|\psi_f^-\rangle = A_p\sin\theta\, e^{-i\phi}\,\alpha + (A_s - A_p\cos\theta)\,\beta$$

según que el hyperon inicial esté totalmente polarizado en el sentido del tercer eje (+) o en sentido opuesto (-). La polarización inicial de los hyperones iniciales puede describirse por un vector polarización

$$\vec{P} = (W_+ - W_-)\,\hat{e}_3 \tag{3}$$

$$W_+ + W_- = 1$$

Entonces la dirección de los mesones emitidos así como la polarización del hyperón final pueden calcularse fácilmente teniendo en cuenta

$$N \propto W_+ \langle\psi_f^+|\psi_f^+\rangle + W_- \langle\psi_f^-|\psi_f^-\rangle \tag{4}$$

$$\langle \vec{\sigma} \rangle \propto W_+ \langle \psi_f^+ | \vec{\sigma} | \psi_f^+ \rangle + W_- \langle \psi_f^- | \vec{\sigma} | \psi_f^- \rangle$$

Entonces

$$\Gamma \propto 1 + \alpha \hat{q} \cdot \vec{P} \tag{1}$$

$$\langle \vec{\sigma} \rangle \propto (\alpha + \hat{q} \cdot \vec{P}) \hat{q} - \beta \hat{q} \times \vec{P} + \gamma (\hat{q} \times \vec{P}) \times \hat{q}$$

con

$$\alpha \equiv \frac{2 \, Re (A_S^* A_P)}{|A_S|^2 + |A_P|^2} \quad , \quad \beta \equiv \frac{2 \, Im (A_S^* A_P)}{|A_S|^2 + |A_P|^2} \quad , \quad \gamma \equiv \frac{|A_S|^2 - |A_P|^2}{|A_S|^2 + |A_P|^2} \tag{2}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

En ausencia de interacciones de estados finales y suponiendo que la interacción es invariante bajo inversión temporal $A_S^* = A_S$ y $A_P^* = A_P$ y por tanto $\beta = 0$.

El parámetro más fácil de medir es α puesto que de (1)

$$\alpha = \frac{N_{up} - N_{down}}{2 (N_{up} + N_{down})} \tag{3}$$

donde N_{up} [N_{down}] son el número de mesones producidos con $q^3 > 0$ ($q^3 < 0$)

Así tenemos por ejemplo

$$\Lambda \to p \pi^- \quad , \quad \Gamma = 1.598 (25) \times 10^{-12} \text{ MeV} \quad , \quad \alpha = 0.642 (13) \quad , \quad \gamma = 0.76$$

$$\Lambda \to n \pi^0 \qquad \Gamma = 0.895 (19) \times 10^{-12} \text{ MeV} \qquad \alpha = 0.65 (5) \quad , \quad \gamma = ? \tag{4}$$

De (2) y (23.3) se obtiene

$$\Lambda \to p \pi^- \qquad A_S = \pm 6.626 (72) \times 10^{-4} \text{ MeV} \qquad A_P = \pm 2.507 (26) \times 10^{-4} \text{ MeV}$$

$$\Lambda \to n \pi^0 \qquad A_S = \pm 4.87 (11) \times 10^{-4} \text{ MeV} \qquad A_P = \pm 1.80 (4) \times 10^{-4} \text{ MeV}$$

$$A_S = \pm 1.80 (4) \times 10^{-4} \text{ MeV} \qquad A_P = \mp 4.87 (11) \times 10^{-4} \text{ MeV}$$

Donde para $\Lambda \to n\pi^0$ hay dos soluciones al no haber sido medido γ. Invariancia bajo $SU_T(2)$ implica $A_i (p\pi^-) = -\sqrt{2} A_i (n\pi^0)$ y por tanto

$$\Lambda \to p \pi^- \qquad A_S = + 6.626 (72) \times 10^{-4} \text{ MeV} \qquad A_P = + 2.507 (26) \times 10^{-4} \text{ MeV}$$

$$\Lambda \to n \pi^0 \qquad A_S = - 4.87 (11) \times 10^{-4} \text{ MeV} \qquad A_P = - 1.80 (4) \times 10^{-4} \text{ MeV} \tag{5}$$

Antes de terminar queremos considerar los kaones neutros. En los procesos de producción, dominados totalmente por las interacciones fuertes y electromagnéticas, se conserva la extrañeza y se producen kaones neutros con extrañezas bien definidas : K^0 y $\bar{K}^0$ con $S=+1$ y $S=-1$, respectivamente. Si solo existiesen las interacciones fuertes y electromagnéticas $[H_S + H_{em}, S] = 0$ y los estados $|K^0\rangle$ y $|\bar{K}^0\rangle$ tendrían masas y vidas medias bien definidas. Sin embargo existen las interacciones débiles y $H \equiv H_S + H_{em} + H_W$ es tal que $[H, S] \neq 0$. y los estados propios de H con masa y vida media bien definida no pueden ser propios de S, en este caso, pues $|K^0\rangle$ y $|\bar{K}^0\rangle$ solo difieren en el valor de S. Indicaremos por $|K_S\rangle$ y $|K_L\rangle$ los estados de masas y vidas medias bien definidas que, sin pérdida de generalidad, podemos escribir como

$$|K_S\rangle = \frac{1}{[2(1+|\epsilon|^2)]^{1/2}} \left\{ (1+\epsilon)|K^0\rangle - (1-\epsilon)|\bar{K}^0\rangle \right\} \tag{1}$$

$$|K_L\rangle = \frac{1}{[2(1+|\epsilon'|^2)]^{1/2}} \left\{ (1+\epsilon')|K^0\rangle + (1-\epsilon')|\bar{K}^0\rangle \right\}$$

Si se supusiera que $[CP, H] = 0$ entonces $|K_S\rangle$ y $|K_L\rangle$ se pueden elegir como estados propios de CP y se ve inmediatamente que como $CP|K^0\rangle = -|\bar{K}^0\rangle$ y $CP|\bar{K}^0\rangle = -|K^0\rangle$ entonces $CP|K_S\rangle = |K_S\rangle$ y $CP|K_L\rangle = -|K_L\rangle$. En realidad en este proceso se ha observado una pequeña violación de CP. Si la simetría CPT es exacta entonces $\epsilon = \epsilon'$; pues si U es el operador antiunitario que implementa esta simetría

$$U|K^0(t)\rangle = U e^{-iHt}|K^0\rangle = e^{+iHt} U|K^0\rangle = e^{iHt}|\bar{K}^0\rangle = |\bar{K}^0(-t)\rangle \Rightarrow$$

$$\langle K^0|K^0(t)\rangle = \langle K^0|U^\dagger U|K^0(t)\rangle = \langle \bar{K}^0|e^{+iHt}|\bar{K}^0\rangle^* = \langle \bar{K}^0|e^{-iHt}|\bar{K}^0\rangle = \langle \bar{K}^0|\bar{K}^0(t)\rangle$$

Si de (1) escribimos $|K^0\rangle$ y $|\bar{K}^0\rangle$ en términos de $|K_S\rangle$ y $|K_L\rangle$, cuya evolución temporal es

$$|K_i(t)\rangle = e^{-iM_i t}|K_i\rangle \quad , \quad M_i \equiv m_i - \frac{i}{2}\Gamma_i \quad , \quad i = L, S \tag{2}$$

entonces se ve que $\epsilon = \epsilon'$. Experimentalmente se encuentra

$$\mathrm{Re}\,\epsilon = 1.63(6) \times 10^{-3} \qquad \arg\epsilon = 44.3(8)^\circ. \tag{3}$$

y además

$$M_{K_L} - M_{K_S} = 3.510(18)\ 10^{-12}\ \mathrm{MeV} \tag{4}$$

Sus principales modos de desintegración son

K_S^0 $\qquad \tau = 0.8926(12) \times 10^{-10}$ s

$K_S^0 \to$	$\pi^+\pi^-$	68.61 (28) %
	$\pi^0\pi^0$	31.39 (28) %

K_L^0 $\qquad \tau = 5.17(4) \times 10^{-8}$ s

$K_L^0 \to$	$\pi^0\pi^0\pi^0$	21.6 (8) %
	$\pi^+\pi^-\pi^0$	12.38 (21) %
	$\pi^\pm \mu^\mp \nu$	27.0 (4) %
	$\pi^\pm e^\mp \nu$	38.7 (5) %
	$\pi^+\pi^-$	$2.03(4) \times 10^{-3}$
	$\pi^0\pi^0$	$9.14(34) \times 10^{-4}$

El hecho de que K_L^0 se desintegre en 2π es la clara indicación de violación de CP, que como hemos dicho es muy pequeña. Hasta hoy día en la desintegración de $K^0, \bar{K}^0$ es en el único lugar en que ha aparecido la violación de CP.

VIII - LEPTONES, QUARKS E INTERACCIONES

Antes hemos hablado de leptones y hadrones. Creemos que los leptones son partículas fundamentales o elementales en el sentido que si tienen estructura su tamaño es menor que 10^{-3} fm, aproximadamente. Sabemos hoy día que los hadrones están formados por quarks, que también son elementales en el sentido anterior. Repasemos algunas propiedades de los leptones y quarks.

Leptones. Existen tres familias de leptones (ℓ, ν_ℓ), $\ell = e, \mu, \tau$. Todas ellas son elementales y tienen spin 1/2. Las partículas ℓ (electrón, muón, tauón) tiene carga e, siendo e la carga del electron, mientras que los ν_ℓ (neutrinos electrónico, muónico, tauónico) tienen carga eléctrica nula. Los leptones no son sensibles a las interacciones fuertes. Se definen unos números cuánticos leptónicos L_ℓ que son $L_\ell = +1$ para el (ℓ, ν_ℓ) y cero para todas las demás partículas. Obviamente $L_\ell = -1$ para $(\bar{\ell}, \bar{\nu}_\ell)$. Los tres números L_ℓ son independiente y aditivamente conservados en todas las interacciones. Se tiene

e $\quad m = 0.511\,099\,906\,(15)$ MeV $\quad \tau \geq 2.7 \times 10^{23}$ años

μ $\quad m = 105.658\,389\,(34)$ MeV $\quad \tau = 2.197\,03\,(4) \times 10^{-6}$ s

$\mu \to e\, \bar{\nu}_e\, \nu_\mu \quad 100\,\%$ (1)

τ $\quad m = 1777.1\,(5)$ MeV $\quad \tau = 2.956\,(31) \times 10^{-13}$ s

Debido a su gran masa muchos canales finales son posibles

$\tau \to$ (partícula$^-$), neutros ≥ 0, $\nu_\tau \quad 85.49\,(24)\,\%$

$\tau \to$ (2 partículas $-$, 1 partícula $+$), neutros ≥ 0, $\nu_\tau \quad 14.38\,(24)\,\%$.

ν_e $\quad m \leq 7$ eV

ν_μ $\quad m \leq 0.27$ MeV (2)

ν_τ $\quad m \leq 31$ MeV

En los desarrollos teóricos que aquí presentaremos se tomará $m_{\nu_\ell} \equiv 0$. Mucho

esfuerzo se ha dedicado a determinar la masa del neutrino, con los resultados dados en (1.2). El problema es importante incluso desde un punto de vista cosmológico: sabemos que el modelo cosmológico standard permite explicar la existencia de una radiación cósmica de fondo a una temperatura 2.726 (5) K. y el número de fotones por unidad de volumen es

$$n_\gamma = 2\,\frac{\zeta(3)}{\pi^2}\left(\frac{kT}{c\hbar}\right)^3 = 411.0\ (23)\ \text{fotones}/\text{cm}^3 \qquad (1)$$

En este modelo cosmológico se predice la existencia de una radiación de fondo formada por neutrinos a una temperatura $T_\nu = (4/11)^{1/3} T = 1.946\ (5)$ K. El número de neutrinos por unidad de volumen es

$$n_\nu = 1\,\frac{3}{4}\,\frac{\zeta(3)}{\pi^2}\left(\frac{kT}{c\hbar}\right)^3 2N_\nu = 112.18\ (69)\ N_\nu \ \text{neutrinos}/\text{cm}^3 \qquad (2)$$

donde $N_\nu = 3$ es el número de familias del tipo mencionado. Incluso con masas relativamente pequeñas estos neutrinos podrían resolver el problema de la materia oscura o por lo menos ayudar a su solución. En efecto sabemos que la densidad del Universo es $0.1\,\rho_c \leq \rho_0 \leq 2\,\rho_c$, siendo la densidad crítica

$$\rho_c = 1.053\ 95\ (13)\, h_0^2\, 10^{-2}\ \text{MeV}/\text{cm}^3 \qquad (3)$$

donde h_0 es la constante de Hubble normalizada $0.5 < h_0 < 0.85$. La cota inferior de ρ_0 proviene de la distribución bariónica en el Universo y la cota superior proviene del parámetro de desaceleración. Los neutrinos contribuirían a la densidad de masa en $0.9\,\rho_0$ si

$$\sum_e m_{\nu_e} \simeq 84\, h_0^2\ \text{eV} \qquad (4)$$

Evidente los neutrinos son muy difíciles de ser detectados; basta recordar (VII-7.1) que es una sección eficaz extraordinariamente pequeña.

El electrón fué descubierto por J.J. Thomson, en 1899; el muón por S.H. Neddermeyer y C.D. Anderson, en 1937; el τ por M.L. Perl et al, en 1975. Los datos experimentales sobre la desintegración del Z^0, indican que existen tres y solo tres familias leptónicas del tipo considerado.

La existencia del neutrino electrónico fue postulada por W. Pauli en una carta,

fechada en Zürich el 04/12/1930, dirigida a una reunión de físicos que tenía lugar en Tübingen:

"Queridos Sres y Sras radioactivos:

Como el portador de estas líneas, a quien les pido que escuchen amablemente, explicará con más detalle, considerando la "falsa" estadística de los núcleos N-14 y Li-6, así como también el espectro β continuo, he encontrado un remedio desesperado para salvar el "teorema de intercambio" de la estadística y el teorema de la energía. A saber, la posibilidad de que pudieran existir en el núcleo partículas eléctricamente neutras que desco llamar neutrones, que tienen spin 1/2 y obedecen el principio de exclusión, y que además difieren de los quanta de luz en que no se mueven con la velocidad de la luz: La masa del neutrón debe ser del mismo orden de magnitud que la masa del electrón y, en cualquier caso, no mayor que 0.01 la masa del protón. El espectro β continuo sería comprensible con la hipótesis de que en la desintegración β un neutrón es emitido juntamente con el electrón, de tal forma que la suma de las energías del neutrón y del electrón es constante...."

Fueron C.L. Cowen, F. Reines y col. los que, en 1956, detectaron por primera vez $\bar{\nu}_e$ usando el reactor nuclear de Savanna River

$$\left.\begin{array}{l} \bar{\nu}_e + p \longrightarrow n + e^+ \\ e^+ + Cd \longrightarrow Cd + \gamma \end{array}\right\} \text{coincidencia de } 3\gamma.$$

$$e^+ + e \longrightarrow 2\gamma$$

En 1962, J. Steinberger y colaboradores comprobaron experimentalmente que $\nu_\mu \neq \nu_e$. Si $\nu_\mu \equiv \nu_e$ entonces la reacción $\nu_\mu + n \to p + e$ podría tener lugar y lo único que observaban era $\nu_\mu + n \to p + \mu$. Hoy día también se sabe que $\nu_\mu \neq \nu_e$ y probablemente $\nu_e \neq \bar{\nu}_e$.

Quarks

En el marco de la teoría electrodébil que, como veremos, describe conjuntamente las interacciones débiles y electromagnéticas a cada familia de leptones le corresponde una familia de quarks (Q_i, Q_i') $i = 1, 2, 3$. Todos estos quarks tienen spin-paridad $1/2^+$, los Q_i tienen carga $2|e|/3$ y los Q_i' tienen carga eléctrica $-|e|/3$, donde e es la carga del electrón. Por otra parte todos ellos tienen número bariónico $B = 1/3$. De lo antes dicho $(\bar{Q}_i, \bar{Q}_i')$ tienen

spin-paridad $1/2^+$ y todas las cargas tienen signo opuesto. Estas tres parejas de quarks se suelen denotar como

(u , d)	u ≡ up	d ≡ down
(c , s)	c ≡ charm	s ≡ strange
(t , b)	t ≡ top	b ≡ bottom

(1)

El modelo quark fue introducido, en 1964, de forma independiente por M. Gell-Mann y G. Zweig, que postularon la existencia de los quarks u, d y s para describir todos los hadrones, conocidos en aquel entonces, como estados ligados de quarks y antiquarks. La comunidad científica, en palabras de Zweig, contesto: "La reacción de los físicos teóricos al modelo quark no fue benigna. La idea de que los hadrones estuvieran compuestos de partículas elementales con números cuánticos fraccionales parecía demasiado descabellada". En realidad Zweig no logró nunca publicar su trabajo. La realidad física de los quarks se hizo patente a finales de la década de los sesenta gracias a experimentos de colisiones profundamente inelásticas (deep inelastic scattering) $e + p \to e + X$, donde X podía ser cualquier cosa. Al formularse la teoría electrodébil es necesario postular el c y B. Richter, en el M.I.T., y S. Ting, en SLAC-LBL, confirmaron en 1974 su existencia. El descubrimiento del τ esto es una nueva familia de leptones implicaba la existencia del t y del b. El bottom fue descubierto, en 1977, en el Fermilab en 1977 y en el mismo lugar fue descubierto el t en 1994.

Todos los mesones conocidos son estados ligados de un quark y un antiquark y por tanto B = 0 y J = entero. Similarmente todos los bariones (antibariones) conocidos son estados ligados de tres quarks (antiquarks) y por tanto J = semi-impar y B = +1 (B = -1).

En las interacciones fuertes no cambia el tipo de quark y esto queda garantizado asignando a cada uno de ellos un número cuántico aditivamente conservado que se eligen de forma que se cumpla la fórmula de Gell-Mann-Nishijima debidamente ampliada

$$Q = T_3 + \frac{1}{2}(B + S + E + b + t) \qquad (2)$$

Para todos los quarks $B = 1/3$. Para los quarks u y d se tiene que $S = C = b = t = 0$, $T_3 = +1/2$ y $T_3 = -1/2$, respectivamente. Para los otros matro quarks: s tiene $S = -1$, c tiene $c = +1$, b tiene $b = -1$ y t tiene $t = +1$ y en cada caso son cero los restantes cinco números cuánticos. En los procesos de producción de partículas mediados por las interacciones fuertes y/o electromagnéticas todos ellos son conservados.

Consideremos con algo más de detalle los mesones, que como hemos dicho son estados ligados quark - antiquark. Supondremos que el comportamiento de los quarks dentro de un hadrón es describible mediante una ecuación de Schrödinger. En la notación $^{2S+1}L_J$, se tiene que si los dos partículas están ligadas en onda L los mesones pueden estar en los estados

$$\begin{aligned} L = 0 \quad &: \quad {}^3S_1 \,, \quad {}^1S_0 \\ L \neq 0 \quad &: \quad {}^3L_{L-1} \,, \quad {}^3L_L \,, \quad {}^3L_{L+1} \,, \quad {}^1L_L \end{aligned} \tag{1}$$

Además como un quark y un antiquark tienen paridades opuestas la paridad del mesón es

$$\Pi = (-1)^{L+1} \tag{2}$$

Si U_C es el operador que implementa la conjugación partícula - antipartícula, para mesones neutros se tiene

$$U_C \, | q\bar{q} \rangle = | \bar{q} q \rangle = - (-1)^L (-1)^{S+1} \, | q\bar{q} \rangle = (-1)^{L+S} \, | q\bar{q} \rangle \tag{3}$$

Entonces en este modelo no relativista y con C definido sólo para mesones neutros no son posibles mesones con

$$J^{PC} = 0^{--} \,, \quad (par)^{+-} \,, \quad (impar)^{-+} \tag{4}$$

Estos son los llamados mesones exóticos de segunda clase y no hay evidencia sobre su existencia. Para un sistema quark - antiquark dado es de esperar que los estados de menor masa correspondan a $L = 0$ y por tanto $J^{PC} = 0^{-+}, 1^{--}$. Argumentos muy generales permiten asegurar que el fundamental es el 0^{-+}.

Este modelo tan simple cosechó muchos éxitos, pero pronto apareció una grave dificultad. Existe un barión llamado $\Delta(1232)$ con $T = 3/2$, $J^P = 3/2^+$ que tiene una masa

de alrededor de 1232 MeV y $\Gamma \simeq 120$ MeV, que se desintegra, vía interacciones fuertes, en un sistema $N\pi$. Consideremos el estado Δ^{++} de esta resonancia que es el sistema más ligero conocido de un estado ligado (uuu). Entonces en el modelo quark que acabamos de describir su función de onda estará formada por $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) \times$ (parte de spin). Se puede probar, bajo condiciones muy generales, que en el estado fundamental la parte espacial de la función de ondas es totalmente simétrica y por tanto es de esperar que en el Δ^{++} la parte espacial lo sea. Consideremos ahora su estado cuando la tercera componente del momento angular total sea $M = +3/2$. Entonces el estado de spin es $|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle$, que es totalmente simétrico. Entonces la función de ondas del sistema de tres partículas fermiónicas es totalmente simétrica violándose el teorema de conexión spin-estadística, muy bien fundamentado teóricamente.

M.Y. Han y Y. Nambu resolvieron este problema dando a cada quark un nuevo número cuántico con tres valores posibles; con ello se logra que si cada uno de los quarks de un barión tiene este nuevo número cuántico distinto, la función de ondas se puede hacer totalmente antisimétrica y el problema físico desaparece. Este nuevo número cuántico se suele conocer con el nombre de color. Para los tres valores del número cuántico se suelen adoptar los tres colores rojo, verde y azul; los antiquarks tienen anticolores, que pueden representarse mediante los complementarios de los anteriores: cian, magenta y amarillo. Por supuesto, ninguno de estos términos tiene relación alguna con su significado convencional, son nombres totalmente arbitrarios.

Indiquemos por $q_\alpha^A(x)$ los campos de los quarks, donde el índice $A = 1, 2, \ldots, N_f$ se refiere al aroma (flavor), $q_\alpha^1(x) = u$, $q_\alpha^2(x) = d$, $q_\alpha^3(x) = c$, $q_\alpha^4(x) = b$, $q_\alpha^5(x) = t$, $q_\alpha^6(x) = b$. El índice $\alpha = 1, 2, \ldots, N$ se refiere a los grados de libertad de color: $q_1^A(x)$ = rojo, $q_2^A(x)$ = azul y $q_3^A(x)$ = verde. Como es usual para campos de spin $1/2$, la densidad Lagrangiana para quarks libres sin masa puede escribirse

$$\mathcal{L}_0(x) = \frac{i}{2}\,\bar{q}_\alpha^A(x)\,\gamma^\mu\,[\partial_\mu q_\alpha^A(x)] - \frac{i}{2}\,[\partial_\mu \bar{q}_\alpha^A(x)]\,\gamma^\mu\, q_\alpha^A(x) \qquad (1)$$

donde se sobreentiende una suma sobre A y α.

Indiquemos por $SU(N)$ el grupo formado por las matrices de orden N que son unitarias ($UU^+ = U^+U = I$) y unimodulares ($\det U = 1$). Este grupo está caracterizado por N^2-1 parámetros. Indicaremos por T_a ($a=1,2,\ldots N^2-1$) los generadores de $SU(N)$, cuya álgebra de Lie cerrada es

$$[\, T_a, T_b \,] = i f_{abc} T_c \qquad (1)$$

$$Tr\,[\, T_a \,] = 0$$

donde f_{abc} son reales y totalmente antisimétricos y los supondremos normalizados de la forma

$$f_{abc} f_{abc} = N \delta_{ad} \qquad (2)$$

Esto no es más que la generalización de resultados bien conocidos para $SU(2)$, en cuyo caso $f_{abc} = \epsilon_{abc}$ (tensor de Levi-Civitta). Como

$$[\,[\, T_a, T_b \,], T_c \,] + [\,[\, T_b, T_c \,], T_a \,] + [\,[\, T_c, T_a \,], T_b \,] = 0 \qquad (3)$$

se obtiene inmediatamente que

$$f_{abe} f_{cde} + f_{ace} f_{dbe} + f_{ade} f_{bce} = 0 \qquad (4)$$

La <u>representación adjunta</u> (regular) viene dada por

$$(T_a)_{bc} = -i f_{abc} \qquad (5)$$

y son por tanto matrices de orden (N^2-1). La <u>representación fundamental</u>, que es la de orden más bajo posible, viene dada por

$$T_a = \frac{1}{2} \lambda_a \qquad (6)$$

donde λ_a son hermíticas, sin traza y de orden N.

Para $SU(3)$ las matrices λ_a pueden elegirse

$$\lambda_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{vmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \lambda_4 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\lambda_5 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \lambda_7 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{vmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \qquad (7)$$

Entonces los únicos f_{abc} distintos de cero (salvo antisimetría) son

$$f_{123} = +1$$

$$f_{147} = -f_{156} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = -f_{367} = +\frac{1}{2} \tag{4}$$

$$f_{458} = f_{678} = +\frac{\sqrt{3}}{2}$$

La densidad Lagrangiana (6.1) es obviamente invariante bajo el grupo $SU_c(N)$ que actúa sobre los índices de color

$$q^A_\alpha(x) \longrightarrow q'^A_\alpha(x) = G_{\alpha\beta}\, q^A_\beta(x) = \left\{ e^{-ig\, T_a\, \theta_a} \right\}_{\alpha\beta} q^A_\beta(x) \tag{2}$$

donde θ_a son constantes reales, g es una constante de acoplamiento real y T_a son los generadores de $SU_c(N)$ en su representación fundamental. Supongamos ahora que la transformación global (2) la convertimos en local al considerar θ_a como funciones reales $\theta_a(x)$. Entonces bajo (2)

$$L_0(x) \longrightarrow L'_0(x) = L_0(x) + \frac{i}{2}\, \bar{q}^A_\alpha(x)\, \gamma_\mu \left[G^+(x)\, \partial^\mu G(x) \right]_{\alpha\beta} q^A_\beta(x) -$$

$$- \frac{i}{2}\, \bar{q}^A_\alpha(x)\, \gamma_\mu \left[\left[\partial^\mu G^+(x) \right] G(x) \right]_{\alpha\beta} q^A_\beta(x) \tag{3}$$

Para obtener una densidad Lagrangiana que sea invariante bajo transformaciones de gauge locales se debe sustituir en (6.1) la derivada usual ∂^μ por una covariante

$$\delta_{\alpha\beta}\, \partial^\mu \longrightarrow D^\mu{}_{\alpha\beta} \equiv \delta_{\alpha\beta}\, \partial^\mu - ig\, (T^a)_{\alpha\beta}\, B^\mu_a(x) \tag{4}$$

donde $B^\mu_a(x)$ son los (N^2-1) campos gluónicos. La nueva densidad Lagrangiana será invariante bajo transformaciones de gauge locales si $q^A_\alpha(x)$ y $D^\mu_{\alpha\beta}\, q^A_\beta(x)$ se transforman de la misma forma

$$q^A_\alpha(x) \longrightarrow q'^A_\alpha(x) = G(x)_{\alpha\beta}\, q^A_\beta(x)$$

$$D^\mu_{\alpha\beta}\, q^A_\beta(x) \longrightarrow D'^\mu_{\alpha\beta}\, q'^A_\beta(x) = G(x)_{\alpha\gamma}\, D^\mu_{\gamma\delta}\, q^A_\delta(x) \tag{5}$$

donde $D'^\mu_{\alpha\beta}$ indica (4) con $B^\mu_a(x)$ sustituido por el campo transformado $B'^\mu_a(x)$. De esta última exigencia se obtiene inmediatamente que

$$(T^a)_{\alpha\beta}\, B'^{\mu}_{a}(x) = G_{\alpha\beta}(x)\, T^a_{\beta\gamma}\, B^{\mu}_{a}(x)\, G^{*}_{\beta\gamma}(x) - \frac{i}{g}\,[\partial^{\mu} G_{\alpha\gamma}(x)]\, G^{*}_{\beta\gamma}(x) \qquad (1)$$

De (8.4) y (8.5) las leyes de transformación bajo transformaciones de gauge infinitesimales locales resultan ser

$$\begin{aligned} q^{A}_{\alpha}(x) &\longrightarrow q'^{A}_{\alpha}(x) = q^{A}_{\alpha}(x) - i g\, T^{a}_{\alpha\beta}\, \delta\theta_a(x)\, q^{A}_{\beta}(x) \\ B^{\mu}_{a}(x) &\longrightarrow B'^{\mu}_{a}(x) = B^{\mu}_{a}(x) + g\, f_{abc}\, \delta\theta_b(x)\, B^{\mu}_{c}(x) - \partial^{\mu}\delta\theta_a(x) \end{aligned} \qquad (2)$$

donde $\delta\theta_a(x)$ son las funciones infinitesimales que caracterizan la transformación. Por este procedimiento hemos construido una densidad Lagrangiana que es invariante bajo transformaciones de gauge locales

$$\begin{aligned} L(x) &= \frac{i}{2}\, \bar{q}^{A}_{\alpha}(x)\, \gamma_{\mu}\, [D^{\mu}_{\alpha\beta}\, q^{A}_{\beta}(x)] - \frac{i}{2}\, [D^{\mu *}_{\beta\alpha}\, \bar{q}^{A}_{\beta}(x)]\, \gamma_{\mu}\, q^{A}_{\beta}(x) = \\ &= \frac{i}{2}\, \bar{q}^{A}_{\alpha}(x)\, \gamma_{\mu}\, [\partial^{\mu} q^{A}_{\alpha}(x)] - \frac{i}{2}\, [\partial^{\mu} \bar{q}^{A}_{\alpha}(x)]\, \gamma_{\mu}\, q^{A}_{\alpha}(x) + \frac{1}{2}\, g\, \bar{q}^{A}_{\alpha}(x)\, \lambda^{a}_{\alpha\beta}\, \gamma_{\mu}\, q^{A}_{\beta}(x)\, B^{\mu}_{a}(x) \end{aligned} \qquad (3)$$

que describe los campos de los quarks sin masa y sus interacciones con dos campos gluónicos con una constante de acoplamiento universal g que es real y adimensional.

En ocasiones es útil introducir una notación más compacta

$$B^{\mu}(x) \equiv i g\, T_a\, B^{\mu}_{a}(x) \quad , \quad D^{\mu} \equiv I\,\partial^{\mu} - B^{\mu}(x) \qquad (4)$$

donde ahora B^{μ} y D^{μ} son matrices $N \times N$ y I es la matriz unidad correspondiente. Usando esta notación las transformaciones anteriores se escriben

$$\begin{aligned} q^{A}(x) &\longrightarrow q'^{A}(x) = G(x)\, q^{A}(x) \\ D^{\mu}\, q^{A}(x) &\longrightarrow D'^{\mu}\, q'^{A}(x) = G(x)\, D^{\mu}\, q^{A}(x) \\ D^{\mu} &\longrightarrow D'^{\mu} = G(x)\, D^{\mu}\, G^{-1}(x) \\ B^{\mu}(x) &\longrightarrow B'^{\mu}(x) = G(x)\, B^{\mu}(x)\, G^{-1}(x) + [\partial^{\mu} G(x)]\, G^{-1}(x) \end{aligned} \qquad (5)$$

donde $q^{A}(x)$ es una matriz columna con elementos $q^{A}_{\alpha}(x)$ y $G(x)$ una matriz $N \times N$ con elementos $G_{\alpha\beta}(x)$.

La densidad Lagrangiana (3) no fija las ecuaciones del movimiento de los campos

gluones y por tanto, sin destruir la invariancia gauge local, se deben añadir algunos términos para completar la teoría. Para esto definamos el tensor antisimétrico de intensidad de campo $F^{\mu\nu}(x)$

$$F^{\mu\nu}(x) \equiv -[D^\mu, D^\nu] = \partial^\mu B^\nu(x) - \partial^\nu B^\mu(x) - [B^\mu(x), B^\nu(x)] \tag{1}$$

Sus componentes se definen como

$$F^{\mu\nu}(x) \equiv ig T_a F_a^{\mu\nu}(x) \tag{2}$$

$$F_a^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu B_a^\nu(x) - \partial^\nu B_a^\mu(x) + g f_{abc} B_b^\mu(x) B_c^\nu(x)$$

donde el último término refleja el carácter no abeliano de $SU(N)_c$. Teniendo en cuenta la ley de transformación de D^μ (9.5) y la definición (1)

$$F^{\mu\nu}(x) \longrightarrow F'^{\mu\nu}(x) = G(x) F^{\mu\nu}(x) G^{-1}(x) \tag{3}$$

Entonces

$$Tr[F^{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x)] = -\frac{1}{2} g^2 F_a^{\mu\nu}(x) F^a_{\mu\nu}(x) \tag{4}$$

es un escalar bajo las transformaciones de Poincaré y además es invariante bajo las transformaciones de gauge locales. Se puede por tanto añadir a (9.3) un término proporcional a (4) y así obtener

$$L(x) = \frac{1}{2g^2} Tr[F^{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x)] + \frac{i}{2} \bar{q}^A(x) \gamma^\mu [D_\mu q^A(x)] - \frac{i}{2} [\overline{D^\mu q^A(x)}] \gamma_\mu q^A(x) \tag{5}$$

que describe los términos cinéticos para quarks y gluones sin masa y las interacciones quark-gluón y gluón-gluón en términos de una única constante de acoplamiento g. Es imposible dar masa a los gluones sin romper la invariancia gauge local, pero se pueden añadir términos másicos para los campos de los quarks sin romper la invariancia gauge local. Se puede probar entonces que (5) con masas para los quarks es

$$\begin{aligned} L(x) = &-\frac{1}{4}[\partial_\mu B_\nu^a(x) - \partial_\nu B_\mu^a(x)][\partial^\mu B_a^\nu(x) - \partial^\nu B_a^\mu(x)] + \frac{i}{2} \bar{q}_\alpha^A(x) \gamma^\mu [\partial_\mu q_\alpha^A(x)] \\ &- \frac{i}{2} [\partial_\mu \bar{q}_\alpha^A(x)] \gamma^\mu q_\alpha^A(x) - m_A \bar{q}_\alpha^A(x) q_\alpha^A(x) + \\ &+ \frac{1}{2} g \bar{q}_\alpha^A(x) \lambda^a_{\alpha\beta} \gamma^\mu q_\beta^A(x) B_a^\mu(x) - \frac{1}{2} g f_{abc} [\partial_\mu B_\nu^a(x) - \partial_\nu B_\mu^a(x)] B_b^\mu(x) B_c^\nu(x) \\ &- \frac{1}{4} g^2 f_{abc} f_{ade} B_\mu^b(x) B_\nu^c(x) B_\alpha^\mu(x) B_\beta^\nu(x) \end{aligned} \tag{6}$$

que es el famoso lagrangiano de la cromodinámica cuántica (Q.C.D). El primer término de presenta el término cinético para los (N^2-1) campos gluónicos sin masa; los tres términos siguientes corresponden a los términos cinéticos de los campos de los quarks con la posibilidad de una masa distinta para cada aroma; el quinto término descube la interacción de los quarks con los gluones en la que los quarks pueden cambian color pero no aroma; los dos últimos términos describen los interacciones entre gluones debidas al caracter no abeliano de $SU_c(N)$. Notar que el caracter no abeliano de este grupo es el responsable de que todos los aromas de quarks se acoplen a los gluones con la misma constante de acoplamiento.

Antes de continuar consideremos algunas simetrías globales de nuestra densidad lagrangiana

i) $U_B(1)$

La densidad Lagrangiana (10.6) es invariante con respecto a las transformaciones uniparamétricas

$$q(x) \longrightarrow q'(x) = e^{-i\theta I} q(x) \tag{1}$$

donde θ es una constante real e I es la matriz unidad en los espacios de color y aroma. A esta transformación de gauge global se le puede asociar, vía el teorema de Noether, una corriente bariónica

$$J^\mu(x) \equiv \frac{1}{N} \bar{q}^A_\alpha(x) \gamma^\mu q^A_\alpha(x) \tag{2}$$

donde la suma sobre A y α se sobreentiende. Esta corriente es conservada $\partial_\mu J^\mu(x) = 0$ y la carga asociada

$$B \equiv \int d^3x \, J^0(t, \vec{x}) \tag{3}$$

es la carga bariónica, generadora de $U_B(1)$, que es una constante del movimiento.

ii) $U_1(1) \otimes U_2(1) \otimes \cdots \otimes U_{N_f}(1)$

La densidad Lagrangiana (10.6) es invariante con respecto a cada uno de los

conjuntos de las transformaciones uniparamétricas

$$q^A(x) \longrightarrow q'^A(x) = e^{-i\theta_A I} q^A(x) \qquad A = 1, 2, \ldots, N_f \tag{1}$$

donde θ_A es una constante real e I es la matriz unidad en el espacio de color. Para cada aroma A hay asociada una simetría global $U_A(1)$ y por tanto nuestro Lagrangiano es invariante bajo el grupo $U_1(1) \otimes U_2(1) \otimes \ldots \otimes U_{N_f}(1)$. Las corrientes asociadas son

$$J^A_\mu(x) \equiv \bar{q}^A_\alpha(x)\, \gamma_\mu\, q^A_\alpha(x) \quad , \qquad A = 1, 2, \ldots, N_f \tag{2}$$

donde hay una suma sobre los índices de color α. Estas corrientes son conservadas y las cargas correspondientes son los generadores del grupo. Estas simetrías corresponden a la conservación de cada uno de los aromas en las interacciones fuertes.

Notar además que si $m_i = m_j$ entonces $L(x)$ es invariante bajo un grupo $SU(2)$ que actúa sobre el espacio $(q_i(x), q_j(x))$. Si todas las masas fueran iguales entonces $L(x)$ sería invariante bajo un grupo $SU(N_f)$.

La QCD creemos que es la teoría de las interacciones fuertes y vemos, por tanto, que la interacción entre los quarks viene mediada por el intercambio de 8 gluones (de spin-paridad 1^-) y sin masa. De la misma forma que en Q.E.D la interacción electromagnética viene mediada por el intercambio de un fotón sin masa. Debido al carácter no abeliano de $SU(3)$ todos los quarks se acoplan a los gluones mediante una constante universal g, lo cual no sucede en el electromagnetismo (grupo $U(1)$) donde cada partícula se acopla con su carga, que en principio puede ser arbitraria. El carácter no abeliano de $SU(3)$ es el responsable de la interacción directa entre gluones, que no tiene lugar entre fotones. La teoría así construida es renormalizable, esto es todos los infinitos que aparecen en la teoría pueden ser reabsorbidos mediante una redefinición de la constante de acoplamiento y de las masas.

En teoría cuántica de campos solo sabemos hacer cálculos usando teoría de perturbaciones. En Q.E.D. donde la constante de acoplamiento es la carga del electrón se desarrolla en serie de potencias de

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} : 1 / 137.03598\,95(61) \tag{2}$$

La situación es algo más compleja por el hecho de que en teoría cuántica de campos el vacío es un objeto muy peculiar. En Q.E.D. el vacío se define por la propiedad de que todos los estados de energía negativa están ocupados y los de energía positiva están vacíos. Si tenemos un fotón suficientemente energético este es capaz de arrancar un electrón de un nivel de energía negativa y pasando a un nivel de energía positiva, creando un par partícula - agujero (par electrón - positrón). Este par acabará aniquilandose y producirá un fotón que creará un nuevo par. En el mundo cuántico en el que $\Delta E \Delta t > \hbar$ durante tiempos cortos pueden crearse pares en el vacío. El vacío está por tanto constantemente poblado por pares virtuales electrón - positrón, comportándose en un medio dieléctrico; un medio que apantalla parcialmente las cargas. El apantallamiento es más efectivo a grandes distancias puesto que intervienen en el apantallamiento más pares virtuales. Se puede probar que para una energía $\sqrt{s}$ el desarrollo tiene lugar en realidad en potencias de una constante efectiva $\alpha(s)$ que viene dada aproximadamente por

$$\alpha(s) = \frac{\alpha}{1 - N_f \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{s}{m_e^2}} \qquad (1)$$

donde m_e es la masa del electrón, y N_f es el número de leptones cargados con masa masa tal que $2m \leq \sqrt{s}$. Para energías en el LEP, $s = M_z^2$ y $\alpha(M_z^2) = 1/129$. Vemos pues que $\alpha(s)$ crece con la energía.

En Q.C.D. la situación es distinta pues $\alpha_s \equiv g^2/4\pi$ viene dada aproximadamente por

$$\alpha_s(s) = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{1 - \frac{\alpha_s(\mu^2)}{3\pi} \beta \ln \frac{s}{\mu^2}} \qquad (2)$$

$$\beta = \frac{1}{3} N_f - \frac{11}{2}$$

donde μ es una escala de energía elegida arbitrariamente. Vemos que si $N_f < 16$, entonces $\beta > 0$ y $\alpha_s(s)$ tiende hacia cero cuando $s \to \infty$. Esta propiedad se llama <u>libertad asintótica</u> y permite hacer cálculos perturbativos a altas energías en Q.C.D. A bajas energías la constante de acoplamiento es grande y no se pueden hacer cálculos perturbativos y se tiene que recurrir a otros procedimientos

para obtener información sobre las predicciones de la teoría. Con métodos perturbativos se pueden hacer cálculos para $\sqrt{s} \gtrsim 1\,GeV$, como mucho. Métodos no perturbativos permiten demostrar que a nuestro alrededor los quarks están confinados dentro de los hadrones y no pueden ser encontrados como partículas libres.

Nos queda aún el problema de cuales son las masas m_q de los distintos quarks. Es un problema complejo pues los quarks no aparecen como partículas libres y ya hemos dicho que están confinados dentro de los hadrones. No vamos a intentar aquí definir las masas de los quarks y daremos unos valores que se usan normalmente en la literatura

$$m_u = 2 - 8\ MeV \quad , \quad m_d = 5 - 15\ MeV \quad , \quad m_s = 100 - 300\ MeV \tag{4}$$

$$m_c = 1.0 - 1.6\ GeV \quad , \quad m_b = 4.1 - 4.5\ GeV \quad m_t = 176 \pm 13\ GeV$$

En el modelo quark primitivo se usaban los llamados <u>masas constituyentes</u> que son las masas que tienen los quarks confinados dentro de los hadrones. y que se usaban para explicar las masas de los hadrones y cuya relación con las (1) no es posible dentro de nuestros conocimientos de Q.C.D.

Si bien m_u y m_d son distintas, sus masas son muy pequeñas comparadas con todas las masas de los hadrones y este hecho implica que no pasa nada si en (10.6) hacemos $m_u = m_d = 0$ y por tanto de acuerdo con lo antes discutido existiría un grupo $SU(2)$ que actuara sobre el espacio $(u^a(x), d^a(x))$ que es el llamado grupo de isospin $SU_T(2)$ y en esta aproximación es una simetría exacta de las interacciones fuertes. En esta notación de $SU_T(2)$

$$|u\rangle \equiv |1/2\ 1/2\rangle \qquad |d\rangle \equiv |1/2\ -1/2\rangle \tag{2}$$

$$|\bar{d}\rangle \equiv |1/2\ 1/2\rangle \qquad |\bar{u}\rangle = -|1/2\ -1/2\rangle$$

Teniendo en cuenta los números cuánticos de los piones

$$|\pi^+\rangle = |u\bar{d}\rangle \quad , \quad |\pi^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle\right] \quad , \quad |\pi^-\rangle = |d\bar{u}\rangle \tag{3}$$

donde se ha tenido en cuenta forma de actuar de $\vec{T}_-$ y (II - 4.2). El par quark-antiquark tiene $L=0$ y $S=0$. Similarmente $|p\rangle = |uuu\rangle$, $|n\rangle = |ddu\rangle$

Todo el modelo quark y los desarrollos posteriores que culminan en la Q.C.D tienen su punto de partida en una idea de como clasifican los hadrones propuesta, independientemente, por M. Gell-Mann y Y. Ne'eman, en 1964. No vamos a repetir la historia. En el lenguaje moderno se puede presentar el modelo de la siguiente forma: Las masas de los quarks dadas en (14.1) nos permiten afirmar que los quarks u, d y s tienen masas pequeñas comparadas con las de los hadrones típicos que es de 1 GeV. Evidentemente si $m_u = m_d = m_s$ entonces el lagrangiano de la Q.C.D. sería invariante bajo un grupo SU(3) que actúa sobre el espacio $(u(x), d(x), s(x))$. Evidentemente como $m_s \simeq 100-300$ MeV es de esperar que esté sea una simetría peor que $SU_I(2)$, pero suficientemente buena para que su rastro quede en la naturaleza.

Los exitos del modelo fueron numerosos y permitieron relacionar muchos propiedades de hadrones que hasta entonces no se sabía como relacionar. Evidentemente los hadrones se clasifican mediante las representaciones irreducibles de SU(3), colocando el tripleto de quarks (u, d, s) en su representación fundamental. Los ocho bariones $1/2^+$ dados en VII-9 forman una representación de orden 8 (un octete). Se puede probar que los masas medias de los isomultipletes deben satisfacer la fórmula masica

$$3M(\Lambda) + M(\Sigma) = 2[M(N) + M(\Xi)] \qquad (1)$$

y experimentalmente

$$\begin{aligned} 3M(\Lambda) + M(\Sigma) &= 3 \times 1115.7 + 1193.1 = 4540.2 \text{ MeV} \\ 2[M(N) + M(\Xi)] &= 2[938.9 + 1318.1] = 4514.0 \text{ MeV} \end{aligned} \qquad (2)$$

en un acuerdo sorprendentemente bueno. Otra representación posible es de orden 10 (decuplete) y se conocían nueve partículas cuyos números cuánticos se ajustaban a los del decuplete, pero faltaba una partícula Ω^- con carga $-|e|$ y $Y = -2$. Para este decuplete formado por los resonancias de $J^\pi = 3/2^+$

$\Delta(1232)$	$T = 3/2$	$Y = 1$	$M_\Delta = 1234$ MeV
$\Sigma(1385)$	$T = 1$	$Y = 0$	$M_\Sigma = 1385$ MeV
$\Xi(1530)$	$T = 1/2$	$Y = -1$	$M_\Xi = 1533$ MeV

En este caso la fórmula másica es

$$M_\Omega - M_{\Xi^*} = M_{\Xi^*} - M_\Sigma = M_\Sigma - M_\Delta$$

y por tanto

$$M_\Omega - M_{\Xi^*} = 148 \approx 151$$

Entonces predijeron la existencia de una partícula, la Ω^-, con spin paridad $3/2^+$, $I=0$, $Y=-2$ y $M(\Omega^-) \simeq 1680$ MeV. La partícula fue descubierta poco después con las propiedades predichas y $M(\Omega^-) = 1672.45\ (29)$ MeV, con una vida media $\tau = 0.822\ (12) \times 10^{-10}$ s.

Antes hemos hablado de la teoría de las interacciones débiles iniciada por Fermi y hemos hecho hincapié en su carácter fenomenológico. Hoy día gracias al trabajo de S.L.Glashow (1961), S. Weinberg (1967) y A. Salam (1968) disponemos de la teoría electrodébil totalmente renormalizable y de la que se puede deducir la teoría fenomenológica que antes hemos expuesto. Las partículas mediadoras de esta interacción son

fotón γ	$J^{PC} = 1^{--}$	$m < 3 \times 10^{-27}$ eV	
$W^\pm$	$J=1$	$m = 80.22 \pm 0.26$ GeV	$\Gamma = 2.08\ (7)$ GeV
Z^0	$J=1$	$m = 91.187\ (7)$ GeV	$\Gamma = 2.490\ (7)$ GeV

Las dos últimas descubiertas en el CERN (confirmando brillantemente la teoría) y con múltiples desintegraciones posibles. Esta teoría contiene dos constantes de acoplamiento arbitrarias y es una teoría gauge como la Q.C.D. pero se debe hacer una rotura espontánea de la simetría para poder dar masas al $W^\pm$ y al Z^0. Las masas quedan predichas por la teoría. El precio de dar masas a estas partículas es introducir un bosón de spin cero: el Higgs. Experimentalmente se sabe que su masa debe ser mayor que 60 GeV, aproximadamente.