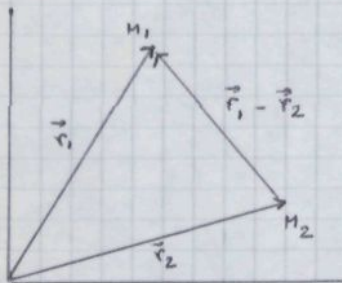


I - CLASES DE INTERACCIONES

i) Interacción Gravitacional

Todas las partículas ejercen entre sí una fuerza gravitatoria de atracción. La fuerza gravitatoria ejercida por una partícula de masa



M_1 sobre otra partícula de masa M_2 es

$$\vec{F}_{12} = G \frac{M_1 M_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad (1)$$

$$G = 6.6720 (41) \times 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ seg}^{-2}$$

que es la famosa ley de la gravitación dada por Newton y que unificaba la mecánica celeste y la terrestre: el movimiento de los planetas alrededor del Sol era causado por las mismas fuerzas que explicaban las leyes de caída de los cuerpos en la superficie de la Tierra. El hecho de que esta fuerza sea muy débil es debido a dos razones: actúa siempre y es de largo alcance, es decir disminuye lentamente con la distancia. Notar además que la energía potencial entre dos partículas de masas M_1 y M_2 situadas a una distancia r es

$$V(\vec{r}) = -G \frac{M_1 M_2}{r} \quad (2)$$

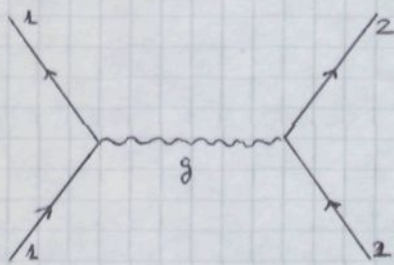
¿ Son las interacciones gravitacionales muy intensas? La intensidad de las mismas viene medida por G , es decir la constante de la gravitación universal. Para poder comparar su intensidad con la de las otras interacciones es necesario introducir una constante adimensional que la caracterice y que suele tomarse como

$$\frac{G M_p^2}{\hbar c} = 5.9042 (37) \times 10^{-39} \quad (3)$$

donde hemos usado $M_p = 1.6726485 (93) \times 10^{-24}$ g., $\hbar = 1.0545887 (57) \times 10^{-27}$ erg seg y $c = 2.99792458 (12) \times 10^{10}$ cm seg⁻¹. Como veremos más adelante este número es muchos órdenes de magnitud menor que los correspondientes a todas las otras interacciones, lo cual implica que, al menos fenomenológicamente, si alguna de las otras interacciones actúa la gravitación pueda despreciarse. Sin embargo, podría muy bien suceder que esta interacción jugara un papel importante al intentar entender la estructura básica de todas las interacciones.

El hecho que esta interacción sea tan extraordinariamente débil hace muy difícil su estudio. Saber que la interacción gravitacional satisface la ley de Newton es muy poco y es lo equivalente a que todo lo que supieramos de las interacciones electromagnéticas es que es válida la ley de Coulomb. Einstein en su teoría del campo gravitatorio (relatividad general) dio el equivalente gravitacional de las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo y si bien en su teoría ha tenido varios éxitos aún estamos lejos de haber comprobado experimentalmente las distintas predicciones de la misma.

Hoy día creemos que todas las interacciones entre dos o más partículas son debidas al intercambio de otras partículas. Así, en primera aproximación, creemos que la interacción gravitacional entre dos partículas es debida al intercambio de una partícula llamada gravitón. De la misma forma que al acelerar una partícula cargada se emite un fotón, al acelerar una partícula



ualquiera esperamos que un gravitón real sea emitido, si bien esta partícula no ha sido aún detectada. Al decir un gravitón real significamos que su energía y momento están relacionadas por la ecuación

$$E = (\vec{p}^2 c^2 + m_g^2 c^4)^{1/2} \quad (1)$$

o equivalentemente que el cuadrivector energía - momento $p^\mu \equiv (E/c, \vec{p})$ debe satisfacer

$$p^2 = p_\mu p^\mu = m_g^2 c^2 \quad (2)$$

Las partículas que se intercambian al producirse la interacción entre dos partículas son llamadas partículas virtuales en el sentido que para ellas no es necesario que $p^2 = m^2 c^2$, siendo m su masa.

¿Cuál es la masa de la partícula intercambiada? Vamos a ver que existe una relación entre la masa de la partícula intercambiada y el alcance de la fuerza. Supongamos un sistema formado por dos partículas en reposo; al emitir una de ellas una partícula virtual de masa m , la energía del sistema cambia en una cantidad $\Delta E > mc^2$. Cuanto mayor sea m , mayor es la violación aparente de la

conservación de la energía. Esto no está permitido en la física clásica. En mecánica cuántica esto es posible, pero sólo durante un intervalo de tiempo $\Delta t \approx \hbar/\Delta E$. Cuanto mayor sea la masa de la partícula virtual menor será Δt y por tanto más corta será la distancia que puede recorrer la partícula virtual. El alcance, d , de la fuerza puede estimarse como la distancia máxima que puede recorrer la partícula virtual

$$d \approx \frac{\hbar}{mc} = \frac{197.32858 \text{ (51)}}{(mc^2/\text{MeV})} \text{ fm.} \quad (1)$$

Se cree que la masa del gravitón es nula y por ello se dice que las fuerzas gravitacionales tienen alcance infinito. Cálculos más complicados, basados en teoría cuántica de campos, implican que si la partícula virtual que se intercambia tiene una masa m , entonces, y a grandes distancias, la variación de la energía potencial con la distancia es de la forma

$$V(r) \propto \frac{1}{r} \exp(-rmc/\hbar) \quad (2)$$

Según esto el hecho de que las fuerzas gravitacionales sean inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia implica que $mg = 0$.

Haremos notar finalmente que la teoría del campo gravitacional de Einstein implica que el gravitón tiene spin dos.

(b) Interacción Electromagnética

A finales del S. XVIII un físico francés Charles Coulomb (1736-1806) estableció la ley fundamental de la electrostática: la fuerza eléctrica ejercida por una partícula de carga e_1 sobre otra de carga e_2 es

$$\vec{F}_{12} = - \frac{1}{4\pi} \frac{e_1 e_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad (3)$$

donde el signo menos indica que cargas del mismo signo se repelen y cargas de signo opuesto se atraen. La energía potencial es ahora

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{e_1 e_2}{r} \quad (4)$$

Estas fórmulas se han expresado en el sistema Gauss racionalizado (también llamado Heaviside - Lorentz). Para caracterizar la intensidad de estas interacciones introducimos la llamada constante de estructura fina

$$\alpha = \frac{e_p^2}{4\pi \hbar c} = \frac{1}{137.03604} \quad (1)$$

donde e_p es la carga del protón que en este sistema de unidades es $e_p = (4\pi)^{1/2} \cdot 4.803242(14) \times 10^{-10} \text{ gr}^{1/2} \text{ cm}^{3/2} \text{ seg}^{-1}$. Comparando este valor con (1.3) vemos que las interacciones gravitacionales son completamente despreciables en presencia de fuerzas electrostáticas.

Las interacciones electromagnéticas son debidas al intercambio de fotones. La primera idea de cuantificación de la energía de un campo electromagnético es debida a Einstein (1905) al presentar su famosa teoría del efecto fotoeléctrico. El hecho de que la luz presente un carácter corpuscular fue postulado por Compton (1923) para poder explicar la dispersión de rayos X por los distintos cuerpos (efecto Compton) y el nombre de fotón fue introducido en física por Lewis (1926). Notemos que el hecho de que la fuerza de Coulomb sea inversamente proporcional al cuadrado de la distancia implica que su alcance es infinito y que la masa del fotón debe ser cero. Sabemos que

$$m_\gamma c^2 \leq 6 \times 10^{-22} \text{ MeV} \quad (2)$$

es decir que de tener masa, ésta debe ser extraordinariamente pequeña. (Recordar $m_e c^2 = 0.5110034(14) \text{ MeV}$). Es relativamente fácil encontrar una cota a la masa del fotón. Consideremos un haz de luz monocromática de frecuencia ν ; la energía de los fotones que la componen es $E = 2\pi \hbar \nu$; por otra parte si m_γ es la masa del fotón sabemos que $E = (m_\gamma^2 c^4 + c^2 \vec{p}^2)^{1/2}$ y por tanto si se observa una radiación electromagnética de frecuencia ν se obtiene inmediatamente una cota a la masa del fotón

$$m_\gamma c^2 < 2\pi \hbar \nu = 4.135701(110) \times 10^{-22} \frac{\nu}{\text{Hertz}} \text{ MeV} \quad (3)$$

Sabemos por ejemplo que la frecuencia de la transición entre los dos niveles hiperfinos originados a partir del $1S_{1/2}$ del átomo de hidrógeno es

$$\nu_{hf} = 1420.4057517864(17) \text{ Hertz} \quad (4)$$

($\lambda \approx 21.11 \text{ cm}$ y tan importante en astronomía) y de aquí $m_\gamma c^2 \leq 6 \times 10^{-13} \text{ MeV}$

Un mejor límite se deduce teniendo en cuenta la existencia de ondas de unos pocos Hertz de frecuencia en la cavidad resonante Tierra - ionosfera (resonancias de Schumann). Un análisis cuidadoso da $myc^2 \leq 3 \times 10^{-19} \text{ kg}$.

Durante muchos siglos la electricidad y el magnetismo se han considerado disciplinas independientes. Las experiencias de Oersted, a principios del S. XIX, establecieron una conexión entre ambas y fue en 1865 cuando Maxwell formuló las ecuaciones del campo electromagnético (ecuaciones de Maxwell) que unificaban la electricidad y el magnetismo y mediante las cuales es posible explicar todas las experiencias electromagnéticas clásicas. En unidades SI y en el vacío están son

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}; t) &= \rho(\vec{x}; t) & , & \quad \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}; t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}(\vec{x}; t)}{\partial t} = \frac{1}{c} \vec{j}(\vec{x}; t) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{x}; t) &= 0 & , & \quad \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}; t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}(\vec{x}; t)}{\partial t} = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

mientras que la fuerza de Lorentz es

$$\vec{F} = e \left[\vec{E}(\vec{x}; t) + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}(\vec{x}; t) \right] \tag{2}$$

Estas interacciones son las que ligan los electrones a los núcleos atómicos para formar átomos, los átomos entre sí para formar moléculas y son las responsables de toda la química y la biología.

Digamos finalmente que el fotón es una partícula estable y que su spin es cero.

(iii) Interacciones Fuentes

En el año 1911 Rutherford llevó a cabo su célebre análisis de las experiencias de colisión de partículas α sobre láminas delgadas de oro y plata. Los resultados experimentales favorecían, sin lugar a dudas, un modelo atómico en el que toda la carga eléctrica positiva, y prácticamente toda la masa estaban concentradas en un pequeño volumen del espacio, llamado núcleo, alrededor del cual, y a grandes distancias en comparación al tamaño del mismo, se movían de alguna forma los electrones. Sin embargo el misterio de la constitución del núcleo atómico no fue resuelto hasta que 1932 Chadwick descubrió el neutrón.

Hoy día sabemos que el átomo (A, Z) está formado por un núcleo,

cuyo radio es $R \approx 1.2 A^{1/3} \text{ fm}$, que contiene Z protones y $(A-Z)$ neutrones. A distancias grandes, en promedio, se mueven Z electrones, de forma que el átomo resultante es eléctricamente neutro pues la carga del protón y la del electrón son iguales en módulo y de signo opuesto, mientras que el neutrón tiene carga nula. Experimentalmente sabemos que

$$\frac{q_e}{q_p} + 1 \approx 10^{-21} \tag{11}$$

Vemos pues que toda la estructura atómica y nuclear puede explicarse mediante tres partículas

$$e : M_e c^2 = 0.511\ 003\ 4\ (14)\ \text{MeV}, \quad J = 1/2, \quad Q = -1, \quad \tau > 5 \cdot 10^{21}\ \text{años}$$

$$p : M_p c^2 = 938.2796\ (27)\ \text{MeV}, \quad J = 1/2, \quad Q = +1, \quad \tau > 2 \cdot 10^{30}\ \text{años} \tag{12}$$

$$n : M_n c^2 = 939.5731\ (27)\ \text{MeV}, \quad J = 1/2, \quad Q = 0, \quad \tau = (917 \pm 14)\ \text{seg.}$$

La existencia de núcleos estables no puede ser entendida si las únicas interacciones existentes son las electromagnéticas y las gravitacionales. Las fuerzas gravitatorias son totalmente despreciables y la repulsión electrostática entre los protones haría que todos los núcleos fueran inestables, contra la evidencia experimental. Para explicar la estabilidad nuclear es necesario suponer que existen unas nuevas fuerzas, que llamaremos interacciones fuertes, que ligan los neutrones y los protones y que son lo suficientemente intensas para poder compensar la repulsión electrostática. No hay gran diferencia entre la energía media de ligadura de los protones y de los neutrones en el núcleo y por tanto es de esperar que las fuerzas p-p, p-n y n-n tengan intensidades parecidas.

Evidentemente el alcance de estas fuerzas no puede ser infinito, ni siquiera muy grande pues entonces dominarían la estructura de los átomos y moléculas contra toda evidencia experimental. En 1935 Yukawa consideró que estas fuerzas eran también debidas al intercambio de una partícula y como estimó que el alcance de estas fuerzas era del orden de algo más de $1\ \text{fm}$, llegó a la conclusión de que su masa debía ser algo superior a $100\ \text{MeV}$. Esta partícula fue descubierta en 1947, por Powell, Occhialini y Lattes, en la radiación cósmica y se la conoce con el nombre de pión. Hay tres tipos de piones y sus propiedades son

$$\pi^{\pm}: Mc^2 = 139.5669 (12) \text{ MeV}, \quad J=0, \quad Q = \pm 1, \quad \tau = 2.6030 (23) \times 10^{-8} \text{ seg} \quad (1)$$

$$\pi^0: Mc^2 = 134.9626 (39) \text{ MeV}, \quad J=0, \quad Q=0, \quad \tau = 0.828 (57) \times 10^{-16} \text{ seg}$$

La fuerza nucleón - nucleón es muy complicada y no sabemos deducirla de primeros principios. Hoy día disponemos de potentes fenómenos que reproducen bien las secciones eficaces nucleón - nucleón y los datos de la estructura nuclear. Sabemos que para $r \lesssim 0.4 \text{ fm}$ el potencial nucleón - nucleón es altamente repulsivo; ni eno después una zona intermedia de estructura muy complicada y que es debida no sólo al intercambio de piones sino al de otras partículas más pesadas. Finalmente existe una zona externa, $r \gtrsim 1 \text{ fm}$, donde las fuerzas debidas al intercambio de piones son las dominantes. En esta zona y para nucleones en estado simple el potencial queda bien aproximado por

$$V(\vec{r}) = - \frac{g^2}{4\pi} \frac{1}{r} e^{-r/\mu} \quad (2)$$

$$\mu = \frac{\hbar}{M\pi c} \approx 1.43 \text{ fm}, \quad \frac{g^2}{4\pi\hbar c} \approx 14.8$$

Es decir que el parámetro sin dimensiones que caracteriza estas interacciones es del orden de 1000 veces el correspondiente de las fuerzas electromagnéticas. Cuando las interacciones fuertes están presentes, las interacciones electromagnéticas pueden tratarse como pequeñas correcciones.

Para dar una idea del valor de este parámetro podemos proceder de la siguiente forma. En el átomo de H el electrón se halla ligado mediante fuerzas de tipo electromagnético y la energía de ligadura en el estado fundamental es

$$E = - \frac{1}{2} \mu c^2 \left(\frac{e^2}{4\pi\hbar c} \right)^2 \approx -13.6 \text{ eV} \quad (3)$$

donde μ es la masa reducida del electrón. El deuterón es un estado ligado n-p con una energía de ligadura de 2.2 MeV. Si suponemos que para todo r el potencial de interacción es de la forma (2) con $\mu = \infty$ entonces la energía de ligadura del deuterón es

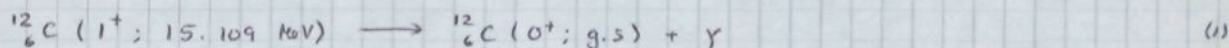
$$E = - \frac{1}{2} \mu c^2 \left(\frac{g^2}{4\pi\hbar c} \right)^2 \approx -2.2 \text{ MeV} \quad (4)$$

donde $\mu \approx M_N/2$ es la masa reducida del sistema. De aquí $(g^2/4\pi\hbar c) \approx 0.1$. En

realidad el valor verdadero debe ser bastante mayor pues hemos despreciado el término exponencial y lo que es mucho más grave el efecto del "hard core".

iv) Interacciones débiles

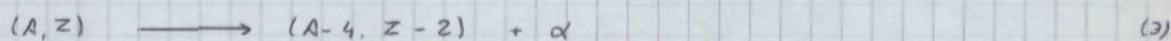
Es bien sabido que hay núcleos que son inestables y que se desintegran mediante la emisión de tres tipos de rayos: α , β y γ . Las desintegraciones γ son simplemente transiciones de un núcleo desde un estado excitado a otro estado del mismo núcleo de menor energía con la emisión de un fotón y es un proceso puramente electromagnético. Otra transición típica dipolar es



cuya vida media es

$$\tau = \frac{\hbar}{\Gamma} = \frac{\hbar}{(36.22 \pm 0.68) \text{ eV}} = 1.817 (35) \times 10^{-17} \text{ seg} \quad (2)$$

La desintegración α corresponde al proceso típico

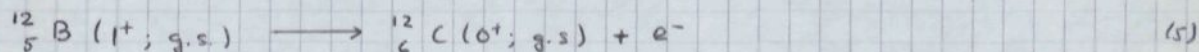


y es debido a las interacciones fuertes y electromagnéticas. Un ejemplo típico es la desintegración ${}^{238}_{92}\text{U} \longrightarrow {}^{234}_{90}\text{Th} + \alpha$ y es muy usual en núcleos pesados y en estados muy excitados de cualquier núcleo.

Existen finalmente las desintegraciones β en las que se observa



Un ejemplo típico observado es

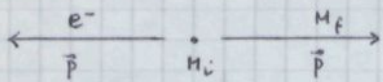


cuya vida media es $\tau = 3.031 (13) \times 10^{-2} \text{ seg}$. Sin embargo el proceso (4) presenta algunas peculiaridades que durante muchos años preocuparon a los físicos:

i) Si A es par (impar) un núcleo debe tener spin entero (semi-entero) y como el spin del electrón es $1/2$ se tiene que $J_i \neq J_f$ y no hay conservación del momento angular

ii) Por otra parte si M_i es la masa del núcleo inicial y M_f la del final

entonces en el sistema en que el núcleo inicial está en reposo, el núcleo final y el electrón salen con momentos iguales y opuestos por la ley de conservación del momento. Entonces la ley de conservación de la energía implica



$$M_i c^2 = (M_f^2 c^4 + c^2 p^2)^{1/2} + (M_e^2 c^4 + c^2 p^2)^{1/2}$$

$$\Rightarrow p = \frac{c}{2M_i} \lambda^{1/2} (M_f^2, M_i^2, M_e^2)$$

donde $\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$ es la llamada función λ de Källen. De aquí

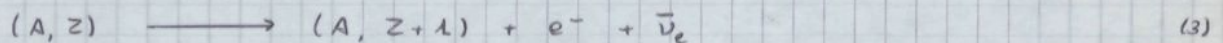
$$E_e = \frac{c^2}{2M_i} (M_f^2 - M_i^2 - M_e^2) \quad (1)$$

es decir los electrones salen con una energía totalmente determinada, lo cual es totalmente falso pues los electrones aparecen con una distribución de energías que viene descrita (transiciones permitidas) por la ley

$$\frac{dN(E_e)}{dE_e} \propto p_e E_e (E_{\max} - E_e)^2 \quad (2)$$

donde E_{\max} es la energía máxima de los electrones emitidos y viene dada muy aproximadamente por (1). Es decir que no sólo es violada la ley de la conservación del momento angular sino también la ley de conservación de la energía - momento.

Esta desagradable situación fue resuelta por Pauli al suponer, en 1931, que al producirse la desintegración β además del electrón se emitía otra partícula de spin $1/2$, carga nula y masa extraordinariamente pequeña pues E_{\max} venía dada, dentro de errores experimentales, por la ecuación (1). Esta partícula se denominó hoy día antineutrino. Así tenemos



para las cuales son válidas ambas leyes de conservación. El antineutrino postulado por Pauli fue descubierto, en 1957, por Cowan y Reines. Hoy día está bien establecido que $M_\nu c^2 < 60$ eV y una medida reciente (1980) de la forma del espectro de la desintegración β del tritio sugiere que su masa está comprendida entre 14 y 46 eV con un 99% C.L. Si además se hacen algunas hipótesis sobre la molécula de neutrino, en la que se hallaba el tritio, entonces la masa es (34.3 ± 4) eV. Estos valores necesitan confirmación y a la larga

de estas notas supondremos, en general, que es nula.

Recordemos que la anchura de un estado cuántico viene dada por

$$\Gamma = (\langle \text{Hamiltoniano de interacción} \rangle^2) \cdot (\text{Espacio físico disponible}) \quad (1)$$

y como la vida media se define como $\tau = \hbar / \Gamma$, resulta que la vida media de un estado disminuye al aumentar la intensidad de la interacción. Teniendo en cuenta las vidas medias dadas antes para los protones (8.2) y (8.5) vemos que la interacción que produce las desintegraciones beta debe ser un millón de veces de magnitud menos intensa que la electromagnética y suele designarse como desintegración débil. Veremos mas adelante que en la teoría contemporánea la constante de acoplamiento es G_F donde

$$\frac{G_F M_p^2 c}{\hbar^3} = 1.0267 (3) \times 10^{-5} \quad (2)$$

$$\Rightarrow G_F c \hbar^{-3} = 1.1663 (3) \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$$

Al de la teoría contemporánea queremos decir que al interactuar los cuantos campos que intervienen en el proceso $n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e$ la interacción se realiza en un punto, es decir su alcance es nulo.

Hoy día sabemos que esto no es así. En el modelo estándar de Salam-Wemberg - Glashow - Iliopoulos - Harari este proceso es debido al intercambio de un mesón muy pesado de spin 1 que se denomina W^\pm . En esta teoría se unifican las interacciones débiles y electromagnéticas en el sentido que la existencia de una implica la otra. La masa predicha para el meson W es

$$M_W c^2 = (77.7 \pm 2.7) \text{ GeV} \quad (3)$$

que corresponde $\sin^2 \theta_W = 0.230 \pm 0.045$. En esta teoría existen también procesos débiles caracterizados por el intercambio de una partícula muy pesada de spin 1 y carga nula, el Z^0 donde

$$M_Z c^2 = (88.6 \pm 2.1) \text{ GeV} \quad (4)$$

Ninguna de estas partículas ha sido aun descubierta, pero la nueva teoría predice correctamente una amplia clase de hechos experimentales. Notan que el alcance de estas fuerzas es muy corto $\approx 2 \times 10^{-3} \text{ fm}$.

Estas son las cuatro interacciones fundamentales conocidas hoy día. Newton unificó la caída de los cuerpos y las fuerzas entre los planetas y el sol

11

en las interacciones gravitacionales. Maxwell unificó la electricidad y magnetismo en la teoría del campo electromagnético. Einstein intentó, durante muchos años y sin lograrlo, la unificación del electromagnetismo y la gravitación en lo que se llama la teoría del campo unificado. Recientemente Weinberg y Salam (1967) han encontrado una teoría que unifica en cierto sentido las interacciones débiles y las electromagnéticas; en realidad no puede existir la una sin la otra, pero existen en la teoría dos constantes de acoplamiento cuando lo deseable sería una sola. Se han realizado intentos de unificar no solo las interacciones débiles y las electromagnéticas sino éstas con las fuertes. Se puede destacar entre estos esfuerzos la teoría de Georgi y Glashow en la que se realiza una unificación real de las tres interacciones, pero cuya verificación experimental no es clara. Finalmente mediante las llamadas supersimetrías se han intentado unificar las cuatro interacciones, pero de momento la situación es aún muy confusa.

II - LAS PARTICULAS

Sabemos que el protón, neutrón y electrón son las componentes fundamentales de todos los átomos y que el fotón es el cuanto de la radiación electromagnética. Una visión simplista haría pensar que estas son todas las partículas mensajeras para explicar el universo. Ya hemos insinuado que esto no es así. Hasta finalizar la Segunda Guerra Mundial el número de partículas conocidas era relativamente bajo, pero a partir de entonces y al dedicarse un gran esfuerzo al estudio de las partículas, primero mediante la radiación cósmica y después mediante los aceleradores, se han ido en contando más y más partículas y hoy día existen varias centenas. Vamos a intentar poner algún orden entre las partículas existentes. La primera gran división es:

i) Leptones: Partículas que no tienen interacciones fuertes

ii) Bariones: Partículas que tienen interacciones fuertes
hadrones

i) Leptones

Como ya hemos dicho integran esta familia todas las partículas que no tienen interacciones fuertes. El nombre leptón significa "ligero" () y hoy día es totalmente improprio. Todos los leptones que conocemos tienen spin $1/2$.

a) e, ν_e

$$e \quad m_e = 0.511\,003\,4\,(14) \text{ MeV}, \quad \tau > 5 \times 10^{21} \text{ años}, \quad Q = -1$$

$$\nu_e \quad m \leq 60 \text{ eV}, \quad \tau > 3 \times 10^2 \text{ (} m_{\nu} / \text{eV) sec}, \quad Q = 0$$

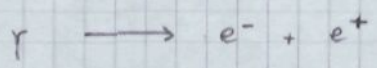
El electrón fue descubierto por J.J. Thomson a finales del siglo pasado (1897) estudiando los rayos catódicos. Como hemos dicho antes el neutrino electrónico fue postulado por Pauli en 1931 y descubierto por Cowan y Reines en 1957. Se cree que ambas partículas son estables. Supondremos, en la mayor parte de lo que sigue, que la masa del neutrino es nula. Ya hemos dicho que estas partículas no tienen interacciones fuertes. Ambas tienen interacciones débiles y el electrón, al estar cargado, tiene además interacción electromagnética. El electrón además de tener carga tiene momento magnético

$$\mu_e = 1.001\,159\,652\,200\,(40) \frac{e\hbar}{2m_e c^2 \gamma}$$

La cantidad $\mu_B \equiv e\hbar / 2m_e c \hbar$ se suele llamar momento de Bohr

$$\mu_B = 5.788 378 5 (95) \times 10^{-15} \text{ eV gauss}^{-1} \quad (1)$$

P.A.H. Dirac, en 1928, intentó construir una ecuación de ondas relativista para el electrón, postulando la ecuación que hoy día se llama ecuación de Dirac. Al resolver esta ecuación se encontró que un electrón con momento \vec{p} podía tener energía positiva o negativa $E = \pm (p^2 + m^2)^{1/2}$. Para evitar las dificultades vinculadas con la introducción en la teoría de partículas observables con energía negativa, Dirac introdujo el concepto de vacío como aquel estado del espacio en el que todos los estados con energía negativa están ocupados por electrones, mientras que todos los estados de energía positiva están vacíos. Supongamos ahora que bajo la influencia de acciones externas se quita uno de los electrones de un estado con energía negativa, es decir se crea un agujero en el mar de electrones de energía negativa. Tomamos en el estado final un agujero y el electrón, con energía positiva que ha sido amarrado a él. Se puede probar que este agujero se comporta como una partícula de masa igual a la del electrón, de energía positiva y con carga eléctrica opuesta a la del electrón y del mismo valor absoluto. Hoy día a esta partícula se la llama anti-electrón o positrón. Así por ejemplo, en presencia de materia, puede tener lugar la reacción



Para ello $E_\gamma > 2m_e$ y la materia es necesaria para que puedan conservarse la energía y el momento. El positrón fue descubierto por Anderson en 1932, en la radiación cósmica.

La existencia de antipartículas no es una peculiaridad de la ecuación de Dirac, sino que en principio toda partícula implica la existencia de la antipartícula correspondiente. La partícula y la antipartícula tienen la misma masa y el mismo spin, pero todas sus cargas son iguales y opuestas. ¿Por qué dos masas? Sabemos bien lo que es la carga eléctrica; ésta goza de dos propiedades que nos interesa destacar: i) es un número cuántico aditivo, es decir que la carga de un sistema de partículas es la suma de las cargas de las partículas que lo componen ii) es exactamente conservado, es decir en cualquier proceso la carga inicial y la final son iguales. En general llamaremos carga a todo número cuántico aditivo sea o no absolutamente conservado. Una partícula coincide con su antipartícula si y solo si todas sus cargas son nulas.

El electrón y el neutrino electrónico tienen además de la carga eléctrica otro tipo de carga llamada carga o número leptónico electrónico y que para ambas partículas es $L_e = +1$. Se dice que esta carga es exactamente conservada en todos los procesos entre partículas. Queremos, sin embargo, señalar que es una característica de los modelos que unifican las interacciones fuertes con las electrodébiles que L_e no es rigurosamente conservado. Todas las demás cargas que introdujimos son nulas para el electrón y el neutrino electrónico. Debido a la carga leptónica electrónica el antineutrino es distinto del neutrino pues en el primer caso $L_e = -1$ y en el segundo $L_e = +1$.

b) μ, ν_μ .

$$\mu \quad m = 105.65946(24) \text{ MeV}, \quad \tau = 2.197120(177) \times 10^{-6} \text{ seg}, \quad Q = -1$$

$$\nu_\mu \quad m < 0.57 \text{ MeV}, \quad \tau > 2.6 \times 10^{-2} \left(\frac{m_{\mu\mu}}{\text{eV}} \right) \text{ seg}, \quad Q = 0$$

El muon fue descubierto por Neddermeyer y Anderson, en 1938, en la radiación cósmica. En un principio se usó que era el pion o meson π predicho por Yukawa, pero pronto se vio que no tenía interacciones fuertes y por tanto no podía ser el pion. El neutrino muónico, que se fortalece más estable y de masa nula, es distinto del neutrino electrónico según se ha demostrado experimentalmente [G. Danby et al. P.R. 9, 36 (1962), J.K. Breidenbach P.L. 13, 80 (1964)] de acuerdo con la hipótesis hecha, independientemente, en 1957 por Schwinger y Nishijima.

Además de la carga eléctrica estas partículas tienen carga leptónica muónica $L_\mu = +1$, que se supone que es exactamente conservada. Todas las demás cargas son nulas. Evidentemente como las antipartículas correspondientes tienen $L_\mu = -1$, son distintas de las partículas.

Como el electrón, el muón tiene un momento magnético

$$\mu_\mu = 1.001165924(9) \frac{e\hbar}{2m_\mu c} \frac{1}{4\pi}$$

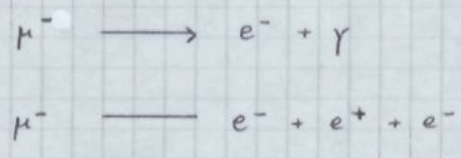
Pasemos a considerar las desintegraciones del muón. Se sabe que el muon se puede desintegrar de dos formas

$$\mu^- \longrightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu \quad 98.6 \pm 0.4 \%$$

$$\mu^- \longrightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu + \gamma \quad 1.4 \pm 0.4 \%$$

El primer proceso es puramente débil y vemos que se conservan todos los números cuánticos. El segundo es débil + electromagnético y es de esperar que su probabilidad sea la del anterior multiplicada por α , que es lo que sucede. También aquí se conservan todos los cargas pues el fotón ~~las~~ tiene todas nulas.

Si el número leptónico electrónico y muónico coincidieran, además de los procesos anteriores, habría de esperarse procesos tales como



con probabilidades favorecidas. Se han buscado estos procesos sin éxito y sabemos que

$$\frac{\Gamma(\mu^- \rightarrow e^- + \gamma)}{\Gamma(\mu^- \rightarrow e\ell\ell)} < 1.9 \times 10^{-10}$$

$$\frac{\Gamma(\mu^- \rightarrow e^- + e^+ + e^-)}{\Gamma(\mu^- \rightarrow e\ell\ell)} < 1.9 \times 10^{-9}$$

es decir que, de existir, son altamente improbables.

Es una propiedad general de las antipartículas que sus desintegraciones son análogas que las de las partículas correspondientes, con iguales vidas medias y con las mismas "branching ratios", si CP se conserva en este último caso.

La experiencia que permitió distinguir los neutrinos electrónicos de los muónicos fue la siguiente: Los piones cargados se desintegran, principalmente, en un muón y un neutrino. Los piones, al desintegrarse en vuelo, producen un haz de neutrinos y los muones que los acompañan se absorben en una pared de aparato llamado. Las interacciones de los neutrinos son observadas en cámaras de chubas, se tendrían que producir números iguales de e^- y μ^- si hubiera un solo tipo de neutrino. El hecho de que no se observen electrones implica que deben existir dos tipos de neutrinos.

c) τ, ν_τ

$\tau \quad m = (1784 \pm 4) \text{ MeV} \quad , \quad \tau < 2.3 \times 10^{-12} \text{ seg} \quad , \quad Q = -1$

$\nu_\tau \quad m \approx 250 \text{ MeV} \quad , \quad \tau \quad , \quad Q = 0.$

Vemos que se repite de nuevo la misma historia. La primera evidencia del τ es debida a Perl (M.L. Perl et al P.R.L. 35, 1489 (1975)). Evidentemente no es

no es una partícula ligera, pues su masa es casi dos veces la del protón. La hipótesis general es que el neutrino tauónico es estable y que su masa es nula o muy pequeña.

Como en los casos anteriores se usa que existe un número cuántico tauónico que es $L_\tau = +1$ para estas partículas y $L_\tau = -1$ para sus antipartículas y nulo para todas las demás. Se usa que este número leptónico es también universalmente conservado. Se han buscado sin éxito vacuones del tipo $\nu_\mu + N \longrightarrow \tau^- + \text{alguna cosa}$, lo cual nos asegura que L_τ no está conservado en un L_μ . Al no disponer de haces de neutrinos electrónicos no sabemos con seguridad que L_τ no pueda estar conservado con L_e ; sin embargo la hipótesis general es que esto no sucede.

Al tener el τ una masa muy elevada hay muchas canales distintos de desintegración:

τ^-	$\longrightarrow \nu_\tau + e^- + \bar{\nu}_e$	$17.0 \pm 1.1 \%$
	$\longrightarrow \nu_\tau + \mu^- + \bar{\nu}_\mu$	$17.9 \pm 1.5 \%$
	$\longrightarrow \nu_\tau + \pi^-$	$8.2 \pm 2.6 \%$
	$\longrightarrow \nu_\tau + \pi^- + \pi^0 + \pi^+$	$7 \pm 5 \%$

y muchos otros (H.L. Perl, SLAC-PUB-2456 Dic 1979). Todas estas desintegraciones son débiles y en ellas se conservan todas las cargas.

Hemos pasado así un día a todos los leptones conocidos. De todo ello resulta que una partícula queda clasificada como leptón si cumple las propiedades siguientes:

- i) No interactúa fuertemente
- ii) No tiene estructura interna o constituyentes, es decir es una partícula puntual. Quizá al ir a energías más altas veremos que tienen estructura ($\lesssim 10^{-16}$ cm)
- iii) Los leptones sufren interacciones débiles y, si están cargados, interacciones electromagnéticas.

Los leptones hasta ahora conocidos comparten dos otras propiedades

- iv) Tienen spin $1/2$
- v) Existe una ley de conservación leptónica asociada.

Si bien la evidencia no es concluyente totalmente todo parece favorecer un modelo leptónico sucesional. En este modelo se supone que existe una sucesión de leptones cargados de masa creciente, cada leptón cargado tiene asociado un

neutrino de masa menor, pero no necesariamente nula. Cada tipo leptónico tiene una carga leptónica asociada que es conservada. Tenemos pues

$$(\nu_e, e), (\nu_\mu, \mu), (\nu_\tau, \tau) \dots$$

Los teóricos esperan que el número de generaciones no sea muy elevado (≤ 16). Por otra parte mediante argumentos cosmológicos se puede probar que no existen neutrinos estables con masas comprendidas entre 50 eV y 1 GeV y además que la suma de las masas de todos los neutrinos ligeros debe satisfacer la desigualdad

$$\sum_{\alpha} m_{\nu_{\alpha}} \leq 50 \text{ eV.}$$

Por otra parte vemos en una universalidad e- μ - τ ; es decir que estos leptones se diferencian únicamente en su masa y en el número leptónico, pero tienen exactamente las mismas interacciones débiles y electromagnéticas. La diferencia entre las propiedades de todos ellos es debida exclusivamente a su masa. La universalidad e- μ ha sido muy comprobada como veremos más adelante. La universalidad e- μ - τ debe aun ser más comprobada si bien todos los datos experimentales tienen a implicarla. Por ejemplo veremos más adelante que sin tener en cuenta correcciones radiativas

$$\Gamma(\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu) = \frac{G_F^2 m_\mu^5}{192 \pi^3} F\left(\frac{m_e^2}{m_\mu^2}\right) \tag{1}$$

$$F(y) = 1 - 8y + 8y^3 - y^4 - 12y^2 \ln y$$

Entonces idéntica fórmula es válida para $\Gamma(\tau^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu \nu_\tau)$ y $\Gamma(\tau^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\tau)$

De aquí:

$$\frac{\Gamma(\tau^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu \nu_\tau)}{\Gamma(\tau^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\tau)} = \frac{F(m_\mu^2/m_\tau^2)}{F(m_e^2/m_\tau^2)} = 0.973 \tag{2}$$

mientras que el valor experimental es 1.06 ± 0.17 en perfecto acuerdo con el valor teórico. Por otra parte la vida media del τ es

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{B(\tau \rightarrow \nu_\tau e^- \nu_e)}{\Gamma(\tau \rightarrow \nu_\tau e^- \nu_e)} = \frac{192 \pi^3}{G_F^2 m_\tau^5} B(\tau \rightarrow \nu_\tau e^- \nu_e) \\ &= 1.6087(56) \times 10^{-12} \text{ seg} B(\tau \rightarrow \nu_\tau e^- \nu_e) = \\ &= (2.73 \pm 0.19) \times 10^{-13} \text{ seg.} \end{aligned} \tag{3}$$

que no está en desacuerdo con el valor experimental

vi) Hadrones

Los hadrones se caracterizan por presentar todos los tipos de interacciones. Su nombre significa pesado y proviene del hecho de que, antes de descubrirse el leptón τ , todos ellos tienen mayor masa que los leptones. Dividiremos los hadrones en dos grandes subgrupos

- a) Los mesones : caracterizados por ser bosones, es decir tienen spin entero
- b) Los bariones : caracterizados por ser fermiones, es decir tienen spin semi-entero.

Al sufrir los hadrones todos los tipos de interacciones tienden a desintegrarse por las interacciones fuertes si esto es posible, es decir lo pueden hacer sin violar ninguna ley de conservación propia de estas interacciones. De no poderse desintegrar por las interacciones fuertes, tienden a hacerlo por las electromagnéticas y si tampoco esto es posible lo tienden a hacer por las interacciones débiles. Hay un único hadrón estable que es el protón

$$\tau_p > 1 \times 10^{30} \text{ años}$$

Recordemos, sin embargo, que en las teorías que unifican las interacciones electrodébiles y fuertes el protón puede desintegrarse con vidas medias del orden de $\tau \approx 10^{31-33}$ años, según modelos. Desintegraciones posibles son entonces, por ejemplo, $p \rightarrow e^+ + \pi^0$.

La vida media de una partícula depende no sólo de la interacción causante de la desintegración sino también del espacio físico disponible. Como más fuerte sea la interacción más corta es la vida media y como más grande sea el espacio físico más fuerte es la vida media. Esto se deduce inmediatamente de (10.1). Analizando las desintegraciones de las partículas se ve que las vidas medias típicas son

$\tau \approx 10^{-6} - 10^{-10}$ seg	Interacción fuerte
$\tau \approx 10^{-15} - 10^{-19}$ seg	Interacción electromagnética
$\tau \approx 10^{-22} - 10^{-25}$ seg	Interacción débil

Esto da una idea aproximada. Por ejemplo ya hemos visto que el leptón τ a pesar de desintegrarse débilmente tiene una vida media $\approx 2.7 \times 10^{-13}$ seg.

Otra excepción notable es el neutrón que se desintegra según el único canal



que es una desintegración débil y a pesar de ello $\tau = (918 \pm 14) \text{ seg.}$, lo cual es debido a que el espacio férreo es extraordinariamente pequeño, pues es una desintegración a tres cuerpos en la que $Q \equiv M_i - M_f \approx 0.782 \text{ MeV}$. Para darse cuenta de lo dramático que puede ser este efecto consideremos de nuevo la desintegración del muon

$$\Gamma(\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu) = \frac{G_F^2 m_\mu^5}{192 \pi^3} F\left(\frac{m_e^2}{m_\mu^2}\right) \quad (2)$$

$$F(y) = 1 - 8y + 8y^3 - y^4 - 12y^2 \ln y$$

y vemos como cambia el factor $F(m_e^2/m_\mu^2)$ al variar la masa del electrón.

m_e^2/m_μ^2	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95
F	1	4.8×10^{-1}	2.4×10^{-1}	1.1×10^{-1}	4.6×10^{-2}	1.7×10^{-2}	5.2×10^{-3}	1.2×10^{-3}	1.4×10^{-4}	4.2×10^{-6}	1.3×10^{-7}

Antes de continuar debemos decir algo sobre la medida de las vidas medias. Las partículas que se desintegran débilmente tienen vidas medias relativamente largas y dejan trazas medibles en las cámaras de burbujas o en las cámaras de chispas. El neutrón debido a su vida media tan larga es difícil de estar seguro que los neutrones que desaparecen es debido a desintegraciones y no a simples pérdidas y en esto la vida media de esta partícula está medida un muy poca precisión. Las vidas medias de las partículas que se desintegran electromagnéticamente son, en general, más difíciles de medir. Finalmente no se pueden realmente medir las vidas medias correspondientes a las partículas que se desintegran fuertemente o resonancias y lo que se mide es la anchura Γ que está relacionada con la vida media $\tau \Gamma = 1$

$$\tau = \frac{6.582 \cdot 173 \cdot (17) \times 10^{-22}}{(\Gamma / \text{MeV})} \text{ seg}$$

Vamos a continuación a pasar revista a las partículas más importantes y usaremos la palabra en el sentido más restrictivo es decir aquellas que se desintegran vía las interacciones débiles y electromagnéticas. Mas adelante irán apareciendo las resonancias o partículas que se desintegran vía las interacciones fuertes y que son mucho más abundantes.

b) Bariónesc) p, n

$$p \quad M = 938.2746 \text{ (27) MeV}, \quad J = 1/2, \quad \tau > 1. \times 10^{30} \text{ años}, \quad Q = +1$$

$$n \quad M = 939.5731 \text{ (27) MeV}, \quad J = 1/2, \quad \tau = (917 \pm 14) \mu\text{s}, \quad Q = 0$$

En su desintegración tiene una forma única de desintegrarse $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$. En principio parece que también el p podría desintegrarse pero esto no es así pues tanto el protón, como el neutrón y todos los bariónes en general tienen una carga bariónica $B = 1$. Todas las leptones, todos los mesones, el fotón... tienen $B = 0$. La carga bariónica es exactamente conservada. Recordemos que en las teorías unificadas de las electrodébiles y fuertes esto no es así y el protón puede desintegrarse por ejemplo $p \rightarrow e^+ + \pi^0$.

Un concepto muy importante en el estudio de las partículas elementales es el de isospin o spin isotópico. Este es una de las simetrías internas. Las propiedades del p y n son debidas al efecto conjunto de las interacciones fuertes, electromagnéticas y débiles. Fue Heisenberg, en 1932, el primero en plantearse el problema de cómo se verían modificadas esas propiedades si sólo las interacciones fuertes existieran en la naturaleza. Como el neutrón se desintegra únicamente según el canal débil $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$, al desaparecer las interacciones débiles tanto el protón como el neutrón serían partículas estables. Por otra parte, el concepto de carga eléctrica y momento magnético deja de tener sentido si no existen las interacciones electromagnéticas. Si se supone que la pequeña diferencia de masas entre el protón y el neutrón $(M_n - M_p) / M_p \approx 1.4 \times 10^{-3} \approx \alpha$ es de origen electromagnético, entonces podemos ya afirmar que en ausencia de interacciones débiles y electromagnéticas, el neutrón y el protón son dos partículas indistinguibles; se usa la palabra nucleón para indicar cualquiera de ellas.

Es sabido que en ausencia de campos electromagnéticos externos que fijen alguna dirección privilegiada en el espacio no pueden haber fenómenos observables que dependan de que el valor de la tercera componente del spin del electrón sea $+1/2$ o $-1/2$ en una dirección de cuantificación elegida arbitrariamente, y esto es debido a la invariancia del hamiltoniano bajo el grupo de rotaciones. De forma totalmente análoga, se puede argumentar que el hecho de que el protón y el neutrón sean indistinguibles, en ausencia de interacciones electromagnéticas y débiles,

es debido a que el hamiltoniano es invariante bajo rotaciones en algún espacio interno, que suele denominarse espacio de isospin. El algebra de este grupo de rotaciones es la del $SU_T(2)$, donde T indica que la rotación tiene lugar en dicho espacio interno. Se tiene, por tanto, que el hamiltoniano con solo las interacciones fuertes, H_S , es tal que si $G \in SU_T(2)$, entonces $[H_S, U_G] = 0$ y por tanto los estados propios de H_S pueden caracterizarse dando el isospin y su tercera componente; por otra parte el hamiltoniano total $H = H_S + H_{EM} + H_W$ debe cumplir $[H, U_G] \neq 0$, pues se sabe que en el mundo real existen marcadas diferencias entre el protón y el neutrón. La utilidad del concepto de isospin, que es sólo una simetría aproximada de la naturaleza, es debido a que como $H_S \gg H_{EM} \gg H_W$, es de esperar que restos de esta simetría aparezcan frecuentemente en la naturaleza.

El protón y el neutrón corresponden a la representación $\mathcal{G}^{(1/2)}$ de $SU_T(2)$ y se dice que el nucleón tiene isospin $1/2$. Se suele hacer la identificación

$$|p\rangle \equiv |1/2, 1/2\rangle \quad |n\rangle \equiv |1/2, -1/2\rangle \quad (1)$$

Nota que esta identificación es totalmente arbitraria y en los libros de física nuclear, algunas veces, se hace la opuesta.

Una consecuencia de que H_S sea invariante bajo $SU_T(2)$ es que en cada nivel energético de un núcleo (A, Z) existan, en ausencia de interacciones electromagnéticas y débiles, estados con valores bien definidos del isospin T y de su tercera componente T_3 . En general, dada la compleja dinámica de un núcleo, sus niveles no presentan degeneración accidental y poseen un T bien determinado. Para un núcleo dado, el valor de T_3 es fijo: $T_3 = Z - A/2$. Por otra parte, si en el núcleo (A, Z) existe el nivel $(T, T_3 = Z - A/2)$ entonces deberan existir todos los niveles (T, T) , $(T, T-1)$, ..., $(T, -T+1)$, $(T, -T)$ en los núcleos $(A, A/2+T)$, $(A, A/2+T-1)$, ..., $(A, A/2-T+1)$, $(A, A/2-T)$, respectivamente, con la misma energía e idéntico valor del spin-paridad, pues los operadores de $SU_T(2)$ no pueden cambiar el valor de estas cantidades. El conjunto de estos estados se dice que forman un isomultiplete.

Comenzemos un ejemplo: El estado fundamental del $^{14}_6\text{C}$, el estado de energía de excitación 2.312 MeV del $^{14}_7\text{N}$ y el estado fundamental del $^{14}_8\text{O}$ forman un isomultiplete, con 0^+ y valores de $T_3 = -1, 0$ y $+1$ respectivamente. Las diferencias de energías entre los estados atómicos correspondientes son

$$E\left(\begin{smallmatrix} 14 \\ 8 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) - E\left(\begin{smallmatrix} 14 \\ 7 \\ N \end{smallmatrix}\right) = 2.835 \text{ MeV}, \quad E\left(\begin{smallmatrix} 14 \\ 7 \\ N \end{smallmatrix}\right) - E\left(\begin{smallmatrix} 14 \\ 6 \\ C \end{smallmatrix}\right) = 2.157 \text{ MeV}$$

Teniendo en cuenta la diferencia de masas $m-p$ y la masa del e , la consecución a llevar a cabo para tener en cuenta la diferencia de masas neutrón-protón, así como la presencia de un número distinto de electrones en cada caso, es añadir a las cantidades anteriores $(m_n - m_p) - m_e = 0.7825 \text{ MeV}$, con lo cual se obtienen para las diferencias de energías entre los estados nucleares, corregidas de la diferencia de masas $m-p$, los valores

$$E\left(\begin{smallmatrix} 14 \\ 8 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) - E\left(\begin{smallmatrix} 14 \\ 7 \\ N \end{smallmatrix}\right) = 3.618 \text{ MeV}, \quad E\left(\begin{smallmatrix} 14 \\ 7 \\ N \end{smallmatrix}\right) - E\left(\begin{smallmatrix} 14 \\ 6 \\ C \end{smallmatrix}\right) = 2.940 \text{ MeV}$$

Estas diferencias, de ser cierto que H_S es invariante bajo $SU_7(2)$, serían debidas fundamentalmente a las fuerzas repulsivas electromagnéticas entre los protones. El cálculo de esta corrección energética no es sencillo. Aproximando la energía coulombiana de un núcleo mediante la fórmula

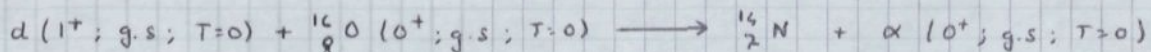
$$E_C(A, Z) \approx \frac{3Z^2\alpha}{5R} \left[1 - 5 \left(\frac{3}{16\pi Z} \right)^{2/3} \right]$$

donde el radio nuclear R viene dado por $R = 1.25 A^{1/3} \text{ fm}$, se encuentra así que

$$E_C\left(\begin{smallmatrix} 14 \\ 8 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) - E_C\left(\begin{smallmatrix} 14 \\ 7 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \approx 3.780 \text{ MeV}, \quad E_C\left(\begin{smallmatrix} 14 \\ 7 \\ N \end{smallmatrix}\right) - E_C\left(\begin{smallmatrix} 14 \\ 6 \\ C \end{smallmatrix}\right) \approx 3.183 \text{ MeV}$$

que está en buen acuerdo con los resultados experimentales si se tiene en cuenta la imprecisión de estos y la aproximación usada para E_C .

Otro lugar para comprobar la validez de la simetría $SU_7(2)$ es el estudio de las reacciones nucleares, que al venir mediadas básicamente por las interacciones fuertes, deben conservar el isospín. Se han estudiado las reacciones



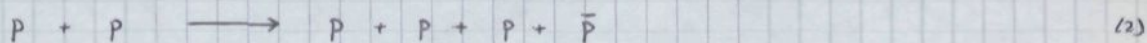
para distintos estados posibles del $\begin{smallmatrix} 14 \\ 7 \\ N \end{smallmatrix}$ y en particular la producción de los estados $\begin{smallmatrix} 14 \\ 7 \\ N \end{smallmatrix}(1^+; g.s.; T=0)$ y $\begin{smallmatrix} 14 \\ 7 \\ N \end{smallmatrix}(0^+; 2.312; T=1)$. La conservación del isospín implica que este último estado no puede ser producido. Usando deutrones de 24 MeV se encontró que el estado excitado considerado era producido únicamente un $(0.7 \pm 0.6)\%$ frente a las veces que se producía el estado fundamental. Es muy probable que la baja producción del estado excitado sea debida en gran parte a la regla de selección considerada, pero no puede descartarse que una parte de esta inhibición se deba al mecanismo de reacción causante de la transición.

La carga, la tercera componente del isospin y el número bariónico satisfacen la relación de Gell-Mann-Nishijima

$$Q = T_3 + \frac{B}{2} \quad (1)$$

donde la carga viene medida en unidades de la carga del protón.

De acuerdo con lo dicho antes la existencia de p y n implica la existencia de las antipartículas correspondientes \bar{p} y \bar{n} , que son distintas pues tienen carga bariónica $B = -1$. Desde el momento en que se entendió la necesidad de las antipartículas se cayó en la existencia de \bar{p} y \bar{n} , pero su descubrimiento fue muy posterior debido a la considerable energía necesaria para su creación. Así por ejemplo el \bar{p} fue descubierto en 1957 al observar con un haz de protones de un acelerador la reacción



Fijémosnos que el \bar{p} debe ir forzosamente acompañado de un nuevo barión, para que B se conserve, y al ser el p el barión más ligero esta reacción es la energéticamente más favorecida. Para ella la energía umbral es

$$2M_p^2 + 2M_p E_{th}^{lab} = (4M_p)^2 \quad (3)$$

$$\Rightarrow E_{th}^{lab} = 7M_p \approx 6.57 \text{ GeV}$$

Las dos antipartículas \bar{n} y \bar{p} deben tener isospin $T = 1/2$. ¿Cómo asignar los estados físicos $|\bar{p}\rangle$ y $|\bar{n}\rangle$ con los estados matemáticos $|1/2, 1/2\rangle$ y $|1/2, -1/2\rangle$? Definimos la transformación de simetría conjugación partícula-antipartícula o conjugación de carga como una correspondencia biyectiva de un sistema físico en otro sistema físico en el que cada partícula es substituida por la antipartícula correspondiente. Sea C el operador que implementa esta simetría. Este operador es unitario y como la nueva aplicación del mismo nos reproduce el sistema original se puede escribir

$$C |partícula\rangle = |antipartícula\rangle = \overline{|partícula\rangle} \quad (4)$$

$$C = C^\dagger, \quad C^2 = I$$

En particular

$$|\bar{p}\rangle = C |p\rangle, \quad |\bar{n}\rangle = C |n\rangle \quad (5)$$

Sea R una rotación de $SU_7(2)$, entonces bajo ella

$$|TT_3\rangle \longrightarrow R|TT_3\rangle = \sum_{T_3'} D^{(T)}(R)_{T_3' T_3} |TT_3'\rangle \tag{1}$$

Si deseamos leyes de transformación simples para los campos se debe cumplir

$$\overline{|TT_3\rangle} \longrightarrow R\overline{|TT_3\rangle} = \sum_{T_3'} D^{(T)}(R)_{T_3' T_3}^* \overline{|TT_3'\rangle} \tag{2}$$

o equivalentemente *

$$\langle TT_3' | R | TT_3 \rangle = \langle \overline{TT_3'} | R | \overline{TT_3} \rangle^* \tag{3}$$

Teniendo en cuenta que $R = \exp(-i\theta \hat{n} \cdot \vec{T})$ se obtiene inmediatamente que

$$\langle TT_3' | TT_3 \rangle = \langle \overline{TT_3'} | \overline{TT_3} \rangle^* \tag{4}$$

$$\langle TT_3' | \vec{T} | TT_3 \rangle = - \langle \overline{TT_3'} | \vec{T} | \overline{TT_3} \rangle^*$$

y usando (2.3.4)

$$C|TT_3\rangle = |\overline{TT_3}\rangle$$

$$\vec{T}^* = -C\vec{T}C \tag{5}$$

o

equivalentemente

$$T_1 = -CT_1C, \quad T_2 = CT_2C, \quad T_3 = -CT_3C \tag{6}$$

La última relación indica que la T_3 para la partícula y la antipartícula son opuestas.

Usando (4) es fácil obtener, salvo fase eventual, que las asignaciones correctas de los antimuones son

$$|\overline{m}\rangle = + |1/2 \ 1/2\rangle, \quad |\overline{p}\rangle = - |1/2 \ -1/2\rangle \tag{7}$$

El operador G que acabamos de introducir da una definición adecuada de una antipartícula si consideramos solo las interacciones fuertes, para las cuales G conmuta con H_S ; lo mismo sucede con H_{em} . Cuando tenemos en cuenta las interacciones débiles G ya no conmuta con H_W y en lugar de utilizar G para definir la antipartícula debemos usar un operador que conmute con el Hamiltoniano total y este se elige como TCP.

Antes de continuar debemos decir algo sobre la paridad. En 1956 Lee y Yang predijeron la violación de la paridad (y de la conjugación de carga) en las interacciones débiles, lo cual fue confirmado experimentalmente un año más tarde por Wu. Por otra parte, en un alto grado de precisión,

42/004

*

$D^{(T)}(R)_{T_3 T_3}$

$$= \left(D^{(T)}(R)_{T_3 T_3} \right)^*$$

←

en la base en que (T_3) son reales

Sabemos que la paridad es conservada en las interacciones fuertes y electromagnéticas, y en tanto que H_W sea despreciable podemos augurar una paridad intrínseca bien definida a las partículas elementales. Para los leptones carece de toda utilidad intentar augurar una paridad. No sucede así para los hadrones pues muchas veces consideramos procesos dominados en las interacciones fuertes y electromagnéticas. Siempre podemos definir el operador que implementa la paridad de forma que la paridad intrínseca del protón sea $+1$; esto es lo usual y se escribe $J^P = 1/2^+$. ¿Cuál es la paridad del n ? Si la carga fuera el único observable de superselección, después de haber fijado la paridad intrínseca del protón todas las paridades de los hadrones quedarían determinadas. Sucede sin embargo que también el mismo barión es un observable de superselección y como consecuencia no existe ningún proceso físico que nos permita determinar la paridad relativa del neutrón con relación al protón. El neutrón y el protón forman un isodoblete y para mantener, de forma simple, la invariancia de isospin en nuestra formulación de las interacciones fuertes se toma para el neutrón paridad $+1$ y se escribe $1/2^+$.

Se puede probar, usando teoría cuántica de campos, que la paridad intrínseca de un par partícula bosónica y su antipartícula es $+1$, mientras que la de un par partícula fermiónica y su antipartícula es -1 . Según esto el spin-paridad de \bar{p} y \bar{n} es $1/2^-$.

ii) Λ

$\Lambda \quad M = 1.115.60 (5) \text{ MeV} , \quad J^P = 1/2^+ , \quad \tau = 2.632 (20) \times 10^{-10} \text{ seg} , \quad Q = 0$

Las desintegraciones conocidas y sus "branching ratios" son

Λ	\longrightarrow	$p \pi^-$	0.642	
Λ	\longrightarrow	$n \pi^0$	0.358	± 0.005
Λ	\longrightarrow	$p e^- \bar{\nu}_e$	$8.07 (28) \times 10^{-4}$	(1)
Λ	\longrightarrow	$p \mu^- \bar{\nu}_\mu$	$1.57 (35) \times 10^{-4}$	
Λ	\longrightarrow	$p \pi^- \gamma$	$0.85 (14) \times 10^{-3}$	

No existe ninguna partícula de masa análoga y propiedades similares por lo que concluimos que es un isosinglete: $T=0$.

El tamaño de su vida media nos hace sospechar que la Λ es desinte-

gracia a las desintegraciones debidas y así sucede realmente. Los cuatro primeros canales son debidos a una interacción débil, mientras que el último es debido a una interacción débil y otra electromagnética. Notar que

$$\frac{\Gamma(\Lambda \rightarrow p \pi^- \gamma)}{\Gamma(\Lambda \rightarrow p \pi^-)} = 1.32 (23) \times 10^{-3} \approx \alpha$$

La desintegración $p e^- \bar{\nu}_e$ es más probable que la $p p^- \bar{\nu}_p$ debido al mayor espacio fásico del primer caso. Los dos primeros canales se llaman no leptónicos y los dos siguientes semileptónicos por obvias razones. Si bien la magnitud de la vida media ya nos indica que los procesos no leptónicos son también débiles, el hecho de que las interacciones fuertes conserven el isospin no indica que el proceso no puede ser mediado por estas interacciones pues el estado inicial tiene $T_i = 0$ y el final tiene $T_f = 1/2$ o $3/2$, pues el pión tiene isospin 1.

Fijémonos que

$$\Gamma(\Lambda \rightarrow p \pi^-) = |\langle p \pi^- | H_W | \Lambda \rangle|^2 \times (\text{espacio fásico})$$

$$\Gamma(\Lambda \rightarrow n \pi^0) = |\langle n \pi^0 | H_W | \Lambda \rangle|^2 \times (\text{espacio fásico})$$

Si despreciamos las pequeñas diferencias de masa p, n y $\pi^+ \pi^0$ comparadas con el valor de Q de estos procesos entonces

$$R \equiv \frac{\Gamma(\Lambda \rightarrow p \pi^-)}{\Gamma(\Lambda \rightarrow n \pi^0)} = \frac{|\langle p \pi^- | H_W | \Lambda \rangle|^2}{|\langle n \pi^0 | H_W | \Lambda \rangle|^2}$$

Evidentemente H_W no puede ser un escalar, pero quizá H_W es quizá una combinación lineal de unos pocos tensores esféricos irreducibles bajo $SU_7(2)$. Evidentemente los únicos que pueden actuar en este caso son

$$H_W \doteq H_{W-1/2}^{1/2} + H_{W-1/2}^{3/2}$$

Imaginemos que el último término no exista. Además como veremos más adelante

$|n^+ \rangle = -|1, 1 \rangle$, $|n^0 \rangle = |1, 0 \rangle$, $|n^- \rangle = |1, -1 \rangle$ con lo cual

$$|n^- p \rangle = + \frac{1}{\sqrt{3}} |3/2, -1/2 \rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} |1/2, -1/2 \rangle$$

$$|n^0 n \rangle = + \sqrt{\frac{2}{3}} |3/2, -1/2 \rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} |1/2, -1/2 \rangle$$

y al tanto usando esto obtenemos

$$R = 2$$

a comparar con el valor experimental

$$R_{exp} = 1.793 \pm 0.040 \tag{1}$$

Se puede calcular fácilmente la conexión al resultado teórico debido a espacío fuerte

$$R_{th} = 2 \left[\frac{\lambda(M_A^2, M_P^2, M_{n^+}^2)}{\lambda(M_A^2, M_M^2, M_{n^0}^2)} \right]^{1/2} = 2 \times 0.9671 = 1.934 \tag{2}$$

El resultado teórico y el experimental son relativamente cercanos, y en tanto parece que la hipótesis de que $H_W^{1/2}$ es la dominante es relativamente buena. Esta regla se conoce con el nombre de regla $|DT| = 1/2$ y es válida para todos los procesos débiles no leptónicos con cambio de extrañeza.

¿Que es la extrañeza? La extrañeza S es una nueva carga. La extrañeza S es rigurosamente conservada en las interacciones fuertes y electromagnéticas pero no es conservada en las interacciones débiles. La Λ tiene extrañeza $S = -1$ y todas las demás partículas estudiadas hasta ahora tienen $S = 0$. Es también frecuente hablar de la hipercarga que se define

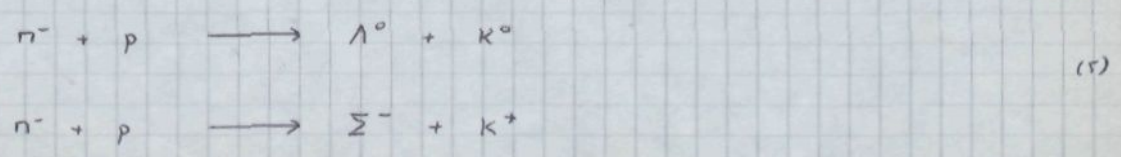
$$Y \equiv B + S \tag{3}$$

Es evidente que la relación de Gell-Mann - Nishijima para que incluye también en la Λ y no sólo los nucleones si se escribimos

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2} \tag{4}$$

y vemos que esta relación tiene una validez muy general.

Cuando a finales de los años cuarenta y principio de los cincuenta el número de partículas que interactuaban fuertemente fué aumentando, se encontró que una serie de transiciones que se debería esperar que ocurrieran como interacciones fuertes y que no violaban ninguna de las leyes de conservación conocidas no tenían lugar o se ocurrían lo habían vía las interacciones débiles. La única explicación plausible de esto hecho es que se estaba observando una nueva, y hasta ahora desconocida, ley de conservación de las interacciones fuertes. Fue Gell-Mann, en 1953, que introdujo el concepto de extrañeza. Se observaron, en ejemplo, las interacciones fuertes



Tanto Λ^0 como Σ^- tienen extrañeza -1 , mientras que K^0 y K^+ tienen extrañeza $+1$.

de forma que la extrañeza es conservada. Procesos como estos en los que las partículas extrañas son producidas en pares que tienen extrañezas opuestas son conocidos históricamente como procesos de producción asociada. Usando hades y bloques no extraños estos son los únicos mecanismos de producción de partículas extrañas vía las interacciones fuertes.

Volvamos de nuevo a las interacciones débiles. De momento podemos clasificarlas en cuatro grupos

- i) Interacciones débiles puramente leptónicas
- ii) Procesos semileptónicos con conservación de extrañeza
- iii) Procesos semileptónicos con cambio de extrañeza
- iv) Interacciones débiles no leptónicas

Teniendo en cuenta las mismas cuestiones introducidas antes e dar algunas leyes empíricas que satisfagan las interacciones débiles. No vamos a dar el origen de estas leyes ahora como que las creemos de acuerdo en lo que sigue

i) En el orden más bajo en las interacciones débiles $\Delta S = S_i - S_f = 0, \pm 1$. Teniendo en cuenta que tanto las interacciones fuertes como las electromagnéticas conservan S, entonces los procesos con $|\Delta S| \geq 2$ puede solo ocurrir en ordenes más altos en las interacciones débiles y en tanto el factor de acoplamiento de estos muy pequeña es de esperar que procesos con $|\Delta S| \geq 2$ sean muy poco probables ($\sim 10^{-5} - 10^{-6}$).

ii) Para los procesos semileptónicos con cambio de extrañeza se cumple que $\Delta Q = \Delta S$, donde se contabilizan solo las cargas hadrónicas. Como en el caso anterior esta regla solo se nota en procesos débiles de orden superior al primero y en tanto tiene que ser muy buena

iii) Para procesos semileptónicos con conservación de extrañeza la parte de H_W que interviene se comporta como un tensor irreducible de orden $T=1$.

iv) Para procesos semileptónicos con violación de extrañeza es válida la regla $|\Delta T| = 1/2$ es decir $H_W^{1/2}$. Violaciones de esta ley pueden provenir de las interacciones electromagnéticas y en tanto se deben esperar violaciones del orden de unos pocos por ciento. Esto es debido a que la corriente electromagnética, de acuerdo con la relación de Gell-Mann - Nishijima, debe ser de la forma

$$J^H = \sum_{T_3=0}^{T=0} J^H_{T_3=0} + \sum_{T_3=0}^{T=1} J^H_{T_3=0}$$

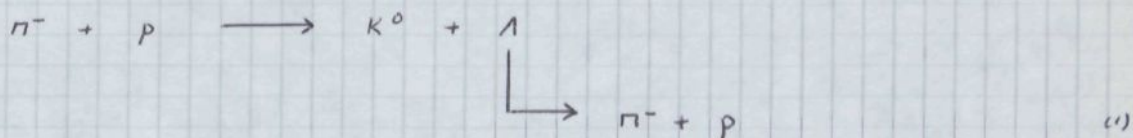
v) Para procesos no leptónicos existe una regla aproximada $|\Delta T| = 1/2$

vi) Los procesos semileptónicos con conservación de extrañeza tienen anchuras mayores que los procesos semileptónicos con violación de extrañeza, El factor es alrededor de ± 0.20

Al principio hemos dado la paridad del Λ como $+1$. Esto es una pura convención. Basta darse cuenta que en todos los procesos electromagnéticos y débiles que son los que conservan la paridad, también la extrañeza es conservada y por tanto podemos elegir arbitrariamente la paridad del Λ .

Finalmente vamos a ver una forma de determinar el spin del Λ .

El método que seguiremos es debido a R.K. Adair [P.R. 100, 1540 (1955)]. Consideremos el proceso



Tomemos la dirección del haz incidente de π^- como dirección de magnetización entonces $(J_z)_z = \pm 1/2$. Mas adelante veremos que el K y el n tienen spin cero. Consideremos los Λ producidos en la dirección del haz incidente; para ellos $(J_z)_z = \pm 1/2$ y por tanto el spin del Λ es indeterminado. Estudiemos ahora la desintegración de los Λ producidos en la dirección del haz incidente, y supongamos que su spin sea J . En el estado final el momento angular relativo $\pi^- - p$ es $L = J - 1/2$ o $L = J + 1/2$. Se tiene por lo tanto que si $(J_z)_z = +1/2$ o $-1/2$ los estados finales posibles son

$$\begin{aligned} \langle \theta, \phi | J + 1/2 \rangle = & A \left[C(J - 1/2, 1/2, J; 0, 1/2, 1/2) Y_{J - 1/2}^0(\theta, \phi) \alpha + \right. \\ & \left. + C(J - 1/2, 1/2, J; 1, -1/2, 1/2) Y_{J - 1/2}^1(\theta, \phi) \beta \right] + \\ & + B \left[C(J + 1/2, 1/2, J; 0, 1/2, 1/2) Y_{J + 1/2}^0(\theta, \phi) \alpha + \right. \\ & \left. + C(J + 1/2, 1/2, J; 1, -1/2, 1/2) Y_{J + 1/2}^1(\theta, \phi) \beta \right] \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \langle \theta, \phi | J - 1/2 \rangle = & A \left[C(J - 1/2, 1/2, J; -1, 1/2, -1/2) Y_{J - 1/2}^{-1}(\theta, \phi) \alpha + \right. \\ & \left. + C(J - 1/2, 1/2, J; 0, -1/2, -1/2) Y_{J - 1/2}^0(\theta, \phi) \beta \right] + \\ & + B \left[C(J + 1/2, 1/2, J; -1, 1/2, -1/2) Y_{J + 1/2}^{-1}(\theta, \phi) \alpha + \right. \\ & \left. + C(J + 1/2, 1/2, J; 0, -1/2, -1/2) Y_{J + 1/2}^0(\theta, \phi) \beta \right] \end{aligned}$$

De momento no sabemos nada sobre A y B pero no es necesario. Lo importante es que la producción del estado $L = J - 1/2$ y la del $L = J + 1/2$ es independiente del valor de J_z , lo cual es consecuencia de la invariancia bajo rotaciones. θ, ϕ son los ángulos que caracterizan el momento del p en el C.M. del Λ , tomando como eje polar el de la llegada del π^- . Suponiendo que el blanco no está polarizado se producen iguales cantidades de $(J_z)_z = \pm 1/2$

y por tanto la distribución angular de los p productos de la desintegración es

$$I(\theta, \phi) \propto \langle J \frac{1}{2} | J \frac{1}{2} \rangle + \langle J - \frac{1}{2} | J - \frac{1}{2} \rangle \tag{1}$$

$(\cos\theta | J \frac{1}{2})^2 + (\cos\theta | J - \frac{1}{2})^2$

Usando unas tablas de coeficientes de Clebsch - Gordan los estados anteriores se pueden escribir

$$\langle \theta | J \frac{1}{2} \rangle = A \left\{ \sqrt{\frac{2J+1}{4J}} Y_{J-\frac{1}{2}}^0(\theta, \phi) \alpha + \sqrt{\frac{2J-1}{4J}} Y_{J-\frac{1}{2}}^1(\theta, \phi) \beta \right\} +$$

$$+ B \left\{ -\sqrt{\frac{2J+1}{4(J+1)}} Y_{J+\frac{1}{2}}^0(\theta, \phi) \alpha + \sqrt{\frac{2J+3}{4(J+1)}} Y_{J+\frac{1}{2}}^1(\theta, \phi) \beta \right\}$$

$$\langle \theta | J - \frac{1}{2} \rangle = A \left\{ \sqrt{\frac{2J-1}{4J}} Y_{J-\frac{1}{2}}^{-1}(\theta, \phi) \alpha + \sqrt{\frac{2J+1}{4J}} Y_{J-\frac{1}{2}}^0(\theta, \phi) \beta \right\} +$$

$$+ B \left\{ -\sqrt{\frac{2J+3}{4(J+1)}} Y_{J+\frac{1}{2}}^{-1}(\theta, \phi) \alpha + \sqrt{\frac{2J+1}{4(J+1)}} Y_{J+\frac{1}{2}}^0(\theta, \phi) \beta \right\} \tag{2}$$

de donde se deduce inmediatamente que

$$I(\theta, \phi) \propto |A|^2 \left\{ \frac{2J+1}{2J} |Y_{J-\frac{1}{2}}^0(\theta, \phi)|^2 + \frac{2J-1}{2J} |Y_{J-\frac{1}{2}}^1(\theta, \phi)|^2 \right\}$$

$$+ |B|^2 \left\{ \frac{2J+1}{2(J+1)} |Y_{J+\frac{1}{2}}^0(\theta, \phi)|^2 + \frac{2J+3}{2(J+1)} |Y_{J+\frac{1}{2}}^1(\theta, \phi)|^2 \right\} \tag{3}$$

Conviene ahora en un momento que la desintegración del A ocurriera no las interacciones fuertes entonces la paridad sería conservada y que el spin del A, fuera ya conocido. Si los coeficientes que multiplican $|A|^2$ y $|B|^2$ fueran coeficientes distintos en θ y ϕ entonces podríamos saber L y de aquí determinar la paridad del A. Esto no puede ser ya que todo lo medido es un escalar. Por tanto los coeficientes que multiplican a $|A|^2$ y $|B|^2$ deben ser proporcionales y estudiando su valor en $\theta = \phi = 0$ vemos que son iguales. Por otra parte $I(\theta, \phi)$ no depende de ϕ como debe ser. Podemos pues escribir

$$I(\theta) \propto \frac{|A|^2 + |B|^2}{4\pi} \left\{ (2J+1) |P_{J-\frac{1}{2}}^0(\cos\theta)|^2 + \frac{4}{(2J+1)} |P_{J-\frac{1}{2}}^1(\cos\theta)|^2 \right\} \tag{4}$$

En consecuencia $I(\theta) = I(\pi - \theta)$, es decir $I(\theta)$ es un polinomio en $\cos^2\theta$ como debe ser. Además el término de orden más elevado es $(\cos\theta)^{2J-1}$. Vemos pues que una medida de $I(\theta)$ nos permite determinar el spin de la partícula. Para los valores de J menores tenemos

$$J = 1/2 \quad I(\theta) \propto \frac{|A|^2 + |B|^2}{4\pi} \cdot 2$$

$$J = 3/2 \quad I(\theta) \propto \frac{|A|^2 + |B|^2}{4\pi} (1 + 3 \cos^2 \theta)$$

$$J = 5/2 \quad I(\theta) \propto \frac{|A|^2 + |B|^2}{4\pi} \cdot \frac{3}{2} (1 - 2 \cos^2 \theta + 5 \cos^4 \theta) \quad (1)$$

Los datos experimentales favorecen, sin lugar a dudas, la asignación $J = 1/2$.

iii) Σ

$$\Sigma^+ \quad M = 1189.36(6) \text{ MeV}, \quad \tau = 0.800(4) \times 10^{-10} \text{ seg}, \quad Q = +1$$

$$\Sigma^0 \quad M = 1192.46(8) \text{ MeV}, \quad \tau = (5.8 \pm 1.3) \times 10^{-20} \text{ seg}, \quad Q = 0$$

$$\Sigma^- \quad M = 1197.36(6) \text{ MeV}, \quad \tau = 1.482(11) \times 10^{-10} \text{ seg}, \quad Q = -1$$

Estas partículas tienen todas $1/2^+$. Forman un tripleto de isospin, $T=1$, con las asignaciones $+1, 0, -1$ para $\Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-$, respectivamente. Por otra parte la forma de producirse implica que, para todas ellas, $B=1$ y $S=-1$. Noten que $Y=0$ y que la relación de Gell-Mann - Nishijima se cumple.

Los canales de desintegración que más nos interesan y los "branching ratios"

correspondientes son

$\Sigma^+ \rightarrow p \pi^0$	0.5164	$\Sigma^- \rightarrow n \pi^-$	1
	± 0.0030	$n e^- \bar{\nu}_e$	$1.08(4) \times 10^{-3}$
$n \pi^+$	0.4836	$n \mu^- \bar{\nu}_\mu$	$0.45(4) \times 10^{-3}$
$\Lambda e^+ \nu_e$	$2.02(47) \times 10^{-5}$	$\Lambda e^- \bar{\nu}_e$	$0.61(5) \times 10^{-4}$

$$\Sigma^0 \rightarrow \Lambda \gamma \quad 1$$

Las desintegraciones de los Σ^\pm proceden necesariamente vía la interacción débil, mientras que la Σ^0 se desintegra vía la interacción electromagnética y en esto su vida media es tan corta. Podría alguien pensar que la desintegración $\Sigma^+ \rightarrow p \gamma$ fuera electromagnética, esto evidentemente no es así pues la extrañeza cambia en una unidad. Este proceso ha sido visto y procede vía una interacción débil y no electromagnética y el B.R. medido es $(1.24 \pm 0.18) 10^{-3}$, típico de tales casos.

Pasemos a hacer algunas consideraciones sobre las desintegraciones semileptónicas. La primera diferencia que observamos es que no hemos considerado las desinte-

procesos $\Sigma^+ \rightarrow n e^+ \nu_e$. En realidad se han buscado sin éxito y sabemos que

$$\frac{\Gamma(\Sigma^+ \rightarrow n e^+ \nu_e)}{\Gamma(\Sigma^- \rightarrow n e^- \bar{\nu}_e)} < 0.04 \tag{1}$$

cuando en principio deberíamos esperar que fueran del mismo orden de magnitud. Notemos sin embargo que en $\Sigma^+ \rightarrow n e^+ \nu_e$ se tiene $\Delta Q = +1, \Delta S = -1$ y ya hemos dicho antes que en las transiciones semileptónicas con cambio de extrañeza se debe cumplir la regla $\Delta S = \Delta Q$.

Pasemos a considerar los procesos no leptónicos ¿Sirve aquí para algo la regla aproximada $|\Delta T| = 1/2$? Vamos a ver que la situación es más compleja que en el caso anterior. Recordemos

$$\begin{aligned}
|p\rangle &= |1/2, 1/2\rangle & |n\rangle &= |1/2, -1/2\rangle \\
|\pi^+\rangle &= |-1, 1\rangle & |\pi^0\rangle &= |1, 0\rangle & |\pi^-\rangle &= |-1, -1\rangle \\
|\Sigma^+\rangle &= |-1, 1\rangle & |\Sigma^0\rangle &= |1, 0\rangle & |\Sigma^-\rangle &= |1, -1\rangle
\end{aligned}
\tag{2}$$

Siempre podemos hacer esta última elección, pero esta implica condiciones de como asociar los estados $|\bar{\Sigma}\rangle$ con la base de isospin. Tomemos entonces

$$\begin{aligned}
|\pi^0 p\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} |3/2, 1/2\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} |1/2, 1/2\rangle, & |\pi^+ n\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{3}} |3/2, 1/2\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} |1/2, 1/2\rangle \\
|\pi^- n\rangle &= |3/2, -3/2\rangle
\end{aligned}$$

Entonces el Teorema de Wigner-Eckart nos permite escribir

$$\begin{aligned}
\langle \pi^0 p | H_w^{1/2} | \Sigma^+ \rangle &= + \frac{\sqrt{2}}{3} (A_1 - A_3), & \langle \pi^+ n | H_w^{1/2} | \Sigma^+ \rangle &= + \frac{1}{3} (2A_1 + A_3) \\
\langle \pi^- n | H_w^{1/2} | \Sigma^- \rangle &= + A_3
\end{aligned}$$

donde A_{2T} indica el elemento de matriz reducido para el estado final de isospin T. Como las cantidades A_1 y A_3 son desconocidas, solo obtenemos

$$\sqrt{2} \bar{\Sigma}_0^+ = \Sigma_+^+ - \Sigma_-^- \tag{3}$$

donde $\bar{\Sigma}_b^a$ indica la amplitud de desintegración de un Σ^a produciendo un n^b . Más adelante volveremos sobre esta relación. Fijemos que las cantidades $\bar{\Sigma}_b^a$ son en general complejas. Las anchuras de estas desintegraciones son

$$\Gamma(\Sigma^+ \rightarrow \pi^0 p) = |\langle \pi^0 p | H_w^{1/2} | \Sigma^+ \rangle|^2 F(\Sigma^+ \pi^0 p) \tag{4}$$

y simularmente para los restantes. Despreciando los factores de espacio físico se puede escribir como consecuencia de (32.3)

$$|\sqrt{\Gamma_+^+} - \sqrt{\Gamma_-^-}| \leq \sqrt{2} \sqrt{\Gamma_0^+} \leq \sqrt{\Gamma_+^+} + \sqrt{\Gamma_-^-} \quad (1)$$

y como

$$\sqrt{\Gamma_+^+} = 0.777(8) \times 10^5 \text{ s}^{-1}, \quad \sqrt{\Gamma_0^+} = 0.802(8) \times 10^5 \text{ s}^{-1}, \quad \sqrt{\Gamma_-^-} = 0.821(4) \times 10^5 \text{ s}^{-1} \quad (2)$$

De (1) y (2) se obtiene

$$0.044 \leq 1.134 \leq 1.598$$

lo cual es bien satisfecho.

(v) Ξ

$$\Xi^0 \quad M = 1314.9(6) \text{ MeV}, \quad \tau = 2.90(10) \times 10^{-10} \text{ seg}, \quad Q = 0$$

$$\Xi^- \quad M = 1321.32(13) \text{ MeV}, \quad \tau = 1.641(16) \times 10^{-10} \text{ seg}, \quad Q = -1$$

Se sabe que ambas partículas tienen $spim \ 1/2$ y su paridad se cree que es $+1$, debido a la simetría $SU(3)$ que discutiremos más adelante. Además ambas tienen $B=+1$ y $S=-2$. Forman un doblete de isospin $T=1/2$ y de la reflexión de Gell-Mann - Nishijima se tiene que Ξ^0 y Ξ^- tienen tenores componentes de isospin $T_3 = 1/2$ y $T_3 = -1/2$, respectivamente.

Los canales de desintegración de más interés para nosotros y los B.R. correspondientes son

$$\begin{array}{l} \Xi^0 \rightarrow \Lambda p^0 \quad 1 \\ \Xi^- \rightarrow \Lambda p^- \quad 1 \\ \quad \quad \quad \Lambda e^- \bar{\nu}_e \quad 0.28(12) \times 10^{-3} \end{array}$$

Pasemos a considerar las desintegraciones no leptónicas. Si hacemos la asignación

$$|\Xi^0\rangle = |1/2 \ 1/2\rangle \quad |\Xi^-\rangle = |1/2 \ -1/2\rangle \quad (3)$$

entonces

$$\sqrt{2} \Xi_0^0 = \Xi_+^- \quad (4)$$

con rotación análoga a la del caso anterior. Despreciando los efectos del espacio físico se obtiene

$$R \equiv \frac{\Gamma(\Xi^- \rightarrow \Lambda p^-)}{\Gamma(\Xi^0 \rightarrow \Lambda p^0)} = 2$$

a comparas con el valor experimental

$$R = 1.767 \pm 0.079 \tag{1}$$

Para tener en cuenta la conexión de espino físico usaremos

$$R = 2 \frac{M_{\Xi^0}}{M_{\Xi^-}} \frac{\lambda^{1/2} (M_{\Xi^-}^2, M_{\Lambda}^2, M_{\pi^-}^2)}{\lambda^{1/2} (M_{\Xi^0}^2, M_{\Lambda}^2, M_{\pi^0}^2)} = 2 \times 1.028 = 2.06 \tag{2}$$

y vemos que la regla aproximada $|D\vec{T}| = 1/2$ se satisface.

En principio parece que la desintegración $\Xi^- \rightarrow n \pi^-$ debe ser mucho mas probable que la $\Xi^- \rightarrow \Lambda \pi^-$, sin embargo los resultados experimentales dan

$$\frac{\Gamma(\Xi^- \rightarrow n \pi^-)}{\Gamma(\Xi^- \rightarrow \Lambda \pi^-)} < 1.1 \times 10^{-3} \tag{3}$$

Notemos sin embargo que la primera transición es $\Delta S = -2$ y por tanto prohibida en primer orden en débiles, según dijimos antes. Por el mismo motivo debe ser altamente improbable la transición $\Xi^0 \rightarrow p e^- \bar{\nu}_e$ y se encuentra experimentalmente que

$$\frac{\Gamma(\Xi^0 \rightarrow p e^- \bar{\nu}_e)}{\Gamma(\Xi^- \rightarrow \Lambda e^- \bar{\nu}_e)} < 2.6 \tag{4}$$

En realidad la cota es mejor que lo que aparece pues el espino físico de esta desintegración del Ξ^0 es del orden de 25 veces mayor que el de la desintegración considerada del Ξ^- .

v) Ω^-

$$\Omega^- \quad M = 1672.22(31) \text{ keV} \quad , \quad \tau = (0.82 \pm 0.03) \times 10^{-10} \text{ seg} \quad , \quad Q = -1$$

Esta partícula fue predicha por Gell-Mann usando la simetría SU(3), como veremos más adelante. Tiene isospin cero, $B=1$ y $S=-3$ y de acuerdo con la predicción del SU(3) su spin-paridad es $3/2^+$, si bien no hay evidencia experimental de este resultado. Las desintegraciones claramente obtenidas son

$$\left. \begin{array}{l} \Omega^- \rightarrow \Xi^0 \pi^- \\ \Omega^- \rightarrow \Xi^- \pi^0 \\ \Omega^- \rightarrow \Lambda \pi^- \end{array} \right\} 1$$

que explican prácticamente el 100% de las desintegraciones. Todas ellas son débiles y cambian la extrañeza en una unidad.

Estos son todos los bariones que no se desintegran por las interacciones fuertes y que carecen de encanto. En 1970 Glashow, Iliopoulos y Maiani probaron teóricamente que de la misma forma que había partículas extrañas es decir $S \neq 0$, debían existir partículas que tuvieran una nueva carga que denominaron encanto. Todas las partículas descubiertas hasta aquí son no encantadas $C=0$. Hoy día sabemos que existen partículas con encanto $C \neq 0$. Como C , igual que S , es conservado en las interacciones fuertes y electromagnéticas fuertemente había partículas con encanto que solo se desintegraran débilmente, pues C , puede cambiar en estas interacciones. Voltaremos sobre esto más adelante y ahora vamos a considerar los mesones convencionales que no se desintegran por las interacciones fuertes.

a) Mesones

i) π

π^\pm $M = 139.5669 (12) \text{ MeV}$, $\tau = 2.6030 (23) \times 10^{-8} \text{ seg}$, $Q = \pm 1$

π^0 $M = 134.9626 (39) \text{ MeV}$, $\tau = 0.828 (57) \times 10^{-16} \text{ seg}$, $Q = 0$.

Los piones solo tienen carga eléctrica y el $\pi^+ - \pi^-$ forman un sistema partícula - antipartícula, mientras que el π^0 coincide con su antipartícula. Entonces

$$C |\pi^\pm\rangle = |\pi^\mp\rangle \quad C |\pi^0\rangle = |\pi^0\rangle \tag{1}$$

De acuerdo con la relación de Gell-Mann - Nishijima se tiene que π^+, π^0, π^- tienen, respectivamente, tercera componente del isospin $+1, 0, -1$. Debemos ahora ver como hacen estas asignaciones de acuerdo con (2.4). Estas relaciones se pueden escribir

$$\langle T_3' | T_\pm | T T_3 \rangle = - \langle \overline{T_3'} | T_\mp | \overline{T T_3} \rangle^* , \quad \langle T_3' | T_3 | T T_3 \rangle = - \langle \overline{T_3'} | T_3 | \overline{T T_3} \rangle^* \tag{2}$$

de donde se obtienen como únicas condiciones independientes a lo sumo

$$\langle \pi^0 | T_+ | \pi^- \rangle = - \langle \pi^0 | T_- | \pi^+ \rangle^* , \quad \langle \pi^+ | T_+ | \pi^0 \rangle = - \langle \pi^- | T_- | \pi^0 \rangle^* \tag{3}$$

Si

$$|\pi^+\rangle = \alpha |1, 1\rangle , \quad |\pi^0\rangle = \beta |1, 0\rangle , \quad |\pi^-\rangle = \gamma |1, -1\rangle \tag{4}$$

$$T_\pm |T T_3\rangle = [(T \mp T_3)(T \pm T_3 + 1)]^{1/2} |T T_3 \pm 1\rangle$$

* (reales)

de donde se deduce como única condición sobre las fases $\alpha \beta^* = -\beta \gamma^*$, que

42/001

* pag. 3): $|p(T_3)\rangle$ estado particular

$$\langle p(T_3') | T_+ | p(T_3) \rangle = - \langle \bar{p}(T_3') | T_- | \bar{p}(T_3) \rangle$$

ya que escogemos una base real.

se satisface con la elección

$$|\pi^+\rangle = -|1, 1\rangle, \quad |\pi^0\rangle = |1, 0\rangle, \quad |\pi^-\rangle = |1, -1\rangle \tag{1}$$

que es la que adoptaremos aquí.

Hemos visto que algunas partículas coinciden con sus antipartículas y en este caso tienen valores de C bien determinados. Así vemos que el pión neutro tiene $C = +1$. También el fotón coincide con su antipartícula y por tanto tiene un valor de C bien definido, y vale $C = -1$. La cantidad C es un número cuántico multiplicativo, como la paridad, y es conservado en las interacciones fuertes y electromagnéticas, siendo violado en las interacciones débiles. Se tiene por ejemplo que

$$\frac{\Gamma(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma\gamma)}{\Gamma(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma)} < 1.5 \times 10^{-6} \tag{2}$$

Si no fuera por la ley de conservación de C en las interacciones electromagnéticas sería de esperar que esta relación fuera del orden de α .

Son muy pocas las partículas que coinciden con sus antipartículas y que, por consiguiente, tengan C bien definido. Para generalizar este concepto a todo tipo de partículas que solo presenten carga eléctrica se introduce la G -paridad. El operador que implementa esta simetría es por definición

$$G = C e^{-i\pi T_2} \tag{3}$$

Notemos que

$$e^{-i\pi T_2} |T, T_3\rangle = \sum_{T_3'} \langle T, T_3' | e^{-i\pi T_2} |T, T_3\rangle |T, T_3'\rangle = \sum_{T_3'} d_{T_3' T_3}^T(\pi) |T, T_3'\rangle$$

$$\Rightarrow e^{-i\pi T_2} |T, T_3\rangle = (-1)^{T-T_3} |T, -T_3\rangle \tag{4}$$

Se tiene entonces que para el caso de piones

$$G|\pi^\pm\rangle = -|\pi^\pm\rangle, \quad G|\pi^0\rangle = |\pi^0\rangle \tag{5}$$

es decir que la G -paridad para los piones es -1 .

Veamos que en todo caso múltiplo en el que la única carga no nula sea la eléctrica siempre se puede hacer la asignación de los estados físicos a los de isospin bien definido de forma que los estados partícula sean estados de G bien definido e igual a $G_m (-1)^T$, donde G_m es el valor

propio de G para la partícula neutra del isomultiplete. La relación de Gell-Mann - Nishijima se reduce, para isomultipletes que solo tengan carga eléctrica, a $Q = T_3$ y fu tanto la multiplicación de la carga eléctrica implica que T debe ser entero. Indiquemos por $|p(T_3)\rangle$ el estado partícula con isospin T y tercera componente T_3 y la asociación a los estados matemáticos es

$$|p(T_3)\rangle = \alpha(T_3) |T, T_3\rangle \tag{1}$$

Para la partícula neutra

$$G |p(0)\rangle = \alpha(0) G |T, 0\rangle = \alpha(0) (-1)^T C |T, 0\rangle = (-1)^T C |p(0)\rangle = \epsilon_m (-1)^T |p(0)\rangle$$

Veamos ahora como $|p(T_3)\rangle$ se transforma bajo G :

$$\begin{aligned} G |p(T_3)\rangle &= \alpha(T_3) G |T, T_3\rangle = \alpha(T_3) (-1)^{T-T_3} C |T, -T_3\rangle = \\ &= (-1)^{T-T_3} \alpha(T_3) \alpha^*(-T_3) C |p(-T_3)\rangle = (-1)^{T-T_3} \alpha(T_3) \alpha^*(-T_3) |p(T_3)\rangle \end{aligned} \tag{2}$$

Por otra parte (24.4) implica como una condición sobre las fases $\alpha(T_3)$

$$\begin{aligned} \langle p(T_3+1) | T_+ | p(T_3)\rangle &= - \langle p(-T_3-1) | T_- | p(-T_3)\rangle^* \\ \Rightarrow \alpha(T_3) \alpha^*(T_3+1) &= - \alpha(-T_3-1) \alpha^*(-T_3) \\ \Rightarrow \alpha(T_3) \alpha(-T_3) &= - \alpha^*(T_3+1) \alpha^*(-T_3-1) \end{aligned} \tag{3}$$

Entonces el resultado de todo se obtiene tomando los $\alpha(T_3)$ reales y tales que cumplan

$$\alpha(T_3) \alpha(-T_3) = \epsilon_m (-1)^{T_3} \tag{4}$$

y entonces

$$G |p(T_3)\rangle = \epsilon_m (-1)^T |p(T_3)\rangle \tag{5}$$

que es el resultado de todo.

Evidentemente, como las interacciones fuertes son invariantes bajo isospin y conjugación de carga, la G-paridad es una simetría de las interacciones fuertes.

Vamos antes de continuar a dar algunos resultados que son de interés:

Ya hemos dicho que la G-paridad del pión es -1 y fu tanto, al ser un número cuántico multiplicativo, para un sistema de N piones la G-paridad es $(-1)^N$:

$$\text{Sistema } N \text{ piones : } G\text{-paridad } (-1)^N \tag{6}$$

42/001

se parece que de aquí

$$\alpha(0) \alpha^*(0) = E_n \quad \text{que implica } E_n = +1!$$

pero en (2) se utiliza $T_3 \neq 0$ ($(|p(-T_3)| = |p(T_3)|)$)
y (4) solo se deduce para $T_3 \neq 0$ para que dé
lo mismo que para el estado real.

Consideremos un sistema ligado e^-e^+ , en un estado caracterizado por L y S . Al aplicar a este estado la conjugación partícula-antipartícula se intercambian las cargas de las partículas y podemos escribir, al tratarse de un sistema de fermiones,

$$C|e^-e^+\rangle = |e^+e^-\rangle = -(-1)^L(-1)^{S+1}|e^-e^+\rangle = \epsilon|e^-e^+\rangle$$

y en lo tanto el sistema considerado es un estado propio de C con valor propio

$$\epsilon = (-1)^{L+S} \tag{1}$$

El estado ligado e^-e^+ se llama positronio. En el estado fundamental $L=0$ y entonces se puede tener $S=0$ (1S_0 , para positronio) o $S=1$ (3S_1 , orto-positronio). El positronio se desintegra electromagnéticamente en un conjunto de fotones. Recordando que para N fotones $\epsilon = (-1)^N$ se tienen



pues las interacciones electromagnéticas son invariantes bajo C

Los piones tienen spin - paridad 0^- . Veamos por ejemplo como determinar la paridad del π^- . Un π^- puede ser capturado en onda S en un deuterón y se ha observado la reacción



El estado inicial tiene $J_i = 1$, que es el spin del deuterón. En la notación usual $^{2S+1}L_J$, la conservación del momento angular implica que los estados finales posibles son $^3S_1, ^3P_1, ^1P_1, ^3D_1$. Ahora bien el estado final tiene que ser totalmente antisimétrico bajo el intercambio de los dos neutrones y en tanto $(-1)^L(-1)^{S+1} = -1$, esto es $(-1)^{L+S} = 1$ y en tanto el estado final es por lo tanto 3P_1 . El proceso (3) tiene lugar en las interacciones fuertes. El deuterón es un estado ligado $n-p$ en onda S y su paridad es en tanto $+1$. Entonces la conservación de la paridad implica $P_\pi(-1)^0(+1) = (+1)(+1)(-1)^L$ y en tanto el hecho de que la reacción tiene lugar implica que $P_\pi = -1$.

Las desintegraciones que más nos interesan de los piones y los B.R. correspondientes son

$$\begin{array}{ll} \pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu & 1 \\ e^+ \nu_e & 1.267 (23) \times 10^{-4} \end{array} \quad \begin{array}{ll} \pi^0 \rightarrow \gamma \gamma & 0.9885 (5) \\ \gamma e^+ e^- & 1.15 (5) \times 10^{-2} \end{array}$$

En consecuencia el π^+ se desintegra vía las interacciones débiles, mientras que el π^0 se desintegra electromagnéticamente.

Las desintegraciones del π^+ son difíciles de entender con las ideas dadas hasta ahora: la universalidad $e-\mu$ y el hecho de que el espacio fásico del canal $e^+ \nu_e$ es mucho mayor que el del canal $\mu^+ \nu_\mu$ nos hace esperar que la desintegración $e^+ \nu_e$ fuera la más probable y la experiencia nos dice todo lo contrario. Mas adelante daremos una explicación totalmente satisfactoria de este hecho.

(ii) η

$$\eta \quad M = 548.8 (6) \text{ MeV}, \quad \Gamma = 0.85 (12) \text{ keV}, \quad G = 0$$

Esta anchura corresponde a $\tau = 7.74 (96) \times 10^{-19} \text{ seg}$, es decir típicamente electromagnética.

Esta partícula es un singlete de isospin $T=0$ y todas las cargas son nulas. Los modos más importantes de desintegración y los B.R. correspondientes son

$$\begin{array}{ll} \eta \rightarrow \gamma \gamma & 0.380 (10) \\ \eta \rightarrow \pi^0 \gamma \gamma & 3.1 (1.1) \times 10^{-2} \\ \eta \rightarrow 3\pi^0 & 0.299 (11) \\ \eta \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0 & 0.236 (6) \end{array}$$

Todas ellas tienen lugar vía las interacciones electromagnéticas. De la desintegración $\eta \rightarrow 3\pi^0$ se deduce que $G = +1$ y por tanto $G = +1$. Como G es conservado en las interacciones electromagnéticas la desintegración $\eta \rightarrow \pi^0 \gamma$ no puede tener lugar y no ha sido vista. ¿Qué pasa con $\eta \rightarrow \pi^+ \pi^-$? Se tiene que el B.R. es $< 1.5 \times 10^{-3}$. La η tiene spin - paridad 0^- y por tanto los dos piones finales están en onda $L=0$. La paridad inicial es $P_i = -1$ y la final $P_f = (-1)^2 (-1)^0 = +1$, luego este proceso debe ser débil.

(iii) K

$$K^\pm \quad M = 493.669 (15) \text{ MeV}, \quad \tau = 1.2371 (26) \times 10^{-8} \text{ seg}, \quad G = \pm 1$$

$$K^0, \bar{K}^0 \quad M = 497.67 (13) \text{ MeV}, \quad G = 0.$$

Estas partículas son producidas vía las interacciones fuertes en procesos tales como



es decir típicos procesos de producción asociada. Su spin paridad es 0^- y forman dos isodobletes: (K^+, K^0) con extrañeza $S = +1$ y terceras componentes de spin $1/2$ y $-1/2$ respectivamente y el de las antipartículas (\bar{K}^0, K^-) . Al tener estas partículas extrañeza no podemos construir estados propios ni de C ni de la G-paridad.

El número de canales de desintegración del K^+ estudiados es muy elevado y mencionaremos sólo algunos y los B.R. correspondientes

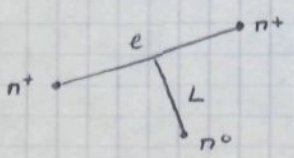
K^+	\rightarrow	$\mu^+ \nu_\mu$	0.6350 (16)
K^+	\rightarrow	$\pi^+ \pi^0$	0.2116 (15)
K^+	\rightarrow	$\pi^+ \pi^+ \pi^-$	$5.59 (3) \times 10^{-2}$
K^+	\rightarrow	$\pi^+ \pi^0 \pi^0$	$1.73 (5) \times 10^{-2}$
K^+	\rightarrow	$\pi^0 \mu^+ \nu_\mu$	$3.20 (4) \times 10^{-2}$
K^+	\rightarrow	$\pi^0 e^+ \nu_e$	$4.82 (5) \times 10^{-2}$

las cuales son procesos que tienen lugar vía las interacciones débiles. Se respte aquí lo que sucedía con las desintegraciones puramente leptónicas del π^+ ; se ha encontrado que

$$\frac{\Gamma(K^+ \rightarrow e^+ \nu_e)}{\Gamma(K^+ \rightarrow \mu^+ \nu_e)} = 2.43 (15) \times 10^{-5} \tag{2}$$

cuando todo hora esperar que este cociente fuera mayor que uno.

Las desintegraciones $K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^-$ y $K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^+ \pi^-$ han jugado en la física de partículas un desarrollo muy importante. Antes de 1956 se había observado la existencia de dos partículas $\theta^+ \rightarrow \pi^+ \pi^-$ y $\zeta^+ \rightarrow \pi^+ \pi^+ \pi^-$ de igual masa, vida media y spin nulo. Se veía entonces que las desintegraciones débiles, causantes de estas desintegraciones, conservaban la paridad. En el proceso $\theta^+ \rightarrow \pi^+ \pi^-$ la conservación del momento angular implica que los dos piones son producidos en onda $L=0$ y por tanto $P_\theta = (-1)(-1)(-1)^0 = +1$. En el proceso $\zeta^+ \rightarrow \pi^+ \pi^+ \pi^-$



indiquemos por l el momento angular relativo de $\pi^+ \pi^+$ y por L el momento angular orbital del π^0 respecto al C.M. del sistema $\pi^+ \pi^+$. La conservación del momento angular implica que $L = l$ y $P_\zeta = (-1)(-1)(-1)(-1)^{L+l} = -1$. Por tanto existen

dos partículas con masas, vidas medias y spins idéntico y paridades opuestas. Esta sorprendente propiedad se llama la paradoja $\theta - \tau$. Lee y Yang, en 1956, la resolvieron postulando que en las interacciones débiles la paridad no era conservada: $\tau \equiv \theta \equiv K^+$.

Se tiene también que

$$\frac{\Gamma(K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^+ e^- \bar{\nu}_e)}{\Gamma(K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^- e^+ \nu_e)} < 1.3 \times 10^{-2} \tag{1}$$

lo cual es otra evidencia en favor de la regla $\Delta S = \Delta Q$.

La desintegración de los kaones neutros es un problema mucho más difícil y antes de atacarlo vamos a obtener algunos resultados que nos serán de gran utilidad. Se puede probar, en el marco de la teoría cuántica de campos, el llamado teorema CPT, debido a Pauli, Lüders, Zumino, ... Este teorema afirma que bajo condiciones muy generales (invariancia bajo el grupo ortogonal de Lorentz, validez del principio de microcausalidad, ...) la simetría CPT es exacta. Se cree hoy día que la simetría CPT es exacta para todo tipo de interacciones. Una consecuencia importante de este hecho es que la masa y la vida media de una partícula coinciden con las de su antipartícula. En efecto, sea H el Hamiltoniano del sistema que supondremos invariante bajo CPT e indiquemos por $|\alpha\rangle$ un estado mono-partícula propio de H . Su masa es

$$m(\alpha) \equiv \langle \alpha | H | \alpha \rangle$$

Si U es operador anti-unitario que implementa CPT se obtiene

$$m(\alpha) = \langle \alpha | H | \alpha \rangle = \langle U \alpha | U H U^\dagger | U \alpha \rangle^* = \langle \bar{\alpha} | H | \bar{\alpha} \rangle^* = \langle \bar{\alpha} | H | \bar{\alpha} \rangle = m(\bar{\alpha})$$

es decir la partícula y antipartícula tienen la misma masa. Similarmente para la anchura total

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha) &= \sum_{\beta} \sum_{\beta} |\langle \beta | T | \alpha \rangle|^2 = \sum_{\beta} \sum_{\beta} \langle \alpha | T^\dagger | \beta \rangle \langle \beta | T | \alpha \rangle = \sum_{\beta} \langle \alpha | T^\dagger T | \alpha \rangle = \\ &= \sum_{\beta} \langle U \alpha | U T^\dagger U^\dagger U T U^\dagger | U \alpha \rangle^* = \sum_{\beta} \langle \bar{\alpha} | T T^\dagger | \bar{\alpha} \rangle^* = \sum_{\beta} \langle \bar{\alpha} | T T^\dagger | \bar{\alpha} \rangle = \\ &= \sum_{\beta} \langle \bar{\alpha} | T^\dagger T | \bar{\alpha} \rangle = \sum_{\beta} \sum_{\beta} \langle \bar{\alpha} | T^\dagger | \beta \rangle \langle \beta | T | \bar{\alpha} \rangle = \sum_{\beta} |\langle \beta | T | \bar{\alpha} \rangle|^2 = \Gamma(\bar{\alpha}) \end{aligned}$$

Vemos pues que la invariancia CPT implica

$$\left. \begin{aligned} m(\text{partícula}) &= m(\text{antipartícula}) \\ \tau(\text{partícula}) &= \tau(\text{antipartícula}) \end{aligned} \right\} \tag{2}$$

(falta pag 42, no existe)

*

$$S \sim e^{iH}$$

$$USU^\dagger \sim e^{-iH} = S^\dagger$$

$$U(I + iT)U^\dagger = I - iT^\dagger$$

$$I - iUTU^\dagger = I - iT^\dagger$$

**

$$S^\dagger S = (I - iT^\dagger)(I + iT) = I + i(T - T^\dagger) + T^\dagger T$$

$$S S^\dagger = (I + iT)(I - iT^\dagger) = I + i(T - T^\dagger) + T T^\dagger$$

$$\Rightarrow T^\dagger T = T T^\dagger$$

Comfirmaciones experimentales de estos resultados, son entre otras, las siguientes

$$\frac{M(p^+)}{M(p^-)} = 0.999932 (41) \quad , \quad \frac{M(n^+)}{M(n^-)} = 1.0002 (5)$$

$$\frac{\Sigma(n^+)}{\Sigma(n^-)} = 1.00053 (73) \quad , \quad \frac{\Sigma(K^+)}{\Sigma(K^-)} = 1.009 (33)$$

(1)

en buen acuerdo con la predicción teórica.

Pasemos ahora a considerar los kaones neutros. En los procesos de producción dominados totalmente por las interacciones fuertes y electromagnéticas, se conserva la extrañeza y se producen kaones neutros con extrañeras bien definidas: K^0 y \bar{K}^0 , que tienen $S = +1$ y $S = -1$, respectivamente. Si solo existieran interacciones fuertes y electromagnéticas entonces $[H_S + H_{EM}, S] = 0$ y los estados $|K^0\rangle$ y $|\bar{K}^0\rangle$ tendrían masas y vidas medias bien definidas. Sin embargo existen las interacciones débiles, que violan la extrañeza, y en tanto $H \equiv H_S + H_{EM} + H_W$ es tal que $[H, S] \neq 0$ y los estados propios de H con masa y vida media bien definidas, no pueden tener S bien definido. Indicáremos los estados de masa y vida media bien definidos por $|K_L\rangle$ y $|K_S\rangle$ y sin pérdida de generalidad se puede escribir

$$|K_S\rangle = [2(1 + |\epsilon|^2)]^{-1/2} \{ (1 + \epsilon) |K^0\rangle - (1 - \epsilon) |\bar{K}^0\rangle \}$$

$$|K_L\rangle = [2(1 + |\epsilon'|^2)]^{-1/2} \{ (1 + \epsilon') |K^0\rangle + (1 - \epsilon') |\bar{K}^0\rangle \}$$

(2)

donde en cada notación de los estados parámetros reales tienen el significado, uno por normalización y otro por absorción de la fase global. Como $\langle K^0 | K^0 \rangle = \langle \bar{K}^0 | \bar{K}^0 \rangle = 1$ y $\langle K^0 | \bar{K}^0 \rangle = 0$ se tiene que

$$\langle K_L | K_L \rangle = 1 \quad \langle K_S | K_S \rangle = 1$$

$$\langle K_L | K_S \rangle = [(1 + |\epsilon|^2)(1 + |\epsilon'|^2)]^{-1/2} (\epsilon + \epsilon'^*)$$

(3)

No es de extrañar que $\langle K_L | K_S \rangle \neq 0$, pues el Hamiltoniano efectivo describiendo estados que se desintegraran no es autoadjunto. La evolución temporal de estos estados es

$$|K_i(t)\rangle = e^{-iH_i t} |K_i\rangle \quad i = L, S$$

(4)

$$H_i = m_i - \frac{i}{2} \Gamma_i$$

Además imitando las notaciones (2) se obtiene

$$|K^0\rangle = \frac{[(1+|\epsilon|^2)(1+|\epsilon'|^2)]^{1/2}}{\sqrt{2}(1-\epsilon\epsilon')} \left\{ \frac{1-\epsilon'}{(1+|\epsilon'|^2)^{1/2}} |K_S\rangle + \frac{1-\epsilon}{(1+|\epsilon|^2)^{1/2}} |K_L\rangle \right\} \quad (1)$$

$$|\bar{K}^0\rangle = \frac{[(1+|\epsilon|^2)(1+|\epsilon'|^2)]^{1/2}}{\sqrt{2}(1-\epsilon\epsilon')} \left\{ -\frac{1+\epsilon'}{(1+|\epsilon'|^2)^{1/2}} |K_S\rangle + \frac{1+\epsilon}{(1+|\epsilon|^2)^{1/2}} |K_L\rangle \right\}$$

Supongamos que la invariancia PCT sea exacta, entonces

$$\langle K^0 | K^0(t) \rangle = \langle \bar{K}^0 | \bar{K}^0(t) \rangle \quad (2)$$

Una simple algebra implica que $\epsilon = \epsilon'$. Suponiendo esto obtenemos

$$|K_S\rangle = [2(1+|\epsilon|^2)]^{-1/2} [(1+\epsilon)|K^0\rangle - (1-\epsilon)|\bar{K}^0\rangle] \quad (3)$$

$$|K_L\rangle = [2(1+|\epsilon|^2)]^{-1/2} [(1+\epsilon)|K^0\rangle + (1-\epsilon)|\bar{K}^0\rangle]$$

de donde

$$|K^0\rangle = \frac{[1+|\epsilon|^2]^{1/2}}{\sqrt{2}(1+\epsilon)} [|K_S\rangle + |K_L\rangle], \quad |\bar{K}^0\rangle = \frac{[1+|\epsilon|^2]^{1/2}}{\sqrt{2}(1-\epsilon)} [-|K_S\rangle + |K_L\rangle] \quad (4)$$

Se sabe que

$$\tau(K_S) = 0.8923(22) \times 10^{-10} \text{ s}, \quad \tau(K_L) = 5.183(40) \times 10^{-8} \text{ s}$$

$$\Delta \equiv m(K_L) - m(K_S) = 0.5349(22) \times 10^{10} \text{ h sec}^{-1} \quad (5)$$

$$\Delta = m(K_L) - m(K_S) = 3.521(14) \times 10^{-12} \text{ MeV}$$

No es sorprendente esta diferencia de masas tan pequeña pues la transición $K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0$ solo tiene lugar en segundo orden en las interacciones débiles, si la regla $|\Delta S| \leq 1$ es válida. Las dos interacciones más importantes son

$K_S \rightarrow \pi^+ \pi^-$	0.6861		
$K_S \rightarrow \pi^0 \pi^0$	0.3139	± 0.0024	
$K_L \rightarrow \pi^0 \pi^0 \pi^0$	0.215(7)		$K_L \rightarrow \pi^+ \pi^-$ 0.203(5) $\times 10^{-2}$
$K_L \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$	0.1239(18)		$K_L \rightarrow \pi^0 \pi^0$ 0.94(18) $\times 10^{-3}$
$K_L \rightarrow \pi^\pm \mu^\mp \nu_\mu$	0.270(5)		
$K_L \rightarrow \pi^\pm e^\mp \nu_e$	0.388(5)		

Supongamos por un momento que CP fuera una simetría exacta de H.

Se tiene entonces que $|K_S\rangle$ y $|K_L\rangle$ deben ser estados propios de CP. Notamos que

$$CP |K^0\rangle = -|\bar{K}^0\rangle, \quad CP |\bar{K}^0\rangle = -|K^0\rangle \quad (6)$$

42/001

$$\begin{aligned} * U |k^0(t)\rangle &= U e^{iHt} |k^0\rangle = e^{-iHt} U |k^0\rangle \\ &= e^{-iHt} |k^0\rangle = |k^0(-t)\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle k^0 | k^0(t) \rangle &= \langle k^0 | U^\dagger U |k^0(t)\rangle = \langle k^0 | e^{-iHt} |k^0\rangle^* \\ &= \langle k^0 | e^{iHt} |k^0\rangle = \langle k^0 | k^0(t) \rangle \end{aligned}$$

Podemos ahora introducir los estados

$$|K_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle) \quad , \quad |K_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle) \quad (1)$$

que cumplen

$$CP |K_1\rangle = |K_1\rangle \quad , \quad CP |K_2\rangle = -|K_2\rangle \quad (2)$$

y en términos de estos

$$|K_S\rangle = (1 + |\epsilon|^2)^{-1/2} [|K_1\rangle + \epsilon |K_2\rangle] \quad , \quad |K_L\rangle = (1 + |\epsilon|^2)^{-1/2} [|K_2\rangle + \epsilon |K_1\rangle] \quad (3)$$

Si CP fuera una simetría exacta de H entonces $\epsilon \equiv 0$ y en tanto ϵ tiene $|K_S\rangle \equiv |K_1\rangle$ y $|K_L\rangle \equiv |K_2\rangle$. Como en la desintegración de los kaones el estado final de dos piones tiene $CP = +1$, entonces $K_L \rightarrow 2\pi$. En 1964, Christensen et al observaron la desintegración $K_L \rightarrow 2\pi$ con una probabilidad pequeña y en tanto $\epsilon \neq 0$, pero $|\epsilon| \ll 1$, pues $K_L \rightarrow 2\pi$ tiene favorecido por espino físico sobre $K_L \rightarrow 3\pi$ que vemos que es el dominante.

Vamos a considerar las desintegraciones $K \rightarrow 2\pi$. El estado inicial tiene momento angular nulo y lo mismo debe suceder en el estado final. En tanto en el estado final el momento angular orbital de los dos piones debe ser cero; como esto implica que la parte espacial de la función de ondas debe ser par bajo el intercambio de los dos piones, el principio de Pauli generalizado implica que la función de ondas de los piones debe ser par. Entonces los estados finales posibles son

$$\begin{aligned} K^+ &\rightarrow \pi^+ \pi^0 & |f\rangle &= |2, 1\rangle \\ K^0 &\rightarrow \pi^+ \pi^- & |f\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{3}} |2, 0\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} |0, 0\rangle \\ K^0 &\rightarrow \pi^0 \pi^0 & |f\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} |2, 0\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} |0, 0\rangle \end{aligned} \quad (4)$$

donde hemos usado la notación $|T, T_3\rangle$. Si indicamos por A_{2T} el elemento de matriz reducido de la parte del operador de transición que se comporta como un tensor irreducible de orden T, entonces todo el proceso pueden ser descritos por A_1, A_3 y A_5 . Despreciemos este último. Entonces

$$\begin{aligned} A(K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0) &= -\frac{\sqrt{3}}{2} A_3 \\ A(K^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-) &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[-A_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} A_3 \right] \\ A(K^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0) &= \frac{1}{\sqrt{6}} \left[A_1 + \sqrt{2} A_3 \right] \end{aligned} \quad (5)$$

En primera aproximación podemos poner $\epsilon \equiv 0$ con lo cual $K_S \rightarrow 2\pi$ y $K_L \rightarrow 2\pi$. Entonces $A(K_S \rightarrow 2\pi) = \sqrt{2} A(K^0 \rightarrow 2\pi)$ y así obtenemos

$$A(K_S \rightarrow \pi^+ \pi^-) = \sqrt{\frac{2}{3}} [A_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} A_3], \quad A(K_S \rightarrow \pi^0 \pi^0) = \frac{1}{\sqrt{3}} [A_1 + \sqrt{2} A_3] \quad (1)$$

Despreciando el efecto de espacio físico u tiene

$$R_1 \equiv \frac{\Gamma(K_S \rightarrow \pi^+ \pi^-)}{\Gamma(K_S \rightarrow \pi^0 \pi^0)} = 2 \left| \frac{A_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} A_3}{A_1 + \sqrt{2} A_3} \right|^2 \quad (2)$$

$$R_2 \equiv \frac{\Gamma(K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0)}{\Gamma(K_S \rightarrow 2\pi)} = \frac{3}{4} \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2 + |A_3|^2}$$

Los valores experimentales para estas cantidades son

$$R_1 = 2.186 (25) \quad R_2 = 1 / (655.2 \pm 7.7) \quad (3)$$

De nuevo encontramos que para la desintegraciones dobles no leptónicas domina $H_W^{1/2}$. De R_2 se obtiene

$$|A_3|/|A_1| = 0.04511 (26) \quad (4)$$

que nos dice que $|A_3|$ es grande para que sea de origen electromagnético. Volvemos más adelante sobre este resultado.

Pasemos ahora a considerar las desintegraciones $K \rightarrow 3\pi$. Vamos a estudiar solo

$$\begin{aligned} K^+ &\rightarrow \pi^+ \pi^+ \pi^- & , & & K_L^+ &\rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0 \\ K^+ &\rightarrow \pi^0 \pi^0 \pi^+ & , & & K_L &\rightarrow \pi^0 \pi^0 \pi^0 \end{aligned} \quad (5)$$

pues las desintegraciones del K^- son idénticas a las del K^+ y $K_S \rightarrow 3\pi$ no han sido observadas. Consideraremos en este análisis $\epsilon \equiv 0$. Estudiaremos

$$K^0 \rightarrow \pi_1^\alpha + \pi_2^\beta + \pi_3^\gamma \quad (6)$$

donde α, β, γ y δ indican las cargas. Guardaremos el índice 3 y γ para un π^0 en las desintegraciones del K_L y para el pion distinto en las del K^+ .

Para tratar el problema cinemático introducimos la energía cinética K_i del pion π_i . Entre ellas existe la relación

$$\begin{aligned} K_1 + K_2 + K_3 &= Q \\ Q &\equiv M - \sum_{i=1}^3 M_i \end{aligned} \quad (7)$$

donde M es la masa del kaon inicial y M_{π} la del pion π_i . El valor de Q para los diferentes casos es, en MeV,

$$\begin{aligned} Q(+ + -) &= 74.967 \text{ (18)} & Q(+ - 0) &= 83.57 \text{ (13)} \\ Q(0 0 +) &= 84.176 \text{ (18)} & Q(0 0 0) &= 92.78 \text{ (13)} \end{aligned} \quad (1)$$

Intentemos ahora las variables cartesianas (x, y) y las polares (r, θ) definidas a través de las ecuaciones

$$x = r \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{Q} (K_1 - K_2), \quad y = r \cos \theta = \frac{1}{Q} (3K_3 - Q) \quad (2)$$

de donde

$$K_1 = \frac{Q}{3} \left[1 + r \cos \left(\frac{2\pi}{3} - \theta \right) \right], \quad K_2 = \frac{Q}{3} \left[1 + r \cos \left(\frac{2\pi}{3} + \theta \right) \right], \quad K_3 = \frac{Q}{3} [1 + r \cos \theta]$$

Obviamente no hay una correspondencia entre cualquier par de valores (r, θ) con (K_1, K_2, K_3) , pues existen fuertes limitaciones sobre los valores posibles de los K_i debido a la ley de conservación del momento

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = 0$$

donde \vec{p}_i es el momento del π_i en el sistema en el que el kaon inicial está en reposo. Se puede ver que los valores de K_i son físicos si y sólo si

$$B \equiv (p_1 + p_2 + p_3)(p_1 + p_2 - p_3)(p_1 - p_2 + p_3)(-p_1 + p_2 + p_3) \geq 0 \quad (3)$$

donde $p_i \equiv |\vec{p}_i| = [K_i (K_i + 2M_{\pi})]^{1/2}$. Entonces la región física consiste en

$$r \leq r_0(\theta) \quad (4)$$

donde

$$r_0^2 = (1 + \epsilon)^{-1} [1 - \epsilon r_0^3 \cos 3\theta], \quad \epsilon \equiv \frac{2M_{\pi}Q}{(2M - Q)^2} \quad (5)$$

Notemos que $\epsilon \approx 0.1$ y por tanto en primera aproximación la región física es un círculo centrado en el origen y de radio unidad. Este resultado se obtiene inmediatamente suponiendo que todos los piones tienen la misma masa m y pueden tratarse como partículas no relativistas, es decir $p_i = (2mK_i)^{1/2}$. Entonces $B = 4m^2Q^2(1-r^2)^3$ y el resultado es hallado.

Si mediante $T(\alpha, \beta, \gamma)$ indicamos el elemento de matriz T invariante correspondiente al proceso (5.6), entonces la anchura viene dada por

42/001
8

y

donde

se

utiliza

$$\sum_i K_i = Q$$

$$\Gamma(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{1}{16M} \int \frac{d^3 p_1}{E_1} \frac{d^3 p_2}{E_2} \frac{d^3 p_3}{E_3} \delta(p - p_1 - p_2 - p_3) \frac{1}{m!} |T(\alpha, \beta, \gamma)|^2 \quad (1)$$

donde el factor $1/m!$ ha sido introducido para tener en cuenta que en el estado final hay m piones con igual carga. La integración sobre \vec{p}_3 se puede llevar a cabo inmediatamente y también todas las integraciones angulares menos la del ángulo de \vec{p}_1 con \vec{p}_2 :

$$\Gamma(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{64\pi^3 M} \frac{1}{m!} \int dp_1 dp_2 \frac{p_1^2 p_2^2}{E_1 E_2 E_3} d(\cos\theta) \cdot \delta(M - E_1 - E_2 - (p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 p_2 \cos\theta + M_3^2)^{1/2}) |T(\alpha, \beta, \gamma)|^2 \quad (2)$$

de donde

$$\Gamma(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{64\pi^3 M} \frac{1}{m!} \int dE_1 dE_2 |T(\alpha, \beta, \gamma)|^2 \quad (3)$$

Esto puede escribirse en términos de x e y como

$$\Gamma(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{\omega^2}{384\sqrt{3}\pi^3 M} \frac{1}{m!} \int dx dy |T(\alpha, \beta, \gamma)|^2 \quad (4)$$

Si la cantidad invariante $|T(\alpha, \beta, \gamma)|^2$ es una constante entonces cuando los valores experimentales de (x, y) correspondientes a cada suceso se dibujan en el plano (x, y) , entonces los puntos deben llenar la zona permitida de una manera uniforme. Experimentalmente esto no es así y para explicar la densidad de puntos observada en el plot de Dalitz es necesario suponer, al menos, que $T(\alpha, \beta, \gamma)$ tiene una dependencia lineal en la energía. Como en todos los casos las partículas uno y dos tienen la misma masa y la invariancia CP implican que ambas tienen el mismo espectro de energías, la expresión más general para $T(\alpha, \beta, \gamma)$ con un término linealmente dependiente en la energía se puede escribir como

$$|T(\alpha, \beta, \gamma)|^2 = |M(\alpha, \beta, \gamma)|^2 \left[1 + \frac{1}{M_{\pi\pi}^2} g(\alpha, \beta, \gamma) (S_3 - S_0) \right] \quad (5)$$

donde $M(\alpha, \beta, \gamma)$ y $g(\alpha, \beta, \gamma)$ son constantes, y

$$S_i = (p - p_i)^2 \quad 3S_0 \equiv \sum_{i=1}^3 S_i = M^2 + \sum_{i=1}^3 M_i^2 \quad (6)$$

Experimentalmente se encuentra que los $g(\alpha, \beta, \gamma)$ son pequeños. Además en $K_L \rightarrow 3\pi^0$ como las tres partículas son totalmente equivalentes

$$g(0,0,0) = 0 \quad (7)$$

Veamos ahora las implicaciones de la hipótesis de que el operador de transición tenga propiedades bien definidas de transformación bajo $SU_T(2)$. En el estado final tenemos tres partículas de isospin uno. Un estado no queda totalmente caracterizado por su spim isotópico total T y su tercera componente T_3 , sino que debemos añadir, por ejemplo, el valor del spim isotópico de las dos primeras protones $T^{(12)}$. Obviamente los valores de $T^{(12)}$ son 0, 1 y 2 y los de T son 0, 1, 2 y 3. Estos estados pueden escribirse como

$$|T^{(12)}; TT_3\rangle = \sum_{T_3^{(u)}} C(11T^{(12)}; T_3^{(1)} T_3^{(2)} T_3^{(12)}) C(T^{(12)} 1 T; T_3^{(12)} T_3^{(3)} T_3) |T_3^{(1)} T_3^{(2)} T_3^{(3)}\rangle \quad (1)$$

con la notación usual.

Le nos presenta ahora el problema de expresar el estado final de tres protones en términos de $|T^{(12)}; TT_3\rangle$, teniendo en cuenta que los estados deben ser totalmente simétricos bajo el intercambio de todas las coordenadas (espaciales y de isospin) de cualquier par de protones. Consideremos el operador P_{ij} que intercambia las coordenadas de los protones i y j . Entonces

$$P_{12} |T^{(12)}; TT_3\rangle = \sum_{T_3^{(u)}} C(11T^{(12)}; T_3^{(1)} T_3^{(2)} T_3^{(12)}) C(T^{(12)} 1 T; T_3^{(12)} T_3^{(3)} T_3) |T_3^{(2)} T_3^{(1)} T_3^{(3)}\rangle \quad (2)$$

Como los $T_3^{(u)}$ son índices muéves podemos intercambiar $T_3^{(1)}$ en $T_3^{(2)}$ en todos los vértices y entonces

$$P_{12} |T^{(12)}; TT_3\rangle = (-1)^{\frac{11-T^{(12)}}{2}} |T^{(12)}; TT_3\rangle \quad (3)$$

Consideremos ahora el efecto de P_{13}

$$P_{13} |T^{(12)}; TT_3\rangle = \sum_{T_3^{(u)}} C(11T^{(12)}; T_3^{(1)} T_3^{(2)} T_3^{(12)}) C(T^{(12)} 1 T; T_3^{(12)} T_3^{(3)} T_3) |T_3^{(3)} T_3^{(2)} T_3^{(1)}\rangle$$

de donde

$$\begin{aligned} P_{13} |T^{(12)}; TT_3\rangle &= \sum_{T_3^{(u)}} \sum_F [(2T^{(12)}+1)(2F+1)]^{1/2} W(11T1; T^{(12)} F) \\ &\quad C(11F; T_3^{(2)} T_3^{(1)} T_3 - T_3^{(3)}) C(1FT; T_3^{(3)} T_3 - T_3^{(3)} T_3) |T_3^{(1)} T_3^{(2)} T_3^{(3)}\rangle \\ &= (-1)^{T+1} \sqrt{2T^{(12)}+1} \sum_F \sqrt{2F+1} W(11T1; T^{(12)} F) |F; TT_3\rangle \quad (4) \end{aligned}$$

Esto es todo lo que se necesita pues la simetría bajo P_{12} y P_{13} implica simetría total bajo el intercambio de cualquier par de protones.

Sugerimos ahora que el operador de transición es la suma de dos términos irreducibles

de $T = 1/2$ y $T = 3/2$ en lo cual el estado final tiene a lo sumo $T = 2$. En este caso los únicos estados finales con α y β bien definidos que son simétricos bajo P_{12} son

$$\begin{aligned} T=1 & \quad \alpha |0; 1T_3\rangle + \beta |2; 1T_3\rangle \\ T=2 & \quad |2; 2T_3\rangle \end{aligned} \quad (1)$$

Además a (59.4) obtenemos

$$\begin{aligned} P_{13} |0; 1T_3\rangle &= \frac{1}{3} |0; 1T_3\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} |1; 1T_3\rangle + \frac{\sqrt{5}}{3} |2; 1T_3\rangle \\ P_{13} |2; 1T_3\rangle &= \frac{\sqrt{5}}{3} |0; 1T_3\rangle + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{3}} |1; 1T_3\rangle + \frac{1}{6} |2; 1T_3\rangle \\ P_{13} |2; 2T_3\rangle &= -\frac{\sqrt{3}}{2} |1; 2T_3\rangle - \frac{1}{2} |2; 2T_3\rangle \end{aligned} \quad (2)$$

y por tanto el único estado totalmente simétrico y normalizado es

$$|1T_3; S\rangle = \frac{\sqrt{5}}{3} |0; 1T_3\rangle + \frac{2}{3} |2; 1T_3\rangle \quad (3)$$

Si $T(\alpha, \beta, \gamma)$ fuera constante este sería el único estado final permitido. Sin embargo esto no es así y debemos considerar también estados finales con α y β bien definidos de T , lineales en las variables s_i y totalmente simétricos. Los estados con α y β bien definidos de T y lineales en las s_i son

$$\begin{aligned} T=0 & : |1; 00\rangle (\alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 + \alpha_3 s_3) \\ T=1 & : |0; 1T_3\rangle (\beta_1 s_1 + \beta_2 s_2 + \beta_3 s_3) + |1; 1T_3\rangle (\beta'_1 s_1 + \beta'_2 s_2 + \beta'_3 s_3) + \\ & + |2; 1T_3\rangle (\beta''_1 s_1 + \beta''_2 s_2 + \beta''_3 s_3) \\ T=2 & : |1; 2T_3\rangle (\gamma_1 s_1 + \gamma_2 s_2 + \gamma_3 s_3) + |2; 2T_3\rangle (\gamma'_1 s_1 + \gamma'_2 s_2 + \gamma'_3 s_3). \end{aligned}$$

Usando (59.3) obtenemos que los estados simétricos al intercambiar 1 y 2 son

$$\begin{aligned} T=0 & : |1; 00\rangle [\alpha_1 (s_1 - s_2)] \\ T=1 & : |0; 1T_3\rangle [\beta_2 (s_1 + s_2) + \beta_3 s_3] + |1; 1T_3\rangle [\beta'_1 (s_1 - s_2)] + \\ & + |2; 1T_3\rangle [\beta''_1 (s_1 + s_2) + \beta''_3 s_3] \\ T=2 & : |1; 2T_3\rangle [\gamma_1 (s_1 - s_2)] + |2; 2T_3\rangle [\gamma'_1 (s_1 + s_2) + \gamma'_3 s_3] \end{aligned}$$

Si ahora exigimos simetría bajo P_{13} un cálculo directo de como varían estos estados totalmente simétricos, lineales en s_i ,

$$|1, T_3; L\rangle = \left[\frac{2}{3} |0, 1T_3\rangle - \frac{\sqrt{5}}{3} |2, 1T_3\rangle \right] (s_3 - s_0) + \frac{1}{\sqrt{3}} |1, 1T_3\rangle (s_2 - s_1) \quad (1)$$

$$|2, T_3; L\rangle = |2, 2T_3\rangle (s_3 - s_0) + \frac{1}{\sqrt{3}} |1, 2T_3\rangle (s_2 - s_1)$$

Para estudiar la desintegración del K_L recordemos que

$$\langle 3n | T | K^0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle 3n | T | K_L \rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \langle 3n | T | K_S \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle 3n | T | K_L \rangle \quad (2)$$

donde hemos usado invariancia CP y el hecho de que $CP |3n\rangle = -|3n\rangle$. Para ver que hay limitaciones sobre los valores de T posibles del estado final tengamos en cuenta que

$$CP |T^{(12)}; T_0\rangle = -C |T^{(12)}; T_0\rangle =$$

$$= - \sum C (11 T^{(12)}; T_3^{(1)} T_3^{(2)} T_3^{(12)}) C (T^{(12)} | T; T_3^{(12)} T_3^{(3)} 0) | -T_3^{(1)}, -T_3^{(2)}, -T_3^{(3)} \rangle =$$

$$= - \sum C (11 T^{(12)}; -T_3^{(1)} -T_3^{(2)} T_3^{(12)}) C (T^{(12)} | T; T_3^{(12)} -T_3^{(3)} 0) | T_3^{(1)} T_3^{(2)} T_3^{(3)} \rangle =$$

$$= (-1)^T |T^{(12)}; T_0\rangle \quad (3)$$

y por tanto el estado final con $T=par$ no puede aparecer como estado final de la desintegración del K_L^0 .

Entonces los estados finales de la desintegración del K^+ y del K_L son combinaciones lineales de

$$|1, 1; S\rangle = \frac{1}{\sqrt{15}} \left\{ -|1+00\rangle - |0+0\rangle - |00+\rangle + 2|1+-\rangle + 2|1-+\rangle + 2|1-++\rangle \right\}$$

$$|1, 1; L\rangle = \frac{1}{3\sqrt{3}} \left\{ (s_1 + s_2 - 2s_3) [|1+-\rangle + |00+\rangle] + (s_1 - 2s_2 + s_3) [|1-+\rangle + |0+0\rangle] + (-2s_1 + s_2 + s_3) [|1-++\rangle + |1+00\rangle] \right\}$$

$$|2, 1; L\rangle = \frac{1}{3\sqrt{3}} \left\{ (s_1 + s_2 - 2s_3) [|00+\rangle - |1+-\rangle] + (s_1 - 2s_2 + s_3) [|0+0\rangle - |1-+\rangle] + (-2s_1 + s_2 + s_3) [|1+00\rangle - |1-++\rangle] \right\}$$

$$|1, 0; S\rangle = \frac{1}{\sqrt{15}} \left\{ |1-0\rangle + |1+0-\rangle + |0+-\rangle + |0-+\rangle + |1-+0\rangle + |1-0+\rangle - 3|000\rangle \right\}$$

$$|1, 0; L\rangle = \frac{1}{3\sqrt{3}} \left\{ (2s_1 - s_2 - s_3) [|0+-\rangle + |0-+\rangle] + (-s_1 + 2s_2 - s_3) [|1+0-\rangle + |1-0+\rangle] + (-s_1 - s_2 + 2s_3) [|1-0\rangle + |1-+0\rangle] \right\} \quad (4)$$

Introducimos los elementos de matriz reducidos

$$\lambda_m \equiv \langle 1; S || T^{m/2} || 1/2 \rangle, \quad \mu_m \equiv \langle 1; L || T^{m/2} || 1/2 \rangle, \quad \nu_m \equiv \langle 2; L || T^{m/2} || 1/2 \rangle \quad (1)$$

Entonces se puede escribir inmediatamente

$$T(++-) = \frac{2}{\sqrt{15}} a^+(1S) + \frac{1}{\sqrt{3}} [-a^+(1L) + a^+(2L)] (s_3 - s_0)$$

$$T(00+) = -\frac{1}{\sqrt{15}} a^+(1S) + \frac{1}{\sqrt{3}} [-a^+(1L) - a^+(2L)] (s_3 - s_0)$$

$$T(+ - 0) = \frac{1}{\sqrt{15}} a^0(1S) + \frac{1}{\sqrt{3}} a^0(1L) (s_3 - s_0)$$

$$T(000) = -\frac{3}{\sqrt{15}} a^0(1S) \quad (2)$$

donde $T(+ - 0)$ y $T(000)$ son los del K_L . Las a 's pueden escribirse

$$a^+(1S) = \lambda_1 + \frac{1}{2} \lambda_3, \quad a^+(1L) = \mu_1 + \frac{1}{2} \mu_3, \quad a^+(2L) = \frac{\sqrt{3}}{2} \nu_3$$

$$a^0(1S) = \lambda_1 - \lambda_3, \quad a^0(1L) = \mu_1 - \mu_3 \quad (3)$$

Es bien sabido que incluso con $|T(\alpha \beta \gamma)|^2$ constante la integral (48.1) no puede hacerse exactamente pero en este caso pueden darse expresiones aproximadas. Despreciando la dependencia en S_i en (48.5) se obtiene

$$\Gamma(\alpha \beta \gamma) = \frac{1}{m!} \int (\alpha \beta \gamma) |M(\alpha \beta \gamma)|^2 \quad (4)$$

$$I(\alpha \beta \gamma) = \frac{[(M - M_3)^2 - 4M_1^2]^2}{2048 \pi^2 M^3} \left\{ \frac{(M + M_3)^2 + 4(MM_3 - M_1^2)}{(M - M_3)^2 + 4M_1^2} \right\}^{1/2}$$

Como no estamos interesados en $|M(\alpha \beta \gamma)|$ sino sólo en coeficientes entre ellos, es útil introducir las cantidades

$$\phi(000) \equiv \frac{I(000)}{I(++-)} \quad \phi(+ - 0) = \frac{I(+ - 0)}{I(++-)} \quad (5)$$

$$\phi(++-) \equiv \frac{I(++-)}{I(++-)} \quad \phi(00+) = \frac{I(00+)}{I(++-)}$$

Usando (5) se obtiene

$$\phi(000) = 1.485 \quad \phi(+ - 0) = 1.220 \quad (6)$$

$$\phi(++-) = 1 \quad \phi(00+) = 1.245$$

Un cálculo más cuidadoso incluyendo las pendientes experimentales $g(\alpha\beta\gamma)$, así como también la interacción coulombiana en el estado final da

$$\begin{aligned} \phi(000) &= 1.454 & \phi(+00) &= 1.270 \\ \phi(++-) &= 1 & \phi(00+) &= 1.155 \end{aligned} \tag{1}$$

Definiremos entonces

$$R(\alpha\beta\gamma) = \frac{1}{m!} |M(\alpha\beta\gamma)|^2 = \frac{\Gamma(\alpha\beta\gamma)}{\phi(\alpha\beta\gamma)} \tag{2}$$

ecuación que es correcta salvo un factor constante. De (52.2)

$$\begin{aligned} R(++-) &= \frac{2}{15} |a^+(1S)|^2 & R(00+) &= \frac{1}{30} |a^+(1S)|^2 \\ R(+00) &= \frac{1}{15} |a^0(1S)|^2 & R(000) &= \frac{1}{10} |a^0(1S)|^2 \end{aligned} \tag{3}$$

Empezamos considerando las relaciones entre las distintas $R(\alpha\beta\gamma)$ en el límite $|\lambda_1| \gg |\lambda_2|$

$$\begin{aligned} R_1 &\equiv \frac{2R(000)}{3R(+00)} = 1 & R_2 &\equiv \frac{R(++-)}{4R(00+)} = 1 \\ R_3 &\equiv \frac{R(+00)}{2R(000)} = 1 - 3 \operatorname{Re} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) & R_4 &\equiv \frac{R(000)}{R(++-) - R(+00)} = 1 - 3 \operatorname{Re} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \end{aligned} \tag{4}$$

La situación experimental da

$$\begin{aligned} \Gamma(000) &= 4.15(10) \times 10^6 \text{ seg}^{-1} & \Gamma(+00) &= 2.391(16) \times 10^6 \text{ ug}^{-1} \\ \Gamma(++-) &= 4.519(34) \times 10^6 \text{ ug}^{-1} & \Gamma(00+) &= 1.398(63) \times 10^6 \text{ ug}^{-1} \end{aligned} \tag{5}$$

de donde

$$\begin{aligned} R_1 &= 1.011(31) & R_2 &= 0.933(37) \\ R_3 &= 0.778(30) & R_4 &= 0.863(34) \end{aligned} \tag{6}$$

El hecho no aparece gran violación de la regla $|\Delta T| = 1/2$, si bien es necesaria aludida de un 4% de la amplitud $T = 3/2$.

Consideremos ahora las pendientes de (52.2) se obtiene

$$\begin{aligned} g(++-) &= M_{n+}^2 \operatorname{Re} \left\{ \sqrt{5} \frac{-a^+(1L) + a^+(2L)}{a^+(1S)} \right\} & g(+00) &= M_{n+}^2 \operatorname{Re} \left\{ 2\sqrt{5} \frac{a^0(1L)}{a^0(1S)} \right\} \\ g(00+) &= M_{n+}^2 \operatorname{Re} \left\{ 2\sqrt{5} \frac{a^+(1L) + a^+(2L)}{a^+(1S)} \right\} & g(000) &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

de donde

$$\xi_1 = \frac{g(00+)}{-2g(++-)} = 1 + \sqrt{3} \frac{\text{Re}\left(\frac{V_3}{\lambda_1}\right)}{\text{Re}\left(\frac{M_1}{\lambda_1}\right)} \tag{1}$$

$$\xi_2 = \frac{g(+ - 0)}{g(00+)} = 1 + \frac{3}{2} \left[\text{Re}\left(\frac{M_1 \lambda_3}{\lambda_1^2}\right) - \text{Re}\left(\frac{M_3}{\lambda_1}\right) \right] \frac{1}{\text{Re}\left(\frac{M_1}{\lambda_1}\right)} - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\text{Re}\left(\frac{V_3}{\lambda_1}\right)}{\text{Re}\left(\frac{M_1}{\lambda_1}\right)}$$

Los valores experimentales son

$$g(00+) = 0.607(30) \quad , \quad g(++-) = -0.2154(35) \quad , \quad g(+ - 0) = 0.629(17) \tag{2}$$

y en tanto

$$\xi_1 = 1.409(94) \quad \xi_2 = 1.036(83) \tag{3}$$

en buen acuerdo con una pequeña violación de la regla $|\Delta T| = 1/2$ para las desintegraciones no leptónicas en cambio de extrañeza.

Consideradas las desintegraciones no leptónicas de los kaones suponiendo válida la invariancia CP, vamos a estudiar la evolución de esta similitud. Vamos a empezar dando una lección sobre E. Consideremos en el instante $t=0$ una mezcla de $|K_S\rangle$ y $|K_L\rangle$

$$|\Psi(0)\rangle = X |K_S\rangle + Y |K_L\rangle \tag{4}$$

donde X e Y son números complejos arbitrarios. Para $t > 0$ se tiene

$$|\Psi(t)\rangle = X e^{-iM_S t} |K_S\rangle + Y e^{-iM_L t} |K_L\rangle \tag{5}$$

y el ritmo de desaparición de estado es

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt} \langle \Psi(t) | \Psi(t) \rangle &= \Gamma_S |X|^2 e^{-\Gamma_S t} + \Gamma_L |Y|^2 e^{-\Gamma_L t} + \\ &+ i(M_L - M_S^*) X^* Y \langle K_S | K_L \rangle e^{-i(M_L - M_S^*) t} + \\ &+ i(M_S - M_L^*) X Y^* \langle K_L | K_S \rangle e^{-i(M_S - M_L^*) t} \end{aligned} \tag{6}$$

Indiquemos por $\langle F | T | K_S \rangle$ y $\langle F | T | K_L \rangle$ los elementos de matriz T para los procesos $K_S \rightarrow F$ y $K_L \rightarrow F$, respectivamente. El ritmo de producción de todos los estados $|F\rangle$

$$\begin{aligned} \sum_{|F\rangle} |\langle F | T | \Psi(t) \rangle|^2 &= |X|^2 e^{-\Gamma_S t} \sum_{|F\rangle} |\langle F | T | K_S \rangle|^2 + |Y|^2 e^{-\Gamma_L t} \sum_{|F\rangle} |\langle F | T | K_L \rangle|^2 + \\ &+ X^* Y e^{-i(M_L - M_S^*) t} \sum_{|F\rangle} \langle F | T | K_S \rangle^* \langle F | T | K_L \rangle + X Y^* e^{-i(M_S - M_L^*) t} \sum_{|F\rangle} \langle F | T | K_L \rangle^* \langle F | T | K_S \rangle \end{aligned} \tag{7}$$

La condición de unitariedad (conservación de la probabilidad) nos dice que (54.6) y (55.5) deben ser iguales para todo X e Y . Entonces

$$\Gamma_S = \sum_{|P\rangle} |\langle F|T|K_S\rangle|^2 \qquad \Gamma_L = \sum_{|P\rangle} |\langle F|T|K_L\rangle|^2 \tag{1}$$

$$i(M_S - M_L^\dagger) \langle K_L | K_S \rangle = \sum_{|P\rangle} \langle F|T|K_L\rangle^\dagger \langle F|T|K_S\rangle$$

Las dos primeras expresiones son simplemente las definiciones de Γ_S y Γ_L . De la última y usando la desigualdad de Schwartz

$$|M_S - M_L^\dagger| |\langle K_L | K_S \rangle| \leq \sqrt{\Gamma_S \Gamma_L}$$

$$\Rightarrow |\langle K_L | K_S \rangle| \leq \left[\frac{\Gamma_S \Gamma_L}{\Delta^2 + \frac{1}{4} (\Gamma_S + \Gamma_L)^2} \right]^{1/2} \tag{2}$$

Usando (43.3) y los datos experimentales

$$\frac{Re \epsilon}{1 + |\epsilon|^2} \leq 0.02988 \tag{3}$$

Información experimental sobre $Re \epsilon$ se puede obtener a partir de las desintegraciones $K_L \rightarrow \pi e \nu$. Vamos a empezar probando que estas desintegraciones nos dan información directa sobre la validez de la regla $\Delta S = \Delta Q$. Intento decir como la siguiente mutación

$$\begin{aligned} \langle \pi^- e^+ \nu_e | T | K^0 \rangle &= +f & \langle \pi^+ e^- \bar{\nu}_e | T | \bar{K}^0 \rangle &= -f' \\ \langle \pi^- e^+ \nu_e | T | \bar{K}^0 \rangle &= -g & \langle \pi^+ e^- \bar{\nu}_e | T | K^0 \rangle &= +g' \end{aligned} \tag{4}$$

Si suponemos invariancia bajo PCT y despreciamos la interacción entre estados finales $f' = \eta f^*$ y $g' = \eta g^*$ donde $|\eta| = 1$. (En realidad esto es sólo válido después de sumar sobre espines finales). Si la regla $\Delta S = \Delta Q$ es válida entonces $g = g' = 0$. Para comprobar la validez de esta regla supongamos que en el instante $t=0$ producimos un estado $|\Psi(0)\rangle = |K^0\rangle$. Suponiendo válido la hipótesis CP se tiene para $t > 0$

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[e^{-iM_S t} |K_S\rangle + e^{-iM_L t} |K_L\rangle \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(e^{-iM_S t} + e^{-iM_S t} \right) |K^0\rangle + \frac{1}{2} \left(e^{-iM_L t} - e^{-iM_S t} \right) |\bar{K}^0\rangle \end{aligned} \tag{5}$$

42/001

$$* \text{CPT } |\bar{\pi}^- l_s^+ \nu_e\rangle = e^{i\theta} |\bar{\pi}^+ l_{-s}^- \bar{\nu}_e\rangle$$

$$\text{CPT } |K^0\rangle = e^{i\phi} |\bar{K}^0\rangle$$

como $|K_L\rangle$ i $|K_S\rangle$ son propios de CPT deben tener la misma fase que $|K^0\rangle$ y $|\bar{K}^0\rangle$. Tambien es directo

$$\text{CPT } |\bar{K}^0\rangle = e^{i\phi} |K^0\rangle$$

$$\text{CPT } |\bar{\pi}^+ l_{-s}^- \bar{\nu}_e\rangle = e^{i\theta} |\bar{\pi}^- l_s^+ \nu_e\rangle$$

Tomamos el \mathcal{L} que corresponde a $\bar{\Psi}_1 \gamma^\mu (1-\gamma_5) \Psi_2$
 $= \bar{\Psi}_2 (1+\gamma_5) \gamma^\mu \Psi_1$. La contribucion de $\bar{\Psi}_2 (1-\gamma_5)$

sera nula

Los elementos de matriz T correspondientes a la desintegración de este estado con emisión de leptones positivos y negativos son, respectivamente,

$$T(e^+) = \frac{1}{2} (f+g) e^{-iM_S t} + \frac{1}{2} (f-g) e^{-iM_L t} \quad (1)$$

$$T(e^-) = \frac{1}{2} (f'+g') e^{-iM_S t} - \frac{1}{2} (f'-g') e^{-iM_L t}$$

Suponiendo que los elementos de matriz anteriores son constantes y que PCT es una buena simetría (se desprecian interacciones entre estados finales) entonces

$$\Gamma(e^\pm) = N \left\{ |1+x|^2 e^{-\Gamma_S t} + |1-x|^2 e^{-\Gamma_L t} + 2|1-x|^2 e^{-\frac{1}{2}(\Gamma_L + \Gamma_S)t} \cos(\Delta t) \mp 4 \operatorname{Im} x e^{-\frac{1}{2}(\Gamma_L + \Gamma_S)t} \sin \Delta t \right\} \quad (2)$$

donde $\Delta \equiv m(K_L) - m(K_S)$ y $x \equiv g/f$. La N es una constante que proviene básicamente de espacio físico y de $|f|^2$. Haciendo la dependencia temporal de la emisión de leptones positivos y negativos se obtiene

$$\operatorname{Re} x = 0.009 \quad (2a) \qquad \operatorname{Im} x = -0.004 \quad (2b) \quad (3)$$

que favorece claramente la regla $\Delta S = \Delta Q$.

Veamos ahora como medir la violación de CP. Para ello consideremos un estado $|K_L\rangle$. Los elementos de matriz T para la desintegración de este estado con emisión de leptones positivos y negativos son, respectivamente,

$$T(e^+) = [2(1+|e|^2)]^{-1/2} \{ (1+\epsilon) f - (1-\epsilon) g \} \quad (4)$$

$$T(e^-) = [2(1+|e|^2)]^{-1/2} \{ (1+\epsilon) g' + (1-\epsilon) f' \}$$

Definamos la asimetría de la carga como

$$\delta \equiv \frac{\Gamma(e^+) - \Gamma(e^-)}{\Gamma(e^+) + \Gamma(e^-)} \quad (5)$$

Entonces suponiendo que los elementos de matriz son constantes

$$\delta_e = \frac{|(1+\epsilon) f - (1-\epsilon) g|^2 - |(1+\epsilon) g' - (1-\epsilon) f'|^2}{|(1+\epsilon) f - (1-\epsilon) g|^2 + |(1+\epsilon) g' - (1-\epsilon) f'|^2} \quad (6)$$

y teniendo en cuenta $x \equiv g/f$

$$\delta = \frac{2(1-|x|^2) \operatorname{Re} \epsilon}{|1-x|^2 + |e|^2 |1+x|^2 - 4 \operatorname{Im} x \operatorname{Im} \epsilon} \quad (7)$$

Como x y ϵ son pequeños

$$d = 2 \frac{1 - |x|^2}{1 + |x|^2} \operatorname{Re} \epsilon \tag{1}$$

El valor experimental es $d = (3.30 \pm 0.12) \times 10^{-3}$ y donde (56.3)

$$\operatorname{Re} \epsilon = 1.621(88) \times 10^{-3} \tag{2}$$

Estudiando $K \rightarrow 2\pi$ se puede determinar $\operatorname{Im} \epsilon$ que resulta muy favorecida pues el argumento de ϵ es próximo a 45° : $\arg \epsilon = (46.0 \pm 5.9)^\circ$.

Finalmente fijemos que procesos en los que $\Delta S \neq 0$ y $\Delta Q = 0$ (conversión neutro en cambio de extrañeza) son muy prohibidos:

$$\frac{\Gamma(K_L^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-)}{\Gamma(K_L^0 \rightarrow \text{all})} = (9.1 \pm 1.9) \times 10^{-9}$$

$$\frac{\Gamma(K^\pm \rightarrow \pi^\pm e^+ e^-)}{\Gamma(K^\pm \rightarrow \text{all})} = (2.6 \pm 0.5) \times 10^{-7} \tag{3}$$

Aquí se acaba la historia de las partículas convencionales que se desintegran vía las interacciones débiles y electromagnéticas únicamente. Al decir convencionales entendemos que son partículas sin encanto y sin cargas nuevas tales como el bottom o top que irán descubriéndose más adelante.

III - ESTADOS DE HELICIDAD

Un proceso típico en la física de las partículas elementales es

$$A_1 + \dots + A_{m_i} \longrightarrow B_1 + \dots + B_{m_f} \quad (1)$$

donde el estado inicial consiste de m_i partículas A_j que se mueven libremente en el pasado remoto, después sufren una interacción y finalmente emergen m_f partículas B_i , que se mueven libremente en el futuro remoto. Para describir de forma apropiada un proceso de colisión del tipo anterior deberíamos considerar:

- i) Las leyes de transformación de los estados de partícula libre bajo el grupo de Poincaré, pues entonces sabremos automáticamente las leyes de transformación bajo este grupo de los estados inicial y final y por tanto las condiciones precisas que la invariancia relativista impone sobre las amplitudes de transición.
- ii) Las propiedades generales del operador invariante relativista (matriz S) que relaciona los estados entrantes y salientes y cuyos elementos de matriz nos permiten calcular las amplitudes y las secciones eficaces.
- iii) Finalmente la pregunta central de toda la física de partículas ¿cuáles son las leyes fundamentales que gobiernan la dinámica de las partículas en interacción? Si las conociéramos podríamos, al menos en principio calcular el elemento de la matriz S apropiado para cualquier reacción del tipo (1).

Vamos a empezar ocupándonos del punto i). Una hipótesis básica es que los estados puros y los observables de un dado sistema físico pueden ser representados por rayos unitarios y por operadores autoadjuntos, respectivamente, en un espacio de Hilbert \mathcal{H} complejo y separable. La invariancia es cierta debido a la existencia de reglas de superselección. Se dice que el conjunto de todos los operadores asociados con reglas de superselección es Abeliáno, de forma que \mathcal{H} se puede descomponer en una suma directa

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \dots \quad (2)$$

de subespacios coherentemente mutuamente ortogonales, tales que

- i) En cada \mathcal{H}_j vale sin limitaciones el principio de superposición
- ii) No hay observables que conecten subespacios disjuntos, es decir

$$\langle \varphi_i | A | \varphi_j \rangle = 0 \quad \text{si} \quad |\varphi_i\rangle \in \mathcal{H}_i, \quad |\varphi_j\rangle \in \mathcal{H}_j, \quad i \neq j \quad (1)$$

para cualquier observable A

- (cc) Todos los elementos de un dado \mathcal{H}_j representan estados puros realizables físicamente y son estados propios de todos los operadores de superselección con el mismo conjunto de valores propios, cambiando este conjunto de un espacio a otro
- (v) La fase relativa de dos vectores, uno en \mathcal{H}_i y el otro en \mathcal{H}_j , con $i \neq j$, está físicamente indeterminada.

El grupo de Poincaré \mathcal{P} se define como el conjunto de aquellas transformaciones reales inhomogéneas

$$\{a, \Lambda\} : \begin{aligned} x &\rightarrow \Lambda x + a \\ x^\mu &\rightarrow \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu \end{aligned} \quad (2)$$

que dejan invariante la distancia Minkowskiana y están continuamente conectadas con la transformación identidad $\{0, I\}$. De (2) se deduce inmediatamente

$$\begin{aligned} \{a_1, \Lambda_1\} \{a_2, \Lambda_2\} &= \{a_1 + \Lambda_1 a_2, \Lambda_1 \Lambda_2\} \\ \{a, \Lambda\}^{-1} &= \{-\Lambda^{-1} a, \Lambda^{-1}\} \end{aligned} \quad (3)$$

Para que se cumplan todas estas condiciones es necesario y suficiente que

$$\Lambda^T G \Lambda = G, \quad \det \Lambda = 1, \quad \Lambda^0_0 > 0 \quad (4)$$

donde G es la matriz métrica

$$G = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad (5)$$

La primera de las condiciones (4) expresa que Λ es una transformación de Lorentz y las otras dos nos aseguran que es propia y ortocrona. El conjunto de todos estos Λ 's es el llamado grupo de Lorent restringido \mathcal{L}_+^\uparrow . Las propiedades grupales de \mathcal{P} y \mathcal{L}_+^\uparrow son fáciles de comprobar.

Resulta conveniente escribir (2) en forma matricial, con matrices de orden 5×5 :

$$(x) = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (a, \Lambda) = \begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & \Lambda^0_1 & \Lambda^0_2 & \Lambda^0_3 & a^0 \\ \Lambda^1_0 & \Lambda^1_1 & \Lambda^1_2 & \Lambda^1_3 & a^1 \\ \Lambda^2_0 & \Lambda^2_1 & \Lambda^2_2 & \Lambda^2_3 & a^2 \\ \Lambda^3_0 & \Lambda^3_1 & \Lambda^3_2 & \Lambda^3_3 & a^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

de forma que (59.2) se convierte en

$$(x) \longrightarrow (a, \Lambda)(x) \quad (2)$$

y la correspondencia $\{a, \Lambda\} \rightarrow (a, \Lambda)$ define de forma natural una representación matricial de \mathcal{P} cuya imagen puede identificarse con el grupo de Poincaré.

Los elementos de \mathcal{P} infinitesimalmente cercanos a la identidad son de particular interés. Serán de la forma

$$(a, \Lambda) = (I) + i (P^\mu) \delta a_\mu - \frac{i}{2} (M^{\mu\nu}) \delta \omega_{\mu\nu} \quad (3)$$

donde (I) es la matriz unidad 5×5 , δa_μ , $\delta \omega_{\mu\nu} (= -\delta \omega_{\nu\mu})$ son 10 parámetros reales infinitesimales y los llamados generadores de \mathcal{P} , (P^μ) $(M^{\mu\nu}) (= - (M^{\nu\mu}))$ son matrices 5×5 puramente imaginarias con elementos dados por

$$(P^\mu)^\rho_\sigma = -i g^{\mu\rho} \delta^\sigma_4 \quad (M^{\mu\nu})^\rho_\sigma = i (g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\nu\rho} g^{\mu\sigma}) \quad (4)$$

siendo cero los restantes (el índice "4" ha sido introducido para denominar la última columna y fila de la matriz). Cuando $\delta \omega_{\mu\nu} = 0$, (a, Λ) representa una pura traslación infinitesimal $x \rightarrow x + \delta a$ cuya integración para "a" finito es inmediato

$$(a, I) = e^{i a_\mu (P^\mu)} \quad (5)$$

Similarmente si $\delta a_\mu = 0$, $\delta \omega_{0i} = 0$, $\delta \omega_{12} = \vec{m}^3 d\theta$, $\delta \omega_{23} = \vec{m}^1 d\theta$, $\delta \omega_{31} = \vec{m}^2 d\theta$ donde \vec{m} es un vector unitario, entonces (3) representa una rotación Euclídea infinitesimal de ángulo $d\theta$ alrededor de un eje según \vec{m} . Para una rotación finita

$$(0, R_{\vec{m}, \theta}) = e^{-i \theta \vec{m} \cdot (\vec{J})} \quad (6)$$

donde $(J^1) = (M^{23})$, $(J^2) = (M^{31})$, $(J^3) = (M^{12})$ son los generadores usuales del grupo de rotaciones. Finalmente si $\delta a_\mu = \delta \omega_{ij} = 0$, $\delta \omega_{0i} = \vec{m}^i d\psi$, siendo \vec{m} unitario, (3) representa un "boost" infinitesimal (transformación de Lorentz pura) en la dirección \vec{m} con velocidad $d\psi$. El boost finito con velocidad

v a lo largo de \vec{m} sera

$$(0, B_{\vec{m}, \psi}) = e^{-i\psi \vec{m} \cdot (\vec{N})} \quad \tanh \psi \equiv v \quad (1)$$

donde $(N^i) = (M^{0i})$

Como cual quier elemento de \mathcal{P} es el producto de una transformación pura de Lorentz y de una rotación Euclídea, seguida por un desplazamiento espacio-temporal, las formulas (6.5), (6.6) y (1) permiten expresar cualquier $(a, \Lambda) \in \mathcal{P}$ en términos de los generadores $(P^\mu), (M^{\mu\nu})$. Las combinaciones lineales de estos 10 generadores sustentan la llamada algebra de Lie de \mathcal{P} , que es conocida bajo la operación de conmutación.

$$[(P^\mu), (P^\nu)] = 0$$

$$[(M^{\lambda\rho}), (P^\mu)] = -i \{ g^{\lambda\mu} (P^\rho) - g^{\rho\mu} (P^\lambda) \}$$

$$[(M^{\lambda\rho}), (M^{\mu\nu})] = -i \{ g^{\lambda\mu} (M^{\rho\nu}) + g^{\rho\nu} (M^{\lambda\mu}) - g^{\rho\mu} (M^{\lambda\nu}) - g^{\lambda\nu} (M^{\rho\mu}) \} \quad (2)$$

que caracterizan de forma única, salvo isomorfismos, las propiedades locales de \mathcal{P} y toman en idéntica forma para cualquier representación del grupo de Poincaré.

Se puede, finalmente, comprobar las siguientes propiedades de transformación de los generadores bajo \mathcal{P} :

$$(a, \Lambda)^{-1} (P^\mu) (a, \Lambda) = \Lambda^\mu_\nu (P^\nu)$$

$$(a, \Lambda)^{-1} (M^{\mu\nu}) (a, \Lambda) = \Lambda^\mu_\lambda \Lambda^\nu_\rho \{ (M^{\lambda\rho}) + a^\lambda (P^\rho) - a^\rho (P^\lambda) \} \quad (3)$$

Supongamos ahora que un observador inercial \mathcal{O} prepara, con la ayuda de algún aparato \mathcal{P} , un estado puro de un sistema físico. Este observador representará el estado mediante un vector estado $|\psi\rangle$ normalizado, que está determinado salvo una fase y es independiente del tiempo en la imagen de Heisenberg. Algún aparato de medida M permitirá a \mathcal{O} obtener información física de $|\psi\rangle$ que podrá expresarse en términos de las probabilidades de transición $|\langle\varphi|\psi\rangle|^2$, $|\psi\rangle$ representa el estado sobre el que proyecta M . Si una transformación de Poincaré $\{a, \Lambda\}$ es aplicada a \mathcal{P} y a M , los vectores estado resultantes, vistos por \mathcal{O} , serán ahora $|\psi'\rangle$ y $|\varphi'\rangle$, y la nueva probabilidad de transición $|\langle\varphi'|\psi'\rangle|^2$. Pero el principio de la relatividad exige la invariancia de los experimentos físicos bajo las transformaciones de Poincaré.

Por tanto

$$|\langle\varphi'|\psi'\rangle|^2 = |\langle\varphi|\psi\rangle|^2 \quad (4)$$

Más aún, es claro que los vectores estados que aparecen en la expresión anterior son realizables físicamente, por construcción, y que la correspondencia continua entre estados físicos inducida por la transformación de Poincaré es uno a uno. Como \mathcal{P} es conexo, cualquier $\{a, \Lambda\}$ puede ser generado a partir de la identidad de forma continua. Como resultado, las operaciones $\{a, \Lambda\}$ transforman cada subespacio coherente \mathcal{H}_j en sí mismo y un famoso teorema debido a Wigner establece que existe un operador unitario $U(a, \Lambda)$, único salvo un factor ± 1 , que deja invariante cada uno de los \mathcal{H}_j y tal que

$$|\psi'\rangle = U(a, \Lambda) |\psi\rangle, \quad |\varphi'\rangle = U(a, \Lambda) |\varphi\rangle \quad (1)$$

$$U(a_1, \Lambda_1) U(a_2, \Lambda_2) = \pm U(a_1 + \Lambda_1, a_2, \Lambda_1, \Lambda_2)$$

esto es $U(a, \Lambda)$ al actuar sobre un vector estado de su transformación bajo $\{a, \Lambda\}$, y la correspondencia $\{a, \Lambda\} \rightarrow U(a, \Lambda)$ define una representación continua y unitaria, salvo un factor ± 1 , de \mathcal{P} . Como \mathcal{P} es conexo esta representación quedará conocida tan pronto como los representantes de los generadores de las transformaciones infinitesimales de \mathcal{P} quedan determinados. Si $\{a, \Lambda\}$ está muy cercano a la identidad $\{0, I\}$, es decir si la matriz 5×5 correspondiente es de la forma (6.3), entonces $U(a, \Lambda)$ también puede elegirse cercano a I

$$U(a, \Lambda) = I + i \delta \alpha_\mu P^\mu - \frac{i}{2} \delta \omega_{\mu\nu} M^{\mu\nu} \quad (2)$$

donde P^μ y $M^{\mu\nu}$ son operadores autoadjuntos, pues U es unitaria, que representan los generadores (P^μ) y $(M^{\mu\nu})$ de \mathcal{P} . Puede demostrarse que (2) implica que $P^\mu, M^{\mu\nu}$ satisface las mismas reglas de conmutación y transformación que los generadores

$$[P^\mu, P^\nu] = 0$$

$$[M^{\lambda\rho}, P^\mu] = -i (g^{\lambda\mu} P^\rho - g^{\rho\mu} P^\lambda)$$

$$[M^{\lambda\rho}, M^{\mu\nu}] = -i (g^{\lambda\mu} M^{\rho\nu} + g^{\rho\nu} M^{\lambda\mu} - g^{\rho\mu} M^{\lambda\nu} - g^{\lambda\nu} M^{\rho\mu})$$

$$U^{-1}(a, \Lambda) P^\mu U(a, \Lambda) = \Lambda^\mu_\nu P^\nu$$

$$U^{-1}(a, \Lambda) M^{\mu\nu} U(a, \Lambda) = \Lambda^\mu_\lambda \Lambda^\nu_\rho (M^{\lambda\rho} + a^\lambda P^\rho - a^\rho P^\lambda) \quad (3)$$

lo cual demuestra que P^μ es un operador cuadrivectorial invariante bajo traslaciones y $M^{\mu\nu}$ un operador tensorial de rango dos antisimétrico no invariante bajo las traslaciones.

Como ya hemos dicho antes los operadores $U(a, \Lambda)$ no mezclan distintos espinos coherentes y por tanto también lo hacen los operadores hermíticos P^μ , $M^{\lambda\rho}$ y son por tanto candidatos a observables del mismo físico bajo consideración. Pero sabemos de mecánica cuántica ordinaria que los generadores de las traslaciones (notaciones) pueden interpretarse físicamente como las observables energía-momento (momento angular). Entonces identificaremos P^μ con el cuadrivector-momento y M^{ij} con la componente K ($i, j, k = 0, 1, 2, 3$) del momento angular de nuestro sistema. La primera de las relaciones (6.2.3) muestra que los P^μ son observables que conmutan y por tanto sus números cuánticos pueden servir para especificar los estados cuánticos. Esta especificación será en general incompleta pues sabemos que en muchos casos (partículas con spin) son necesarios otros números cuánticos. El spin por tener naturaleza geométrica debe aparecer de alguna forma a partir de los generadores de \mathcal{P} . Esto es así; introduzimos los operadores hermíticos

$$W^\mu = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} P_\nu M_{\lambda\rho} \tag{1}$$

De (6.2.3) se puede probar que W^μ es un operador cuadrivector invariante bajo traslaciones, exactamente como P^μ . Esto implica que $W^2 \equiv W_\mu W^\mu$ y $P^2 \equiv P_\mu P^\mu$ son escalares bajo el grupo de Poincaré y por tanto conmutan con P^μ y $M^{\mu\nu}$, lo cual también se puede probar fácilmente teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} [W^\mu, P^\nu] &= 0 \\ [W^\mu, W^\nu] &= i \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} P_\lambda W_\rho \\ [W^\mu, M^{\lambda\rho}] &= i (g^{\mu\lambda} W^\rho - g^{\mu\rho} W^\lambda) \end{aligned} \tag{2}$$

El hecho de que los W^μ no conmuten entre sí significa que además de P^μ , P^2 , W^2 se puede elegir solo uno de los W^μ . Una elección conveniente de este nuevo observable es

$$W_m \equiv - \frac{W \cdot m}{[(P \cdot m)^2 - P^2 m^2]^{1/2}} \tag{3}$$

donde m^μ es un vector arbitrario de tipo tiempo con $m^0 > 0$. Eligiendo $m^\mu = (1, 0, 0, 0)$ entonces

$$W_{(0)} = \frac{\vec{J} \cdot \vec{P}}{|\vec{P}|} \tag{4}$$

que es el llamado operador helicidad. El observable W_m se transforma como

$$U^{-1}(a, \Lambda) W_m U(a, \Lambda) = W_{\Lambda^{-1}m} \quad (1)$$

y como existe siempre una transformación de Lorentz que nos pase de un m^{μ} a $(1, 0, 0, 0)$, el operador W_m se puede interpretar como aquel observable que en un cierto sistema de referencia corresponde a la helicidad en algún otro sistema de referencia adecuado.

Hemos por tanto obtenido un sistema de observables que conmutan

$$P^2, W^2, P^{\mu}, W_m \quad (2)$$

y ahora quisieramos dar el espectro de estos operadores para sistemas relativistas elementales caracterizados por el hecho de que los operadores $U(a, \Lambda)$ dan lugar a representaciones irreducibles de \mathcal{P} . Esto es muy complejo y los únicos casos de interés físico parecen ser los siguientes

$$\begin{aligned} \text{a) } P^2 &: p^2 = m^2 > 0, \quad m > 0 \\ W^2 &: w^2 = -m^2 j(j+1), \quad j \geq 0 \text{ entero o semientero} \\ P^{\mu} &: p^{\mu} \in \Omega_+(m) \equiv \{p; p^2 = m^2, p^0 > 0\} \\ W_m &: w_m = -j, -j+1, \dots, j-1, j \\ \text{b) } P^2 &: p^2 = 0 \\ W^2 &: w^2 = 0 \\ P^{\mu} &: p^{\mu} \in \Omega_+(0) \equiv \{p; p^2 = 0, p^0 > 0\} \\ W_m &: w_m = \pm j \text{ (uno sólo)}, \quad j > 0 \text{ entero o semientero} \\ \text{c) } P^2 &: p^2 = 0 \\ W^2 &: w^2 = 0 \\ P^{\mu} &: p^{\mu} = 0 \\ W_m &: w_m = 0 \end{aligned}$$

Las representaciones a) corresponden a partículas de masa m y spin j y se las suele designar $[m, j]$; las representaciones b) corresponden a masa m , spin j y "handedness" ϵ que puede ser más o menos uno y se representan en $[0, \epsilon, j]$. Finalmente las representaciones c) corresponden al vacío. Los estados de partículas con masa m y spin j se transforman bajo \mathcal{P} de acuerdo con la representación $[m, j]$. Los neutrones (antineutrones) se transforman como $[0, -1/2]$ ($[0, 1/2]$) pues son left-handed (right-handed). Los fotones se presentan con ambas helicidad (las interacciones electromagnéticas son invariantes bajo la paridad y el operador de helicidad es un pseudoscalar). La representación de \mathcal{P} correspondiente

a un fotón es pues $[0, +1] \oplus [0, -1]$, que es irreducible cuando el grupo \mathcal{P} se amplía para incluir la paridad.

Después de esta introducción podemos ya introducir los estados de helicidad [M. Jacob y G.C. Wick Ann Phys (N.Y) 7, 404 (1959)]. Empezaremos considerando los estados de una sola partícula de masa m y spin j . Supondremos de momento $m > 0$. Para esta partícula los observables P^μ y W_{10} forman, junto con operadores internos $\{A\}$ (número bariónico, isospin, ...) un conjunto completo de observables que conmutan. Indicaremos los vectores propios comunes por

$$|m, j; \vec{p}, \lambda; \alpha\rangle \equiv |m, j; \vec{p}, \lambda\rangle \equiv |\vec{p}, \lambda\rangle \tag{1}$$

donde α indica el conjunto de los valores propios de los $\{A\}$. Se tiene

$$P^\mu |\vec{p}, \lambda\rangle = p^\mu |\vec{p}, \lambda\rangle, \quad W_{10} |\vec{p}, \lambda\rangle = \lambda |\vec{p}, \lambda\rangle \tag{2}$$

$$p^2 = m^2, \quad p^0 > 0, \quad \lambda = -j, -j+1, \dots, j-1, j$$

Los estados $|\vec{p}, \lambda\rangle$ quedan totalmente determinados salvo normalización y fase y sus combinaciones lineales (continuas) generan el espacio de Hilbert \mathcal{H} del sistema. Los vectores estado los definiremos normalizados de la forma invariante

$$\langle \vec{p}', \lambda' | \vec{p}, \lambda \rangle = (2\pi)^3 2p^0 \delta(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{\lambda\lambda'} \tag{3}$$

Recordar que $p^0 = E(\vec{p}) = (\vec{p}^2 + m^2)^{1/2}$. Elegida esta normalización los estados tienen aun una fase arbitraria. Veamos una prescripción para fijar estas fases. Como hemos supuesto la masa de la partícula no nula podemos ir a un sistema de referencia en el que se halla en reposo. Sus estados vectores serán combinaciones lineales de los $(2j+1)$ vectores $|\vec{0}, \lambda\rangle$, donde λ es el valor propio de la tercera componente del momento angular. Estos vectores se eligen de forma que

$$U(0, R) |\vec{0}, \lambda\rangle = \sum_{\mu} D_{\mu\lambda}^j(R) |\vec{0}, \mu\rangle \tag{4}$$

donde $D^j(R)$ son la representación matricial estándar de la rotación R para spin j . Entonces los vectores $|\vec{0}, \lambda\rangle$ quedan determinados salvo una fase global.

Veamos como fijar las fases de $|\vec{p}, \lambda\rangle$ donde \vec{p} es un vector de modulo $|\vec{p}|$ y cuya dirección viene determinada por los ángulos esféricos (θ, ϕ)

Escribiremos también

$$|\vec{p}, \lambda\rangle = |p, \theta, \phi; \lambda\rangle, \quad p = |\vec{p}| \tag{1}$$

Introducimos el boost $B_{\vec{p}}$ que da a la partícula un momento \vec{p} partiendo del reposo y la rotación

$$R_{\vec{p}} = e^{-i\phi J^3} e^{-i\theta J^2} e^{+i\phi J^3} \tag{2}$$

que lleva el vector $(p, 0, 0)$ a (p, θ, ϕ) . Notemos que $R_{\vec{p}}$ de no es estricta pero esta elección es conveniente. El ángulo del último factor de (2) podría haberse elegido arbitrariamente. Como el operador helicidad es un escalar bajo rotaciones, el vector estado $U(0, R_{\vec{p}}) |0, \lambda\rangle$, que aún está en reposo, será ahora un estado propio de \vec{J} tomado en la dirección \vec{p} con valor propio λ . Por otra parte se prueba, usando (62.3) que $\vec{J} \cdot \vec{p} / |\vec{p}|$ conmuta con $U(0, B_{\vec{p}})$ y aplicando de nuevo (62.3) obtenemos que $U(0, B_{\vec{p}}) U(0, R_{\vec{p}}) |0; \lambda\rangle$ define un estado con momento \vec{p} y helicidad λ . Escribiremos entonces

$$|\vec{p}, \lambda\rangle = U(0, B_{\vec{p}} R_{\vec{p}}) |0; \lambda\rangle \tag{3}$$

y usaremos esta relación para fijar las fases de $|\vec{p}, \lambda\rangle$. Ahora todas las fases u han determinado salvo una fase global no esencial. Debe guardarse en cuenta que estamos alegremente olvidando el hecho que los operadores $U(a, \Lambda)$ y la matriz $D^J(R)$ quedan determinadas salvo un signo para J semi-entero. La forma correcta de proceder será usar los grupos cubricados de \mathbb{P} y $SO(3)$ pero esto es relativamente complicado.

Recordemos ahora cuáles son las leyes de transformación de los estados de helicidad.

Para una transformación de Lorentz Λ obtenemos

$$\begin{aligned} U(0, \Lambda) |\vec{p}, \lambda\rangle &= U(0, \Lambda) U(0, B_{\vec{p}} R_{\vec{p}}) |0; \lambda\rangle = \\ &= U(0, \Lambda B_{\vec{p}} R_{\vec{p}}) |0; \lambda\rangle = U(0, B_{\Lambda\vec{p}} R_{\Lambda\vec{p}}) U(0, W_{\Lambda, \vec{p}}) |0; \lambda\rangle \end{aligned} \tag{4}$$

Donde

$$W_{\Lambda, \vec{p}} = B_{\Lambda\vec{p}}^{-1} R_{\Lambda\vec{p}}^{-1} \Lambda B_{\vec{p}} R_{\vec{p}} \tag{5}$$

Ahora bien $W_{\Lambda, \vec{p}}$ aplicado al vector $(m, \vec{0})$ no lo cambia y su acción es una rotación. Entonces

$$U(0, \Lambda) |\vec{p}, \lambda\rangle = \sum_{\mu} D_{\mu\lambda}^j(W_{\Lambda, \vec{p}}) |\Lambda\vec{p}, \mu\rangle \tag{6}$$

que da la ley de transformación bajo el grupo de Lorentz. Tenemos además que

$U(a, \Lambda) = U(a, I) U(0, \Lambda)$ y $U(a, I) = \exp(i a^\mu P_\mu)$ en la cual

$$U(a, \Lambda) | \vec{p}, \lambda \rangle = e^{i a \cdot \Lambda p} \sum_{\mu} D_{\mu\lambda}^j (W_{\Lambda, \vec{p}}) | \Lambda \vec{p}, \mu \rangle \quad (1)$$

$$W_{\Lambda, \vec{p}} \equiv R_{\Lambda \vec{p}}^{-1} B_{\Lambda \vec{p}}^{-1} \Lambda B_{\vec{p}} R_{\vec{p}}$$

que es la ley de transformación deseada

Consideremos ahora el caso $m=0$. En este caso la helicidad λ es fija e invariante Poincaré y vale ϵ_j . Los estados base son $| \vec{p}, \epsilon_j \rangle$. Demostremos un tanto que cualquier p^μ del tipo deseado puede obtenerse a partir de un vector $p_0 \equiv \omega (1, 0, 0, 1)$, $\omega > 0$ aplicándole primero la rotación $R_{\vec{p}}$ y después un boost $B_{\vec{p}}^{(\omega)}$ a lo largo de \vec{p} que nos hará pasar de $R_{\vec{p}} p_0$ al p final deseado. Podemos escribir

$$| \vec{p}, \epsilon_j \rangle = U(0, B_{\vec{p}}^{(\omega)} R_{\vec{p}}) | p_0, \epsilon_j \rangle \quad (2)$$

ecuación que permite determinar todas las fases si se fija la de $| p_0, \epsilon_j \rangle$. Análogamente al caso anterior y para determinar la ley de transformación debemos escribir

$$U(0, \Lambda) | \vec{p}, \epsilon_j \rangle = U(0, B_{\Lambda \vec{p}}^{(\omega)} R_{\Lambda \vec{p}}) U(0, W_{\Lambda, \vec{p}}^{(\omega)}) | p_0, \epsilon_j \rangle \quad (3)$$

$$W_{\Lambda, \vec{p}}^{(\omega)} \equiv R_{\Lambda \vec{p}}^{-1} B_{\Lambda \vec{p}}^{(\omega)-1} \Lambda B_{\vec{p}}^{(\omega)} R_{\vec{p}}$$

Ahora bien $W_{\Lambda, \vec{p}}^{(\omega)}$ transforma p_0 en sí mismo y su determinante

$$U(0, W_{\Lambda, \vec{p}}^{(\omega)}) | p_0, \epsilon_j \rangle = \alpha(\Lambda, p) | p_0, \epsilon_j \rangle \quad (4)$$

donde α es un número complejo de módulo uno, pues U es unitaria. De aquí

$$U(0, \Lambda) | \vec{p}, \epsilon_j \rangle = \alpha(\Lambda, p) | \Lambda \vec{p}, \epsilon_j \rangle \quad (5)$$

y

$$U(a, \Lambda) | \vec{p}, \epsilon_j \rangle = e^{i a \cdot \Lambda p} \alpha(\Lambda, p) | \Lambda \vec{p}, \epsilon_j \rangle \quad (6)$$

La correspondencia

$$U(0, W_{\Lambda, \vec{p}}^{(\omega)}) \longrightarrow \alpha(\Lambda, p) \quad (7)$$

define una representación unitaria unidimensional (salvo un factor ± 1) del llamado grupo pequeño de p_0 , es decir, el conjunto de las transformaciones de Lorentz propias que dejan invariante p_0 . En consecuencia la ecuación (6) es útil a

menos que sepamos calcular $\alpha(\Lambda, p)$. Se puede demostrar que dado un conjunto de cuatrivectores reales $m^\mu, \ell^\mu, a^\mu, b^\mu$ tales que $m^2 > 0, \ell^2 = 0 (\ell \neq 0), a^2 < 0, b^2 < 0$ y adem\u00e1s $m \cdot a = m \cdot b = a \cdot b = \ell \cdot a = \ell \cdot b = 0$, entonces cualquier transformaci\u00f3n de Lorentz Λ que cumpla $\Lambda \ell = \ell$, puede descomponerse de forma \u00fanica en un producto $\Lambda = L \cdot R$, donde R y L son transformaciones de Lorentz puras tales que $R \ell = \ell, R m = m, L \ell = \ell$ y adem\u00e1s L deja invariante alguna combinaci\u00f3n lineal real $\alpha a + \beta b \neq 0$. Aplicando este resultado a $W_{\Lambda, \vec{p}}^{(0)}$ tomando $\ell = p_0, m = (1, 0, 0, 0), a = (0, 1, 0, 0), b = (0, 0, 1, 0)$ podemos concluir que existe una descomposici\u00f3n \u00fanica

$$W_{\Lambda, \vec{p}}^{(0)} = L_{\Lambda, \vec{p}}^{(0)} R_{\Lambda, \vec{p}}^{(0)} \tag{1}$$

donde $R_{\Lambda, \vec{p}}^{(0)}$ es una rotaci\u00f3n alrededor del eje Oz con \u00e1ngulo $\varphi(\Lambda, p)$ y $L_{\Lambda, \vec{p}}^{(0)}$ tiene algun vector propio real en el plano Oxy . Entonces

$$\alpha(\Lambda, p) = e^{-i\varphi(\Lambda, p)} \tag{2}$$

salvo un factor ± 1 f\u00edsica j -semientero que se puede fijar cambiando el grupo recubridor.

As\u00ed hemos visto como definir los estados de helicidad $| \vec{p}, \lambda \rangle$ o $| \vec{p}, \epsilon_j \rangle$ y sus leyes de transformaci\u00f3n bajo \vec{S} . Queremos finalmente considerar como se transforman estos estados bajo el operador paridad. Consideremos el caso $m > 0$ entonces si U_p es el operador unitario que implementa la paridad

$$U_p | \vec{0}; \lambda \rangle = \eta | \vec{0}; \lambda \rangle \tag{3}$$

y la cantidad $\eta = \pm 1$ (siempre es posible esta elecci\u00f3n) es denominada paridad. Consideremos adem\u00e1s

$$Y \equiv e^{-i\pi J_2} U_p \tag{4}$$

entonces

$$\begin{aligned} Y | \vec{0}; \lambda \rangle &= \eta e^{-i\pi J_2} | \vec{0}; \lambda \rangle = \eta \sum_{\mu} d_{\mu\lambda}^j(\pi) | \vec{0}; \mu \rangle = \\ &= \eta \sum_{\mu} (-1)^{j-\lambda} d_{\mu, -\lambda}^j | \vec{0}; \mu \rangle = \eta (-1)^{j-\lambda} | \vec{0}; -\lambda \rangle \end{aligned} \tag{5}$$

Nota que Y es el operador unitario que implementa la reflexi\u00f3n en el plano Oxz . Como Y conmuta con los boost en la direcci\u00f3n Oz se tiene

$$Y | p, \theta = \phi = 0, \lambda \rangle = \eta (-1)^{j-\lambda} | p, \theta = \phi = 0, -\lambda \rangle \tag{6}$$

Nota que η dado en (3) no depende de λ pues $[\vec{J}, U_p] = 0$. Para part\u00edculas de

masa nula la paridad se define como

$$\Upsilon |p, \theta = \phi = 0, j\rangle = \eta |p, \theta = \phi = 0, -j\rangle \quad (1)$$

Consideremos ahora la construcción de estados de helicidad para un sistema de dos partículas que no interactúan. Sean dos partículas de masas $m_1 > 0$ y $m_2 > 0$ (un proceso análogo se puede llevar a cabo para partículas de masa nula) y de spins j_1 y j_2 respectivamente. Los estados base del espacio de Hilbert para el sistema pueden tomarse

$$|m_1, j_1; \vec{p}_1, \lambda_1\rangle \otimes |m_2, j_2; \vec{p}_2, \lambda_2\rangle \equiv |\vec{p}_1, \vec{p}_2; j_1, j_2; \lambda_1, \lambda_2\rangle \quad (2)$$

que son estados propios de P^μ con valores propios $(p_1 + p_2)^\mu$.

En muchos casos trabajaremos en el sistema centro de masas donde $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 \equiv \vec{p}$ y donde \vec{p} está caracterizado por su módulo y ángulo relativos θ, ϕ . Supongamos que $\vec{p} = (0, 0, |\vec{p}|) \equiv \vec{p}_0$. El estado de helicidad de la partícula 1 es $|m_1, j_1; \vec{p}_0, \lambda_1\rangle$. Definimos el estado de la segunda partícula a través de la ecuación

$$|m_2, j_2; -\vec{p}_0, \lambda_2\rangle \equiv (-1)^{j_2 - \lambda_2} e^{-i\pi(J_2)_y} |m_2, j_2; \vec{p}_0, \lambda_2\rangle \quad (3)$$

La razón de la fase arbitraria $(-1)^{j_2 - \lambda_2}$ es que así

$$|m_2, j_2; \vec{0}, \lambda_2\rangle = |m_2, j_2; \vec{0}, -\lambda_2\rangle \quad (4)$$

En efecto

$$\begin{aligned} |m_2, j_2; \vec{0}, \lambda_2\rangle &= (-1)^{j_2 - \lambda_2} e^{-i\pi(J_2)_y} |m_2, j_2; \vec{0}, \lambda_2\rangle \\ &= (-1)^{j_2 - \lambda_2} \sum_{\mu} d_{\mu, \lambda_2}^{j_2}(\pi) |m_2, j_2; \vec{0}, \mu\rangle = (-1)^{j_2 - \lambda_2} \sum_{\mu} (-1)^{j_2 - \lambda_2} d_{\mu, -\lambda_2} |m_2, j_2; \vec{0}, \mu\rangle \\ &= |m_2, j_2; \vec{0}, -\lambda_2\rangle \end{aligned}$$

Entonces definimos los estados de dos partículas en el C.M. y con el $\vec{p} \parallel z$ como

$$|p, 0, 0; \lambda_1, \lambda_2\rangle \equiv |m_1, j_1; \vec{p}_0, \lambda_1\rangle \otimes |m_2, j_2; -\vec{p}_0, \lambda_2\rangle \quad (5)$$

y el estado con \vec{p} en una dirección cualquiera es

$$|p, \theta, \phi; \lambda_1, \lambda_2\rangle = U(0, R_{\vec{p}}) |p, 0, 0; \lambda_1, \lambda_2\rangle$$

$$U(0, R_{\vec{p}}) = e^{-i\phi J^3} e^{-i\theta J^2} e^{i\phi J^3} \quad (6)$$

donde \vec{J} es el operador momento angular total del sistema.

Ahora bien $|\vec{p}\rangle$, λ_1 y λ_2 son invariantes bajo rotaciones y podemos caracterizar los estados de dos partículas también de la forma $|p; JM; \lambda, \lambda_2\rangle$ donde J es el momento angular total y M la tercera componente. Nos gustaría averiguar la relación entre $|p; JM; \lambda, \lambda_2\rangle$ y $|p\theta\phi; \lambda, \lambda_2\rangle$. A este fin consideremos el estado $|p00; \lambda, \lambda_2\rangle$ el cual es un estado propio de J_z^2 con valor propio $M = \lambda_1 - \lambda_2$ y por tanto

$$|p00; \lambda, \lambda_2\rangle = \sum_J c(J) |p; J\lambda; \lambda, \lambda_2\rangle \quad (1)$$

y por consiguiente al aplicarle una rotación de ángulos de Euler (α, β, γ)

$$R(\alpha, \beta, \gamma) |p00; \lambda, \lambda_2\rangle = \sum_{JM} c(J) D_{M\lambda}^J(\alpha, \beta, \gamma) |p; JM; \lambda, \lambda_2\rangle \quad (2)$$

Teniendo en cuenta que

$$\int dU D_{M'M}^{J'*}(\alpha, \beta, \gamma) D_{M''M''}^J(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{8\pi^2}{2J+1} \delta_{JJ'} \delta_{MM''} \delta_{M'M''} \quad (3)$$

donde $dU = \frac{1}{4} d\alpha d\beta d\gamma \sin\beta$, $0 \leq \alpha, \gamma \leq 4\pi$, $0 \leq \beta \leq \pi$, obtenemos inmediatamente

$$|p; JM; \lambda, \lambda_2\rangle = \frac{N_J}{2\pi} \int dU D_{M\lambda}^{J*}(\alpha, \beta, \gamma) R(\alpha, \beta, \gamma) |p00; \lambda, \lambda_2\rangle \quad (4)$$

donde $N_J = (2J+1)/4\pi G(J)$. Este es claramente un factor de normalización y lo elegiremos libremente como $N_J = [(2J+1)/4\pi]^{1/2}$. Si $\alpha = \phi$, $\beta = \theta$ obtenemos

$$|p; JM; \lambda, \lambda_2\rangle = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{2J+1}{4\pi} \right]^{1/2} \int d\Omega \int_0^{2\pi} d\gamma D_{M\lambda}^{J*}(\phi, \theta, \gamma) e^{i\lambda\gamma} R(\theta, \phi, 0) e^{-i\lambda\gamma} |p00; \lambda, \lambda_2\rangle$$

de donde

$$|p; JM; \lambda, \lambda_2\rangle = \left[\frac{2J+1}{4\pi} \right]^{1/2} \int d\Omega D_{M\lambda}^{J*}(\phi, \theta, -\phi) |p\theta\phi; \lambda, \lambda_2\rangle \quad \lambda \equiv \lambda_1 - \lambda_2 \quad (5)$$

que es el resultado deseado

Para ahora a considerar la normalización de estos estados. De la normalización elegida para los estados mono-particulares (65.3) se obtiene de (69.2)

$$\langle \vec{p}'_1 \vec{p}'_2; \lambda'_1 \lambda'_2 | \vec{p}_1 \vec{p}_2; \lambda, \lambda_2 \rangle = (2\pi)^6 4E_1 E_2 \delta(\vec{p}_1 - \vec{p}'_1) \delta(\vec{p}_2 - \vec{p}'_2) \delta_{\lambda_1 \lambda'_1} \delta_{\lambda_2 \lambda'_2} \quad (6)$$

Notar que $|p_1 p_2; \lambda, \lambda_2\rangle$ es un estado propio de P^M con valor propio $P^M \equiv (p_1 + p_2)^M$.

Podemos pues escribir

$$|\vec{p}_1, \vec{p}_2; \lambda_1, \lambda_2\rangle \equiv |\vec{P}^\mu\rangle \otimes |\alpha\rangle \tag{1}$$

donde supondremos la normalización

$$\langle \vec{P}'^\mu | \vec{P}^\mu \rangle = (2\pi)^4 \delta(\vec{P}^\mu - \vec{P}'^\mu) \tag{2}$$

Veamos ahora la normalización de los estados $|\alpha\rangle$ como el producto escalar debe ser invariante vamos libres de elegir el sistema de referencia en el que calcularlo.

En el sistema centro de masa $\vec{P} = 0$, $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 = \vec{p}$ y $E^0 = (m_1^2 + p^2)^{1/2} + (m_2^2 + p^2)^{1/2} = W$

Podemos reemplazar \vec{p}_1, \vec{p}_2 por P^μ, θ, ϕ y vemos lo que surge en (70.6)

Sabemos que $d^3p_1, d^3p_2 = d^3P d^3p = d^3P p^2 dp d\Omega$ Además $dE^0 = (W/p) dE, E_2 dp$ y en tanto

$$d^3p_1, d^3p_2 = \frac{p}{W} E_1 E_2 d^4P d\Omega \tag{3}$$

Consecuentemente

$$4 E_1 E_2 \delta(\vec{p}'_1 - \vec{p}_1) \delta(\vec{p}'_2 - \vec{p}_2) = \frac{4W}{p} \delta(P^\mu - P'^\mu) \delta(\Omega - \Omega') \tag{4}$$

donde

$$\delta(\Omega - \Omega') = \delta(\cos\theta - \cos\theta') \delta(\phi - \phi') \tag{5}$$

Tomemos en tanto que

$$\langle \alpha' | \alpha \rangle = (2\pi)^4 \frac{4W}{p} \delta(\Omega - \Omega') \delta_{\lambda_1, \lambda'_1} \delta_{\lambda_2, \lambda'_2} \tag{6}$$

Es conveniente sacar toda dependencia en P^μ de los estados $|\alpha\rangle$ y definiremos

$$|\theta, \phi; \lambda_1, \lambda_2\rangle \equiv (2\pi)^{-1/2} \left[\frac{p}{4W} \right]^{1/2} |\alpha\rangle \tag{7}$$

y en tanto

$$\langle \theta', \phi'; \lambda'_1, \lambda'_2 | \theta, \phi; \lambda_1, \lambda_2 \rangle = \delta(\Omega - \Omega') \delta_{\lambda_1, \lambda'_1} \delta_{\lambda_2, \lambda'_2} \tag{8}$$

Es importante darse cuenta que aun cuando hagamos ido al sistema C.M. para calcular los productos escalares, como están definidos de forma invariante los resultados son totalmente generales.

Volviendo a los estados $|\theta, \phi; \lambda_1, \lambda_2\rangle$ definidos en el C.M. vemos que

$$|\theta, \phi; \lambda_1, \lambda_2\rangle = (2\pi)^{-1/2} \left[\frac{4W}{p} \right]^{1/2} |\vec{P}^\mu\rangle \otimes |\theta, \phi; \lambda_1, \lambda_2\rangle \tag{9}$$

donde $\vec{P}^\mu \equiv (W, 0, 0, 0)$ como $|\vec{P}^\mu\rangle$ es invariante bajo rotaciones lo dicho en

la página 70 es igualmente válido si $|p, \theta, \phi; \lambda, \lambda_2\rangle \rightarrow |p, \theta, \phi; \lambda, \lambda_2\rangle$ y $|p; JM; \lambda, \lambda_2\rangle \rightarrow |JM; \lambda, \lambda_2\rangle$ donde

$$|p; JM; \lambda, \lambda_2\rangle = (2\pi) \left[\frac{4W}{p} \right]^{1/2} |\bar{E}^M\rangle \otimes |JM; \lambda, \lambda_2\rangle \quad (1)$$

De (70.5)

$$|JM; \lambda, \lambda_2\rangle = \left[\frac{2J+1}{4\pi} \right]^{1/2} \int d\Omega D_{M\lambda}^{J*}(\phi, \theta, -\phi) |p, \theta, \phi; \lambda, \lambda_2\rangle \quad \lambda = \lambda_1, -\lambda_2 \quad (2)$$

Veamos que

$$\langle J'M'; \lambda'_1, \lambda'_2 | JM; \lambda, \lambda_2\rangle = \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \delta_{\lambda, \lambda'_1} \delta_{\lambda_2, \lambda'_2} \quad (3)$$

En efecto

$$\begin{aligned} \langle J'M'; \lambda'_1, \lambda'_2 | JM; \lambda, \lambda_2\rangle &= \left[\frac{(2J+1)(2J'+1)}{(4\pi)^2} \right]^{1/2} \int d\Omega d\Omega' D_{M'\lambda'}^{J'}(\phi', \theta', -\phi') D_{M\lambda}^{J*}(\phi, \theta, -\phi) \delta_{\lambda, \lambda'_1} \delta_{\lambda_2, \lambda'_2} d(\Omega - \Omega') \\ &= \frac{[(2J+1)(2J'+1)]^{1/2}}{4\pi} \delta_{\lambda, \lambda'_1} \delta_{\lambda_2, \lambda'_2} \int d\Omega D_{M'\lambda'}^{J'}(\phi, \theta, -\phi) D_{M\lambda}^{J*}(\phi, \theta, -\phi) = \\ &= \frac{[(2J+1)(2J'+1)]^{1/2}}{4\pi} \delta_{\lambda, \lambda'_1} \delta_{\lambda_2, \lambda'_2} \frac{4\pi}{2J+1} \delta_{JJ'} \delta_{MM'} = \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \delta_{\lambda, \lambda'_1} \delta_{\lambda_2, \lambda'_2} \end{aligned}$$

Por otra parte de (2) se obtiene inmediatamente

$$\langle \theta, \phi; \lambda'_1, \lambda'_2 | JM; \lambda, \lambda_2\rangle = \left[\frac{2J+1}{4\pi} \right]^{1/2} \delta_{\lambda, \lambda'_1} \delta_{\lambda_2, \lambda'_2} D_{M\lambda}^{J*}(\phi, \theta, -\phi) \quad (5)$$

Estas matrices de transformación satisfacen

$$\begin{aligned} \int d\Omega \langle \theta, \phi; \lambda, \lambda_2 | JM; \lambda, \lambda_2\rangle \langle \theta', \phi'; \lambda, \lambda_2 | JM; \lambda, \lambda_2\rangle^* &= \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \\ \sum_{JM} \langle \theta, \phi; \lambda, \lambda_2 | JM; \lambda, \lambda_2\rangle \langle \theta', \phi'; \lambda, \lambda_2 | JM; \lambda, \lambda_2\rangle^* &= \delta(\Omega - \Omega') \end{aligned} \quad (5)$$

De estas relaciones se obtiene inmediatamente la relación

$$|p, \theta, \phi; \lambda, \lambda_2\rangle = \sum_{JM} \left[\frac{2J+1}{4\pi} \right]^{1/2} D_{M\lambda}^J(\phi, \theta, -\phi) |JM; \lambda, \lambda_2\rangle \quad \lambda = \lambda_1, -\lambda_2 \quad (6)$$

Hemos presentado descripta los estados de helicidad para sistemas de uno y dos partículas.

IV - SECCIONES EFICACES

Supongamos de nuevo el proceso general de colisión

A1 + A2 + ... + Am_i -> B1 + B2 + ... + Bm_f (1)

en el que se prepara un estado inicial (t=-inf) que consiste de m_i particulas A1, ..., Am_i tan alejadas las unas de las otras que no interactuan entre si. Al entrar en la region de interaccion empieza la colision y finalmente emergen m_f particulas B1, ..., Bm_f en el estado final (t=+inf). Indicquemos por |i> y |f> los estados inicial y final, respectivamente, en la imagen de interaccion. La amplitud de la probabilidad de transmision del estado inicial |i> al final |f>, A(i -> f), puede expresarse como un elemento de matriz

A(i -> f) = <f|S|i> = S_fi (2)

donde el operador S (matriz S el operador de colision) es un operador lineal y unitario

S^+ S = S S^+ = I (3)

Ademas el principio de invariancia relativista exige que S conmute con los operadores unitarios U(a, lambda) que representan las transformaciones de Poincare

U^-1(a, lambda) S U(a, lambda) = S (4)

Consecuencia inmediata de esto es que

[P^k, S] = 0 (5)

[M^k0, S] = 0

Lo cual implica la conservacion del momento y del momento angular. La primera de estas expresiones muestra que S es diagonal en la representacion de momentos. Si los estados inicial y final tienen cada momento bien definidos P_i^k y P_f^k, entonces podemos escribir

<f|S|i> = <f|i> - i (2pi)^4 delta^4(P_i - P_f) <f|T|i> (6)

donde <f|i> es el unico que aparece si no hay interaccion S=I. El otro termino es debido a la existencia de la interaccion. ... es una ... Para otra parte el elemento de matriz <f|T|i> = T_fi

se halla definido estrictamente sólo cuando $P_i = P_f$ y entonces (73.4) implica

$$T_{fi} \equiv \langle f | T | i \rangle = \langle f | U^{-1}(a, \Lambda) T U(a, \Lambda) | i \rangle = \langle f' | T | i' \rangle \equiv T_{f'i'} \quad (1)$$

donde $|i'\rangle \equiv U(a, \Lambda) |i\rangle$ y $|f'\rangle \equiv U(a, \Lambda) |f\rangle$ y esto establece la invariancia Poincaré de los elementos de la matriz T .

La probabilidad de la transición (73.4) sea $|A(i \rightarrow f)|^2 = |\langle f | S | i \rangle|^2$.

Notemos, sin embargo, que para estados con momento bien determinado entonces $S_{fi} \propto \delta^{(4)}(P_f - P_i)$ y por tanto $|S_{fi}|^2 \propto \delta^{(4)}(P_f - P_i) \delta^{(4)}(P_f - P_i)$, expresión que no está bien definida matemáticamente, pues aunque sea de estas deltas es necesaria para expresar el hecho de que el cuadrimomento es conservado en este proceso, la otra puede reemplazarse de manera formal por $\delta^{(4)}(0)$, que es una cantidad divergente. La razón física de esta divergencia es que cuando los cuadrimomentos inicial y final están bien definidos, ambos estados son invariantes (salvo fases) bajo transformaciones espacio-temporales; consecuentemente la región de interacción se extiende a todo el espaco-tiempo y el concepto de partícula asintóticamente libre tiene un significado dudoso.

Se puede proceder de dos formas: no considerar estados con momento bien definido pues representan situaciones límite no normalizables que nunca pueden conseguirse o usar la prescripción acostumbrada de "switching on and off" la interacción. Si bien la primera alternativa es la satisfactoria desde el punto de vista físico será la segunda la que usaremos en aras de la simplicidad. Consideremos para establecer la interacción una función $g(x)$ tal que $0 \leq g(x) \leq 1$. En aquellos puntos en que $g(x) = 0$ (1) la interacción está ausente (actúa con toda la intensidad), mientras que cuando $0 \leq g(x) < 1$ la interacción actúa parcialmente. Si $g(x)$ es distinto de cero solo en una región finita del espaco-tiempo, las partículas iniciales y finales en el proceso de colisión se moverán asintóticamente ($t \rightarrow \mp \infty$) como si fueran libres y la transición de $|i\rangle$ a $|f\rangle$ vendrá mediada por una matriz unitaria $S(g)$. Esta matriz $S(g)$ no es invariante bajo transformaciones espacio-temporales ya que $g(x)$ no lo es. Por tanto la energía-momento no están conservados y en lugar de (73.6) obtenemos

$$\langle f | S(g) | i \rangle = \langle f | i \rangle - (2\pi)^4 i \tilde{g}(P_f - P_i) \langle f | T(g) | i \rangle \quad (2)$$

$$\text{con} \quad \tilde{g}(p) \equiv (2\pi)^{-4} \int d^4x g(x) e^{ip \cdot x} \quad (3)$$

El operador S físico es el límite de $S(g)$ para $g(x) \rightarrow 1$ para todo x , y la

expresión anterior ha sido escrita de forma que $T(g) \rightarrow T$ en dicho límite. La correspondiente probabilidad de transición inducida por $S(g)$ sea $|\langle f | S(g) | i \rangle|^2$ y si, como interesa, $\langle f | i \rangle = 0$, entonces

$$|S_{fi}(g)|^2 = (2\pi)^2 \delta(P_f - P_i) |T_{fi}(g)|^2 \tag{1}$$

Pero

$$\begin{aligned} |\tilde{g}(P_f - P_i)|^2 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4x g(x) e^{i x (P_f - P_i)} \int d^4y g(y) e^{-i y (P_f - P_i)} \\ &\approx \frac{1}{(2\pi)^4} \delta(P_f - P_i) \int d^4y g(y) \quad \text{cuando } g(x) \rightarrow 1 \end{aligned} \tag{2}$$

Como $\int d^4y g(y)$ representa el volumen medio del espacio-tiempo en el que tiene lugar la interacción, vemos que la probabilidad de transición por unidad de volumen del espacio-tiempo inducida por $S(g)$ es

$$W_{i \rightarrow f}(g) \equiv |S_{fi}(g)|^2 / \int d^4y g(y) \tag{3}$$

tiende a un límite bien definido $W_{i \rightarrow f}$ cuando $g(x) \rightarrow 1$:

$$W_{i \rightarrow f} = (2\pi)^4 \delta(P_f - P_i) |T_{fi}|^2 \tag{4}$$

que de forma natural interpretaremos como la probabilidad de transición por unidad de volumen espacio-temporal del estado inicial $|i\rangle$ al final $|f\rangle$ inducida por el operador S . Evidentemente $W_{i \rightarrow f}$ es invariante Poincaré.

En la práctica, sin embargo, la cantidad de interés es la probabilidad de transición $W_{i \rightarrow \Delta f}$ por unidad de volumen espacio-tiempo desde el estado inicial $|i\rangle$ a cualquier estado final $f \in \Delta f$. Entonces

$$W_{i \rightarrow \Delta f} = \int_{\Delta f} W_{i \rightarrow f} d\rho_f \tag{5}$$

donde el elemento de medida $d\rho_f$ debe ser tal que el proyector $P_{\Delta f}$ en el subespacio lineal engendrado por todos los estados finales $|f\rangle \in \Delta f$ tenga la expresión

$$P_{\Delta f} = \int_{\Delta f} d\rho_f |f\rangle \langle f| \tag{6}$$

En el miembro de la derecha de (5) y (6) se debe tomar un solo estado vector final $|f\rangle$ en cada conjunto individual de números cuánticos finales en el intervalo de integración.

Por ejemplo, suponamos que los estados de colisión vienen caracterizados dando los cuadrimomentos, heliuidades y los otros números cuánticos discretos de las partículas. Solo los cuadrimomentos son variables continuas y para la evaluación de $d\sigma_f$ los restantes números cuánticos α (heliuidades, cargas, ...) pueden ser unidades con el bien entendido que como es usual el símbolo de integración en (75.5) y (75.6) contenga sumas discretas, y es necesario, en las variables α . Si todas las partículas en el estado final son distintas entonces $|f\rangle$ se tomará como el simple producto tensorial

$$|f\rangle = |\vec{p}_{B_1}, \alpha_{B_1}; \vec{p}_{B_2}, \alpha_{B_2}; \dots \rangle \quad (1)$$

y suponiendo que normalizamos como en (65.3) entonces

$$d\sigma_f \equiv \frac{d^3 p_{B_1}}{(2\pi)^3 2E_{B_1}} \dots \frac{d^3 p_{B_m}}{(2\pi)^3 2E_{B_m}} \quad (2)$$

que es una medida invariante Lorentz. Si en el estado final hay partículas idénticas y para no contar más estados finales de los que hay realmente la cantidad (2) debe dividirse por el número de permutaciones redundantes entre las partículas idénticas.

Consideremos ahora el proceso

$$A_1 + A_2 \longrightarrow B_1 + B_2 + \dots + B_m \quad (3)$$

y vamos a calcular la sección eficaz para el mismo que se obtiene inmediatamente dividiendo la probabilidad de transición por unidad de volumen y de tiempo $W_{i \rightarrow f} \Delta t$ por $\rho_{A_1} \rho_{A_2} |\vec{v}_{A_1} - \vec{v}_{A_2}|$, donde ρ_{A_1} y ρ_{A_2} es el número de partículas A_1 y A_2 por volumen unidad que en nuestra rotación es $\rho_{A_1} = 2E_{A_1}$, $\rho_{A_2} = 2E_{A_2}$ y $|\vec{v}_{A_1} - \vec{v}_{A_2}|$ es la velocidad relativa. Entonces se obtiene, por ejemplo, para la sección eficaz total de (3) cuando las partículas incidentes no están polarizadas y se le miden las polarizaciones de las partículas finales

$$\sigma = \frac{(2\pi)^{4-3m}}{4E_{A_1} E_{A_2} |\vec{v}_{A_1} - \vec{v}_{A_2}|} \sum_{\text{pol. in.}} \sum_{\text{pol. fin.}} \int \frac{d^3 p_1}{2E_1} \dots \frac{d^3 p_m}{2E_m} \delta(p_{A_1} + p_{A_2} - p_1 - \dots - p_m) |\langle f | T | i \rangle|^2 \quad (4)$$

La cantidad $\rho_{A_1} \rho_{A_2} |\vec{v}_{A_1} - \vec{v}_{A_2}|$ es invariante Lorentz y en el sistema en que A_2 está en reposo

$$\rho_{A_1} \rho_{A_2} |\vec{v}_{A_1} - \vec{v}_{A_2}| = 4E_{A_1} E_{A_2} |\vec{v}_{A_1} - \vec{v}_{A_2}| = 4M_{A_2} |\vec{p}_{A_1}|$$

Introduciendo la variable de Mandelstam $s = (p_{A_1} + p_{A_2})^2$ que es invariante

$$s = M_{A_1}^2 + M_{A_2}^2 + 2 M_{A_2} [M_{A_1}^2 + \bar{P}_{A_1}]^{1/2}$$

de donde

$$P_{A_1}, P_{A_2} \text{ y } |\vec{v}_{A_1} - \vec{v}_{A_2}| = 2 \lambda^{1/2} (s, M_{A_1}^2, M_{A_2}^2) \quad (1)$$

y así se obtiene finalmente para la sección eficaz total

$$\sigma = \frac{(2\pi)^{4-3m}}{2 \lambda^{1/2} (s, M_{A_1}^2, M_{A_2}^2)} \sum_{\text{poli}} \sum_f \int \frac{d^3 p_1}{2E_1} \dots \frac{d^3 p_m}{2E_m} \delta(p_{A_1} + p_{A_2} - p_1 - \dots - p_m) |<f|T|i>|^2 \quad (2)$$

o en notación algo más compacta

$$\sigma = \frac{(2\pi)^{4-3m}}{2 \lambda^{1/2} (s, M_{A_1}^2, M_{A_2}^2)} \sum_{\text{poli}} \sum_{\text{pol f}} \int \prod_{i=1}^m \frac{d^3 p_i}{2E_i} \delta(p_i - p_f) |<f|T|i>|^2 \quad (3)$$

o equivalentemente

$$\sigma = \frac{(2\pi)^{4-3m}}{2 \lambda^{1/2} (s, M_{A_1}^2, M_{A_2}^2)} \sum_{\text{poli}} \sum_{\text{pol f}} \int \prod_{i=1}^m d^4 p_i \delta(p_i^2 - m_i^2) \Theta(p_i) \delta(p_i - p_f) |<f|T|i>|^2 \quad (4)$$

donde $\Theta(p_i)$ es 1 si $p_i^0 > 0$ y cero en los otros casos.

Es de particular interés el caso del proceso

$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4 \quad (5)$$

en cuyo caso la sección eficaz total es

$$\sigma = \frac{1}{2 \lambda^{1/2} (s, M_1^2, M_2^2)} \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{\text{poli } 12} \sum_{\text{poli } 34} \int \frac{d^3 p_3}{2E_3} \frac{d^3 p_4}{2E_4} \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) |<f|T|i>|^2 \quad (6)$$

Es bien sabido que para un proceso en el que intervengan M partículas toda la cinemática queda especificada dando $3M-10$ invariantes. En este caso como $M=4$ debemos dar además de s otra variable que elegiremos como $t \equiv (p_3 - p_1)^2$. Entonces la sección eficaz diferencial es

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dt} &= \frac{1}{8\pi^2 \lambda^{1/2} (s, M_1^2, M_2^2)} \sum_{\text{poli}} \sum_{\text{pol f}} \int \frac{d^3 p_3}{2E_3} \frac{d^3 p_4}{2E_4} \delta[t - (p_3 - p_1)^2] \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) |<f|T|i>|^2 \\ &= \frac{1}{8\pi^2 \lambda^{1/2} (s, M_1^2, M_2^2)} \sum_{\text{poli}} \sum_{\text{pol f}} |<f|T|i>|^2 \int \frac{d^3 p_3}{2E_3} \frac{d^3 p_4}{2E_4} \delta[t - (p_3 - p_1)^2] \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \end{aligned} \quad (7)$$

pues $|<f|T|i>|^2$ es constante para s y t fijos. Procedamos ahora a calcular la integral invariante en el sistema centro de masas. En el sistema centro de masas

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{d^3 p_3}{2E_3(\vec{p}_3)} \frac{d^3 p_4}{2E_4(\vec{p}_4)} \delta [t - (p_3 - p_1)^2] \delta (p_1 + p_2 - p_3 - p_4) = \\
 &= \frac{1}{4} \int d^3 p_3 \frac{1}{E_3(\vec{p}_3) E_4(\vec{p}_3)} \delta [t - M_1^2 - M_3^2 - 2E_1 E_3 + 2|\vec{p}_1||\vec{p}_3| \cos \theta] \delta (E_1 + E_2 - E_3 - E_4) = \\
 &= \frac{\pi}{4} \int d|\vec{p}_3| |\vec{p}_3|^2 \frac{1}{E_3(|\vec{p}_3|) E_4(|\vec{p}_3|)} \frac{1}{|\vec{p}_1||\vec{p}_3|} \delta (E_1 + E_2 - E_3 - E_4) \\
 &= \frac{\pi}{4} \frac{|\vec{p}_3|^2}{E_3(|\vec{p}_3|) E_4(|\vec{p}_3|)} \frac{1}{|\vec{p}_1||\vec{p}_3|} \frac{E_3 E_4}{|\vec{p}_3| (E_3 + E_4)} = \frac{\pi}{4} \frac{1}{|\vec{p}_1|} \frac{1}{E_3 + E_4} = \\
 &= \frac{\pi}{4} \frac{2\sqrt{s}}{\lambda^{1/2}(s, M_1^2, M_2^2)} \frac{1}{\sqrt{s}} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\lambda^{1/2}(s, M_1^2, M_2^2)}
 \end{aligned}$$

y en cambio

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{16\pi \lambda(s, M_1^2, M_2^2)} \sum_{\text{part. } i, j} \sum_{\text{part. } k, l} |\langle f | T | i \rangle|^2 \tag{1}$$

Otra cantidad de interés es $(d\sigma/d\Omega)_{c.m.}$ donde θ es el ángulo de \vec{p}_3 y \vec{p}_1 .
Se tiene

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{c.m.} = \frac{1}{2\pi} \frac{dt}{d(\cos \theta)} \frac{d\sigma}{dt}$$

y teniendo en cuenta la expresión de t

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{c.m.} = \frac{1}{\pi} |\vec{p}_1|_{c.m.} |\vec{p}_3|_{c.m.} \frac{d\sigma}{dt}$$

Como

$$|\vec{p}_1|_{c.m.} = \frac{1}{2\sqrt{s}} \lambda^{1/2}(s, M_1^2, M_2^2) \quad |\vec{p}_3|_{c.m.} = \frac{1}{2\sqrt{s}} \lambda^{1/2}(s, M_3^2, M_4^2)$$

se obtiene

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{c.m.} = \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{\lambda^{1/2}(s, M_3^2, M_4^2)}{\lambda^{1/2}(s, M_1^2, M_2^2)} \sum_{\text{part. } i, j} \sum_{\text{part. } k, l} |\langle f | T | i \rangle|^2 \tag{2}$$

Otra proceso interesante es el proceso de desintegración

$$A \longrightarrow B_1 + B_2 + \dots + B_m \tag{3}$$

La anchura para este proceso se obtiene dividiendo la probabilidad de transición en
unidad de volumen de espacio-tiempo por el número de partículas del ψ_A en
unidad de volumen. Así se obtiene inmediatamente que la anchura o ritmo de
desintegración para el proceso (3) es

$$\Gamma = \frac{(2\pi)^{4-3m}}{2M_A} \sum_{p_i} \sum_{p_f} \int \prod_{i=1}^m \frac{d^3 p_i}{2E_i} \delta(p_A - p_1 - \dots - p_m) |\langle f | T | i \rangle|^2 \quad (1)$$

donde hemos supuesto la partícula inicial en reposo. Si consideramos

$$1 \rightarrow 2 + 3$$

entonces $|\langle f | T | i \rangle|^2$ es fuertemente constante y

$$\Gamma = \frac{1}{8\pi^2 M_1} \sum_{p_i} \sum_{p_f} |\langle f | T | i \rangle|^2 \int \prod_{i=2}^3 \frac{d^3 p_i}{2E_i} \delta(p_1 - p_2 - p_3)$$

La integral invariante se calcula fácilmente con el resultado

$$I = \int \prod_{i=2}^3 \frac{d^3 p_i}{2E_i} \delta(p_1 - p_2 - p_3) = \frac{\pi}{2M_1^2} \lambda^{1/2}(M_1^2, M_2^2, M_3^2) \Theta(M_1) \Theta[M_1^2 - (M_2 + M_3)^2] \quad (2)$$

donde las funciones paso indican que la desintegración no puede tener lugar a menos que $M_1^2 > (M_2 + M_3)^2$. Entonces

$$\Gamma = \frac{1}{16\pi M_1^3} \lambda^{1/2}(M_1^2, M_2^2, M_3^2) \sum_{p_i} \sum_{p_f} |\langle f | T | i \rangle|^2 \quad (3)$$

Formularemos ahora con más detalle y en el marco del formalismo de helicidad el proceso

$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4 \quad (4)$$

Los operadores S y T están relacionados por la ecuación

$$S = I - iT \quad (5)$$

y tomando elementos de matriz

$$\langle f | S | i \rangle = \langle f | i \rangle - i \langle f | T | i \rangle \quad (6)$$

Teniendo en cuenta (7.1.1) $|i\rangle = |p_i\rangle \otimes |a_i\rangle$, $|f\rangle = |p_f\rangle \otimes |a_f\rangle$ y escribiendo

$T = I \otimes T_p$ se obtiene

$$\langle f | S | i \rangle = \langle f | i \rangle - i (2\pi)^4 \delta^4(p_i - p_f) \langle a_f | T_p | a_i \rangle \quad (7)$$

y ya tanto $\langle a_f | T_p | a_i \rangle / N_f N_i$ es el elemento de matriz T invariante como antes. Usaremos la notación

$$\langle \theta_f \phi_f; \lambda_3 \lambda_4 | T(s) | \theta_i \phi_i; \lambda_1 \lambda_2 \rangle \equiv \langle a_f | T_p | a_i \rangle / N_f N_i \quad (8)$$

Si en ninguna restricción podemos elegir $\theta_i = \phi_i = \beta_i = 0$ y $\theta_f \equiv \theta$ con lo cual la sección eficaz total es

$$\sigma = \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{\lambda^{1/2}(s, M_3^2, M_4^2)}{\lambda^{1/2}(s, M_1^2, M_2^2)} \frac{1}{(2j_1+1)(2j_2+1)} \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \sum_{\lambda_3, \lambda_4} \int d\Omega |\langle \theta, 0; \lambda_3, \lambda_4 | T(s) | 0, 0; \lambda_1, \lambda_2 \rangle|^2 \quad (1)$$

Aquí, como en mecánica cuántica, es útil hacer un desarrollo en ondas parciales para aislar lo mas posible la u-normática a la dinámica en los elementos de matriz. Como $T(s)$ conmuta con el operador momento angular se tiene que

$$\langle J' M'; \lambda_3, \lambda_4 | T(s) | J M; \lambda_1, \lambda_2 \rangle = 64\pi^2 \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \langle \lambda_3, \lambda_4 | T_J(s) | \lambda_1, \lambda_2 \rangle \quad (2)$$

donde el factor $64\pi^2$ ha sido introducido por conveniencia. Entonces

$$\begin{aligned} \langle \theta, 0; \lambda_3, \lambda_4 | T(s) | 0, 0; \lambda_1, \lambda_2 \rangle &= \sum_{JM} 64\pi^2 \langle \theta, 0; \lambda_3, \lambda_4 | JM; \lambda_3, \lambda_4 \rangle \\ &\quad \langle \lambda_3, \lambda_4 | T_J(s) | \lambda_1, \lambda_2 \rangle \langle JM; \lambda_1, \lambda_2 | 0, 0; \lambda_1, \lambda_2 \rangle \end{aligned}$$

y de aquí, usando (72.4) se obtiene

$$\langle \theta, 0; \lambda_3, \lambda_4 | T(s) | 0, 0; \lambda_1, \lambda_2 \rangle = 16\pi \sum_{JM} (2J+1) D_{M, \lambda_1}^{J*}(0, \theta, 0) D_{M, \lambda_2}^J(0, 0, \theta) \langle \lambda_3, \lambda_4 | T_J(s) | \lambda_1, \lambda_2 \rangle$$

donde $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ y $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda'$. Entonces

$$\begin{aligned} \langle \theta, 0; \lambda_3, \lambda_4 | T(s) | 0, 0; \lambda_1, \lambda_2 \rangle &= 16\pi \sum_J (2J+1) \langle \lambda_3, \lambda_4 | T_J(s) | \lambda_1, \lambda_2 \rangle d_{\lambda, \lambda'}^J(\theta) \\ \lambda &\equiv \lambda_1 = \lambda_2, \quad \lambda' \equiv \lambda_3 = \lambda_4 \end{aligned} \quad (3)$$

Claramente la suma en J es desde $J = \max(|\lambda|, |\lambda'|)$ a ∞ . Para el caso de partículas sin spin $d_{0,0}^J(\theta) = P_J(\cos\theta)$ y obtenemos el desarrollo habitual en ondas planas. De (1) y (3) se encuentra que en el sistema CM

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{CM} &= \frac{4}{S} \frac{\lambda^{1/2}(s, M_3^2, M_4^2)}{\lambda^{1/2}(s, M_1^2, M_2^2)} \frac{1}{(2j_1+1)(2j_2+1)} \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \sum_{\lambda_3, \lambda_4} \sum_{JJ'} (2J+1)(2J'+1) \\ &\quad \langle \lambda_3, \lambda_4 | T_{J'}(s) | \lambda_1, \lambda_2 \rangle^* \langle \lambda_3, \lambda_4 | T_J(s) | \lambda_1, \lambda_2 \rangle d_{\lambda, \lambda'}^{J'}(\theta) d_{\lambda, \lambda'}^J(\theta) \end{aligned} \quad (4)$$

Ahora bien usando la ley de conservación de $d(\theta)$ se obtiene

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{CM} &= \frac{4}{S} \frac{\lambda^{1/2}(s, M_3^2, M_4^2)}{\lambda^{1/2}(s, M_1^2, M_2^2)} \frac{1}{(2j_1+1)(2j_2+1)} \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \sum_{\lambda_3, \lambda_4} \sum_{JJ'} (2J+1)(2J'+1) \\ &\quad \langle \lambda_3, \lambda_4 | T_{J'}(s) | \lambda_1, \lambda_2 \rangle^* \langle \lambda_3, \lambda_4 | T_J(s) | \lambda_1, \lambda_2 \rangle \sum_L C(JJ'L; \lambda, -\lambda) C(JJ'L; \lambda', -\lambda') (-1)^{L-\lambda'} P_L(\cos\theta) \end{aligned} \quad (5)$$

y de (4) se obtiene directamente para la sección eficaz total

$$\sigma = \frac{16\pi}{s} \frac{\lambda^{1/2}(s, M_3^2, M_4^2)}{\lambda^{1/2}(s, M_1^2, M_2^2)} \frac{1}{(2j_1+1)(2j_2+1)} \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \sum_{\lambda_3, \lambda_4} \sum (2J+1) |\langle \lambda_3 \lambda_4 | T_J(s) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle|^2 \quad (1)$$

Hemos pues probado, mediante un uso adecuado de la invariancia relativista, que hay $(2j_1+1)(2j_2+1)(2j_3+1)(2j_4+1)$ amplitudes de helicidad $\langle \lambda_3 \lambda_4 | T_J(s) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle$, para cada J , que nos permiten calcular las secciones eficaces. Evidentemente posibles modificaciones deben hacerse para partículas de masa nula.

Si el proceso considerado viene mediado por las interacciones fuertes y/o electromagnéticas entonces la invariancia de la interacción bajo paridad P e inversión temporal T impone fuertes restricciones sobre el número de amplitudes de helicidad independientes. De acuerdo con (68.3) y (68.6) al actuar sobre $|\vec{p}_0; \lambda\rangle$, donde $\vec{p}_0 = (0, 0, |\vec{p}|)$, la paridad da $U_P = e^{i\pi J_y}$ y

$$U_P |\vec{p}_0; \lambda\rangle = \eta (-1)^{j-\lambda} e^{+i\pi J_y} |\vec{p}_0; -\lambda\rangle \quad (2)$$

y simultáneamente

$$\begin{aligned} U_P |\overline{-\vec{p}_0}; \lambda\rangle &= (-1)^{j-\lambda} e^{+i\pi J_y} \eta e^{-i\pi J_y} |\vec{p}_0; \lambda\rangle = (-1)^{j-\lambda} \eta |\vec{p}_0; \lambda\rangle \\ &= \eta |\vec{p}_0; -\lambda\rangle = \eta (-1)^{j+\lambda} e^{+i\pi J_y} |\overline{-\vec{p}_0}; -\lambda\rangle \end{aligned} \quad (3)$$

De estas dos relaciones resulta

$$U_P |p_0 0; \lambda_1, \lambda_2\rangle = \eta_1 \eta_2 (-1)^{j_1+j_2-\lambda_1+\lambda_2} e^{i\pi J_y} |p_0 0; -\lambda_1, -\lambda_2\rangle \quad (4)$$

De (70.4) se deduce

$$U_P |p; JM; \lambda_1, \lambda_2\rangle = \eta_1 \eta_2 (-1)^{j_1+j_2-\lambda_1+\lambda_2} \frac{1}{2\pi} \left[\frac{2J+1}{4\pi} \right]^{1/2} \int dU D_{M\lambda}^{J*}(\alpha\beta\gamma) R(\alpha\beta\gamma) R(0, -\pi, 0) |p_0 0, -\lambda_1, -\lambda_2\rangle$$

El término $R(\alpha\beta\gamma) R(0, -\pi, 0) = R(\alpha'\beta'\gamma')$ es una nueva rotación y $dU = dU'$. Además

$$D_{M\lambda}^{(J)}(\alpha\beta\gamma) = \sum_{\mu} D_{M\mu}^{(J)}(\alpha'\beta'\gamma') D_{\mu\lambda}^{(J)}(0, \pi, 0) = (-1)^{J-\lambda} D_{M, -\lambda}^{(J)}(\alpha'\beta'\gamma')$$

o desde

$$\begin{aligned} U_P |p; JM; \lambda_1, \lambda_2\rangle &= \eta_1 \eta_2 (-1)^{j_1+j_2-\lambda_1+\lambda_2} \frac{1}{2\pi} \left[\frac{2J+1}{4\pi} \right]^{1/2} \int dU' D_{M, -\lambda}^{J*}(\alpha'\beta'\gamma') (-1)^{J-\lambda_1+\lambda_2} R(\alpha'\beta'\gamma') |p_0 0, -\lambda_1, -\lambda_2\rangle \\ &= \eta_1 \eta_2 (-1)^{J+j_1+j_2-2\lambda_1+2\lambda_2} |p; JM; -\lambda_1, -\lambda_2\rangle \end{aligned}$$

y así

$$U_P |p; JM; \lambda_1, \lambda_2\rangle = \eta_1 \eta_2 (-1)^{J-j_1-j_2} |p; JM; -\lambda_1, -\lambda_2\rangle \quad (5)$$

Si la paridad es conservada entonces se obtiene inmediatamente

$$\langle \lambda_3 \lambda_4 | T_J(s) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle = \eta \langle -\lambda_3 -\lambda_4 | T_J(s) | -\lambda_1 -\lambda_2 \rangle \quad (1)$$

$$\eta \equiv (-1)^{j_1 + j_2 - j_3 - j_4} \eta_1 \eta_2 \eta_3 \eta_4$$

Otra relación interesante es

$$\langle \lambda_3 \lambda_4 | T(s, t) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle \equiv \langle \theta, 0; \lambda_3 \lambda_4 | T(s) | 0, 0; \lambda_1 \lambda_2 \rangle =$$

$$= 16\pi \sum_J (2J+1) \langle \lambda_3 \lambda_4 | T_J(s) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle d_{\lambda \lambda'}^J(\theta) =$$

$$= 16\pi \eta \sum_J (2J+1) \langle -\lambda_3 -\lambda_4 | T_J(s) | -\lambda_1 -\lambda_2 \rangle (-1)^{\lambda - \lambda'} d_{-\lambda, -\lambda'}^J(\theta)$$

de donde

$$\langle \lambda_3 \lambda_4 | T(s, t) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle = \eta (-1)^{\lambda - \lambda'} \langle -\lambda_3 -\lambda_4 | T(s, t) | -\lambda_1 -\lambda_2 \rangle \quad (2)$$

$$\lambda = \lambda_1 - \lambda_2 \quad \lambda' = \lambda_3 - \lambda_4$$

Consideremos ahora la inversión temporal T que viene implementada en un operador antiunitario U_T . Cuando aplicamos U_T a $|\vec{p}_0; \lambda\rangle$ obtenemos genuinamente un estado con la misma helicidad y momento $-\vec{p}_0$. Sobre este estado el mismo efecto se logra teniendo una rotación alrededor de OY y además es cierto

$$U_T |\vec{p}_0; \lambda\rangle = E e^{-i\pi J_y} |\vec{p}_0; \lambda\rangle \quad (3)$$

donde E es un factor de fase que en principio puede depender de \vec{p}_0 y λ . Veamos que no es así. Consideremos un boost, B , que lleva fases de \vec{p}_0 a \vec{p}'_0 ambos según OZ . Entonces si B^{-1} indica el boost que lleva fases de $-\vec{p}_0$ a $-\vec{p}'_0$

$$U(0, B^{-1}) U_T |\vec{p}_0; \lambda\rangle = U_T U(0, B) |\vec{p}_0; \lambda\rangle = U_T |\vec{p}'_0; \lambda\rangle = G(p'_0) e^{-i\pi J_y} |\vec{p}'_0; \lambda\rangle$$

$$= G(p'_0) e^{-i\pi J_y} U(0, B) |\vec{p}_0; \lambda\rangle = G(p'_0) U(0, B^{-1}) e^{-i\pi J_y} |\vec{p}_0; \lambda\rangle =$$

$$= G(p'_0) E^{-1}(p_0) U(0, B^{-1}) U_T |\vec{p}_0; \lambda\rangle$$

y por tanto E no depende del módulo de \vec{p}_0 . Veamos que tampoco depende de λ . En efecto

$$U_T |0; \lambda\rangle = E (-1)^{j-\lambda} |0; -\lambda\rangle = E i^{2(j-\lambda)} |0; -\lambda\rangle$$

que reproduce las propiedades bien conocidas bajo inversión temporal si elegimos $E = \pm 1$

Teniendo esto en cuenta se obtiene inmediatamente que

$$U_T |p00; \lambda, \lambda_2\rangle = e^{-i\pi J_y} |p00; \lambda, \lambda_2\rangle \quad (1)$$

Veamos ahora como se relacionan $|p; JM; \lambda, \lambda_2\rangle$

$$\begin{aligned} U_T |p; JM; \lambda, \lambda_2\rangle &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{2J+1}{4\pi} \right]^{1/2} \int dU D_{M\lambda}^J(\alpha\beta\gamma) R(\alpha\beta\gamma) U_T |p00; \lambda, \lambda_2\rangle \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{2J+1}{4\pi} \right]^{1/2} \int dU D_{M\lambda}^J(\alpha\beta\gamma) R(\alpha\beta\gamma) R(0\pi 0) |p00; \lambda, \lambda_2\rangle \end{aligned}$$

Se tiene como antes $R(\alpha\beta\gamma) R(0\pi 0) = R(\alpha'\beta'\gamma')$ $D_{M\lambda}^J(\alpha\beta\gamma) = (-1)^{J+\lambda} D_{M,-\lambda}^J(\alpha'\beta'\gamma')$ y $dU = dU'$, en lo cual

$$U_T |p; JM; \lambda, \lambda_2\rangle = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{2J+1}{4\pi} \right]^{1/2} \int dU' (-1)^{J+\lambda} D_{M,-\lambda}^J(\alpha'\beta'\gamma') R(\alpha'\beta'\gamma') |p00; \lambda, \lambda_2\rangle$$

y como $D_{M,-\lambda}^J(\alpha'\beta'\gamma') = (-1)^{-\lambda-M} D_{-M,\lambda}^J(\alpha'\beta'\gamma')$ se obtiene

$$U_T |JM; \lambda, \lambda_2\rangle = (-1)^{J-M} |J-M; \lambda, \lambda_2\rangle \quad (2)$$

de donde se deduce inmediatamente que

$$\langle \lambda_3 \lambda_4 | T_J(s) | \lambda, \lambda_2 \rangle = \langle \lambda, \lambda_2 | T_J(s) | \lambda_3 \lambda_4 \rangle \quad (3)$$

Veamos unos ejemplos de como las condiciones anteriores limitan el número de amplitudes de helicidad independientes. Formaremos condiciones elásticas y un J fijo

spin 0 - spin 0	1	\xrightarrow{P}	1	\xrightarrow{T}	1
spin 0 - spin 1/2	4	\xrightarrow{P}	2	\xrightarrow{T}	2
spin 1/2 - spin 1/2	16	\xrightarrow{P}	8	\xrightarrow{T}	6
spin 0 - spin 1	9	\xrightarrow{P}	5	\xrightarrow{T}	4

Como además $|\lambda_1 - \lambda_2| \leq J$ y $|\lambda_3 - \lambda_4| \leq J$ esto impone algunas más restricciones para valores bajos de J . Las relaciones anteriores (2.2) y (3) pueden ser también deducidas para ese caso.

Otro punto importante a considerar es como formular en este caso la simetría o antisimetría de las funciones de onda para partículas idénticas. Indiquemos por P_{12} el operador que intercambia las partículas 1 y 2. Entonces se tiene $(j_1 = j_2 = j)$

$$\begin{aligned}
 P_{12} |p_0 0; \lambda_1, \lambda_2\rangle &= |\vec{p}_0, \lambda_1; 2\rangle \otimes |-\vec{p}_0, \lambda_2; 1\rangle = \\
 &= (-1)^{j-\lambda_1} e^{i\pi J_y} |\vec{p}_0; \lambda_1; 2\rangle \otimes (-1)^{-j+\lambda_2} e^{-i\pi J_y} |-\vec{p}_0; \lambda_2; 1\rangle = \\
 &= (-1)^{2j-\lambda_1+\lambda_2} e^{i\pi J_y} |p_0 0; \lambda_2, \lambda_1\rangle \tag{1}
 \end{aligned}$$

donde se ha usado que

$$e^{-2\pi i J_y} |\vec{p}_0; \lambda\rangle = \sum_{\lambda'} d_{\lambda'\lambda}^j(2\pi) |\vec{p}_0; \lambda'\rangle = (-1)^{2j} |\vec{p}_0; \lambda\rangle$$

Usando métodos análogos a los anteriores se puede probar que

$$P_{12} |JM; \lambda_1, \lambda_2\rangle = (-1)^{J-2j} |JM; \lambda_2, \lambda_1\rangle \tag{2}$$

El teorema de conexión spin-estadística nos dice que el estado correcto para dos partículas idénticas se obtiene aplicando $I + (-1)^{2j} P_{12}$ al estado n^o simetrizado y entonces el estado correcto es

$$|JM; \lambda_1, \lambda_2\rangle + (-1)^J |JM; \lambda_2, \lambda_1\rangle \tag{3}$$

debidamente simetrizado. Nota que si J es impar solo están permitidos los estados $\lambda_1 \neq \lambda_2$ y por ejemplo el estado $n^o n^o$ debe tener J par.

Hemos obtenido así para un J dado las amplitudes de helicidad independientes. Estas amplitudes no son arbitrarias debido a la unitariedad de la matriz S . Estudiemos esto: como $S^\dagger S = I$ se tiene que

$$i(T - T^\dagger) = T^\dagger T \tag{4}$$

y por tanto

$$i [\langle \alpha_f | T_p | \alpha_i \rangle - \langle \alpha_f | T_p^\dagger | \alpha_i \rangle] = (2\pi)^4 \sum_m \langle \alpha_f | T_p^\dagger | \alpha_m \rangle \langle \alpha_m | T_p | \alpha_i \rangle \delta(E_i - E_m)$$

válida para $P_i = P_f$. Supongamos que se trata de colisión elástica forzando $|\alpha_f\rangle \equiv |\alpha_i\rangle$, entonces

$$\text{Im} \langle \alpha_i | T_p | \alpha_i \rangle = -\frac{1}{2} (2\pi)^4 \sum_m \delta(E_i - E_m) |\langle \alpha_m | T | \alpha_i \rangle|^2 \tag{5}$$

Usando la definición de sección eficaz total

$$\text{Im} \langle \alpha_i | T | \alpha_i \rangle = -\lambda^{1/2} (s, M_1^2, M_2^2) \sigma_T \tag{6}$$

que es el famoso teorema óptico que relaciona la amplitud elástica forward con la sección eficaz total.

Consideremos ahora (84.5) para un caso en el que solo hay colisión elástica lo cual puede en muchas ocasiones ser una buena aproximación a bajas energías.

En este caso

$$i \left[\langle \theta_f \phi_f; \lambda'_1 \lambda'_2 | T(s) | \theta_i \phi_i; \lambda_1 \lambda_2 \rangle - \langle \theta_f \phi_f; \lambda'_1 \lambda'_2 | T^\dagger(s) | \theta_i \phi_i; \lambda_1 \lambda_2 \rangle \right] =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int \frac{d^3 k_1}{2E_1} \frac{d^3 k_2}{2E_2} \sum_{\lambda''_1 \lambda''_2} \delta(p_f + p_2 - k_1 - k_2) \langle \theta_f \phi_f; \lambda''_1 \lambda''_2 | T(s) | \theta_i \phi_i; \lambda'_1 \lambda'_2 \rangle^* \langle \theta_i \phi_i; \lambda''_1 \lambda''_2 | T(s) | \theta_i \phi_i; \lambda_1 \lambda_2 \rangle$$

De aquí:

$$i \left[\langle \theta_f \phi_f; \lambda'_1 \lambda'_2 | T(s) | \theta_i \phi_i; \lambda_1 \lambda_2 \rangle - \langle \theta_f \phi_f; \lambda'_1 \lambda'_2 | T^\dagger(s) | \theta_i \phi_i; \lambda_1 \lambda_2 \rangle \right] =$$

$$= \frac{\lambda^{1/2}(s, M_1^2, M_2^2)}{32\pi^2 s} \sum_{\lambda''_1 \lambda''_2} \int d\Omega \langle \theta_f \phi_f; \lambda''_1 \lambda''_2 | T(s) | \theta_i \phi_i; \lambda'_1 \lambda'_2 \rangle^* \langle \theta_i \phi_i; \lambda''_1 \lambda''_2 | T(s) | \theta_i \phi_i; \lambda_1 \lambda_2 \rangle \quad (1)$$

sin pérdida de generalidad podemos suponer $\theta_i = \phi_i = \phi_f = 0$ y podemos introducir $\lambda = \lambda_1, -\lambda_2$, $\lambda' = \lambda'_1, -\lambda'_2$ y $\lambda'' = \lambda''_1, -\lambda''_2$. Entonces usando (80.3)

$$16\pi i \sum_J (2J+1) \left[\langle \lambda'_1 \lambda'_2 | T_J(s) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle d_{\lambda\lambda'}^J(\theta_f) - \langle \lambda_1 \lambda_2 | T_J(s) | \lambda'_1 \lambda'_2 \rangle^* d_{\lambda'\lambda}^J(\theta_f) \right]$$

$$= \frac{\lambda^{1/2}(s, M_1^2, M_2^2)}{32\pi^2 s} \sum_{\lambda''_1 \lambda''_2} \int d\Omega 16\pi \sum_{JM} (2J+1) D_{M\lambda''}^J(\phi, \theta, -\phi) D_{M\lambda'}^{J*}(\phi, \theta, 0) \langle \lambda''_1 \lambda''_2 | T_J(s) | \lambda'_1 \lambda'_2 \rangle^*$$

$$16\pi \sum_{J'M'} (2J'+1) D_{M'\lambda''}^{J'*}(\phi, \theta, -\phi) D_{M'\lambda}^{J'}(0, 0, 0) \langle \lambda''_1 \lambda''_2 | T_J(s) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle$$

Teniendo en cuenta que $D_{M'\lambda}^{J'}(0,0,0) = \delta_{M'\lambda}$ y que

$$\int d\Omega D_{M'\lambda''}^{J'*}(\phi, \theta, -\phi) D_{M\lambda''}^J(\phi, \theta, -\phi) = \delta_{M'M} \delta_{J'J} \frac{4\pi}{2J+1}$$

y usando además invariancia bajo inversión temporal obtenemos

$$\sum_J (2J+1) \text{Im} \langle \lambda'_1 \lambda'_2 | T(s) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle d_{\lambda\lambda'}^J(\theta_f) =$$

$$= - \frac{\lambda^{1/2}(s, M_1^2, M_2^2)}{s} \sum_J \sum_{\lambda''_1 \lambda''_2} (2J+1) \langle \lambda''_1 \lambda''_2 | T_J(s) | \lambda'_1 \lambda'_2 \rangle^* \langle \lambda''_1 \lambda''_2 | T_J(s) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle d_{\lambda\lambda'}^J(\theta_f)$$

y así obtenemos

$$\begin{aligned} \text{Im} \langle \lambda_1', \lambda_2' | T_J(s) | \lambda_1, \lambda_2 \rangle &= \\ &= - \frac{\lambda^{1/2}(s, M_1^2, M_2^2)}{s} \sum_{\lambda_1'', \lambda_2''} \langle \lambda_1', \lambda_2' | T_J(s) | \lambda_1'', \lambda_2'' \rangle^* \langle \lambda_1'', \lambda_2'' | T_J(s) | \lambda_1, \lambda_2 \rangle \end{aligned} \quad (1)$$

que son las condiciones que deben cumplir las amplitudes de helicidad, cuando solo el canal elástico está abierto, como consecuencia de la unitariedad de la matriz S .

Vamos a aplicar todo esto al caso de un scattering elástico mediado por interacciones fuertes y lo electromagnéticas donde $j_1 = j_3 = 1/2$ y $j_2 = j_4 = 0$. Para una notación más compacta introducimos

$$\langle \lambda_3 0 | T_J(s) | \lambda_1, 0 \rangle \equiv T_{\lambda_3 \lambda_1}^J(s) \quad (2)$$

y en los subíndices pondremos $\pm 1/2 \rightarrow \pm$. Las amplitudes de helicidad son $T_{++}^J(s)$, $T_{+-}^J(s)$, $T_{-+}^J(s)$, $T_{--}^J(s)$. La invariancia bajo paridad implica

$$T_{++}^J(s) = T_{--}^J(s), \quad T_{+-}^J(s) = T_{-+}^J(s) \quad (3)$$

y nada nuevo se obtiene, en este caso, aplicando invariancia bajo inversión temporal. Usaremos $T_{++}^J(s)$ y $T_{+-}^J(s)$ como amplitudes básicas. Estas funciones no son arbitrarias pues la condición de unitariedad implica.

$$\text{Im} T_{++}^J(s) = - \frac{\lambda^{1/2}(s, M_1^2, M_2^2)}{s} [T_{++}^{J*}(s) T_{++}^J(s) + T_{+-}^{J*}(s) T_{+-}^J(s)] \quad (4)$$

$$\text{Im} T_{+-}^J(s) = - \frac{\lambda^{1/2}(s, M_1^2, M_2^2)}{s} [T_{+-}^{J*}(s) T_{+-}^J(s) + T_{++}^{J*}(s) T_{++}^J(s)]$$

Para explotar más estas relaciones es conveniente reemplazar la base usada en esta base de paridad bien definida lo cual nos diagonaliza $T^J(s)$. Definamos

$$|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|J, M; +\rangle + |J, M; -\rangle] \quad U_p |1\rangle = \eta_1 \eta_2 (-1)^{J-1/2} |1\rangle \quad (5)$$

$$|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|J, M; +\rangle - |J, M; -\rangle] \quad U_p |2\rangle = \eta_1 \eta_2 (-1)^{J+1/2} |2\rangle$$

Notemos que al conservarse el momento angular y la paridad los estados $|1\rangle$ y $|2\rangle$ son estados de momento angular orbital bien definido: $|1\rangle$ ($|2\rangle$) tiene $L = J - 1/2$ ($L = J + 1/2$)

Entonces

$$T_{11}^J(s) = T_{++}^J(s) + T_{+-}^J(s), \quad T_{22}^J(s) = T_{++}^J(s) - T_{+-}^J(s) \quad (1)$$

$$T_{12}^J(s) = T_{21}^J(s) = 0$$

Es costumbre poner

$$T_{11}^J(s) \equiv T_{J-}(s) \quad T_{22}^J(s) \equiv T_{J+}(s) \quad (2)$$

donde $J \pm$ indica que el momento angular orbital es $L = J \pm 1/2$. De (86.4) se obtiene

$$\text{Im } T_{J \pm}(s) = - \frac{\lambda^{1/2}(s, M_1^2, M_2^2)}{s} |T_{J \pm}(s)|^2 \quad (3)$$

Recordemos que en el scattering elástico en el sistema C.M. los módulos de los términos $T_{J \pm}$ de todas las partículas son iguales y vienen

$$q = \frac{1}{2\sqrt{s}} \lambda^{1/2}(s, M_1^2, M_2^2) \quad (4)$$

Entonces (3) implica que

$$T_{J \pm}(s) = - \frac{\sqrt{s}}{2q} \sin \delta_{J \pm}(s) e^{+i\delta_{J \pm}(s)} = - \frac{\sqrt{s}}{4iq} (e^{2i\delta_{J \pm}(s)} - 1) \quad (5)$$

donde las cantidades reales $\delta_{J \pm}(s)$ son los llamados desplazamientos de fase o defasajes. Es costumbre introducir

$$f_{J \pm}(s) \equiv \frac{1}{2iq} (e^{2i\delta_{J \pm}(s)} - 1) = - \frac{2}{\sqrt{s}} T_{J \pm}(s) \quad (6)$$

Recordemos

$$\langle \theta 0; \lambda'_1 | T(s) | 0 0; \lambda_1 \rangle = 16\pi \sum_J (2J+1) \langle \lambda'_1 | T_J(s) | \lambda_1 \rangle d_{\lambda'_1 \lambda_1}^J(\theta)$$

Ahora bien

$$d_{1/2, 1/2}^J(\theta) = d_{-1/2, -1/2}^J(\theta) = \frac{2}{2J+1} \left\{ P'_{J+1/2}(\cos \theta) - P'_{J-1/2}(\cos \theta) \right\} \cos \frac{\theta}{2} \quad (7)$$

$$d_{-1/2, +1/2}^J(\theta) = -d_{1/2, -1/2}^J(\theta) = \frac{2}{2J+1} \left\{ P'_{J+1/2}(\cos \theta) + P'_{J-1/2}(\cos \theta) \right\} \sin \frac{\theta}{2}$$

Introduciendo

$$f_{\lambda'_1 \lambda_1}(s, \theta) \equiv - \frac{1}{8\pi\sqrt{s}} \langle \theta 0; \lambda'_1 | T(s) | 0 0; \lambda_1 \rangle \quad (8)$$

se obtiene

$$f_{++}(s, \theta) = \sum_J [f_{J-}(s) + f_{J+}(s)] \left\{ P'_{J+1/2}(\cos \theta) - P'_{J-1/2}(\cos \theta) \right\} \cos \frac{\theta}{2} \tag{1}$$

$$f_{+-}(s, \theta) = \sum_J [f_{J-}(s) - f_{J+}(s)] \left\{ P'_{J+1/2}(\cos \theta) + P'_{J-1/2}(\cos \theta) \right\} \sin \frac{\theta}{2}$$

Además $f_{++}(s, \theta) = f_{--}(s, \theta)$ y $f_{+-}(s, \theta) = -f_{-+}(s, \theta)$ como se deduce inmediatamente de (8.2)

En el sistema C.M. la sección eficaz total para haces no polarizados y no midiendo polarizaciones finales es (80.1)

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{CH} = |f_{++}(s, \theta)|^2 + |f_{+-}(s, \theta)|^2 \tag{2}$$

Una importante consecuencia es que como $f_{J+} \leftrightarrow f_{J-}$ no cambia la sección eficaz diferencial (usar (1)), entonces medidas de secciones eficaces diferenciales, con haces no polarizados y sin medir la polarización final no permite distinguir $f_{J+}(s)$ de $f_{J-}(s)$. Esta es la llamada ambigüedad de Hinau y solo puede ser resuelta mediante medidas de polarización.

Pasemos ahora a considerar el problema de la polarización en un proceso elástico

$$1 + 2 \longrightarrow 1 + 2 \tag{3}$$

y para simplificar supondremos que $j_1 = j$ y $j_2 = 0$. Indicaremos por \vec{p} y \vec{p}' los momentos iniciales y finales de la partícula 1 en el C.M. Como siempre supondremos $\vec{p} = (0, 0, p)$ y \vec{p}' caracterizado por ángulo θ, ϕ . Obviamente $|\vec{p}'| = |\vec{p}| = p$

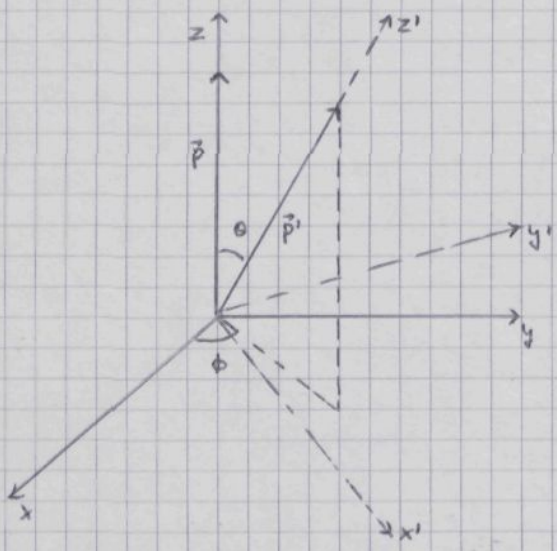
Para discutir la descripción de la orientación de las partículas de spin 1, empezaremos considerando una partícula 1 que llega en un estado de spin puro

$$|\chi\rangle = \sum_{\lambda} a_{\lambda} |\vec{p}; \lambda\rangle \tag{4}$$

especificado por las amplitudes a_{λ} . Si la partícula se transfiere al sistema en que se halla en reposo, que indicaremos por X, Y, Z , mediante un boost a lo largo de OZ entonces la helicidad λ no cambia. Mas aún las amplitudes a_{λ} tampoco cambian ya que por la convención adoptada para las fases relativas de los estados de helicidad no aparecen fases. Ahora bien un haz polarizado incidente es una suma incoherente de tales estados puros. La transformación de Lorentz al sistema en reposo no afecta

esta suma y por tanto la matriz de unidad $S_{\lambda'\lambda}^{im}$ referida a la base de helicidad $|p; \lambda\rangle$ tiene los mismos elementos que tiene si se usan como base los $|0; \lambda\rangle$. En conclusión, podemos describir el estado de spin del haz polarizado incidente por $S_{\lambda'\lambda}^{im}$ si referimos todas las cantidades, tales como operadores de spin, polarizaciones, -- al sistema de referencia en reposo x y z .

Lo mismo ocurre con el haz polarizado saliente pero debemos dar cuenta que ahora $|p'; \lambda\rangle$ se obtiene a partir de $|0; \lambda\rangle$ mediante un boost B según Oz seguido de una rotación $R(\phi, \theta, -\phi) U(O, B)$. La matriz de unidad de spin



$S_{\lambda'\lambda}^{out}$ describiendo el haz emergente esta referida por tanto a su sistema en reposo $x'y'z'$, que se obtiene del x y z mediante una rotación definida mediante los tres ángulos de Euler $(\phi, \theta, -\phi)$. Como se dijo antes la última rotación es un puro problema de conveniencia y podría haber sido omitida, y de hecho se omite cuando se discuten problemas de polarización. Por tanto el sistema en reposo de la partícula saliente se obtiene del de la entrante mediante la rotación de ángulos de Euler $(\phi, \theta, 0)$

La razón de que esta elección sea preferible al estudiar problemas de polarización es que con ella el eje Oy' es perpendicular a \vec{p} y \vec{p}' y por tanto normal al plano en que ocurre la rotación. La consecuencia de esta elección es que

$$|p, \theta, \phi; \lambda\rangle_{ahora} = e^{-i\lambda\phi} |p, \theta, \phi; \lambda\rangle_{antes} \tag{1}$$

Mismo en particular que los estados $|p; JM; \lambda\rangle$ no han cambiado. Entonces la sección eficaz diferencial en el sistema CM desde un estado inicial de helicidad λ a otro final de helicidad λ' es, según (80.1)

$$\frac{d\sigma(\lambda \rightarrow \lambda')}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 s} |\langle \theta, 0; \lambda' | T(s) | 0, 0; \lambda \rangle|^2 \tag{2}$$

y usando (82.8)

$$\frac{d\sigma(\lambda \rightarrow \lambda')}{d\Omega} = f_{\lambda'\lambda}^+(s, \theta) f_{\lambda'\lambda}(s, \theta) \tag{3}$$

donde f es una matriz $(2j+1) \times (2j+1)$ en el espacio de spin. Supongamos que el estado inicial viene descrito por una matriz de unidad

ρ^{in} ($\text{Tr} \rho^{in} = 1$), entonces el estado final viene descrito por una matriz de densidad

$$\rho^{out} = f \rho^{in} f^\dagger \tag{1}$$

La sección eficaz diferencial (o intensidad) corresponde a sumar sobre todas las polarizaciones finales

$$I(\theta) = \frac{d\sigma}{d\Omega} = \text{Tr}(f^\dagger f \rho^{in}) = \text{Tr}(f \rho^{in} f^\dagger) = \text{Tr}(\rho^{out}) \tag{2}$$

y el vector de polarización final es

$$\vec{P}(\theta) = \frac{1}{j} \langle \vec{J} \rangle = \frac{1}{j} \frac{\text{Tr}(\vec{J} \rho^{out})}{\text{Tr}(\rho^{out})}$$

$$\Rightarrow I(\theta) \vec{P}(\theta) = \frac{1}{j} \text{Tr}(\vec{J} f \rho^{in} f^\dagger) \tag{3}$$

formidaremos un haz no polarizado, esto es

$$\rho^{in} = \frac{1}{2j+1} I \tag{4}$$

entonces

$$I_0(\theta) = \frac{1}{2j+1} \text{Tr}(f f^\dagger) = \frac{1}{2j+1} \sum_{\lambda \lambda'} |f_{\lambda' \lambda}(s, \theta)|^2 \tag{5}$$

$$I_0(\theta) \vec{P}_0(\theta) = \frac{1}{j(2j+1)} \text{Tr}(f f^\dagger \vec{J})$$

Para dar expresiones explícitas para las componentes de \vec{P}_0 en términos de las amplitudes de helicidad usaremos las representaciones de \vec{J} correspondientes a $x'y'z'$

$$(J_{x'})_{\lambda' \lambda} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{(j-\lambda)(j+\lambda+1)} \delta_{\lambda', \lambda+1} + \sqrt{(j+\lambda)(j-\lambda+1)} \delta_{\lambda', \lambda-1} \right)$$

$$(J_{y'})_{\lambda' \lambda} = \frac{1}{2i} \left(\sqrt{(j-\lambda)(j+\lambda+1)} \delta_{\lambda', \lambda+1} - \sqrt{(j+\lambda)(j-\lambda+1)} \delta_{\lambda', \lambda-1} \right)$$

$$(J_{z'})_{\lambda' \lambda} = \lambda \delta_{\lambda' \lambda}$$

De aquí obtenemos

i) Polarización longitudinal

$$\vec{P}_0(\theta) \cdot \hat{p}' = \frac{1}{j(2j+1) I_0(\theta)} \sum_{\lambda \lambda'} \lambda' |f_{\lambda' \lambda}(s, \theta)|^2 \tag{6}$$

ii) Polarización transversal normal al plano de colisión $\hat{m} \parallel \vec{p} \times \vec{p}' (\equiv \hat{y}')$

$$\vec{P}_0(\theta) \cdot \hat{m} = \frac{1}{j(2j+1) I_0(\theta)} \sum_{\lambda \lambda'} [(j+\lambda')(j-\lambda'+1)]^{1/2} \text{Im} [f_{\lambda'-1, \lambda} f_{\lambda' \lambda}^*] \quad (1)$$

iii) Polarización transversal en el plano de la colisión

$$\vec{P}_0(\theta) \cdot \hat{x}' = \frac{1}{j(2j+1) I_0(\theta)} \sum_{\lambda \lambda'} [(j+\lambda')(j-\lambda'+1)]^{1/2} \text{Re} [f_{\lambda'-1, \lambda} f_{\lambda' \lambda}^*] \quad (2)$$

Hasta aquí no hemos dicho nada sobre la paridad. Consideremos que las interacciones causantes de la interacción son invariantes bajo P, entonces de (2.2)

$$f_{\lambda' \lambda} = (-1)^{\lambda-\lambda'} f_{-\lambda', -\lambda} \quad (3)$$

y también

$$\vec{P}_0(\theta) \cdot \hat{p}' = \vec{P}_0(\theta) \cdot \hat{x}' = 0 \quad (4)$$

y \vec{P}_0 debe ser normal al plano de colisión.

Para el ejemplo considerado antes

$$\left. \begin{aligned} I_0(\theta) &= |f_{++}(s, \theta)|^2 + |f_{+-}(s, \theta)|^2 \\ \vec{P}_0(\theta) \cdot \hat{m} &= \frac{2 \text{Im} [f_{++}(s, \theta) f_{+-}^*(s, \theta)]}{|f_{++}(s, \theta)|^2 + |f_{+-}(s, \theta)|^2} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Notar que el cambio $f_{J+} \leftrightarrow f_{J-}$ cambia el signo de la polarización y también una medida de ésta permite resolver la ambigüedad de Mirman.

Consideremos que el haz entrante tiene sólo polarización vectorial \vec{P}_I es decir

$$S^{in} = \frac{1}{2j+1} \left[I + \frac{3}{j+1} \vec{P}_I \cdot \vec{J} \right] \quad (6)$$

La intensidad es

$$I(\theta) = \text{Tr} (f S^{in} f^\dagger) = \frac{1}{2j+1} \text{Tr} (f f^\dagger) + \frac{3 \vec{P}_I}{(2j+1)(j+1)} \text{Tr} (f \vec{J} f^\dagger)$$

Ahora bien $\text{Tr} (f \vec{J} f^\dagger) = \text{Tr} (f^\dagger \vec{J} f) = \text{Tr} (f f^\dagger \vec{J})$ y donde hemos usado invariancia bajo inversión temporal. Entonces

$$I(\theta) = I_0(\theta) \left\{ 1 + \frac{3j}{j+1} \vec{P}_I \cdot \vec{P}_0 \right\} \quad (7)$$

como otra aplicación del formalismo que hemos desarrollado vamos a estudiar la de integración de una resonancia

$$1 \longrightarrow 2 + 3 \quad (1)$$

Las medidas de la intensidad y la polarización de los productos finales de una resonancia nos permiten determinar la matriz de unidad de spin de la resonancia.

En general hay dos tipos de aplicación de esta información. En primer lugar esta información se puede usar para determinar el spin y la paridad de la resonancia.

Para este tipo de aplicación es conveniente, muchas veces, expresar la matriz de unidad en términos de parámetros multipolares. En segundo lugar con conocimiento de la matriz de unidad nos puede dar información sobre el mecanismo de producción de la resonancia y en general entonces es mejor trabajar directamente con los elementos de la matriz de unidad pues nos dan información directa sobre las poblaciones de los distintos estados de momento angular.

Sean \vec{p} y $-\vec{p}$ los momentos de las partículas 2 y 3, en el sistema en que 1 está en reposo. Se tiene con la conservación que hemos dicho que usaremos para estudio de polarización que

$$|0, \phi; \lambda_2 \lambda_3\rangle = \sum_{JM} \left[\frac{2J+1}{4\pi} \right]^{1/2} D_{M\lambda}^J(\phi, \theta, 0) |JM; \lambda_2 \lambda_3\rangle \quad \lambda = \lambda_2 - \lambda_3 \quad (2)$$

La amplitud de probabilidad para el proceso (1) es

$$A_{\lambda_1}(\theta, \phi; \lambda_2 \lambda_3) \equiv \langle \theta \phi \lambda_2 \lambda_3 | T | j_1, \lambda_1 \rangle \quad (3)$$

donde el estado inicial es $|0; j_1, \lambda_1\rangle$. Entonces la conservación del momento angular implica

$$A_{\lambda_1}(\theta, \phi; \lambda_2 \lambda_3) = \left[\frac{2j_1+1}{4\pi} \right]^{1/2} D_{\lambda_1, \lambda}^{j_1*}(\phi, \theta, 0) \langle j_1, \lambda_1; \lambda_2 \lambda_3 | T | j_1, \lambda_1 \rangle \quad (4)$$

Como T es invariante bajo rotaciones se puede escribir (no dependiente en λ_1)

$$M(\lambda_2 \lambda_3) \equiv \langle j_1, \lambda_1; \lambda_2 \lambda_3 | T | j_1, \lambda_1 \rangle \quad (5)$$

y

$$A_{\lambda_1}(\theta, \phi; \lambda_2 \lambda_3) = \left[\frac{2j_1+1}{4\pi} \right]^{1/2} D_{\lambda_1, \lambda}^{j_1*}(\phi, \theta, 0) M(\lambda_2 \lambda_3) \quad \lambda = \lambda_2 - \lambda_3 \quad (6)$$

Como además la interacción es invariante bajo paridad

$$M(-\lambda_2, -\lambda_3) = \eta_1 \eta_2 \eta_3 (-1)^{j_1 + j_2 - j_3} M(\lambda_2, \lambda_3) \tag{1}$$

Si el estado inicial viene descrito por una matriz de unidad ρ la distribución demográfica de los estados finales es

$$W(\theta, \phi) = N \sum_{\lambda_1, \lambda'_1} \sum_{\lambda_2, \lambda_3} A_{\lambda_1}(\theta, \phi; \lambda_2, \lambda_3) \rho_{\lambda_1, \lambda'_1} A_{\lambda'_1}^*(\theta, \phi; \lambda_2, \lambda_3) \tag{2}$$

donde N es una constante de normalización. Teniendo en cuenta (92.6)

$$W(\theta, \phi) = N' \sum_{\lambda_1, \lambda'_1} \sum_{\lambda_2, \lambda_3} |M(\lambda_2, \lambda_3)|^2 D_{\lambda_1, \lambda}^{j_1}(\phi, \theta, 0) D_{\lambda'_1, \lambda}^{j_1}(\phi, \theta, 0) \rho_{\lambda_1, \lambda'_1}$$

de donde

$$W(\theta, \phi) = N' \sum_{\lambda_1, \lambda'_1} \sum_{\lambda_2, \lambda_3} |M(\lambda_2, \lambda_3)|^2 d_{\lambda_1, \lambda}^{j_1}(\theta) d_{\lambda'_1, \lambda}^{j_1}(\theta) e^{-i\phi(\lambda'_1 - \lambda_1)} \rho_{\lambda_1, \lambda'_1} \quad \lambda \equiv \lambda_2 - \lambda_3 \tag{3}$$

Para determinar N' imponemos la condición

$$\int d\Omega W(\theta, \phi) = 1$$

de donde

$$N' \frac{4\pi}{2j_1 + 1} \sum_{\lambda_2, \lambda_3} |M(\lambda_2, \lambda_3)|^2 = 1 \tag{4}$$

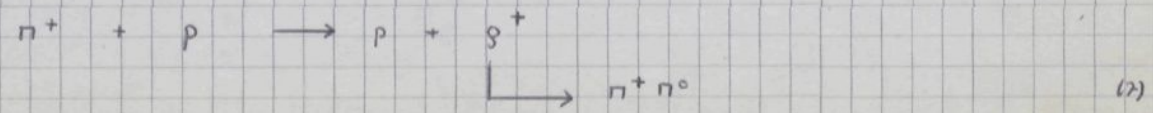
En general $\rho_{\lambda_1, \lambda'_1}$ no es totalmente arbitraria pues la conservación de la probabilidad en un proceso $a + b \rightarrow c + d$ en el que la paridad es conservada y la matriz de unidad es

$$\rho_{\lambda_1, \lambda'_1} = \frac{\sum_{\lambda_a, \lambda_b} \sum_{\lambda_c} \langle \theta 0; \lambda_c \lambda_1 | T(s) | 0 0; \lambda_a \lambda_b \rangle \langle \theta 0; \lambda_c \lambda'_1 | T(s) | 0 0; \lambda_a \lambda_b \rangle^*}{\sum_{\lambda_a, \lambda_b} \sum_{\lambda_c} \sum_{\lambda_1} |\langle \theta 0; \lambda_c \lambda_1 | T(s) | 0 0; \lambda_a \lambda_b \rangle|^2} \tag{5}$$

y el hecho de que la interacción sea invariante bajo paridad da

$$\rho_{\lambda_1, \lambda'_1} = (-1)^{\lambda_1 - \lambda'_1} \rho_{-\lambda_1, -\lambda'_1} \tag{6}$$

Veamos un ejemplo. En la colisión de n^+ con un blanco de protones u observamos la reacción



donde la ρ^+ es una resonancia con $M = 776 (3) \text{ MeV}$, $\Gamma = 155 (3) \text{ MeV}$, su spin paridad es 1^- y su isospin es $T = 1$. La G-paridad es $+1$ y la conjugación de carga para la partícula neutra es -1 . El canal $\rho^+ \rightarrow \pi^+\pi^0$ da cuenta de prácticamente el 100% de las desintegraciones. De (93.3) se deduce

$$W(\theta, \phi) = N' |M(0,0)|^2 \sum_{\lambda, \lambda'} d_{\lambda,0}^{1'}(\theta) d_{\lambda',0}^{1'}(\theta) e^{-i\phi(\lambda' - \lambda)} \rho_{\lambda, \lambda'}$$

Como

$$d_{0,0}^{1'}(\theta) = \cos \theta, \quad d_{1,0}^{1'}(\theta) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta, \quad d_{-1,0}^{1'}(\theta) = +\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta$$

y

$$N' = \frac{4\pi}{3} |M(0,0)|^2 = 1$$

Lo obtiene

$$W(\theta, \phi) = \frac{3}{4\pi} \left\{ \cos^2 \theta \rho_{00} + \frac{\sin^2 \theta}{2} (\rho_{11} + \rho_{-1,-1}) - \frac{1}{2} \sin^2 \theta (e^{2i\phi} \rho_{1,-1} + e^{-2i\phi} \rho_{-1,1}) \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \cos \theta (-e^{i\phi} \rho_{10} - e^{-i\phi} \rho_{01} + e^{i\phi} \rho_{0,-1} + e^{-i\phi} \rho_{-1,0}) \right\}$$

Tengamos presente que como $\rho = \rho^+$ entonces $\rho_{\lambda, \lambda'} = \rho_{\lambda', \lambda}^*$ y como además

$\text{Tr} \rho = 1$

$$W(\theta, \phi) = \frac{3}{4\pi} \left\{ \frac{1}{2} (1 - \rho_{00}) + \frac{1}{2} (3\rho_{00} - 1) \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \text{Re}(\rho_{1,-1} e^{2i\phi}) \right. \\ \left. - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2\theta \text{Re}(\rho_{10} e^{i\phi} - \rho_{-1,0} e^{-i\phi}) \right\}$$

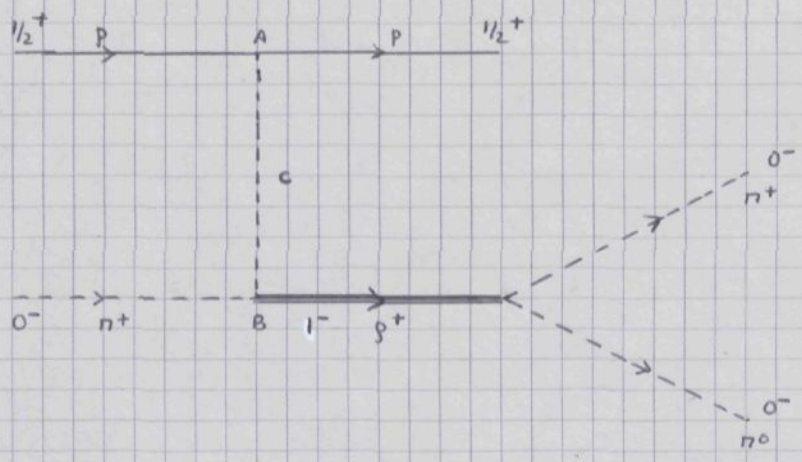
Como el proceso de producción es fuerte (93.6) de $\rho_{10} = -\rho_{-1,0}$ y $\rho_{1,-1} = \rho_{-1,1}$. La última ecuación nos asegura que $\rho_{1,-1}$ es real y su límite

$$W(\theta, \phi) = \frac{3}{4\pi} \left\{ \frac{1}{2} (1 - \rho_{00}) + \frac{1}{2} (3\rho_{00} - 1) \cos^2 \theta - \rho_{1,-1} \sin^2 \theta \sin 2\phi \right. \\ \left. - \sqrt{2} \text{Re}(\rho_{10}) \sin 2\theta \cos \phi \right\} \quad (11)$$

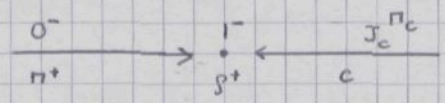
Por tanto la medida de la distribución angular de los piones permite medir las tres cantidades reales ρ_{00} , $\rho_{1,-1}$ y $\text{Re}(\rho_{10})$.

Veamos como esto permite comprobar la validez de un determinado modelo de producción. Supongamos que el mecanismo de producción de la ρ^+ es

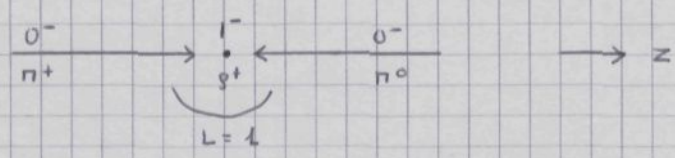
dominado por el modo periférico, es decir que el proceso de producción tiene lugar a través del intercambio de la partícula más ligera que se pueda intercambiar



Veamos ahora cual es la partícula más ligera c que se puede intercambiar. Del vértice A se deduce que la extrañeza de c es $S_c = 0$ y para el isospin $T_c = 0, 1$. Además debe tener spin entero. En el vértice B recordemos $G_n = -1$ y $G_p = +1$ con lo cual $G_c = -1$. Comenzaremos ahora el vértice B suprimiendo p^+ en rojo



Sea L el momento angular relativo del sistema inicial entonces $|J_c - L|, |J_c - L + 1|, \dots, J_c + L - 1, J_c + L$ debe contener la unidad y además $P_c = (-1)^L$. Todas estas condiciones las cumple el n^0 que es el hadrón más ligero que conocemos. Además en este caso $L = 1$. Tomamos pues



En el estado inicial la tercera componente del momento angular total es $(J_c)_3 = 0$, luego el g^+ solo se puede producir con tercera componente del spin igual a 0 y el modo periférico predice que sólo $p_{00} \neq 0$ y su normalización

$$p_{00} = 1, \quad p_{\lambda, \lambda'} = 0 \quad \lambda, \lambda' \neq 0 \tag{1}$$

y se tiene

$$W(\theta, \phi) = \frac{3}{4\pi} \cos^2 \theta. \tag{2}$$

Medidas experimentales dan un acuerdo aceptable:

$$p_{00} = 0.70 (8) \quad p_{1-1} = 0.17 (8) \quad \text{Re}(p_{10}) = -0.074 (70)$$

Vamos ahora a considerar de nuevo $l \rightarrow 2+3$ a fin de intentar determinar el spin y la paridad de la resonancia Δ , pero antes tenemos que escribir la matriz de unidad de una forma mas conveniente. Supongamos una partícula de spin j , su matriz de unidad ρ es una matriz $(2j+1) \times (2j+1)$. Teniendo en cuenta que $\rho = \rho^\dagger$ y $\text{Tr}(\rho) = 1$ es evidente que contiene $4j(j+1)$ parámetros reales. Para lo que sigue nos conviene desarrollar ρ en términos de operadores tensoriales irreducibles T_M^L . Recordemos que

$$R(\alpha\beta\gamma) T_M^L R(\alpha\beta\gamma)^\dagger = \sum_{M'} D_{M'M}^L(\alpha\beta\gamma) T_{M'}^L \quad (1)$$

La matriz de unidad puede desarrollarse en términos de tensores T_M^L con $L=0, 1, 2, \dots, 2j$. Elegiremos estos tensores de forma que cumplan

$$T_M^{L\dagger} = (-1)^M T_{-M}^L \quad (2)$$

$$\text{Tr} \left(T_{M'}^{L\dagger} T_M^L \right) = \frac{2j+1}{2L+1} \delta_{LL'} \delta_{MM'}$$

Esto implica que $T_0^0 = I$. La ventaja de esta normalización es que

$$\langle j m' | T_M^L | j m \rangle = C(j L j; m M m') \quad (3)$$

como puede haberse fácilmente usando el teorema de Wigner-Eckart. Entonces escribiremos

$$\rho = \frac{1}{2j+1} \sum_{L,M} (2L+1) t_{LM}^* T_M^L \quad (4)$$

donde los números t_{LM} son los llamados parámetros multipolares o tensores estadísticos. Evidentemente

$$t_{LM} = \text{Tr}(\rho T_M^L) \equiv \langle T_M^L \rangle \quad (5)$$

$$t_{LM}^* = (-1)^M t_{L,-M}$$

$$t_{00} = 1$$

Entonces

$$\rho_{\lambda\lambda'} = \frac{1}{2j+1} \sum_{LM} (2L+1) C(j L j; \lambda' M \lambda) t_{LM}^* \quad (6)$$

$$t_{LM} = \sum_{\lambda\lambda'} C(j L j; \lambda' M \lambda) \rho_{\lambda'\lambda}$$

Como además $\text{Tr}(\rho^2) \leq 1$ se debe cumplir

$$\frac{1}{2j+1} \sum_{LM} (2L+1) |t_{LM}|^2 \leq 1 \quad (1)$$

La gran ventaja de estos desarrollos es que los t_{LM} pueden ser medidas directamente pues son valores medios de cantidades físicas.

Recordemos $\langle j || J || j \rangle = [j(j+1)]^{1/2}$ y entonces se pueden elegir

$$T_0^1 = \frac{1}{\sqrt{j(j+1)}} J_3, \quad T_{\pm 1}^1 = \mp \frac{1}{\sqrt{2j(j+1)}} (J_1 \pm iJ_2) \quad (2)$$

y entonces

$$\rho = \frac{1}{2j+1} \left(I + \frac{3}{j(j+1)} \langle \vec{J} \rangle \cdot \vec{J} + \dots \right) \quad (3)$$

donde los puntos representan términos estadísticos de orden más elevado.

Volvamos ahora a nuestro problema y para simplificar supondremos $j_2 = 1/2$ y $j_3 = 0$.

De acuerdo con (92.6)

$$A_{\lambda_2 \lambda_1}(\theta, \phi) \equiv A_{\lambda_2}(\theta, \phi; \lambda_2, 0) = \left[\frac{2j_1+1}{4\pi} \right]^{1/2} D_{\lambda_1 \lambda_2}^{j_1*}(\phi, \theta, 0) M_{\lambda_2} \quad (4)$$

donde $M_{\lambda_2} \equiv M(\lambda_2, 0)$. Indiquemos por $\rho^{(1)}$ la matriz de unidad invariante y por $\rho^{(2)}$ la de la partícula R final. Sabemos que

$$\rho^{(2)} = A \rho^{(1)} A^\dagger \quad (5)$$

La intensidad es ahora

$$\begin{aligned} I(\theta, \phi) &= N \text{Tr}(\rho^{(2)}) = N \sum_{\lambda_1 \lambda_1'} \sum_{\lambda_2} A_{\lambda_2 \lambda_1} \rho_{\lambda_1 \lambda_1'}^{(1)} A_{\lambda_2 \lambda_1'}^* = \\ &= N \frac{2j_1+1}{4\pi} \sum_{\lambda_2} \sum_{\lambda_1 \lambda_1'} |M_{\lambda_2}|^2 \rho_{\lambda_1 \lambda_1'}^{(1)} D_{\lambda_1 \lambda_2}^{j_1*}(\phi, \theta, 0) D_{\lambda_1' \lambda_2}^{j_1}(\phi, \theta, 0) \end{aligned} \quad (6)$$

Tengamos ahora presente que se obtiene fácilmente que

$$\begin{aligned} D_{\lambda_1 \lambda_2}^{j_1*}(\phi, \theta, 0) D_{\lambda_1' \lambda_2}^{j_1}(\phi, \theta, 0) &= \\ &= (-1)^{j_1 - \lambda_2} \sqrt{\frac{4\pi}{2j_1+1}} \sum_{LM} C(j_1 L j_1; \lambda_1' M \lambda_1) C(j_1 j_1 L; \lambda_2, -\lambda_2, 0) Y_L^M(\theta, \phi) \end{aligned} \quad (7)$$

Sustituyendo en la expresión anterior y usando (98)6 se obtiene

$$I(\theta, \phi) = N \left[\frac{2j_1 + 1}{4\pi} \right]^{1/2} \sum_{LM} \sum_{\lambda_2} |M_{\lambda_2}|^2 (-1)^{j_1 - \lambda_2} C(j_1, j_1, L; \lambda_2, -\lambda_2, 0) t_{LM}^{(1)*} Y_L^M(\theta, \phi) \quad (1)$$

Para determinar la constante de normalización imponemos

$$\int d\Omega I(\theta, \phi) = 1 \quad (2)$$

y de (99.6)

$$N = 1 / \sum_{\lambda_2} |M_{\lambda_2}|^2 \quad (3)$$

y por tanto

$$I(\theta, \phi) = \frac{1}{\sum_{\lambda_2} |M_{\lambda_2}|^2} \left[\frac{2j_1 + 1}{4\pi} \right]^{1/2} \sum_{LM} \sum_{\lambda_2} |M_{\lambda_2}|^2 (-1)^{j_1 - \lambda_2} C(j_1, j_1, L; \lambda_2, -\lambda_2, 0) t_{LM}^{(1)*} Y_L^M(\theta, \phi) \quad (4)$$

Ahora bien como la paridad es conservada

$$M_{-1/2} = \epsilon M_{+1/2} \quad \epsilon \equiv \eta_1 \eta_2 \eta_3 (-1)^{j_1 - 1/2} \quad (5)$$

y por tanto

$$I(\theta, \phi) = \frac{1}{2} \left[\frac{2j_1 + 1}{4\pi} \right]^{1/2} \sum_{LM} \sum_{\lambda_2} (-1)^{j_1 - \lambda_2} C(j_1, j_1, L; \lambda_2, -\lambda_2, 0) t_{LM}^{(1)*} Y_L^M(\theta, \phi) \quad (6)$$

y de aquí

$$\int d\Omega I(\theta, \phi) Y_L^M(\theta, \phi) = \frac{1}{2} (-1)^{j_1 - 1/2} \left[\frac{2j_1 + 1}{4\pi} \right]^{1/2} C(j_1, j_1, L; 1/2, -1/2, 0) [1 + (-1)^L] t_{LM}^{(1)*} \quad (7)$$

El coeficiente de Clebsch-Gordan nos dice que la integral es nula si $L > 2j_1$ y por tanto si el valor medio de $Y_{LM}(\theta, \phi)$ es estadísticamente significativo distinto de cero entonces el spin de la partícula 1 debe ser al menos $L/2$. La ecuación anterior nos da información solo sobre $L = \text{par}$.

Para obtener más información es necesario medir la polarización de la partícula 2 . En este caso, como la partícula 2 tiene spin $1/2$, la única cantidad a medir es $\langle \vec{P} \rangle = \langle \vec{J} \rangle / j = \langle \vec{\sigma} \rangle$. Se tiene

$$\vec{P}(\theta, \phi) \cdot I(\theta, \phi) = \text{Tr}(\vec{\sigma} \rho^{(2)}) = \sum_{\lambda_1, \lambda_1'} \sum_{\lambda_2, \lambda_2'} (\vec{\sigma})_{\lambda_2, \lambda_2'} A_{\lambda_2, \lambda_1} \rho_{\lambda_1, \lambda_1'}^{(1)} A_{\lambda_2, \lambda_1'}^* \quad (8)$$

Se tiene entonces que las distintas polarizaciones vienen dadas por las ecuaciones

$$\vec{P}(\theta, \phi) \cdot I(\theta, \phi) = \frac{2j_1 + 1}{4\pi} \sum_{\lambda_1, \lambda_1'} \sum_{\lambda_2, \lambda_2'} M_{\lambda_2}^* \vec{\sigma}_{\lambda_2, \lambda_2'} M_{\lambda_2} \rho_{\lambda_1, \lambda_1'}^{(1)} D_{\lambda_1, \lambda_2}^{j_1*}(\theta, \phi, 0) D_{\lambda_1, \lambda_2}^{j_1}(\theta, \phi, 0)$$

Como

$$D_{\lambda, \lambda_2}^{j_1*}(\phi, \theta, 0) D_{\lambda_1', \lambda_2'}^{j_1}(\phi, \theta, 0) = (-1)^{j_1 - \lambda_2'} \sum_{LMH'} \sqrt{\frac{2L+1}{2j_1+1}} C(j_1, L, j_1; \lambda_1' M \lambda_2) C(j_1, j_1, L; \lambda_2 - \lambda_2' M') D_{MH'}^{L*}(\phi, \theta, 0) \quad (1)$$

se obtiene

$$\bar{E}(\theta, \phi) I(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2j_1+1}{4\pi}} \sum_{\lambda_2 \lambda_2'} \sum_{LMH'} (-1)^{j_1 - \lambda_2'} M_{\lambda_2'}^* (\bar{\sigma})_{\lambda_2' \lambda_2} M_{\lambda_2} C(j_1, j_1, L; \lambda_2 - \lambda_2' M') E_{LM}^* \sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}} D_{MH'}^{L*}(\phi, \theta, 0)$$

Esto es

$$\bar{E}(\theta, \phi) I(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2j_1+1}{4\pi}} \sum_{\lambda_2 \lambda_2'} \sum_{LM} (-1)^{j_1 - \lambda_2'} M_{\lambda_2'}^* (\bar{\sigma})_{\lambda_2' \lambda_2} M_{\lambda_2} C(j_1, j_1, L; \lambda_2 - \lambda_2') E_{LM}^* \sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}} D_{H, \lambda_2 - \lambda_2'}^{L*}(\phi, \theta, 0) \quad (2)$$

es decir las dos únicas componentes no nulas son la polarización transversal en el plano de la derivada y la polarización longitudinal que salen, respectivamente,

$$I(\theta, \phi) P_{x_1}(\theta, \phi) = 2\epsilon (-1)^{j_1+1/2} \sqrt{\frac{2j_1+1}{4\pi}} |M_{1/2}|^2 \sum_{LM} C(j_1, j_1, L; 1/2, 1/2, 1) \text{Re} \left[E_{LM}^{(1)*} \sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}} D_{M1}^{L*}(\phi, \theta, 0) \right] \quad (3)$$

$$I(\theta, \phi) P_{z_1}(\theta, \phi) = 2 \sqrt{\frac{2j_1+1}{4\pi}} \sum_{LM} \sum_{\lambda_2} \lambda_2 |M_{\lambda_2}|^2 (-1)^{j_1 - \lambda_2} C(j_1, j_1, L; \lambda_2, \lambda_2, 0) E_{LM} Y_L^M(\theta, \phi)$$

y en tanto

$$\int d\Omega I(\theta, \phi) P_{x_1}(\theta, \phi) D_{M1}^{L*}(\phi, \theta, 0) = \epsilon (-1)^{j_1+1/2} \sqrt{\frac{2j_1+1}{2L+1}} |M_{1/2}|^2 C(j_1, j_1, L; 1/2, 1/2, 1) E_{LM}^{(1)} \quad (4)$$

$$\int d\Omega I(\theta, \phi) P_{z_1}(\theta, \phi) Y_L^M(\theta, \phi) = 2 \sqrt{\frac{2j_1+1}{4\pi}} \sum_{\lambda_2} \lambda_2 |M_{\lambda_2}|^2 (-1)^{j_1 - \lambda_2} C(j_1, j_1, L; \lambda_2, \lambda_2, 0) E_{LM}^{(0)}$$

Ahora usando

$$\sqrt{L(L+1)} C(j_1, j_1, L; 1/2, 1/2, 1) = \frac{1}{2} (2j_1+1) [1 - (-1)^L] C(j_1, j_1, L; 1/2, -1/2, 0) \quad (5)$$

se obtiene finalmente

$$\int d\Omega I(\theta, \phi) P_{x_1}(\theta, \phi) D_{M1}^{L*}(\phi, \theta, 0) = \frac{1}{2} \epsilon (-1)^{j_1+1/2} (2j_1+1) \sqrt{\frac{2j_1+1}{2L+1}} |M_{1/2}|^2 \frac{[1 - (-1)^L]}{\sqrt{L(L+1)}} C(j_1, j_1, L; 1/2, -1/2, 0) E_{LM}^{(1)}$$

$$\int d\Omega I(\theta, \phi) P_{z_1}(\theta, \phi) Y_L^M(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2j_1+1}{4\pi}} |M_{1/2}|^2 (-1)^{j_1-1/2} C(j_1, j_1, L; 1/2, -1/2, 0) [1 - (-1)^L] E_{LM}^{(0)} \quad (6)$$

que permite medir $E_{LM}^{(1)}$ para L impar

Además si L es impar se obtiene, si $E_{LM}^{(1)} \neq 0$, que

$$\frac{\int d\Omega I(\theta, \phi) P_{x_1}(\theta, \phi) D_{M_1}^{L*}(\phi, \theta, 0)}{\int d\Omega I(\theta, \phi) P_{z_1}(\theta, \phi) Y_L^M(\theta, \phi)} = -\frac{1}{2} \in (2j_1 + 1) \sqrt{\frac{4\pi}{2L+1}} \frac{1}{\sqrt{L(L+1)}} \quad (1)$$

que da información directa sobre ϵ y j_1 , es decir el spin-paridad de la vibración.
 En particular si $t_{10} \neq 0$ entonces la ecuación anterior se convierte en

$$\frac{\int d\Omega I(\theta, \phi) P_{x_1}(\theta, \phi) \sin\theta}{\int d\Omega I(\theta, \phi) P_{z_1}(\theta, \phi) \cos\theta} = -\frac{1}{2} \in (2j_1 + 1) \quad (2)$$

V - DEFASAJES

Ya antes hemos introducido al estudio un proceso elástico los defasajes que contienen la información dinámica sobre la interacción. Vamos a estudiar algunas propiedades importantes de los defasajes y para no complicar innecesariamente la relación vamos a limitarnos al choque elástico de partículas sin spin. En este caso (80.3)

$$T(s, t) = 16 \pi \sum_L (2L+1) T_L(s) P_L(\cos \theta) \quad (1)$$

donde las cantidades complejas $T_L(s)$ contienen la información dinámica del problema y satisfacen la condición de unitariedad elástica (86.1)

$$\text{Im } T_L(s) = - \frac{2q}{15} |T_L(s)|^2 \quad (2)$$

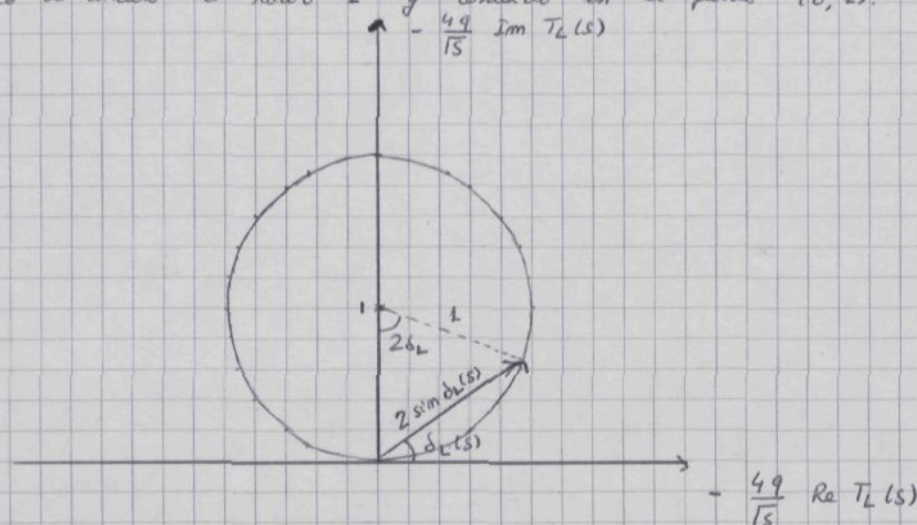
donde q es el momento en el sistema C.M. Este permite introducir los defasajes como

$$T_L(s) = - \frac{\sqrt{s}}{2q} \sin \delta_L(s) e^{+i\delta_L(s)} = - \frac{\sqrt{s}}{4iq} [e^{2i\delta_L(s)} - 1] \quad (3)$$

donde $\delta_L(s) = \delta_L^+(s)$ son los defasajes, los cuales son determinados experimentalmente a partir de las secciones eficaces (y medidas de polarización si hay spin). Notemos que (3) puede escribirse como

$$\left[- \frac{4q}{15} \text{Re } T_L(s) \right]^2 + \left[- \frac{4q}{15} \text{Im } T_L(s) \right]^2 = 2 \left[- \frac{4q}{15} \text{Im } T_L(s) \right] \quad (4)$$

Notemos que para s en la región elástica el representen $-4q \text{Im } T_L(s) / 15$ versus $-4q \text{Re } T_L(s) / 15$ obtenemos un arco de círculo de radio 1 y centrado en el punto $(0, 1)$.



Todas estas propiedades son inmediatas pues $- \frac{4q}{15} \text{Re } T_L(s) = 2 \sin \delta_L(s) \cos \delta_L(s)$ y $- \frac{4q}{15} \text{Im } T_L(s) = 2 \sin^2 \delta_L(s)$. Estos diagramas se llaman cer Argand

Al aumentar la energía, s , llegará un momento en el que canales inelásticos se abren y (103.2) deja de ser válida, pero teniendo en cuenta el signo de los términos despreciados, se puede aun escribir

$$\text{Im } T_L(s) = - \frac{2g}{\sqrt{s}} \frac{1}{E_L(s)} |T_L(s)|^2 \tag{1}$$

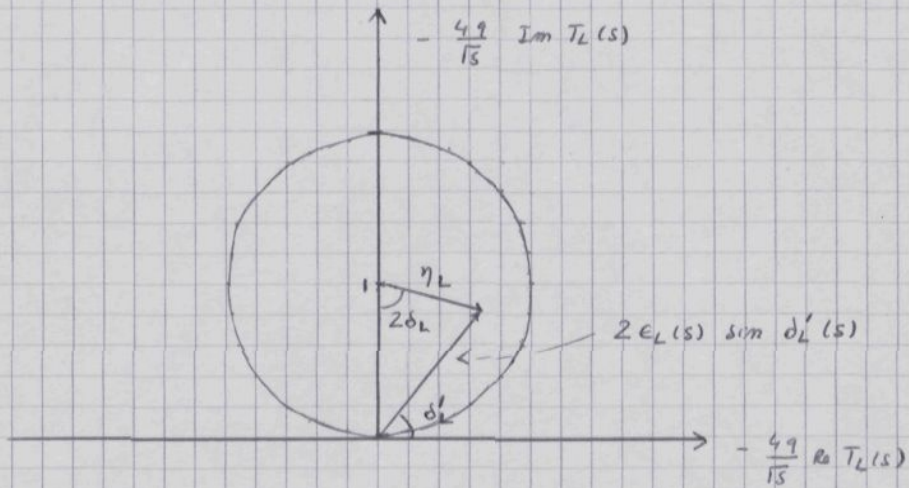
donde solo sabemos que

$$0 \leq E_L(s) \leq 1 \tag{2}$$

y $E_L(s)$ da de alguna forma información sobre los canales inelásticos que no son considerados en detalle. La relación anterior puede escribirse

$$\left[- \frac{4g}{\sqrt{s}} \text{Re } T_L(s) \right]^2 + \left[- \frac{4g}{\sqrt{s}} \text{Im } T_L(s) \right]^2 = 2 E_L(s) \left[- \frac{4g}{\sqrt{s}} \text{Im } T_L(s) \right] \tag{3}$$

y en tanto el punto representado en el plot de Argand es ahora



donde las cantidades indicadas corresponden a las parametrizaciones

$$T_L(s) = - \frac{\sqrt{s}}{2g} E_L(s) \sin \delta'_L(s) e^{i \delta'_L(s)} \tag{4}$$

$$T_L(s) = - \frac{\sqrt{s}}{4ig} \left[\eta_L(s) e^{+2i \delta_L(s)} - 1 \right]$$

donde todas las cantidades son reales y $0 \leq E_L(s) \leq 1$ y $0 \leq \eta_L(s) \leq 1$. Además si el scattering es elástico $\eta_L(s) = E_L(s) = 1$ y $\delta_L(s) = \delta'_L(s)$. Fijémonos que la última representación podría ser escrita en la forma (103.3) si permitimos que el denominador de fase tenga una parte imaginaria positiva.

Notar que la sección eficaz total es

$$\sigma = \frac{16\pi}{s} \sum_L (2L+1) |T_L(s)|^2 \tag{5}$$

Evidentemente para una dada onda L

$$\sigma_L(s) \leq \frac{4\pi}{q^2} (2L+1) \tag{1}$$

que es la llamada cota de unitariedad.

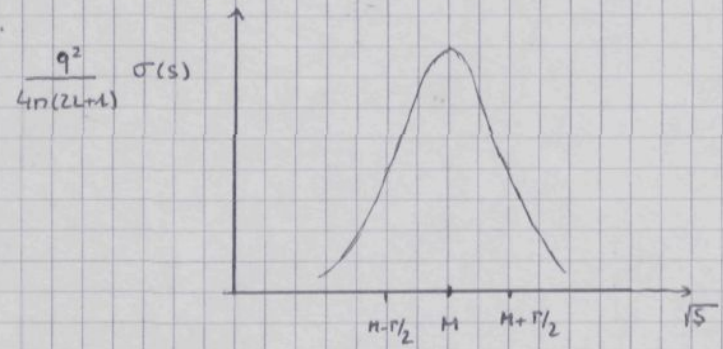
Consideremos ahora una situación ideal en la que para $\sqrt{s} \approx M$ se tiene

$$T_L(s) = -\frac{\sqrt{s}}{4q} \frac{\Gamma}{\sqrt{s} - M + i\frac{\Gamma}{2}}, \quad T_{L'}(s) = 0 \quad L' \neq L \tag{2}$$

es decir que en ausencia de fondo la onda L presenta un típico comportamiento resonante a la Breit-Wigner, siendo M la masa y Γ la anchura de la resonancia. En esta zona de energías

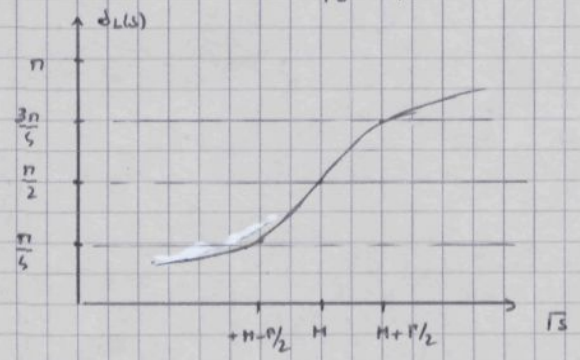
$$\sigma(s) = \frac{4\pi}{q^2} (2L+1) \frac{(\Gamma/2)^2}{(\sqrt{s} - M)^2 + (\Gamma/2)^2} \tag{3}$$

Evidentemente para $\sqrt{s} = M$ se alcanza la cota de unitariedad y para $\sqrt{s} = M \pm \Gamma/2$ la sección eficaz ha caído en un factor 2 aproximadamente.

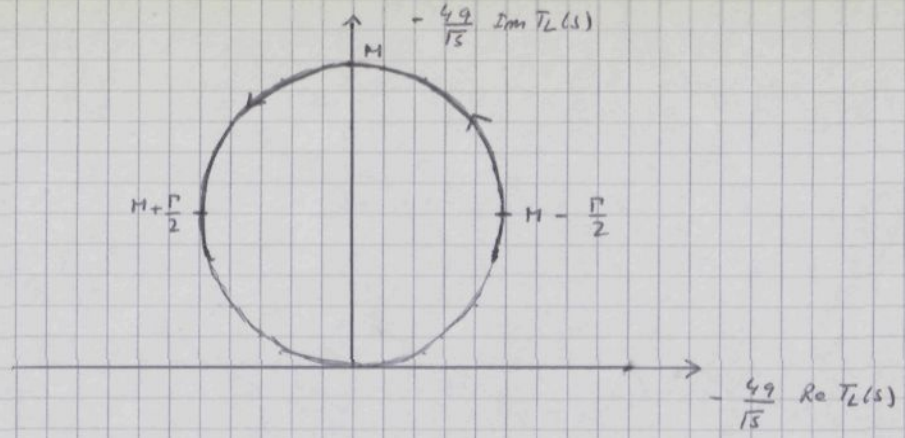


combinando (1) y (3) se obtiene

$$\text{tg } \delta_L(s) = -\frac{\Gamma/2}{\sqrt{s} - M} \tag{4}$$



En el diagrama de Argand el punto representativo se mueve de la forma indicada en la figura a medida que s varia

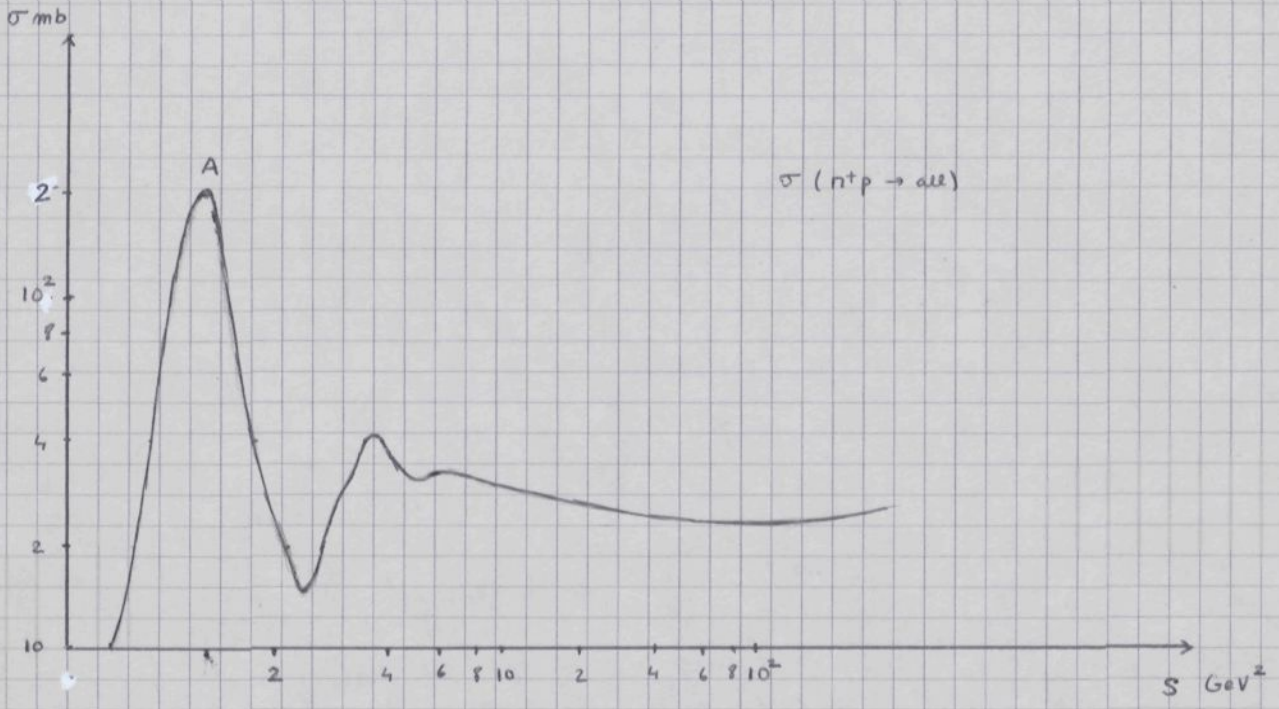


Es fácil también probar que

$$\frac{d \delta_L(s)}{d \sqrt{s}} = \frac{(\Gamma/2)}{(M - \sqrt{s})^2 + (\Gamma/2)^2} \quad (1)$$

y que, por tanto, esta derivada presenta un máximo en la posición de la resonancia, y este es el llamado tiempo de retardo de Wigner

Vemos pues que en esta situación ideal tanto pueden determinarse los parámetros M y Γ de la resonancia estudiando la sección eficaz total o estudiando el comportamiento de los argumentos de fase. La situación real es en general mucho más compleja pues puede haber fondo en onda $L=0$ y en otras ondas, pueden aparecer inelasticidades, etc. todo lo cual hace que sea muy complicado el trabajo para saber si existe o no una resonancia. Todo es muy técnico y no vamos a entrar en detalles. Daremos un ejemplo. La sección eficaz total π^+p es muy bien conocida



Aquí aparecen algunos picos. El pico A es la resonancia Δ^{++} y similares picos se ven en todas las secciones eficaces totales πN . Sus características principales son

$\Delta(1232)$ $M = 1232$ $\Gamma \approx 115$ $T = 3/2$ $J^P = 3/2^+$

y ν de λ sigue prácticamente siempre en $N\nu$. El diagrama de Argand muestra para la onda $L=1, J=3/2, T=3/2$ un comportamiento análogo al real dado antes. Si el fondo es despreciable se debe esperar

$$\sigma \approx \frac{8\pi}{q^2} \approx \frac{32\pi M_0^2}{\lambda(M_0^2, M_N^2, M_\pi^2)} \approx 190 \text{ mbarn} \quad (1)$$

lo cual está de acuerdo con el valor experimental.

A partir de este momento la situación se vuelve muy complicada y así por ejemplo alrededor de $\sqrt{s} = 1.670 \text{ MeV}$ aparecen las resonancias correspondientes a distintas ondas y que se encuentran en un análisis de los componentes de fase

VI - SIMETRÍA SU(3) (MATEMÁTICAS)

Como ya hemos ido viendo el concepto de simetría es extraordinariamente útil. Hemos considerado hasta aquí no sólo simetrías externas o espacio-temporales (rotaciones, Lorentz, paridad, ...) sino también simetrías internas. El grupo $SU_T(2)$ o grupo de isospin, que creemos que es una simetría exacta de las interacciones fuertes, nos ha dado resultados muy interesantes. Por otra parte las interacciones fuertes son invariantes también bajo el grupo $U_Y(1)$ asociado con la conservación de la hipercarga Y . Hemos visto pues que las interacciones fuertes son invariantes bajo $SU_T(2) \otimes U_Y(1)$. La pregunta que nos formulamos ahora es: ¿son las interacciones fuertes invariantes o aproximadamente invariantes bajo un grupo $G \supset SU_T(2) \otimes U_Y(1)$? La contestación a esta pregunta la dieron, independientemente, Gell-Mann y Neeman en 1961, al sugerir que las interacciones fuertes son aproximadamente invariantes, en el sentido que veremos más adelante, bajo el grupo de simetría interna $G \equiv SU(3)$.

Antes de proceder con la física debemos hacer un paréntesis matemático. El grupo $SU(3)$ es un grupo de Lie semi-simple y compacto, que se define como el grupo de las matrices unitarias y unimodulares actuando en E_3 , es decir en el espacio vectorial tridimensional sobre el cuerpo de los números complejos. Todo elemento $U \in SU(3)$ se puede escribir de la forma

$$U = e^{iX}, \quad X = X^\dagger, \quad \text{Tr}(X) = 0 \quad (1)$$

Como para caracterizar la matriz X son necesarios 8 números reales el grupo en cuestión tiene ocho parámetros. Son útiles algunas bases a partir de las cuales se puede construir cualquier X por combinación lineal

i) Base de Okubo

Esta formada por nueve matrices $X_{i,j}$ ($i, j = 1, 2, 3$) de traza nula cuyos elementos elegimos como

$$(X_{i,j})_{\mu\nu} = \delta_{i\mu} \delta_{j\nu} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{\mu\nu} \quad (2)$$

o es decir explícitamente

$$\bar{X}_1^1 = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad \bar{X}_2^2 = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad \bar{X}_3^3 = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\bar{X}_1^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \bar{X}_1^3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \bar{X}_2^3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (1)$$

$$(\bar{X}_i^j)^+ = \bar{X}_j^i, \quad \bar{X}_1^4 + \bar{X}_2^2 + \bar{X}_3^3 = 0$$

Notemos que estas nueve matrices no son independientes como debe suceder. Además cumplen las relaciones de conmutación

$$[\bar{X}_i^j, \bar{X}_k^e] = \delta_k^j \bar{X}_i^e - \delta_i^e \bar{X}_k^j \quad (2)$$

ii) Base de Gell-Mann

Esta base llamada también hermitica está formada por las ocho matrices hermiticas de traza nula

$$F_i = \frac{1}{2} \lambda_i$$

$$\lambda_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{vmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \lambda_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \lambda_4 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (3)$$

$$\lambda_5 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \lambda_6 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \lambda_7 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{vmatrix} \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

Satisfacen las reglas de conmutación

$$[F_i, F_j] = i f_{ijk} F_k \quad (4)$$

donde f_{ijk} es totalmente antisimétrica y real y vale

$$f_{123} = +1$$

$$f_{147} = -f_{156} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = -f_{367} = +1/2 \quad (5)$$

$$f_{458} = f_{678} = +\sqrt{3}/2$$

Los elementos de la base de Okubo vienen dados en términos de estos por las relaciones

$$\Sigma_1^1 = F_3 + \frac{1}{\sqrt{3}} F_8, \quad \Sigma_2^2 = -F_3 + \frac{1}{\sqrt{3}} F_8, \quad \Sigma_3^3 = -\frac{2}{\sqrt{3}} F_8 \tag{1}$$

$$\Sigma_1^2 = F_1 + c' F_2, \quad \Sigma_1^3 = F_4 + c' F_5, \quad \Sigma_2^3 = F_6 + c' F_7$$

iii) Base de Cartan

Llamada también base canónica viene dada por

$$H_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_2 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad E_{-\alpha} = E_{+\alpha}^+ \tag{2}$$

$$E_{+1} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{+2} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{+3} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Los conmutadores no nulos son

$$[H_1, E_{\pm 1}] = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} E_{\pm 1}, \quad [H_1, E_{\pm 2}] = \pm \frac{1}{2\sqrt{3}} E_{\pm 2}, \quad [H_1, E_{\pm 3}] = \mp \frac{1}{2\sqrt{3}} E_{\pm 3}$$

$$[H_2, E_{\pm 2}] = \pm \frac{1}{2} E_{\pm 2}, \quad [H_2, E_{\pm 3}] = \pm \frac{1}{2} E_{\pm 3} \tag{3}$$

$$[E_{\pm 1}, E_{\mp 2}] = \mp \frac{1}{\sqrt{6}} E_{\mp 3}, \quad [E_{\pm 3}, E_{\pm 1}] = \mp \frac{1}{\sqrt{6}} E_{\pm 2}, \quad [E_{\pm 2}, E_{\mp 3}] = \pm \frac{1}{\sqrt{6}} E_{\pm 1}$$

$$[E_{+1}, E_{-1}] = \frac{1}{\sqrt{3}} H_1, \quad [E_{+2}, E_{-2}] = \frac{1}{2\sqrt{3}} H_1 + \frac{1}{2} H_2, \quad [E_{+3}, E_{-3}] = -\frac{1}{2\sqrt{3}} H_1 + \frac{1}{2} H_2$$

Es inmediato comprobar que

$$\Sigma_1^1 = \sqrt{3} H_1 + H_2, \quad \Sigma_2^2 = -\sqrt{3} H_1 + H_2, \quad \Sigma_3^3 = -2 H_2 \tag{4}$$

$$\Sigma_1^2 = \sqrt{6} E_{+1}, \quad \Sigma_1^3 = \sqrt{6} E_{+2}, \quad \Sigma_2^3 = \sqrt{6} E_{+3}$$

y

$$H_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} F_3, \quad H_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} F_8 \tag{5}$$

$$E_{+1} = \frac{1}{\sqrt{6}} (F_1 + c' F_2), \quad E_{+2} = \frac{1}{\sqrt{6}} (F_4 + c' F_5), \quad E_{+3} = \frac{1}{\sqrt{6}} (F_6 + c' F_7)$$

El grupo $SU(3)$ es un grupo con ocho parámetros y de rango 2, es decir que solo se pueden elegir dos generadores linealmente independientes y que conmuten entre sí. Por otra parte considerando las relaciones de conmutación anteriores se ve inmediatamente que hay tres subconjuntos de generadores que engendran un algebra $SU(2)$. Pasemos a detallarlos; los nombres que les aplicaremos vendrán justificados al realizar las aplicaciones físicas.

i) $SU_T(2)$ (isospin)

Los generadores se eligen

$$T_1 \equiv \sqrt{\frac{3}{2}} (E_{+1} + E_{-1}) = F_1, \quad T_2 \equiv \frac{1}{i} \sqrt{\frac{3}{2}} (E_{+1} - E_{-1}) = F_2, \quad T_3 \equiv \sqrt{3} H_1 = F_3 \quad (1)$$

El único generador que conmuta con todos ellos es la hipercarga

$$Y \equiv 2 H_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} F_8 \quad (2)$$

que genera $U_Y(1) : SU(3) \supset SU_T(2) \otimes U_Y(1)$

ii) $SU_V(2)$ (V-spin)

Los generadores se eligen

$$V_1 \equiv \sqrt{\frac{3}{2}} (E_{+2} + E_{-2}) = F_4, \quad V_2 \equiv \frac{1}{i} \sqrt{\frac{3}{2}} (E_{+2} - E_{-2}) = F_5 \quad (3)$$

$$V_3 \equiv \frac{\sqrt{3}}{2} H_1 + \frac{3}{2} H_2 = \frac{1}{2} F_3 + \frac{\sqrt{3}}{2} F_8$$

El único generador que conmuta con todos ellos es $(Y-Q)$

$$(Y-Q) \equiv -\sqrt{3} H_1 + H_2 = -F_3 + \frac{1}{\sqrt{3}} F_8 \quad (4)$$

que genera $U_{Y-Q}(1) : SU(3) \supset SU_V(2) \otimes U_{Y-Q}(1)$

iii) $SU_U(2)$ (U-spin)

Los generadores son

$$U_1 \equiv \sqrt{\frac{3}{2}} (E_{+3} + E_{-3}) = F_6, \quad U_2 \equiv \frac{1}{i} \sqrt{\frac{3}{2}} (E_{+3} - E_{-3}) = F_7 \quad (5)$$

$$U_3 \equiv -\frac{\sqrt{3}}{2} H_1 + \frac{3}{2} H_2 = -\frac{1}{2} F_3 + \frac{\sqrt{3}}{2} F_8$$

El único generador que conmuta con todos ellos es la carga eléctrica

$$Q \equiv \sqrt{3} H_1 + H_2 = F_3 + \frac{1}{\sqrt{3}} F_8 \quad (1)$$

que genera un grupo $SU(3)$: $SU(3) \supset SU(2) \otimes U(1)$.

Hasta aquí hemos estado manejando matrices 3×3 , por ejemplo las F_i . Podemos sin embargo pensar en $SU(3)$ como un grupo abstracto cuyos elementos son operadores abstractos que en \mathcal{L}_3 se reducen a las matrices dadas. Entónces las F_i son ocho operadores hermiticos de traza nula e independientes que cumplen

$$[F_i, F_j] = i f_{ijk} F_k \quad (2)$$

y que en \mathcal{L}_3 tienen la forma dada en (10.3). El espacio vectorial sustentado por los ocho operadores F_i , con la ley de composición (2), es la llamada algebra de Lie de $SU(3)$. Las constantes $i f_{ijk}$ son las llamadas constantes de estructura del grupo expresadas en la base hermitica.

El problema que debemos atacar es de construir las representaciones de este grupo. La teoria general permite realizar esto para todos los grupos semisimples. No vamos a intentar explicar la teoria general sino dar simplemente una serie de reglas para construir todas estas representaciones irreducibles. Los operadores de Casimir de un grupo son por definición operadores construidos con los generadores y que conmutan con todos los generadores. En el $SU(3)$ hay dos operadores de Casimir que en la base de Okubo se escriben

$$I_1 \equiv \frac{1}{2} \sum_i \lambda_i^j \lambda_j^i \quad I_2 \equiv \frac{1}{2} (\sum_i \lambda_i^j \lambda_k^i \lambda_j^k + \sum_j \lambda_j^i \lambda_i^k \lambda_k^j) \quad (3)$$

o bien para el primero de ellos

$$I_1 = \sum_{i=1}^8 F_i^2 = 3 \left[H_1^2 + H_2^2 + \sum_{\alpha=1}^3 E_{+\alpha} E_{-\alpha} + \sum_{\alpha=1}^3 E_{-\alpha} E_{+\alpha} \right] \quad (4)$$

Para caracterizar una representacion debemos dar los valores propios de los operadores de Casimir en ella o lo que es mas frecuentemente combinaciones de los mismos independientes. Las representaciones de $SU(3)$ se caracterizan dando dos numeros (p, q) enteros no negativos. La dimension de la representacion (p, q) es

$$D(p, q) = \frac{1}{2} (p+1) (q+1) (p+q+2) \quad (5)$$

Las representaciones de ordenes más bajos son

$$\begin{array}{lll}
 D(0,0) = 1 & , & D(1,0) = 3 & , & D(0,1) = 3^* \\
 D(2,0) = 6 & , & D(0,2) = 6^* & , & D(1,1) = 8 \\
 D(3,0) = 10 & , & D(0,3) = 10^* & , & D(2,1) = 15 \\
 D(1,2) = 15^* & , & D(4,0) = 15^1 & , & D(0,4) = 15^{1*} \\
 D(5,0) = 21 & , & D(0,5) = 21^* & , & D(3,1) = 24 \\
 D(1,3) = 24^* & , & D(2,2) = 27 & \text{-----} & (1)
 \end{array}$$

En muchas ocasiones se denomina una representación mediante la dimensión y no donde (p, q) esto es lo que ha obligado a introducir asteriscos y primas. En particular $D(p, q) = D(q, p)$ y la que no tiene asterisco es la $p > q$.

Caracterizadas ya las representaciones irreducibles debemos ahora caracterizar los estados base de dicha representación. Para ello buscaremos operadores constantes a partir de los generadores del grupo que conmuten entre sí y usaremos como base aquella que los diagonalice a todos simultáneamente. El conjunto de estos operadores debe ser completo para que los vectores base queden determinados unívocamente, salvo fase. Si tenemos en cuenta que $SU(3) \supset SU_7(2) \otimes U_1(1)$ un conjunto completo adecuado es

$$\vec{T}^2 = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 = 3 [H_1^2 + E_+, E_- + E_-, E_+], \quad (2)$$

$$T_3 = \sqrt{3} H_1 = F_1 \quad \text{y} \quad Y = 2H_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} F_8$$

y entonces los estados base se representan

$$|(p, q); Y T T_3\rangle \quad (3)$$

con la notación usual para el isospin. Las fases relativas de los distintos elementos de la base (3) deben fijarse según un criterio. De acuerdo con el criterio de Gondon-Shortley exigiremos que los elementos de $T_{\pm} = T_1 \pm iT_2$ sean posición

$$T_{\pm} |(p, q); Y T T_3\rangle = \sqrt{(T \mp T_3)(T \pm T_3 + 1)} |(p, q); Y T T_3 \mp 1\rangle \quad (4)$$

y para acabar de fijar las fases exigiremos que también los elementos de matriz de $V_{\pm} = V_1 \pm i V_2 = \sqrt{6} E_{\pm 2}$ sean positivos

$$V_+ | (p, q) ; Y, T, T_3 \rangle = b_+ | (p, q) ; Y+1, T+\frac{1}{2}, T_3+\frac{1}{2} \rangle + b_- | (p, q) ; Y+1, T-\frac{1}{2}, T_3+\frac{1}{2} \rangle$$

$$b_+ = \left\{ 2(T+1)(2T+1) \right\}^{-1/2} \left\{ (T+T_3+1) \left[\frac{1}{3}(p-q) + T + \frac{1}{2}Y+1 \right] \left[\frac{1}{3}(p+2q) + T + \frac{1}{2}Y+2 \right] \left[\frac{1}{3}(2p+q) - T - \frac{1}{2}Y \right] \right\}^{1/2} \quad (1)$$

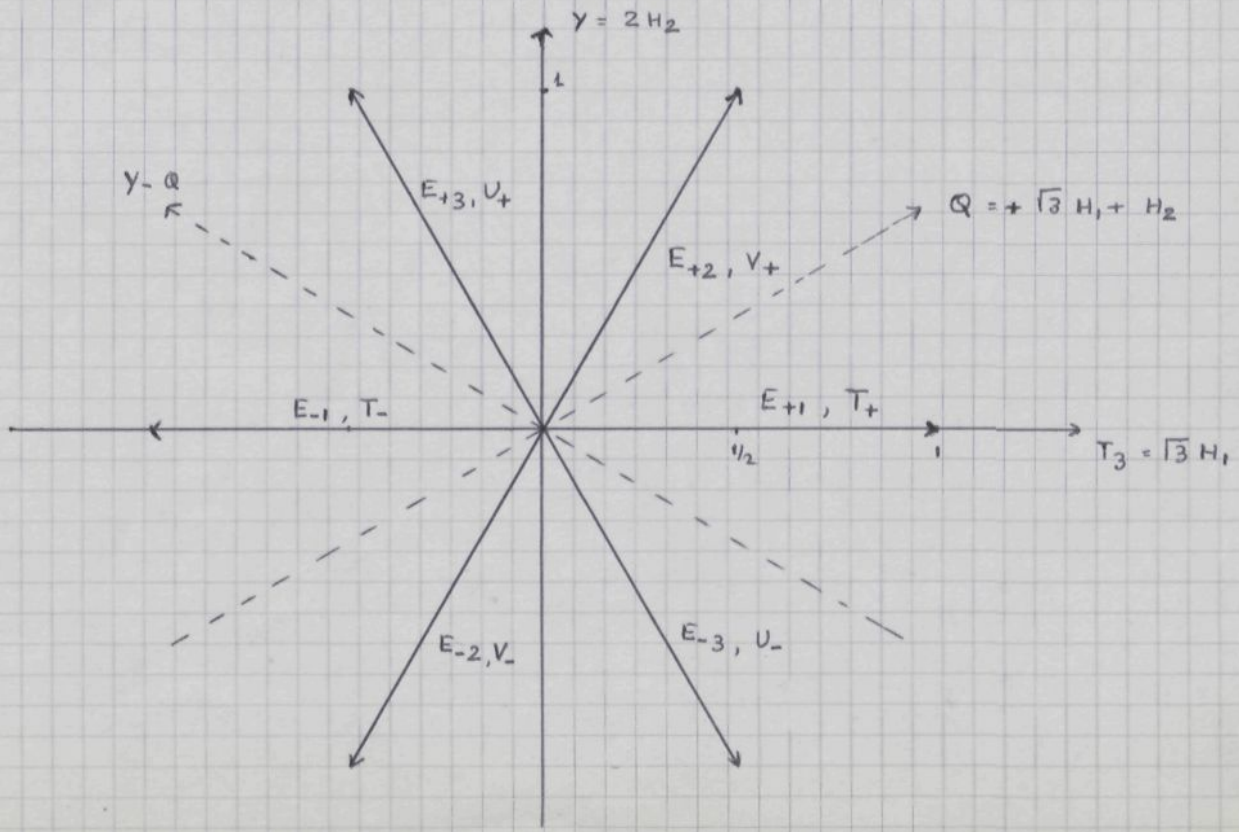
$$b_- = \left\{ 2T(2T+1) \right\}^{-1/2} \left\{ (T-T_3) \left[\frac{1}{3}(p-q) + T - \frac{1}{2}Y \right] \left[\frac{1}{3}(p+2q) - T + \frac{1}{2}Y+1 \right] \left[\frac{1}{3}(2p+q) + T - \frac{1}{2}Y+1 \right] \right\}^{1/2}$$

Las reglas de conmutación dan los elementos de matriz de $V_{\pm} = \sqrt{6} E_{\pm 3}$. Es evidente que de la misma forma en que hemos procedido con $SU(3) \supset SU_T(2) \otimes U_Y(1)$ hubiéramos podido proceder con algebra de los otros dos cadenas y caracterizar las estados base por

$$| (p, q) ; Y-Q, V, V_3 \rangle \quad \text{ó} \quad | (p, q) ; Q, U, U_3 \rangle \quad (2)$$

pero en general estas bases son menos útiles que la anterior. Para recordar mucho de lo dicho es útil la siguiente representación

gráfica



En las aplicaciones es necesario conocer el contenido en Y y T de cada una de las representaciones irreducibles de $SU(3)$, es decir saben como una representación irreducible de $SU(3)$ se reduce al considerarla representación del subgrupo $SU_2(2) \otimes U_1(1)$. Existe una regla general debida a Okubo que nos permite resolver este problema. La regla es la siguiente: Encontrar todos los enteros λ y μ tales que

$$p + q \geq \lambda \geq q \geq \mu \geq 0 \tag{1}$$

Entonces la representación irreducible (p, q) contiene para cada par de valores (λ, μ) un isomultiplete con

$$T = \frac{1}{2} (\lambda - \mu) \quad , \quad Y = \lambda + \mu - \frac{1}{3} (2p + 4q) \tag{2}$$

Si bien la regla es útil en muchos casos sencillos el hallar este contenido se puede hacer directamente como se vea. Esta descomposición se puede escribir

$$(p, q) = (Y_1, T_1) \oplus (Y_2, T_2) \oplus \dots \tag{3}$$

Para los casos de mayor interés fíjate

$$1 \equiv (0, 0) = (0, 0)$$

$$3 \equiv (1, 0) = (1/3, 1/2) \oplus (-2/3, 0)$$

$$3^* \equiv (0, 1) = (-1/3, 1/2) \oplus (2/3, 0)$$

$$8 \equiv (1, 1) = (1, 1/2) \oplus (0, 1) \oplus (0, 0) \oplus (-1, 1/2)$$

$$10 \equiv (3, 0) = (1, 3/2) \oplus (0, 1) \oplus (-1, 1/2) \oplus (-2, 0)$$

$$10^* \equiv (0, 3) = (-1, 3/2) \oplus (0, 1) \oplus (1, 1/2) \oplus (2, 0)$$

$$27 \equiv (2, 2) = (2, 1) \oplus (1, 3/2) \oplus (1, 1/2) \oplus (0, 2) \oplus (0, 1) \oplus (0, 0) \oplus (-1, 1/2) \oplus (-1, 3/2) \oplus (-2, 1) \tag{4}$$

Notar un resultado de validez totalmente general si (p, q) tiene una determinada descomposición entonces (q, p) tiene la misma salvo cambiar el signo de todas las hipercargas. De aquí en una representación (p, q) si existe en la descomposición (Y, T) también existe $(-Y, T)$.

Un problema que se nos presentara con frecuencia es el de la descomposicion del producto de dos representaciones irreducibles. Sean (p_1, q_1) y (p_2, q_2) dos representaciones irreducibles del algebra de Lie $SU(3)$ y sean $R(p_1, q_1)$ y $R(p_2, q_2)$ los espacios base de estas representaciones (es decir los espacia sustentados por $\{ |p, q\rangle; Y T T_3 \}$ que tienen dimensiones $D(p_1, q_1)$ y $D(p_2, q_2)$, respectivamente. Llamaremos producto directo de estas dos representaciones a la representacion $(p_1, q_1) \otimes (p_2, q_2)$ definida en el espacio $R(p_1, q_1) \otimes R(p_2, q_2)$, de dimension $D(p_1, q_1) \cdot D(p_2, q_2)$, mediante

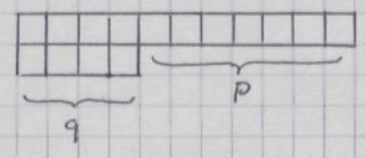
$$M_{d_1 \otimes d_2} (f_1 \otimes f_2) = (M_{d_1} f_1) \otimes f_2 + f_1 \otimes (M_{d_2} f_2) \tag{1}$$

donde M_{d_1} , M_{d_2} y $M_{d_1 \otimes d_2}$ son las matrices que corresponden a un elemento $d \in SU(3)$ en las representaciones (p_1, q_1) , (p_2, q_2) y $(p_1, q_1) \otimes (p_2, q_2)$, respectivamente, y donde $f_1 \in R(p_1, q_1)$ y $f_2 \in R(p_2, q_2)$. En general esta nueva representacion sera reducible. Se quiere saber cual es el contenido en representaciones irreducibles de la nueva representacion. Queremos pues calcular la descomposicion de Glebsch - Gordan

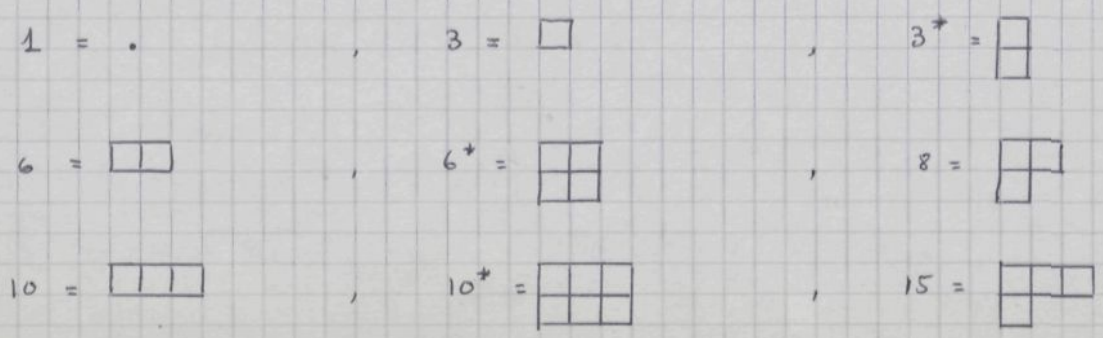
$$(p_1, q_1) \otimes (p_2, q_2) = \sum_{p, q} \sigma(p, q) (p, q) \tag{2}$$

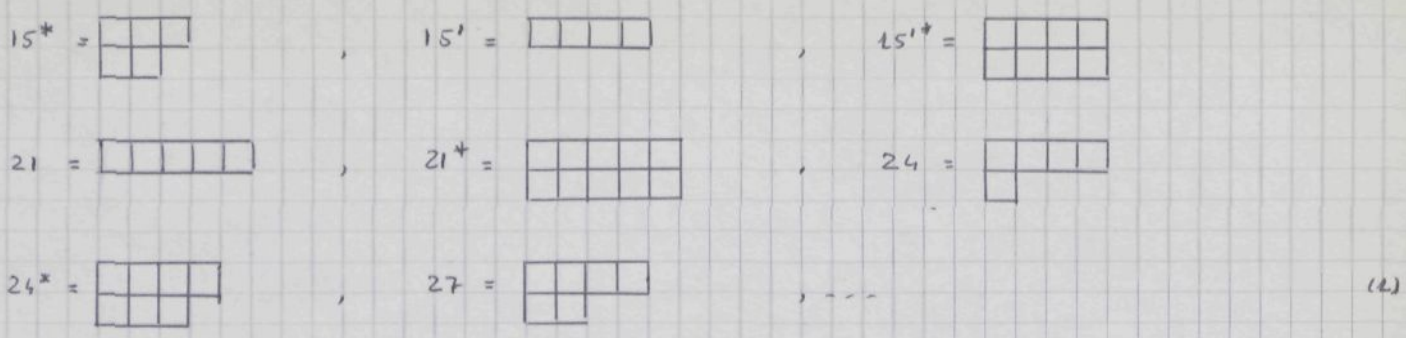
donde las $\sigma(p, q)$ son numeros enteros no negativos que nos dicen que representaciones contiene el producto directo.

Vamos a dar sin demostracion una regla para calcular las $\sigma(p, q)$. Se puede probar que a cada representacion irreducible (p, q) se le puede asignar un diagrama de Young de la forma



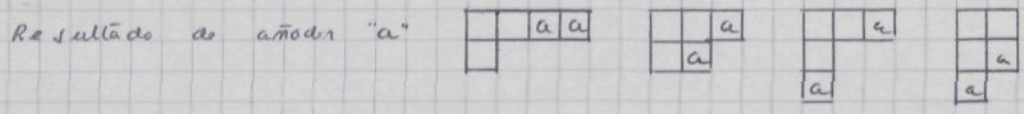
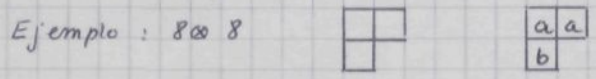
es decir un conjunto de cajas repartidas en dos filas; la primera contiene $p+q$ cajas y la segunda q . Asi por ejemplo



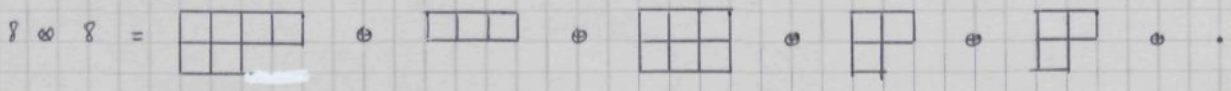
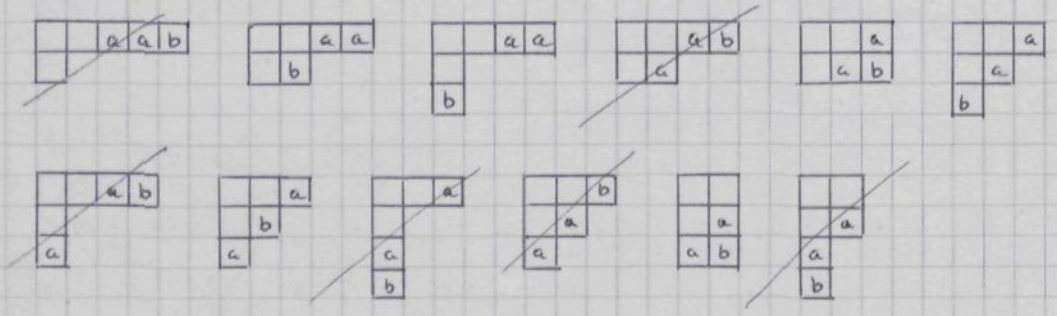


En términos de los diagramas de Young la regla para determinar la serie de Glebsch - Jordan es

- i) Dibujar el tablero de una de ellas. En el tablero de la obra poner una "a" en todos los elementos de la primera fila y una "b" en todos los de la segunda.
- ii) Aplicar las copias "a" al primer tablero de todas las formas posibles sujetas a la regla que no aparezcan dos "a" en la misma columna y que la forma resultante sea regular.
- iii) Repetir lo mismo a continuación con las "b"
- iv) Cuando se han aplicado ya todas las copias se eligen solo aquellas en las que los símbolos añadidos leídos de derecha a izquierda en la primera fila y luego en la segunda, el número de b nunca excede al número de a. Eliminar los diagramas que tengan columnas con más de tres elementos y tachar las columnas de tres elementos.
- v) Los diagramas así obtenidos corresponden a las representaciones irreducibles contenidas en el producto directo.



Resultado de añadir la "b"



$= 27 \oplus 10 \oplus 10^* \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1$

Aplicando este método se obtiene fácilmente

$$3 \otimes 3 = 3^* \oplus 6$$

$$3 \otimes 3^* = 1 \oplus 8$$

$$3 \otimes 6 = 8 \oplus 10$$

$$3 \otimes 6^* = 3^* \oplus 15^*$$

$$3 \otimes 8 = 3 \oplus 6^* \oplus 15$$

$$3 \otimes 10 = 15 \oplus 15'$$

$$3 \otimes 10^* = 6^* \oplus 24^*$$

$$6 \otimes 6 = 6^* \oplus 15 \oplus 15'$$

$$6 \otimes 6^* = 1 \oplus 8 \oplus 27$$

$$6 \otimes 8 = 3^* \oplus 6 \oplus 15^* \oplus 24$$

$$6 \otimes 10 = 15^* \oplus 21 \oplus 24$$

$$6 \otimes 10^* = 3^* \oplus 15^* \oplus 42^*$$

$$8 \otimes 8 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10 \oplus 10^* \oplus 27$$

$$8 \otimes 10 = 8 \oplus 10 \oplus 27 \oplus 35$$

$$10 \otimes 10 = 10 \oplus 27 \oplus 28 \oplus 35$$

$$10 \otimes 10^* = 1 \oplus 8 \oplus 27 \oplus 64 \quad (1)$$

Además si

$$(p, q) \otimes (p', q') = (p_1, q_1) \oplus (p_2, q_2) \oplus \dots \oplus (p_m, q_m) \quad (2)$$

entonces

$$(q, p) \otimes (q', p') = (q_1, p_1) \oplus (q_2, p_2) \oplus \dots \oplus (q_m, p_m) \quad (3)$$

Por otra parte al multiplicar $(p, q) \otimes (q, p)$ se obtiene la $(0, 0)$ y además una sola vez.

Sabemos ya que representaciones irreducibles contiene el producto directo de dos representaciones irreducibles, pero nos falta averiguar como son los elementos del espacio $R(p, q) \otimes R(p, q)$ que se transforman como representaciones irreducibles. Recordemos que para caracterizar totalmente los elementos de la base de una representación irreducible elegimos un conjunto completo de operadores que conmutan $\{ I_1, I_2, Y, \vec{T}^2, T_3 \}$, donde los dos primeros son los operadores de posición. Los estados de la representación producto se pueden caracterizar por los diez operadores

$$\{ I_1^{(1)}, I_2^{(1)}, Y^{(1)}, \vec{T}^{(1)2}, T_3^{(1)}; I_1^{(2)}, I_2^{(2)}, Y^{(2)}, \vec{T}^{(2)2}, T_3^{(2)} \} \quad (4)$$

y estos son los estados $| (p, q_1); Y, T_1, T_{13} \rangle | (p_2, q_2); Y_2, T_2, T_{23} \rangle$. Definamos ahora los operadores $F_i = F_i^{(1)} + F_i^{(2)}$ entonces un conjunto de operadores que conmuta

$$\{ I_1, I_2, I_1^{(1)}, I_2^{(1)}, I_1^{(2)}, I_2^{(2)}, Y, \vec{T}^2, T_3 \} \quad (5)$$

Este conjunto, formado por tan solo nueve operadores, no es completo. Necesitamos otros operadores para que el conjunto sea completo. Este operador que denominaremos Γ (valores propios γ) no está contenido en el grupo y su introducción es necesaria para distinguir los estados base de representaciones irreducibles para los que $\sigma(p, q) > 1$, como fu ejemplo hecho con la representación 8 al multiplicar 8 o 8. Para simplificar la notación utilizaremos

$$|(p, q); Y T T_3\rangle \equiv |\mu, \nu\rangle \tag{1}$$

es decir μ indica la representación y ν los distintos elementos de la base. Los estados propios de los dos conjuntos completos de operadores dados antes forman bases conjuntas ortogonales y por tanto debemos estar relacionados mediante una transformación unitaria que podemos escribir

$$|\mu, \gamma; \mu_1, \mu_2; \nu\rangle = \sum_{\nu_1, \nu_2} \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu, \gamma \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu \end{pmatrix} |\mu_1, \nu_1\rangle |\mu_2, \nu_2\rangle \tag{2}$$

y los coeficientes que aparecen aquí se llaman coeficientes de Clebsch-Gordan para $SU(3)$. Siempre se pueden tomar reales y por tanto

$$|\mu_1, \nu_1\rangle |\mu_2, \nu_2\rangle = \sum_{\mu, \gamma, \nu} \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu, \gamma \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu \end{pmatrix} |\mu, \gamma; \mu_1, \mu_2; \nu\rangle \tag{3}$$

pues

$$\sum_{\nu, \nu'} \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu, \gamma \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu', \gamma' \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu' \end{pmatrix} = \delta_{\mu, \mu'} \delta_{\gamma, \gamma'} \delta_{\nu, \nu'} \tag{4}$$

$$\sum_{\mu, \nu, \gamma} \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu, \gamma \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu, \gamma \\ \nu'_1 & \nu'_2 & \nu \end{pmatrix} = \delta_{\nu_1, \nu'_1} \delta_{\nu_2, \nu'_2}$$

Estos coeficientes tienen las propiedades siguientes (P. H. Nemei y F. Chelton Rev. Mod. Phys. 36, (1964))

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3, \gamma \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{pmatrix} = \xi_1 (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \gamma) \begin{pmatrix} \mu_2 & \mu_1 & \mu_3, \gamma \\ \nu_2 & \nu_1 & \nu_3 \end{pmatrix} \quad \xi_1 = \pm 1 \tag{5}$$

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3, \gamma \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{pmatrix} = \xi_3 (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \gamma) \begin{pmatrix} \mu_1^* & \mu_2^* & \mu_3^*, \gamma \\ -\nu_1 & -\nu_2 & -\nu_3 \end{pmatrix} \quad \xi_3 = \pm 1 \tag{6}$$

$$\sum_{\gamma} \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3, \gamma \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3, \gamma \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \frac{N_3}{N_2} (-1)^{\bar{\nu}_2 + \bar{\nu}_3 + \bar{\lambda}_2 + \bar{\lambda}_3} \sum_{\gamma'} \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_3^* & \mu_2^*, \gamma' \\ \nu_1 & -\nu_3 & -\nu_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_3^* & \mu_2^*, \gamma' \\ \lambda & -\lambda_3 & -\lambda_2 \end{pmatrix} \tag{7}$$

donde $\bar{\nu} \equiv T_3 + \frac{1}{2} Y$ y $-\nu \equiv (-Y, T_1, -T_3)$ y N_i factor dependiente solo de la μ_i .

Si solo aparece un γ y un γ' entonces esta última ecuación se puede escribir

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3\gamma \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{pmatrix} = \xi(\mu_1, \mu_2, \mu_3\gamma) (-1)^{\nu_1} \left(\frac{\mu_3}{\mu_2}\right)^{1/2} \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_3^* & \mu_2\gamma^* \\ \nu_1 & -\nu_3 & -\nu_2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Nosotros estamos usando la notación de Mc.Namara y Chelton. En el caso 8 ⊗ 8 estos autores eligen como Γ el operador permutación de forma que se toma una base simétrica 8_s y otra antisimétrica 8_a .

Finalmente nos interesa introducir los operadores tensoriales irreducibles bajo $SU(3)$. Sea una transformación $U \in SU(3)$ entonces los estados $|\mu; \nu\rangle$ correspondientes a una transformación irreducible se transforman

$$|\mu; \nu\rangle \xrightarrow{U} U |\mu; \nu\rangle = \sum_{\nu'} D^{\mu}(U)_{\nu'\nu} |\mu; \nu'\rangle \quad (2)$$

Se llama operador tensorial irreducible de orden μ a un operador combinación lineal de los $D^{\mu}(U)$ operadores T^{μ}_{ν} que bajo la acción del grupo se transforman es

$$T^{\mu}_{\nu} \xrightarrow{U} U T^{\mu}_{\nu} U^{-1} = \sum_{\nu'} D^{\mu}(U)_{\nu'\nu} T^{\mu}_{\nu'} \quad (3)$$

Considerando una transformación infinitesimal

$$U = I + i \sum_{k=1}^8 \beta_k F_k \quad (4)$$

se obtiene inmediatamente

$$[F_k, T^{\mu}_{\nu}] = \sum_{\nu'} \langle \mu\nu' | F_k | \mu\nu \rangle T^{\mu}_{\nu'} \quad (5)$$

que es una definición equivalente a (3). Estos operadores satisfacen el Comutador de Wigner-Eckart que ahora se escribe

$$\langle \mu_3; \nu_3 | T^{\mu_2}_{\nu_2} | \mu_1; \nu_1 \rangle = \sum_{\gamma} \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3\gamma \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{pmatrix} \langle \mu_3 || T^{\mu_2} || \mu_1 \rangle_{\gamma} \quad (6)$$

Veamos algunos ejemplos de operadores tensoriales que nos serán útiles. De $[F_i, F_j] = i f_{ijk} F_k$ es evidente que una representación de orden 8 de las F_i viene dada por

$$(F_i)_{jk} = -i f_{ijk} \quad (7)$$

pero habrá que tener en cuenta la identidad de Jacobi

$$f_{ijk} f_{emk} + f_{iek} f_{mj k} + f_{imk} f_{jek} = 0 \quad (8)$$

Entonces es evidente que

$$T_i^8 \equiv F_i \quad (1)$$

cumple

$$[F_i, T_j^8] = i f_{ijk} T_k^8 \quad (2)$$

y por tanto forman un álgebra de orden 8.

En la representación tridimensional (109.3) se tiene

$$\{F_i, F_j\} = \frac{1}{3} d_{ij} I + d_{ijk} F_k \quad (3)$$

donde d_{ijk} es totalmente simétrica

$$d_{118} = d_{228} = d_{338} = -d_{888} = 1/\sqrt{3}$$

$$d_{146} = d_{157} = -d_{247} = d_{256} = d_{344} = d_{355} = -d_{366} = -d_{377} = 1/2 \quad (4)$$

$$d_{448} = d_{558} = d_{668} = d_{778} = -1/2\sqrt{3}$$

Entonces es fácil comprobar que

$$F_i^8 = -\frac{2i}{3} \sum_{j,k} f_{ijk} F_j F_k \quad (5)$$

$$D_i^8 = +\frac{2}{3} \sum_{j,k} d_{ijk} F_j F_k$$

con operadores octéticos.

Tengamos finalmente en cuenta que una forma de obtener nuevos operadores tensoriales es la siguiente: Si T_v^M y S_v^N son operadores tensoriales también es un operador tensorial

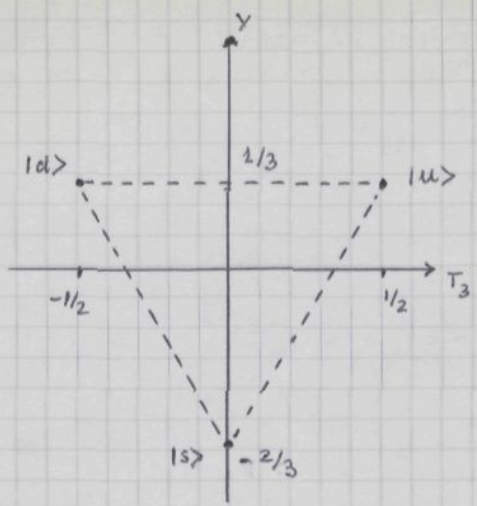
$$R_v^M \equiv \sum_{v_1, v_2} \begin{pmatrix} M_1 & M_2 & M_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} T_{v_1}^{M_1} S_{v_2}^{M_2} \quad (6)$$

Quisieramos ahora atender con algo más de detalle las representaciones 3, 3*, 8, 10 y 10* que son las que usaremos con más frecuencia.

i) Representación 3

Recordemos que

$$3 \equiv (1, 0) = (1/3, 1/2) \oplus (-2/3, 0) \quad (7)$$



El llamado diagrama de pesos es el indicado en la figura, donde

$$|u\rangle \equiv |3; \frac{1}{3} \frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle, \quad |d\rangle \equiv |3; \frac{1}{3} \frac{1}{2} -\frac{1}{2}\rangle$$

$$|s\rangle \equiv |3; -\frac{2}{3} 0 0\rangle \tag{1}$$

Eligiendo

$$|u\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |d\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |s\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Teniendo en cuenta el efecto de los operadores H_i y $E_{\pm\alpha}$, así como las reglas de conmutación de estos y la convención de fases realizada es inmediata obtener

$$H_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}} [|u\rangle\langle u| - |d\rangle\langle d|]$$

$$H_2 = \frac{1}{6} [|u\rangle\langle u| + |d\rangle\langle d| - 2|s\rangle\langle s|] \tag{3}$$

$$E_{+1} = \frac{1}{\sqrt{6}} |u\rangle\langle d|, \quad E_{+2} = \frac{1}{\sqrt{6}} |u\rangle\langle s|, \quad E_{+3} = \frac{1}{\sqrt{6}} |d\rangle\langle s|, \quad E_{-\alpha} = E_{+\alpha}^+$$

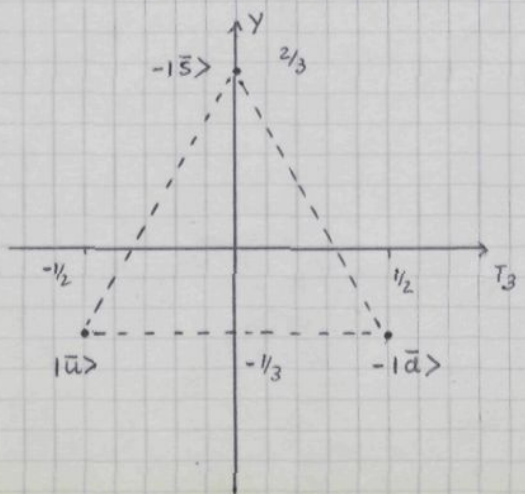
que conducen inmediatamente a la representación (110.2).

Los estados básicos de esta representación se llaman quarks. Los quarks u y d forman un isodoblete $T = \frac{1}{2}$, con $Y = \frac{1}{3}$ y el quark s es un isosinglete $T = 0$ con $Y = -\frac{2}{3}$.

(ii) Representación 3^*

Recordemos

$$3^* = (0, 1) = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}) \oplus (-\frac{2}{3}, 0) \tag{4}$$



El diagrama de pesos es el indicado en la figura

Notar que la representación 3^* es la conjugada de la 3. Ahora bien si una representación de $SU(3)$ está dada por las matrices unitarias $U = e^{iA}$ con $A = A^\dagger$ y $\text{Tr}(A) = 0$, entonces la representación conjugada viene dada por las matrices $U^* = e^{-iA^T}$. De esta forma si A

es la matriz que representa un elemento genérico del álgebra de Lie, la representación contragradiente de la dual de $\mathfrak{so}(3)$ en la matriz $A' = -A^T$. De aquí que si

$$|3^*; 1\rangle \equiv |3^*; -\frac{1}{3} \frac{1}{2} -\frac{1}{2}\rangle, \quad |3^*; 2\rangle \equiv |3^*; -\frac{1}{3} \frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle, \quad |3^*; 3\rangle \equiv |3^*; \frac{2}{3} 0 0\rangle \quad (1)$$

entonces las representaciones contragradientes de las H_i y $E_{\pm\alpha}$ son

$$H'_1 = -\frac{1}{2\sqrt{3}} [|3^*; 1\rangle \langle 3^*; 1| - |3^*; 2\rangle \langle 3^*; 2|]$$

$$H'_2 = -\frac{1}{6} [|3^*; 1\rangle \langle 3^*; 1| + |3^*; 2\rangle \langle 3^*; 2| - 2 |3^*; 3\rangle \langle 3^*; 3|]$$

$$E'_{+1} = -\frac{1}{\sqrt{6}} |3^*; 2\rangle \langle 3^*; 1|, \quad E_{+2} = -\frac{1}{\sqrt{6}} |3^*; 3\rangle \langle 3^*; 1|, \quad E_{+3} = -\frac{1}{\sqrt{6}} |3^*; 3\rangle \langle 3^*; 2| \quad (2)$$

y $E'_{-\alpha} = E_{+\alpha}^{\dagger}$. Ahora bien si tomamos como base

$$|3^*; 1\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |3^*; 2\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |3^*; 3\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

La representación matricial de los generadores resulta ser obviamente

$$H'_i = -H_i, \quad E'_{\alpha} = -E_{-\alpha} \quad (4)$$

donde las H_i y $E_{\pm\alpha}$ son los de (110.2). Notemos sin embargo que la elección (3) viola el convenio de fases que hemos aceptado pues da origen a $E_{\pm 1}, E_{\pm 2}$ con elementos de matriz no positivos. De una inspección a (2) se ve que una forma de resolver esta dificultad es tomar una base $|3^*; Y T T_3\rangle'$ relacionada con la anterior por

$$|3^*; Y T T_3\rangle' = (-1)^{T_3 + \frac{1}{2}Y + \frac{2}{3}} |3^*; Y T T_3\rangle \quad (5)$$

lo cual nos asegura que las matrices correspondientes a $E_{\pm 1}$ y $E_{\pm 2}$ son de elementos no negativos como deseamos. Teniendo en cuenta que en la interpretación física asociamos los quarks con la representación 3 y los antiquarks con la 3^* establecemos la siguiente relación entre ambas bases

$$|3^*; Y T T_3\rangle' = (-1)^{T_3 + \frac{1}{2}Y + \frac{2}{3}} |3; -Y T -T_3\rangle \quad (6)$$

esto es

$$|3^*; -\frac{1}{3} \frac{1}{2} -\frac{1}{2}\rangle = |\bar{u}\rangle, \quad |3^*; -\frac{1}{3} \frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle = -|\bar{d}\rangle, \quad |3^*; \frac{2}{3}, 0, 0\rangle = -|\bar{s}\rangle \quad (7)$$

Una consecuencia inmediata de lo anterior es

$$H_1 |u\rangle = \frac{1}{2\sqrt{3}} |u\rangle, \quad H_1 |d\rangle = -\frac{1}{2\sqrt{3}} |d\rangle$$

$$H_2 |u\rangle = \frac{1}{6} |u\rangle, \quad H_2 |d\rangle = \frac{1}{6} |d\rangle, \quad H_2 |s\rangle = -\frac{1}{3} |s\rangle$$

$$E_{+1} |d\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} |u\rangle, \quad E_{+2} |s\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} |u\rangle, \quad E_{+3} |s\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} |d\rangle$$

$$E_{-1} |u\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} |d\rangle, \quad E_{-2} |u\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} |s\rangle, \quad E_{-3} |d\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} |s\rangle$$

$$H_1 |\bar{u}\rangle = -\frac{1}{2\sqrt{3}} |\bar{u}\rangle, \quad H_1 |\bar{d}\rangle = \frac{1}{2\sqrt{3}} |\bar{d}\rangle \quad (1)$$

$$H_2 |\bar{u}\rangle = -\frac{1}{6} |\bar{u}\rangle, \quad H_2 |\bar{d}\rangle = -\frac{1}{6} |\bar{d}\rangle, \quad H_2 |\bar{s}\rangle = \frac{1}{3} |\bar{s}\rangle$$

$$E_{+1} |\bar{u}\rangle = -\frac{1}{\sqrt{6}} |\bar{d}\rangle, \quad E_{+2} |\bar{u}\rangle = -\frac{1}{\sqrt{6}} |\bar{s}\rangle, \quad E_{+3} |\bar{d}\rangle = -\frac{1}{\sqrt{6}} |\bar{s}\rangle$$

$$E_{-1} |\bar{d}\rangle = -\frac{1}{\sqrt{6}} |\bar{u}\rangle, \quad E_{-2} |\bar{s}\rangle = -\frac{1}{\sqrt{6}} |\bar{u}\rangle, \quad E_{-3} |\bar{s}\rangle = -\frac{1}{\sqrt{6}} |\bar{d}\rangle$$

Los que no aparecen aquí significa que al aplicar el generador al estado quante correspondiente se obtiene cero.

(ii) Representación 8.

En lugar de proceder como en los casos anteriores creamos más formadores desde un punto de vista físico partir de las representaciones 3 y 3^* y proceder a realizar su producto directo y después proceder a su reducción. Los estados obtenidos al hacer este producto $|3; v\rangle \otimes |3^*; v'\rangle$ los indicaremos por $|A_i\rangle$ ($i=1 \dots 9$) y adjuntamos su contenido en (Y, T_3)

$$|A_1\rangle = |u\rangle |\bar{u}\rangle \quad (0, 0); \quad |A_2\rangle = -|u\rangle |\bar{d}\rangle \quad (0, 1); \quad |A_3\rangle = -|u\rangle |\bar{s}\rangle \quad (1, 1/2)$$

$$|A_4\rangle = |d\rangle |\bar{u}\rangle \quad (0, -1); \quad |A_5\rangle = -|d\rangle |\bar{d}\rangle \quad (0, 0); \quad |A_6\rangle = -|d\rangle |\bar{s}\rangle \quad (1, -1/2) \quad (2)$$

$$|A_7\rangle = |s\rangle |\bar{u}\rangle \quad (-1, -1/2); \quad |A_8\rangle = -|s\rangle |\bar{d}\rangle \quad (-1, 1/2); \quad |A_9\rangle = -|s\rangle |\bar{s}\rangle \quad (0, 0)$$

Ya hemos dicho antes y por el contenido de (Y, T) lo pedimos en que $3 \otimes 3^* = 1 \oplus 8$. Vamos ahora a proceder a la reducción

$$|8; 0, 1, 1\rangle = -|u\rangle |\bar{d}\rangle \quad (3)$$

para obtener el $|8; 010\rangle$ basta aplicar T_- al anterior

$$|8; 010\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} T_- |8; 011\rangle = -\sqrt{3} E_- |u\rangle |d\rangle = + \frac{1}{\sqrt{2}} [|u\rangle |\bar{u}\rangle - |d\rangle |\bar{d}\rangle] \quad (1)$$

Similarmente

$$|8; 01-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} T_- |8; 010\rangle = \sqrt{\frac{3}{2}} E_- [|u\rangle |\bar{u}\rangle - |d\rangle |\bar{d}\rangle] = |d\rangle |\bar{u}\rangle \quad (2)$$

Entonces el modo nuevo se obtiene al aplicar T_{\pm} a estos estados. Procedamos a aplicar E_{+2} al estado anterior

$$E_{+2} |8; 01-1\rangle = -\frac{1}{\sqrt{6}} |d\rangle |\bar{s}\rangle \propto |8; 1 \frac{1}{2} -\frac{1}{2}\rangle$$

y como los estados deben ser normalizados y los elementos de matriz de E_{+2} deben ser no negativos

$$|8; 1 \frac{1}{2} -\frac{1}{2}\rangle = -|d\rangle |\bar{s}\rangle \quad (3)$$

Similarmente se obtiene

$$|8; 1 \frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle = -|u\rangle |\bar{s}\rangle, \quad |8; -1 \frac{1}{2} -\frac{1}{2}\rangle = |s\rangle |\bar{u}\rangle, \quad |8; -1 \frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle = -|s\rangle |\bar{d}\rangle \quad (4)$$

Así hemos construido 7 estados de la representación 8. Nos falta construir $|8; 000\rangle$ por sus números cuánticos debe ser una combinación lineal de $|u\rangle |\bar{u}\rangle, |d\rangle |\bar{d}\rangle, |s\rangle |\bar{s}\rangle$. Debe ser ortogonal al (1) por lo cual

$$|8; 000\rangle \propto [|u\rangle |\bar{u}\rangle + |d\rangle |\bar{d}\rangle + \alpha |s\rangle |\bar{s}\rangle] \quad (5)$$

Aplicando E_{-2} al estado $|8; 1 \frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle$ se obtiene una combinación de (1) y (5) y de aquí

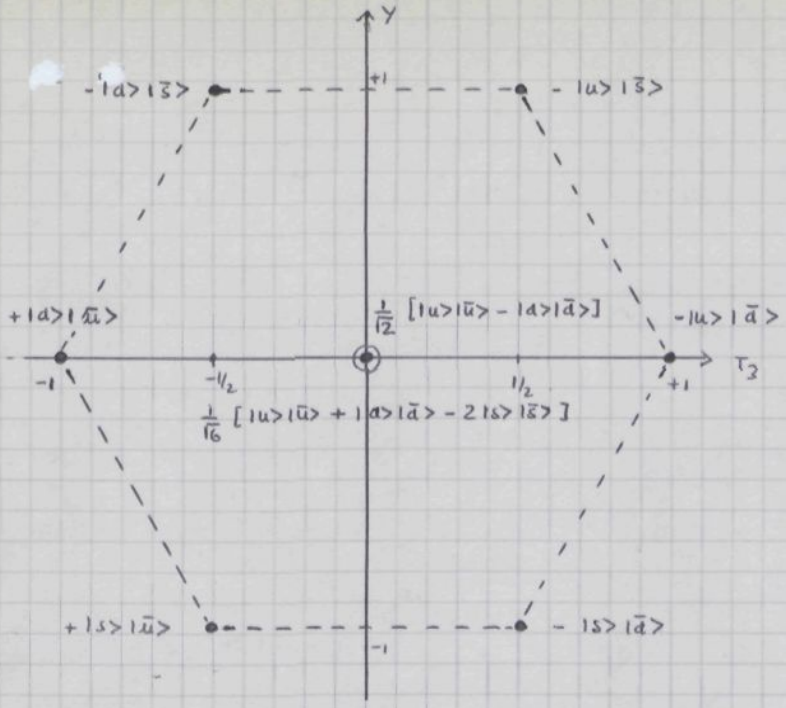
$$|8; 000\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} [|u\rangle |\bar{u}\rangle + |d\rangle |\bar{d}\rangle - 2|s\rangle |\bar{s}\rangle] \quad (6)$$

Finalmente el estado singlete es ortogonal a (1) y (6) y es

$$|1; 000\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} [|u\rangle |\bar{u}\rangle + |d\rangle |\bar{d}\rangle + |s\rangle |\bar{s}\rangle] \quad (7)$$

Resumiendo los estados octeto son

$$\begin{aligned} |8; 011\rangle &= -|u\rangle |\bar{d}\rangle, & |8; 01-1\rangle &= -|d\rangle |\bar{u}\rangle, & |8; 1 \frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle &= -|u\rangle |\bar{s}\rangle \\ |8; -1 \frac{1}{2} -\frac{1}{2}\rangle &= |s\rangle |\bar{u}\rangle, & |8; 1 \frac{1}{2} -\frac{1}{2}\rangle &= -|d\rangle |\bar{s}\rangle, & |8; -1 \frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle &= -|s\rangle |\bar{d}\rangle \\ |8; 010\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|u\rangle |\bar{u}\rangle - |d\rangle |\bar{d}\rangle], & |8; 000\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}} [|u\rangle |\bar{u}\rangle + |d\rangle |\bar{d}\rangle - 2|s\rangle |\bar{s}\rangle] \end{aligned} \quad (8)$$

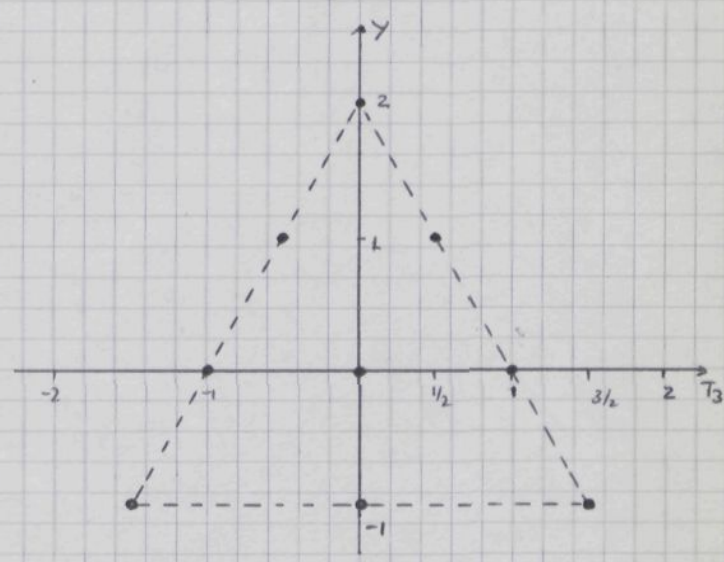
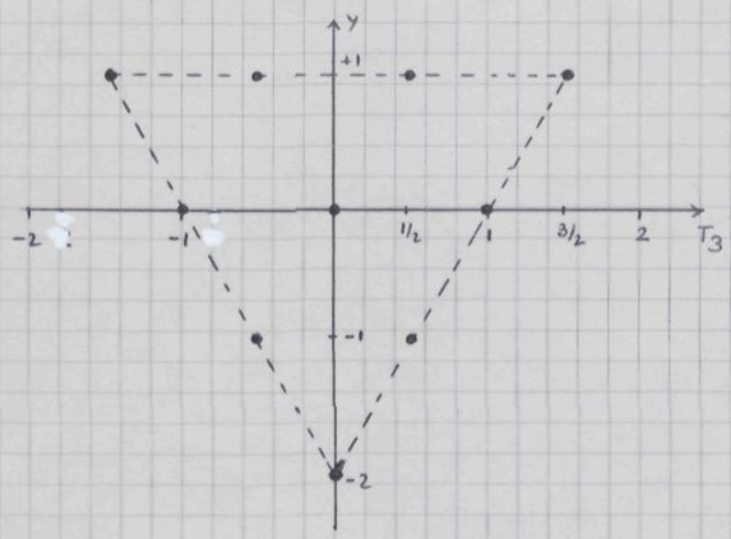


Para la representación 8 el diagrama de pesos viene dada en la figura adjunta. Notemos que los estados de carga opuesta tienen fase opuesta.

Es de interés el momento $8 = 8^*$ lo cual es consecuencia directa de que en la representación 8 de las F_i , dada en (12.7), se cumple

$$F_i = - F_i^T \quad (1)$$

Demos finalmente sin más comentarios los diagramas de pesos de las representaciones 10 y 10^* .



Antes de finalizar este apartado matemático sobre $SU(3)$ quisiéramos decir algo sobre los métodos tensoriales para estudiar el $SU(3)$. Vamos a plantear en general $SU(m)$. Este grupo $SU(m)$ es grupo de Lie semisimple y compacto y se define como el grupo de las matrices unitarias y unimodulares actuando sobre \mathbb{C}^m , es decir en el espacio vectorial m -dimensional definido sobre el cuerpo de los complejos. Un elemento general de \mathbb{C}^m es un conjunto ordenado de n números complejos a_i que escribiremos en la forma de vector columna

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m \quad (2)$$

donde los x^i son los m -vectores columna básicos. Un elemento de $SU(m)$ es una transformación lineal, unitaria y unimodular actuando sobre este espacio

$$a \longrightarrow a' = U a \iff a_i \longrightarrow a'_i = U_i^j a_j \quad (1)$$

La misma definición de $SU(m)$ da ya una representación del $SU(m)$ abstracto en términos de las matrices U de orden $m \times m$. Esta representación m -dimensional se llama la representación fundamental n . El conjunto de los a_i forman un vector covariante bajo $SU(m)$, con la ley de transformación (1).

Se puede además introducir el espacio dual \mathfrak{E}_m^* cuyo elemento general es un conjunto ordenado de n números complejos b^i que escribiremos en la forma de vector fila

$$b = (b^1, b^2, \dots, b^m) = b^1 y_1 + b^2 y_2 + \dots + b^m y_m \quad (2)$$

donde los y^i son los m -vectores fila básicos. Exigiendo que

$$b^i a_i = b'^i a'_i \quad (3)$$

la ley de transformación de los b^i es

$$b \longrightarrow b' = b U^{-1} = b U^\dagger \iff b^i \longrightarrow b'^i = (U^\dagger)_j^i b^j \quad (4)$$

Nota que las b consideradas como vectores columna se transforman como

$$b^T \longrightarrow b'^T = U^* b^T \quad (5)$$

Esto da una representación del $SU(m)$ abstracto en términos de las matrices U^* de orden $m \times m$. Esta representación m -dimensional se llama n^* y es la conjugada de la n . El conjunto de los b^i forman un vector contravariante bajo $SU(m)$ con la ley de transformación (4).

En general se puede definir un tensor mixto con p subíndices y q superíndices como el conjunto de m^{p+q} componentes que indicaremos por $T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$ que bajo una transformación de $SU(m)$ se transforman como

$$T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} \longrightarrow T'_{i_1 \dots i_p}{}^{j_1 \dots j_q} = U_{i_1}^{l_1} \dots U_{i_p}^{l_p} (U^\dagger)_{k_1}^{j_1} \dots (U^\dagger)_{k_q}^{j_q} T_{l_1 \dots l_p}{}^{k_1 \dots k_q} \quad (6)$$

Evidentemente este da origen a una representación de $SU(m)$ con moléculas de orden m^{p+q} , la cual en general no será irreducible, debido a la existencia de tensores invariantes δ_{ij} , $\epsilon_{i_1 \dots i_m}$, $\epsilon^{i_1 \dots i_m}$. Nos interesa encontrar los tensores que dan origen a representaciones irreducibles.

Consideremos en primer lugar tensores con todos los índices abajo (omnibus); entonces se puede probar que si las componentes de un tensor se agrupan en conjuntos de una determinada simetría entonces cada uno de estos grupos da origen a una representación irreducible de $SU(m)$. Como es sabido cada carácter de simetría se puede caracterizar totalmente por un tablero de Young, por lo cual éstos sirven para caracterizar las representaciones irreducibles. Como es bien sabido si estamos estudiando $SU(m)$ una columna con más de m cajas implicaría un objeto antisimétrico con más de m sufixos, lo cual es imposible. Además una columna con m cajas implica un factor



$$\epsilon^{i_1 \dots i_m} T_{i_1 \dots i_m} \quad (1)$$

que es un escalar y por tanto una columna con m componentes no ayuda a caracterizar la simetría y puede eliminarse. Luego el tablero tiene a lo más $(m-1)$ filas. Entonces el tablero puede caracterizarse con $(m-1)$ números enteros no negativos $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m-1})$ que dan

$$\lambda_i \equiv (\text{Núm. cajas fila } i) - (\text{Núm. cajas fila } (i+1)) \quad (2)$$

$$\sum \lambda_i = \text{Núm. cajas fila } 1$$

Evidentemente el número total de cajas coincide con el orden del tensor considerado.

Con esto puede ya analizarse cual quier representación por ejemplo las m^2 componentes del tensor T_{ij} . Sabemos que los dos únicos diagramas de Young posibles son  y . Luego el tensor T_{ij} da origen a dos representaciones irreducibles

D_{\square} , cuya base es $\psi_{ij} = (T_{ij} + T_{ji})$ y de dimensión $m(m+1)/2$

D_{\square} , cuya base es $\psi'_{ij} = (T_{ij} - T_{ji})$ y de dimensión $m(m-1)/2$

Igualmente se podrían analizar los tensores T_{ijk} o los de orden superior.

Obtenidas las representaciones irreducibles con todos los índices abajo (omnibus) podremos obtener la forma en que se reduce el producto directo de dos representaciones irreducibles. Esta ley adecuada es inmediata generalización de la dada en (la pag 117):

- c) Dibujar el tablero de una de ellas. En el tablero de la otra poner una "a" en todos los elementos de la primera fila, una "b" en los de la segunda, una "c" en los de la tercera ---
- ii) Aplicar las cajas "a" al primer tablero de todas las formas posibles sujetas a la regla que no aparezcan dos "a" en la misma columna y que la forma resultante sea regular. Repetir a continuación el procedimiento con las "b", "c", ---
- iii) Cuando se han aplicado ya todas las cajas se eligen solo aquellos en las que los símbolos a mediados leídos de derecha a izquierda en la primera fila, luego en la segunda, tercera --- sea tal que el número de b nunca exceda al número de a, el de c al de b, ---. Eliminar los diagramas con ~~columnas~~ más de más de n cajas y tachar las columnas de n cajas.
- iv) Los diagramas así obtenidos corresponden a las representaciones irreducibles contenidas en el producto directo.

Hasta aquí hemos estado discutiendo tensores no mixtos, pero también los mixtos existen. Para un tensor arbitrario se puede probar que da origen a una representación irreducible si y sólo si:

- i) La simetría de los índices superiores corresponde a un tablero de Young bien definido y lo mismo con los inferiores
- ii) La combinación de cualesquiera dos índices da cero.

Recordemos que el tensor de Levi-Civita nos permite pasar de un tensor mixto a uno no mixto. Se puede probar que un tensor en forma $T_{Y_+}^{Y_-}$, es decir con los índices superiores correspondientes a un diagrama de Young Y_+ y los inferiores Y_- . Se puede demostrar que la representación originada por $T_{Y_-}^{Y_+}$ es equivalente a la $T_{Y_- \otimes \bar{Y}_+}$, donde \bar{Y}_+ indica el diagrama de Young conjugado a Y_+ en relación a $SU(m)$, que se obtiene de la siguiente forma: Si el diagrama Y_+ tiene l cajas en la primera fila entonces se constituye un cuadrado de l columnas y m filas y las no cubiertas por Y_+ giradas 180° corresponden a \bar{Y}_+ . El hecho de que exigamos que $T_{Y_-}^{Y_+}$ tenga l o m nula implica que se elige una de las representaciones irreducibles en las que (2) se descompone.

Finalmente diremos que la dimensión de la representación correspondiente a un diagrama $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m-1})$ es

$$D(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = \left[\prod_{k=1}^{m-1} k! \right] \prod_{r=1}^{m-1} [(\lambda_r + 1)(\lambda_r + \lambda_{r+1} + 2) \dots (\lambda_r + \lambda_{r+1} + \dots + \lambda_{m-1} + m - r)] \quad (2)$$

Veamos ahora algunas aplicaciones de lo anterior para $SU(3)$. En este caso los diagramas de Young tienen solo dos filas $(\lambda_1, \lambda_2) \equiv (p, q)$ y la dimensión de esta representación es (112.5). Veamos como este resultado se puede obtener de forma simple: Sea un tensor $T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$ entonces a partir de el podemos construir los tensores

$$A_{i_2 \dots i_p}^{j_2 \dots j_q} \equiv \delta_{j_1}^{i_1} T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} ; B_{i_1 \dots i_p}^{j_3 \dots j_q} \equiv \epsilon_{j_1 j_2} T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q} ; C_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} = \epsilon_{i_1 i_2} T_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} \quad (1)$$

Estos tensores son combinaciones lineales del dado y se transforman entre si. Luego a menos que estos tensores sean idénticamente nulos el tensor dado es reducible. Es evidente fu lo tanto que para construir una base irreducible es necesario que $T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$ sea

- i) Totalmente simétrico en los q índices superiores
- ii) Totalmente simétrico en los p índices inferiores
- iii) Sea de traza nula.

Veamos las dimensiones del tensor irreducible. Consideremos los índices inferiores. Su orden es inalterante debido a la simetría. Supongamos que los α primeros son 1, entonces los $(p-\alpha)$ restantes son 2 ó 3 y fu tanto hay $(p-\alpha+1)$ combinaciones distintas. Luego el número total es $\sum_{\alpha=0}^p (p-\alpha+1) = \frac{1}{2} (p+1)(p+2)$. Así pues el número total de componentes es $(p+1)(p+2)(q+1)(q+2)/4$. Falta sin embargo tener en cuenta la condición de traza nula, la cual equivale a aminor un tensor de $(q-1)$ índices superiores y $(p-1)$ inferiores, es decir $p \cdot q (p+1)(q+1)/4$ condiciones. Luego el número de dimensiones de la representación es el dado en (112.5)

Recordemos entonces

1 : T	3 : T_{\square}
3* : $T^{\square} \sim T_{\square}$	6 : $T_{\square\square}$
6* : $T^{\square\square} \sim T_{\square\square}$	8 : $T_{\square}^{\square} \sim T_{\square}^{\square}$
10 : $T_{\square\square}$	10* : $T^{\square\square} \sim T_{\square\square}$
15 : $T_{\square}^{\square} \sim T_{\square\square}$	15* : $T_{\square}^{\square} \sim T_{\square\square}$
15' : $T_{\square\square}$	15'x : $T^{\square\square} \sim T_{\square\square}$
21 : $T_{\square\square\square}$	21* : $T^{\square\square\square} \sim T_{\square\square\square}$
24 : $T_{\square\square}^{\square} \sim T_{\square\square\square}$	24* : $T_{\square}^{\square\square} \sim T_{\square\square\square}$
27 : $T_{\square\square}^{\square} \sim T_{\square\square\square}$	

A veces los métodos tensoriales dan fácilmente la descomposición de productos directos

$$3 \otimes 3^* \sim A_i B^j = (A_i B^j \delta_j^i) + (A_i B^j) = 1 \oplus 8$$

$$\begin{aligned} 8 \otimes 8 \sim A_j^i B_e^k &= (A_j^i B_e^k \delta_i^e \delta_j^k) + (A_j^i B_e^k \delta_j^k) + (A_j^i B_e^k \delta_i^e) \\ &+ (A_j^i B_e^k \epsilon^{ies}) + (A_j^i B_e^k \epsilon_{iks}) + (A_j^i B_e^k) = \\ &= 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10 \oplus 10^* \oplus 27 \end{aligned}$$

donde los paréntesis indican que las expresiones deben ser simetrizadas y los signos igual son puramente simbólicos.

VII - SIMETRÍA SU(3) (FÍSICA)

Ya hemos visto que H_S es invariante bajo $SU_7(2) \otimes U_1(1)$, lo cual nos permite clasificar las partículas en isomúltiplos y obtener relaciones muy útiles entre secciones eficaces. H_{EM} y H_W no son invariantes bajo $SU_7(2) \otimes U(1)$, pero el hecho de que bajo este grupo tengan propiedades de transformación similares era también extraordinariamente útil. Vamos a ir viendo las consecuencias de la simetría $SU(3)$

i) Clasificación de partículas

Evidentemente $SU(3)$ no puede ser una simetría exacta de las interacciones fuertes. De ser así $[H_S, G] = 0$ donde $G \in SU(3)$ y entonces las partículas podrían clasificarse en $SU(3)$ -pletos de igual masa y todas ellas con el mismo J^P . En la práctica hemos visto, por ejemplo, que hay ocho ~~partículas~~ mes $1/2^+$ cuyas masas si bien no son iguales son relativamente cercanas, lo cual nos hace sospechar que H_S es solo aproximadamente invariante bajo $SU(3)$. Escribiremos

$$H_S \approx H_S^0 + H_{MS} \tag{1}$$

y suponemos que $H_S^0 \gg H_{MS}$ es invariante bajo $SU(3)$, mientras que las interacciones más débiles, H_{MS} , son solo invariantes bajo $SU_7(2) \otimes U_1(1)$. Clasificaremos las partículas en base a las representaciones irreducibles de $SU(3)$, pero el efecto de H_{MS} hace que no todas las partículas de un $SU(3)$ -pletó tengan la misma masa.

¿En qué representaciones colocamos las partículas? Hasta ahora todas las partículas conocidas tienen hipercarga entera y por tanto y de acuerdo con (115.2) $(p + 2q) = 3$. Así pues las partículas deben encontrarse en las representaciones 1, 8, 10, 10^+ , 27, ...

¿Qué masas tienen? Comenzaremos el operador masa que designaremos por M y cuyos valores esperados nos darán las masas de los distintos estados. Como todo operador se puede desarrollar en serie de operadores tensoriales irreducibles podemos escribir

$$M = \sum_{\mu, \nu} M_{\mu\nu}^H \tag{2}$$

Si la simetría $SU(3)$ fuera exacta entonces se debe cumplir que todas las

masas de un $SU(3)$ -pleté sean iguales y esto implica $M = M'_{000}$, es decir que este operador es un escalar bajo $SU(3)$. Existen sin embargo las interacciones medio fuertes que sólo son invariantes bajo $SU_f(2) \otimes U_y(1)$ y en tanto

$$[\vec{T}, M] = [Y, M] = 0 \quad (1)$$

La primera relación nos asegura que todas las partículas de un mismo isomultiplete tienen la misma masa, y la segunda que la hipercarga puede usarse para caracterizar los estados de las partículas. Esto implica que

$$M = \sum_{\mu} M'_{\mu} \quad (2)$$

Ahora bien solo las representaciones con $p=9$ y en tanto $D(p,p) = (p+1)^3$ tienen $Y=T=T_3=0$ y en tanto

$$M = M'_{000}^1 + M'_{000}^8 + M'_{000}^{27} + M'_{000}^{64} + \dots \quad (3)$$

Nuestra hipótesis básica es que solo los dos primeros términos son importantes y en tanto

$$M = M'_{000}^1 + M'_{000}^8 \quad (4)$$

Entonces en primer orden de teoría de perturbaciones las masas vienen dadas por

$$M(\mu\nu) = \langle \mu\nu | M'_{000}^1 + M'_{000}^8 | \mu\nu \rangle \quad (5)$$

Teniendo en cuenta que en $D^{(4)} \otimes D^{(4)}$ puede aparecer la 8_S y 8_A siempre se puede escribir

$$M(\mu\nu) = \langle \mu\nu | M'_{000}^1 | \mu\nu \rangle + B(\mu) \langle \mu\nu | F'_{000}^8 | \mu\nu \rangle + C(\mu) \langle \mu\nu | \mathcal{D}'_{000}^8 | \mu\nu \rangle \quad (6)$$

donde F'_ν y \mathcal{D}'_ν han sido dados en (12.5). Ahora bien

$$\begin{aligned} F'_{000} &= F'_8 = -\frac{c}{\sqrt{3}} \left\{ [F_4, F_5] + [F_6, F_7] \right\} = \\ &= -\frac{c}{\sqrt{3}} \left\{ [V_1, V_2] + [U_1, U_2] \right\} = \frac{1}{\sqrt{3}} [V_3 + U_3] = \sqrt{3} H_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} Y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}'_{000} &= \mathcal{D}'_8 = \frac{2}{3} \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} (F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 - F_8^2) - \frac{1}{2\sqrt{3}} (F_4^2 + F_5^2 + F_6^2 + F_7^2) \right\} \\ &= \frac{2}{3\sqrt{3}} \left\{ F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 - F_8^2 - \frac{1}{2} (I_4 - F_1^2 - F_2^2 - F_3^2 - F_8^2) \right\} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \vec{T}^2 - \frac{1}{4} Y^2 - \frac{1}{3} I_4 \right\} \end{aligned}$$

donde I_1 es el operador de isospin. obtenemos así:

$$M(p; Y T T_3) = M_0(\mu) + M_1(\mu) Y + M_2(\mu) \left[T(T+1) - \frac{1}{4} Y^2 \right] \quad (1)$$

que es la fórmula másica de Gell-Mann - Okubo. Vamos a estudiar como funciona todo esto

c) Octeto bariones $1/2^+$

Suponemos que los ocho bariones $1/2^+$ discutidos antes forman un octeto bajo $SU(3)$. Las asignaciones de estados son elegidas como

$$|p\rangle = -1/2; 1/2, 1/2\rangle, \quad |n\rangle = -1/2; 1/2, -1/2\rangle$$

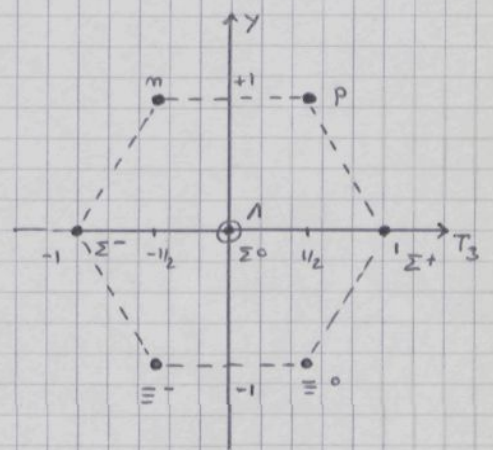
$$|\Sigma^+\rangle = -1/2; 0, 1, 1\rangle, \quad |\Sigma^0\rangle = -1/2; 0, 1, 0\rangle, \quad |\Sigma^-\rangle = -1/2; 0, 1, -1\rangle$$

$$|\Lambda\rangle = -1/2; 0, 0, 0\rangle$$

$$|\Xi^0\rangle = -1/2; -1/2, 1/2\rangle, \quad |\Xi^-\rangle = -1/2; -1/2, -1/2\rangle$$

Evidentemente esto implica una elección adecuada de los estados de las antipartículas teniendo en cuenta que

$$C|1/2; Y T T_3\rangle = (-1)^Q |1/2; -Y T -T_3\rangle \quad (2)$$



es fácil darse cuenta que

$$|\bar{\Xi}^-\rangle = -1/2; 1/2, 1/2\rangle, \quad |\bar{\Xi}^0\rangle = -1/2; 1/2, -1/2\rangle$$

$$|\bar{\Sigma}^-\rangle = -1/2; 0, 1, 1\rangle, \quad |\bar{\Sigma}^0\rangle = -1/2; 0, 1, 0\rangle, \quad |\bar{\Sigma}^+\rangle = -1/2; 0, 1, -1\rangle$$

$$|\bar{\Lambda}\rangle = -1/2; 0, 0, 0\rangle$$

$$|\bar{n}\rangle = -1/2; -1/2, 1/2\rangle, \quad |\bar{p}\rangle = -1/2; -1/2, -1/2\rangle \quad (3)$$

Como existen cuatro isomultipletes usamos que sus masas son

$$M_N = M_0 + M_1 + \frac{1}{2} M_2, \quad M_\Sigma = M_0 + 2M_2$$

$$M_\Lambda = M_0$$

$$M_\Xi = M_0 - M_1 + \frac{1}{2} M_2$$

y por tanto

$$3M_\Lambda + M_\Sigma = 2[M_N + M_\Xi] \quad (4)$$

Usando para cada isomultiplete su masa media

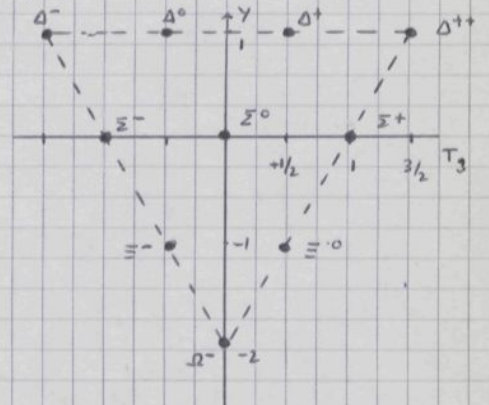
$$3 M_{\Lambda} + M_{\Xi} = 3 \times 1115.6 + 1193.1 = 4539.9 \text{ MeV}$$

$$2 [M_N + M_{\Xi}] = 2 [938.9 + 1318.1] = 4514.0 \text{ MeV}$$

Es decir que la relación es extraordinariamente bien satisfecha (0.6%)

c) Decuplete bariones $3/2^+$.

Existe un decuplete de partículas de spin $3/2^+$ y $B=1$. Estas son



$$\Delta (1232) \quad , \quad T = 3/2 \quad , \quad M = 1232 \text{ MeV} \quad , \quad Y = 1$$

$$\Sigma (1385) \quad , \quad T = 1 \quad , \quad M = 1384 \text{ MeV} \quad , \quad Y = 0$$

$$\Xi (1530) \quad , \quad T = 1/2 \quad , \quad M = 1533 \text{ MeV} \quad , \quad Y = -1$$

$$\Omega^- (1669) \quad , \quad T = 0 \quad , \quad M = 1672 \text{ MeV} \quad , \quad Y = -2$$

Notan que en la representación decuplete se cumple $T = 1 + Y/2$ y por tanto la fórmula masica es

$$M = A + BY \tag{1}$$

y por tanto

$$M_{\Omega} - M_{\Xi} = M_{\Xi} - M_{\Sigma} = M_{\Sigma} - M_{\Delta} \tag{2}$$

esto es

$$139 \text{ MeV} = 149 \text{ MeV} = 152 \text{ MeV} \tag{3}$$

Tengas en cuenta que la partícula Ω^- fue predicha teóricamente por Gell-Mann.

ii) Octete bariones $3/2^+$.

Para existir un octete de bariones $B=1$ y $3/2^+$. Estas son

$$N (1520) \quad , \quad T = 1/2 \quad , \quad M = 1520 \text{ MeV} \quad , \quad Y = 1$$

$$\Sigma (1670) \quad , \quad T = 1 \quad , \quad M = 1675 \text{ MeV} \quad , \quad Y = 0$$

$$\Lambda (1520) \quad , \quad T = 0 \quad , \quad M = 1520 \text{ MeV} \quad , \quad Y = 0$$

$$\Xi (1820) \quad , \quad T = 1/2 \quad , \quad M = 1823 \text{ MeV} \quad , \quad Y = -1$$

si bien la familia de esta última aun no ha sido detenidamente y aún desobliga más medidas sobre su spin. La fórmula masica idéntica a (136.5) da

$$3 \times 1520 + 1675 = 6235 = 6680 = 2(1520 + 1820)$$

Podemos chocar a clasificar los mesones, donde algunos nuevos problemas aparecen.

i) Octeto mesones 0^-

Antes hemos en cuenta ocho mesones 0^- que colocamos en un octeto con las siguientes asignaciones

$$|K^+\rangle = -18; 1 \frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle, \quad |K^0\rangle = -18; 1 \frac{1}{2} -\frac{1}{2}\rangle$$

$$|\pi^+\rangle = -18; 0 \ 1 \ 1\rangle, \quad |\pi^0\rangle = 18; 0 \ 1 \ 0\rangle, \quad |\pi^-\rangle = 18; 0 \ 1 \ -1\rangle$$

$$|\eta\rangle = 18; 0 \ 0 \ 0\rangle$$

$$|\bar{K}^0\rangle = -18; -1 \frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle, \quad |K^-\rangle = 18; -1 \frac{1}{2} -\frac{1}{2}\rangle \quad (1)$$

Fijemos que esta asignación viene obligada pues al combinar π^0 y η en sus antipartículas podemos encontrar en una representación partículas y antipartículas. La fórmula más correcta viene ahora en

$$3M_\eta + M_\pi = 4M_K$$

es decir

$$3M_\eta + M_\pi = 3 \times 548.8 + 138.0 = 1784.4 \text{ MeV}$$

$$4M_K = 3 \times 495.7 = 1487.1 \text{ MeV} \quad \leftarrow$$

h

lo cual no es nada satisfactorio. Si bien no hay ninguna razón para ello Feynman sugiere que los mesones se utilizaran formulas cuadráticas y entonces

$$3M_\eta^2 + M_\pi^2 = 4M_K^2 \quad (2)$$

$$3M_\eta^2 + M_\pi^2 = 3 \times 0.5488^2 + 0.1380 = 0.923 \text{ GeV}^2$$

$$4M_K^2 = 4 \times 0.4957^2 = 0.983 \text{ GeV}^2$$

que se satisface bien.

Estudiando las tablas de partículas alguien puede darse cuenta que hay otra partícula que podría ocupar el papel de la η pues tiene sus mismos números cuánticos.

$$\eta'(958) : M = 957.57 (25) \text{ MeV}, \quad \Gamma = 0.28 (10) \text{ MeV} \quad (3)$$

Evidentemente la fórmula más correcta (lineal o cuadrática) descarta esta posibilidad (Lineal: $3011 = 1487 \text{ MeV}$; cuadrática $2.770 = 0.983 \text{ GeV}^2$). La partícula $\eta'(958)$ la pondremos en un octeto 0^- y a tabla fuertemente del nombre 0^- .

(i) Número de mesones 1^-

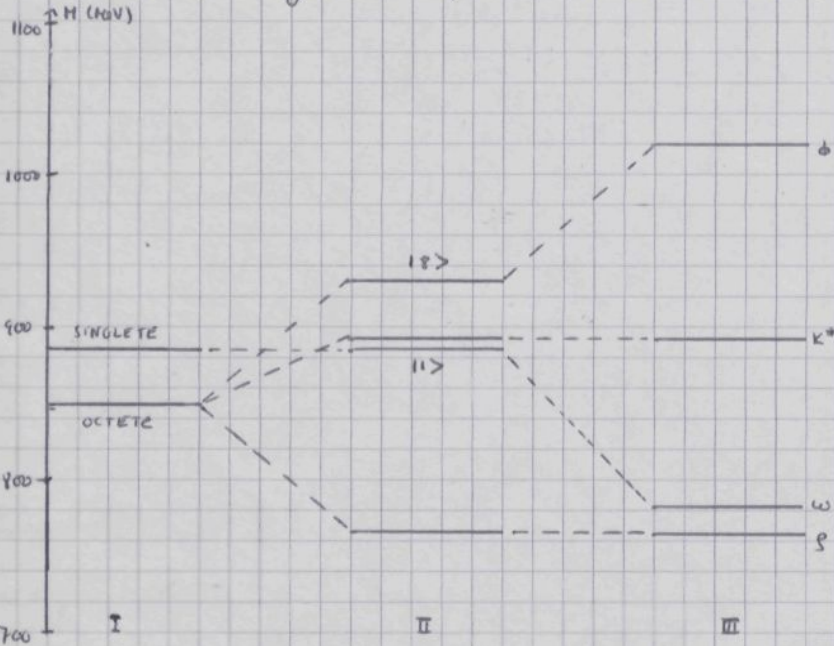
En las tablas se encuentran 9 mesones de masas relativamente cercanas, con spin-paridad 1^- asignables a un octeto + singlete bajo $SU(3)$. Estas son

ρ^\pm, ρ^0	$T^6 (J^P)_{C_m} = 1^+ (1^-) -$	$M = 776 (3) \text{ MeV}$	$\Gamma = 158 (5) \text{ MeV}$	$Y = 0$
ω	$= 0^- (1^-) -$	$782.4 (2) \text{ MeV}$	$= 10.1 (3) \text{ MeV}$	$Y = 0$
ϕ	$= 0^- (1^-) -$	$1019.6 (2) \text{ MeV}$	$4.1 (2) \text{ MeV}$	$Y = 0$
$K^* (892)$	$1/2 (1^-)$	$892.8 (4) \text{ MeV}$	$58.3 (9) \text{ MeV}$	$Y = +1$

juntamente con \bar{K}^* . El problema es ahora averiguar si es la ω o la ϕ la que no debe formar en el octeto. Intentaremos resolver esto usando la fórmula masica.

$$M(000) = \left\{ \frac{1}{3} (4M_{K^*}^2 - M_\rho^2) \right\}^{1/2} \approx 928 \text{ MeV} \quad (1)$$

La cual es desagradable pues nos da salida una masa intermedia. La solución a este



problema fue dada por Sakurai. Consideremos que $SU(3)$ fuera una simetría exacta y llamemos $|18\rangle$ ($|11\rangle$) a la partícula perteneciente al octeto (singlete) y nos encontramos en la situación I de la figura. Supongamos ahora que la $SU(3)$ es rota en las interacciones más fuertes, entonces $M^2 = M_{000}^2 + M_{800}^2$; si suponemos que $\langle 8 | M_{800}^2 | 1 \rangle = 0$ nos encontramos en la situación II, en la que haciendo

la fórmula masica. Si $\langle 8 | M_{800}^2 | 1 \rangle \neq 0$ entonces nos encontramos en la situación III que es la real. Para los estados $Y=T=T_3=0$ la matriz masica es

$$M^2 = \begin{vmatrix} \langle 1 | M^2 | 1 \rangle & \langle 1 | M^2 | 18 \rangle \\ \langle 8 | M^2 | 1 \rangle & \langle 8 | M^2 | 18 \rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} M_1^2 & M_{18}^2 \\ M_{81}^2 & M_8^2 \end{vmatrix} \quad (2)$$

Como $M^2 = M^{2+}$ o debe tener $M_{81}^{2+} = M_{18}^2$. Los estados físicos son los que diagonalizan la matriz masica

$$|\phi\rangle = \cos\theta |18\rangle - \sin\theta |1\rangle$$

$$|\omega\rangle = \cos\theta |1\rangle + \sin\theta |18\rangle$$

pues siempre se puede elegir las fases de forma que M_{18}^2 sea real. Entonces

$$M_\phi^2 = \frac{1}{2} \left\{ (M_8^2 + M_1^2) + [(M_8^2 - M_1^2)^2 + 4M_{13}^4]^{1/2} \right\} \quad (1)$$

$$M_\omega^2 = \frac{1}{2} \left\{ (M_8^2 + M_1^2) - [(M_8^2 - M_1^2)^2 + 4M_{13}^4]^{1/2} \right\}$$

$$\text{tg } 2\theta = \frac{2M_{13}^2}{M_\omega^2 - M_\phi^2}$$

Veamos los valores de todos estos parámetros. Ya hemos visto que $M_8^2 = 0.861 \text{ GeV}^2$. Además como la traza es invariante

$$M_1^2 = M_\omega^2 + M_\phi^2 - M_8^2 = 0.791 \text{ GeV}^2 \quad (2)$$

Restando las ecuaciones (1) y eligiendo el signo arbitrariamente

$$(M_\phi^2 - M_\omega^2)^2 = (M_8^2 - M_1^2)^2 + 4M_{13}^4$$

$$\Rightarrow M_{13}^2 = -0.211 \text{ GeV}^2 \quad (3)$$

y finalmente

$$\text{tg } 2\theta = 6.088 \Rightarrow \theta \approx 40.3^\circ \quad (4)$$

Esto puede parecer una forma más o menos elegante de salir del paso pero como veremos más adelante esto tiene consecuencias molestas. Hagamos notar que con formulas lineales se obtiene: $M_8 = 931 \text{ MeV}$, $M_1 = 871 \text{ MeV}$, $M_{13} = -145 \text{ MeV}$, $\text{tg } 2\theta = 3.844$, $\theta = 37.7^\circ$.

Esta situación se puede presentar si empujamos los multipletes de SU(3) con los mismos números cuánticos y de masas parecidas. En el momento 0^- se da también esta situación pero ahí las masas del singlete y del octeto muy distintas de modo que $\eta - \eta'$ es pequeña. Aplicando las formulas anteriores se halla

Lineal: $M_8 = 0.615 \text{ GeV}$, $M_1 = 0.891 \text{ GeV}$, $M_{13} = -0.151 \text{ GeV}$, $\text{tg } 2\theta = -1.089$, $\theta = -23.7^\circ$ (5)

Cuadrática $M_8^2 = 0.321 \text{ GeV}^2$, $M_1^2 = 0.897 \text{ GeV}^2$, $M_{13}^2 = -0.109 \text{ GeV}^2$, $\text{tg } 2\theta = -0.380$, $\theta = -10.4^\circ$.

(c) Constantes de acoplamiento

Queremos estudiar el Lagrangiano de interacción de los mesones 0^- con los bariones $1/2^+$. La interacción debe ser bilineal en los campos fermiónicos y queremos que conserve la paridad por lo cual ~~deberemos~~, como hipótesis más simple, usar acoplamientos $\bar{\psi}(x) \gamma_5 \psi(x) \phi(x)$. Vamos a empezar considerando los acoplamientos de mesones con protones. Si usamos ψ_p (ψ_n) para indicar el campo que destruye protones (neutrones), ϕ_{p+} (ϕ_{n+}) el que destruye protones (neutrones) (Equivalentemente $\phi_{p-} = \phi_{p+}^\dagger$)

y $\phi_{n^0}^+(x) = \phi_{n^0}(x)$, entonces el lagrangiano de interacción más general de tipo Yukawa es

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) = & i g_1 \bar{\Psi}_p(x) \gamma_5 \psi_p(x) \phi_{n^0}(x) + i g_2 \bar{\Psi}_m(x) \gamma_5 \psi_m(x) \phi_{n^0}(x) + \\ & + i g_3 \bar{\Psi}_p(x) \gamma_5 \psi_m(x) \phi_{n^+}(x) + i g_3 \bar{\Psi}_m(x) \gamma_5 \psi_p(x) \phi_{n^+}(x) \end{aligned} \quad (1)$$

donde las cantidades reales g_i son las llamadas constantes de acoplamiento. Las dos últimas son iguales pues $\mathcal{L}(x)$ debe ser autoadjunto. Introduce como los campos

$$\Psi_N(x) = \begin{pmatrix} \psi_p(x) \\ \psi_m(x) \end{pmatrix} \quad \vec{\phi}(x) \equiv (\phi_1(x), \phi_2(x), \phi_3(x)) \quad (2)$$

$$\phi_1(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} [\phi_{n^+}(x) + \phi_{n^-}(x)] \quad , \quad \phi_2(x) \equiv \frac{i}{\sqrt{2}} [\phi_{n^+}(x) - \phi_{n^-}(x)] \quad , \quad \phi_3(x) \equiv \phi_{n^0}(x)$$

$$\phi_{n^+}(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} [\phi_1(x) - i \phi_2(x)] \quad , \quad \phi_{n^-}(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} [\phi_1(x) + i \phi_2(x)] \quad , \quad \phi_{n^0}(x) \equiv \phi_3(x)$$

En términos de estos campos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) = & \frac{i}{2} (g_1 + g_2) \bar{\Psi}_N(x) \gamma_5 \Psi_N(x) \phi_3(x) + \frac{i}{2} (g_1 - g_2) \bar{\Psi}_N(x) \gamma_5 \tau_3 \Psi_N(x) \phi_3(x) \\ & + \frac{i}{\sqrt{2}} g_3 \bar{\Psi}_N(x) \gamma_5 \tau_1 \Psi_N(x) \phi_1(x) + \frac{i}{\sqrt{2}} g_3 \bar{\Psi}_N(x) \gamma_5 \tau_2 \Psi_N(x) \phi_2(x) \end{aligned} \quad (3)$$

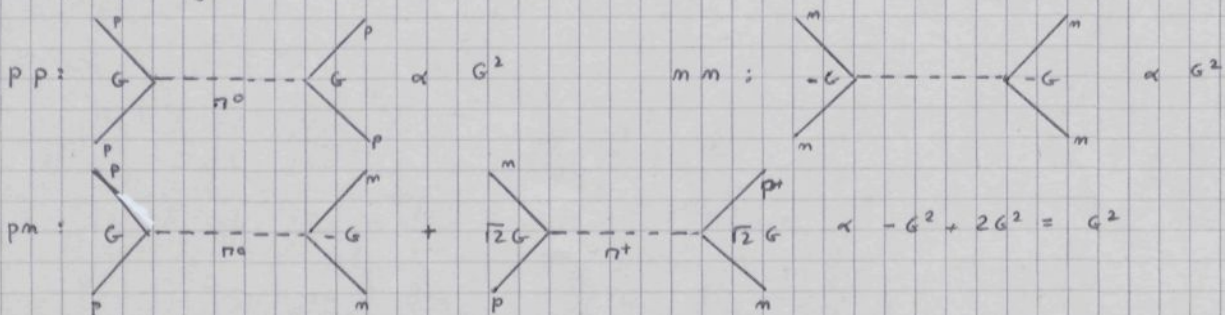
Eligamos ahora

$$g_1 = -g_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} g_3 = +G \quad (4)$$

y entonces

$$\mathcal{L}(x) = + i G \bar{\Psi}_N(x) \gamma_5 \vec{\tau} \Psi_N(x) \cdot \vec{\phi}(x) \quad (5)$$

que es un escalar bajo $SU_T(2)$. Luego la invariancia bajo el grupo de isospin nos da las relaciones (4) entre las constantes de acoplamiento. Fijémonos que esta interacción de fuerzas iguales entre nucleones



Vamos a comprobar que (5) es realmente invariante bajo $SU_T(2)$. Empecemos con:

derando la ley de transformación de $\psi(x)$, descubriendo el nucleón. Sea $\psi_\alpha(x)$ una de sus componentes

$$\psi_\alpha(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2E(\vec{p})}} \sum_\lambda \left\{ a_{1\alpha; \vec{p}\lambda} u(\vec{p}\lambda) e^{-i'px} + b_{1\bar{\alpha}; \vec{p}\lambda}^+ v(\vec{p}\lambda) e^{+i'px} \right\} \quad (1)$$

y en tanto bajo un elemento de $SU_T(2)$ ($|\alpha\rangle \equiv |1\alpha; \vec{p}\lambda\rangle$)

$$\begin{aligned} \psi_\alpha(x) &\longrightarrow \psi'_\alpha(x) = U \psi_\alpha(x) U^\dagger = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2E(\vec{p})}} \sum_\lambda \left\{ a_{U|\alpha\rangle} u(\vec{p}\lambda) e^{-i'px} + b_{U|\bar{\alpha}\rangle}^+ v(\vec{p}\lambda) e^{+i'px} \right\} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2E(\vec{p})}} \sum_\lambda \left\{ a \sum_\beta \langle \beta | U | \alpha \rangle | \beta \rangle u(\vec{p}\lambda) e^{-i'px} + b^+ \sum_\beta \langle \bar{\beta} | U | \bar{\alpha} \rangle | \bar{\beta} \rangle v(\vec{p}\lambda) e^{+i'px} \right\} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2E(\vec{p})}} \sum_\lambda \sum_\beta \left\{ \langle \beta | U | \alpha \rangle^* a_{1\beta} u(\vec{p}\lambda) e^{-i'px} + \langle \bar{\beta} | U | \bar{\alpha} \rangle b_{1\bar{\beta}}^+ v(\vec{p}\lambda) e^{+i'px} \right\} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta lo anterior $U = \exp(-i \hat{m} \cdot \vec{E} \theta / 2)$ donde los \vec{E} son las matrices usuales de Pauli. Como hemos elegido $\langle \beta | U | \alpha \rangle^* = \langle \bar{\beta} | U | \bar{\alpha} \rangle$ u Gene

$$\psi_\alpha(x) \longrightarrow \psi'_\alpha(x) = U \psi_\alpha(x) U^\dagger = \sum_\beta \langle \alpha | U^\dagger | \beta \rangle \psi_\beta(x) \quad (2)$$

o equivalentemente

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = U \psi(x) U^\dagger = U^\dagger \psi(x) \quad (3)$$

Como de sermos a hac las leyes de transformación de los campos fermiones. Recordemos que hemos hecho las asociaciones $|1^+\rangle \equiv |1, 1\rangle$, $|1^0\rangle \equiv |1, 0\rangle$, $|1^-\rangle \equiv |1, -1\rangle$. Introduzco como los campos $\tilde{\phi}_\alpha(x)$ ($\alpha = 1, 2, 3$) definidos como

$$\tilde{\phi}_1(x) = -\phi_{1^+}(x), \quad \tilde{\phi}_2(x) = \phi_{1^0}(x), \quad \tilde{\phi}_3(x) = \phi_{1^-}(x) \quad (4)$$

y de acuerdo con el convenio de fases elegido

$$\tilde{\phi}'_\alpha(x) \longrightarrow \tilde{\phi}_\alpha(x) = U \tilde{\phi}_\alpha(x) U^\dagger = \sum_\beta \langle \alpha | \tilde{U}^\dagger | \beta \rangle \tilde{\phi}_\beta(x) \quad (5)$$

donde

$$\tilde{U} = \exp \left\{ -i \theta \hat{m} \cdot \vec{\tilde{T}} \right\} \quad (6)$$

$$\tilde{T}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \tilde{T}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \tilde{T}_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Debermos ahora determinar las leyes de transformaciones de los campos ϕ_i dados en (139.2)

de base

$$\phi = A \tilde{\phi} \quad , \quad A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -i & 0 & -i \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} -1 & i & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & i & 0 \end{vmatrix} \quad (1)$$

Por tanto

$$\phi_\alpha(x) \longrightarrow \phi'_\alpha(x) = U \phi_\alpha(x) U^\dagger = \sum_\beta \langle \alpha | U^\dagger | \beta \rangle \phi_\beta(x)$$

$$U^\dagger \equiv A \tilde{U}^\dagger A^{-1} \quad (2)$$

y por tanto los generadores en la nueva base vienen dados por

$$T'_i = A \tilde{T}_i A^{-1} \quad (3)$$

y es comprobado inmediatamente que

$$(T'_i)_{jk} = -i \epsilon_{ijk} \quad (4)$$

Veamos ahora como se transforma $\bar{\psi}(x) \bar{\phi}(x)$ bajo $SU_T(2)$ de base

$$\bar{\psi}(x) \bar{\phi}(x) \longrightarrow \bar{\psi}'(x) \bar{\phi}'(x) = \bar{\psi}(x) U \tau_k U^\dagger \psi(x) (U^\dagger \phi)_k(x) \quad (5)$$

Consideremos por ejemplo una transformación infinitesimal en la dirección e .

$$\begin{aligned} \bar{\psi}'(x) \bar{\phi}'(x) &= \bar{\psi}(x) \left[1 - i \delta\theta \frac{1}{2} \tau_e \right] \tau_k \left[1 + i \delta\theta \frac{1}{2} \tau_e \right] \psi(x) \left[\phi_k(x) + i \delta\theta (T_e)_{kl} \phi_l(x) \right] \\ &= \bar{\psi}(x) \left\{ \tau_k + \frac{i \delta\theta}{2} [\tau_k, \tau_e] \right\} \psi(x) \left\{ \phi_k(x) + \delta\theta \epsilon_{ekl} \phi_l(x) \right\} \\ &= \bar{\psi}(x) \left\{ \tau_k + \delta\theta \epsilon_{ker} \tau_r \right\} \psi(x) \left\{ \phi_k(x) + \delta\theta \epsilon_{ekl} \phi_l(x) \right\} = \\ &= \bar{\psi}(x) \tau_k \psi(x) \phi_k(x) + \delta\theta \epsilon_{ekl} \bar{\psi}(x) \tau_k \psi(x) \phi_l(x) - \delta\theta \epsilon_{ker} \bar{\psi}(x) \tau_r \psi(x) \phi_k(x) \\ &= \bar{\psi}(x) \tau_k \psi(x) \phi_k(x) \end{aligned}$$

y vemos por tanto como la interacción proton-neutron dada en (13.5) es un escalar bajo $SU_T(2)$.

Vamos a ver ahora lo que sucede en $SU(3)$, al intentar ocupar $1/2^+$ y 0^- . Como el primero tiene 4 isomultipletes y el segundo 3, si solo usamos $SU_T(2)$ tendríamos 12 constantes de acoplamiento distintas. Al usar $SU(3)$ como el producto $8 \otimes 8$ solo contiene dos veces la 8 solo pueden aparecer dos constantes de acoplamiento independientes. Es decir que de las 12 conexiones de $SU_T(2)$, o para a 2 al imponer $SU(3)$. Para ver como funciona esto es comodo usar la notación General

Recordemos que el tensor base de la representación 8 es T_c^i a una sola

$$T_c^i{}^j = y_c x^j - \frac{1}{3} \delta_c^j \sum_k y_k x^k \quad (1)$$

donde x^i e y_j son los elementos básicos de las representaciones 3 y 3^* , es decir $x^1 = u, x^2 = d, x^3 = s, y_1 = \bar{u}, y_2 = \bar{d}, y_3 = \bar{s}$. El tensor (1) se puede dar en forma matricial

$$T = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} u\bar{u} - \frac{1}{3} d\bar{d} - \frac{1}{3} s\bar{s} & u\bar{d} & u\bar{s} \\ d\bar{u} & -\frac{1}{3} u\bar{u} + \frac{2}{3} d\bar{d} - \frac{1}{3} s\bar{s} & d\bar{s} \\ s\bar{u} & s\bar{d} & -\frac{1}{3} u\bar{u} - \frac{1}{3} d\bar{d} + \frac{2}{3} s\bar{s} \end{pmatrix} \quad (2)$$

Entonces obtenemos para las matrices representaciones de los mesones y bariones

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \Sigma^0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \Lambda & \Sigma^+ & p \\ \Sigma^- & -\frac{1}{\sqrt{2}} \Sigma^0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \Lambda & n \\ \Xi^- & \Xi^0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \Lambda \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \eta & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{1}{\sqrt{2}} \pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \eta & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \eta \end{pmatrix}$$

El Lagrangiano será ahora el escalar más general que se pueda construir a partir de \bar{B}, B y M donde $\bar{B} = B^\dagger \gamma^0$ (dividimos el γ_5 que no juega ningún papel). Los dos escalares posibles son $\text{Tr}(\bar{B} B M)$ y $\text{Tr}(\bar{B} M B)$ y finalmente

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) &= g_1 \text{Tr}(\bar{B} B M) + g_2 \text{Tr}(\bar{B} M B) = \\ &= \sqrt{2} g_s [\text{Tr}(\bar{B} M B) + \text{Tr}(\bar{B} B M)] + \sqrt{2} g_a [\text{Tr}(\bar{B} M B) - \text{Tr}(\bar{B} B M)] \end{aligned} \quad (4)$$

donde

$$\left. \begin{aligned} g_1 &= \sqrt{2} (g_s - g_a) \\ g_2 &= \sqrt{2} (g_s + g_a) \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} g_s &= \frac{1}{2\sqrt{2}} (g_2 + g_1) \\ g_a &= \frac{1}{2\sqrt{2}} (g_2 - g_1) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Entonces

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(x) = & \sqrt{2} g_s \left\{ \frac{n^0}{12} \left[\bar{p} p - \bar{m} m + \frac{2}{13} (\bar{\Lambda} \Sigma^0 + \bar{\Sigma}^0 \Lambda) + \bar{\Xi}^- \Xi^- - \bar{\Xi}^0 \Xi^0 \right] + \right. \\
 & + n^- \left[\frac{2}{16} (\bar{\Lambda} \Sigma^+ + \bar{\Sigma}^- \Lambda) + \bar{m} p + \bar{\Xi}^- \Xi^0 \right] + n^+ \left[\frac{2}{16} (\bar{\Sigma}^+ \Lambda + \bar{\Lambda} \Sigma^-) + \bar{p} m + \bar{\Xi}^0 \Xi^- \right] \\
 & + \frac{\eta}{16} \left[2 (\bar{\Sigma}^+ \Sigma^+ + \bar{\Sigma}^0 \Sigma^0 + \bar{\Sigma}^- \Sigma^-) - \bar{p} p - \bar{m} m - 2 \bar{\Lambda} \Lambda - \bar{\Xi}^- \Xi^- - \bar{\Xi}^0 \Xi^0 \right] \\
 & + K^+ \left[\frac{1}{12} \bar{p} \Sigma^0 - \frac{1}{16} \bar{p} \Lambda + \bar{m} \Sigma^- + \frac{1}{12} \bar{\Sigma}^0 \Xi^- + \bar{\Sigma}^+ \Xi^0 - \frac{1}{16} \bar{\Lambda} \Xi^- \right] \\
 & + K^0 \left[\frac{1}{12} \bar{\Sigma}^0 p - \frac{1}{16} \bar{\Lambda} p + \bar{\Sigma}^- m + \frac{1}{12} \bar{\Xi}^- \Sigma^0 + \bar{\Xi}^0 \Sigma^+ - \frac{1}{16} \bar{\Xi}^- \Lambda \right] + \\
 & + K^+ \left[\bar{p} \Sigma^+ - \frac{1}{12} \bar{m} \Sigma^0 - \frac{1}{16} \bar{m} \Lambda - \frac{1}{12} \bar{\Sigma}^0 \Xi^0 - \frac{1}{16} \bar{\Lambda} \Xi^0 + \bar{\Sigma}^- \Xi^- \right] + \\
 & + \bar{K}^0 \left[\bar{\Sigma}^+ p - \frac{1}{12} \bar{\Sigma}^0 m - \frac{1}{16} \bar{\Lambda} m - \frac{1}{12} \bar{\Xi}^0 \Sigma^0 - \frac{1}{16} \bar{\Xi}^0 \Lambda + \bar{\Xi}^- \Sigma^- \right] \left. \right\} + \\
 & + \sqrt{2} g_A \left\{ \frac{n^0}{12} \left[2 \bar{\Sigma}^- \Sigma^- - 2 \bar{\Sigma}^+ \Sigma^+ + \bar{\Xi}^- \Xi^- - \bar{\Xi}^0 \Xi^0 - \bar{p} p + \bar{m} m \right] \right. \\
 & + n^- \left[\sqrt{2} (\bar{\Sigma}^0 \Sigma^+ - \bar{\Sigma}^- \Sigma^0) + \bar{\Xi}^- \Xi^0 - \bar{m} p \right] + n^+ \left[\sqrt{2} (\bar{\Sigma}^+ \Sigma^0 - \bar{\Sigma}^0 \Sigma^-) + \bar{\Xi}^0 \Xi^- - \bar{p} m \right] \\
 & + \frac{\eta}{16} 3 \left[\bar{\Xi}^- \Xi^- + \bar{\Xi}^0 \Xi^0 - \bar{p} p - \bar{m} m \right] \\
 & + K^+ \left[\frac{1}{12} \bar{p} \Sigma^0 + \sqrt{\frac{3}{2}} \bar{p} \Lambda + \bar{m} \Sigma^- - \bar{\Sigma}^+ \Xi^0 - \frac{1}{12} \bar{\Sigma}^0 \Xi^- - \sqrt{\frac{3}{2}} \bar{\Lambda} \Xi^- \right] \\
 & + K^- \left[\frac{1}{12} \bar{\Sigma}^0 p + \sqrt{\frac{3}{2}} \bar{\Lambda} p + \bar{\Sigma}^- m - \bar{\Xi}^0 \Sigma^+ - \frac{1}{12} \bar{\Xi}^- \Sigma^0 - \sqrt{\frac{3}{2}} \bar{\Xi}^- \Lambda \right] \\
 & + K^0 \left[\bar{p} \Sigma^+ - \frac{1}{12} \bar{m} \Sigma^0 + \sqrt{\frac{3}{2}} \bar{m} \Lambda - \bar{\Sigma}^- \Xi^- + \frac{1}{12} \bar{\Sigma}^0 \Xi^0 - \sqrt{\frac{3}{2}} \bar{\Lambda} \Xi^0 \right] \\
 & + \bar{K}^0 \left[\bar{\Sigma}^+ p - \frac{1}{12} \bar{\Sigma}^0 m + \sqrt{\frac{3}{2}} \bar{\Lambda} m - \bar{\Xi}^- \Sigma^- + \frac{1}{12} \bar{\Xi}^0 \Sigma^0 - \sqrt{\frac{3}{2}} \bar{\Xi}^0 \Lambda \right] \left. \right\}
 \end{aligned}$$

De donde

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(x) = & (g_s + g_A) \left\{ n^0 [\bar{p} p - \bar{m} m] + \sqrt{2} n^- \bar{m} p + \sqrt{2} n^+ \bar{p} m \right\} + \\
 & + \frac{2}{13} g_s \left\{ n^0 (\bar{\Lambda} \Sigma^0 + \bar{\Sigma}^0 \Lambda) + n^- (\bar{\Lambda} \Sigma^+ + \bar{\Sigma}^- \Lambda) + n^+ (\bar{\Sigma}^+ \Lambda + \bar{\Lambda} \Sigma^-) \right\} \\
 & + (g_s - g_A) \left\{ n^0 (\bar{\Xi}^- \Xi^- - \bar{\Xi}^0 \Xi^0) + \sqrt{2} n^- \bar{\Xi}^- \Xi^0 + \sqrt{2} n^+ \bar{\Xi}^0 \Xi^- \right\} \\
 & - 2 g_A \left\{ n^0 (\bar{\Sigma}^- \Sigma^- - \bar{\Sigma}^+ \Sigma^+) + n^- (\bar{\Sigma}^0 \Sigma^+ - \bar{\Sigma}^- \Sigma^0) + n^+ (\bar{\Sigma}^+ \Sigma^0 - \bar{\Sigma}^0 \Sigma^-) \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{\sqrt{3}} (3g_A - g_S) \eta (\bar{p} p + \bar{m} m) + \frac{2}{\sqrt{3}} g_S \eta (\bar{\Sigma}^+ \Sigma^+ + \bar{\Sigma}^0 \Sigma^0 + \bar{\Sigma}^- \Sigma^-) \\
 & - \frac{2}{\sqrt{3}} g_S \eta \bar{\Lambda} \Lambda + \frac{1}{\sqrt{3}} (g_S + 3g_A) \eta (\bar{\Xi}^- \Xi^- + \bar{\Xi}^0 \Xi^0) \\
 & + (g_S - g_A) \left\{ \sqrt{2} \kappa^0 \bar{p} \Sigma^+ + \sqrt{2} \kappa^+ \bar{m} \Sigma^- + \kappa^+ \bar{p} \Sigma^0 - \kappa^0 \bar{m} \Sigma^0 \right. \\
 & \quad \left. + \sqrt{2} \bar{\kappa}^0 \bar{\Sigma}^+ p + \sqrt{2} \kappa^- \bar{\Sigma}^- m + \kappa^- \bar{\Sigma}^0 p - \bar{\kappa}^0 \bar{\Sigma}^0 m \right\} \\
 & - \frac{1}{\sqrt{3}} (g_S + 3g_A) \left\{ \kappa^+ \bar{p} \Lambda + \kappa^- \bar{\Lambda} p + \kappa^0 \bar{m} \Lambda + \bar{\kappa}^0 \bar{\Lambda} m \right\} \\
 & + (g_S + g_A) \left\{ \kappa^+ \bar{\Sigma}^0 \Xi^- - \kappa^0 \bar{\Sigma}^0 \Xi^0 + \kappa^- \bar{\Xi}^- \Sigma^0 - \bar{\kappa}^0 \bar{\Xi}^0 \Sigma^0 \right. \\
 & \quad \left. + \sqrt{2} \kappa^+ \bar{\Sigma}^+ \Xi^0 + \sqrt{2} \kappa^- \bar{\Xi}^0 \Sigma^+ + \sqrt{2} \kappa^0 \bar{\Sigma}^- \Xi^- + \sqrt{2} \bar{\kappa}^0 \bar{\Xi}^- \Sigma^- \right\} \\
 & + \frac{1}{\sqrt{3}} (3g_A - g_S) \left\{ \kappa^+ \bar{\Lambda} \Xi^- + \kappa^- \bar{\Xi}^- \Lambda + \kappa^0 \bar{\Lambda} \Xi^0 + \bar{\kappa}^0 \bar{\Xi}^0 \Lambda \right\} \tag{1}
 \end{aligned}$$

Indo duz camm a hora los campos

$$\begin{aligned}
 \vec{n} & \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (n^+ + n^-), \frac{i}{\sqrt{2}} (n^+ - n^-), n^0 \right) & N & = \begin{pmatrix} p \\ m \end{pmatrix} \\
 \vec{\Sigma} & \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (\Sigma^+ + \Sigma^-), \frac{i}{\sqrt{2}} (\Sigma^+ - \Sigma^-), \Sigma^0 \right) & \Xi & = \begin{pmatrix} \Xi^0 \\ \Xi^- \end{pmatrix} \\
 K & = \begin{pmatrix} \kappa^+ \\ \kappa^0 \end{pmatrix} & K_c & = \begin{pmatrix} \bar{\kappa}^0 \\ -\kappa^- \end{pmatrix} & \bar{K} & = (\kappa^-, \bar{\kappa}^0) & \bar{K}_c & = (\kappa^0, -\kappa^+) \tag{2}
 \end{aligned}$$

mién que

$$\begin{aligned}
 \bar{N} \Xi N \vec{n} & = n^0 (\bar{p} p - \bar{m} m) + \sqrt{2} n^- \bar{m} p + \sqrt{2} n^+ \bar{p} m \\
 \bar{\Lambda} \vec{\Sigma} \cdot \vec{n} + \vec{\Sigma} \cdot \Lambda \cdot \vec{n} & = n^0 (\bar{\Lambda} \Sigma^0 + \bar{\Sigma}^0 \Lambda) + n^- (\bar{\Lambda} \Sigma^+ + \bar{\Sigma}^- \Lambda) + n^+ (\bar{\Sigma}^+ \Lambda + \bar{\Lambda} \Sigma^-) \\
 \bar{\Xi} \bar{\Xi} \Xi \vec{n} & = n^0 (\bar{\Xi}^0 \Xi^0 - \bar{\Xi}^- \Xi^-) - \sqrt{2} n^- \bar{\Xi}^- \Xi^0 - \sqrt{2} n^+ \bar{\Xi}^0 \Xi^- \\
 i (\vec{\Sigma} \times \vec{\Sigma}) \cdot \vec{n} & = n^0 (\bar{\Sigma}^- \Sigma^- - \bar{\Sigma}^+ \Sigma^+) + n^- (\bar{\Sigma}^0 \Sigma^+ - \bar{\Sigma}^- \Sigma^0) + n^+ (\bar{\Sigma}^+ \Sigma^0 - \bar{\Sigma}^0 \Sigma^-) \\
 \bar{N} N \eta & = \eta (\bar{p} p + \bar{m} m) & \bar{\Xi} \Xi \eta & = \eta (\bar{\Xi}^- \Xi^- + \bar{\Xi}^0 \Xi^0) \\
 \eta \vec{\Sigma} \cdot \vec{\Sigma} & = \eta (\bar{\Sigma}^+ \Sigma^+ + \bar{\Sigma}^- \Sigma^- + \bar{\Sigma}^0 \Sigma^0) \\
 \bar{N} K \Lambda + \bar{\Lambda} \bar{K} N & = \kappa^+ \bar{p} \Lambda + \kappa^- \bar{\Lambda} p + \kappa^0 \bar{m} \Lambda + \bar{\kappa}^0 \bar{\Lambda} m
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\Xi} K_c \Lambda + \bar{\Lambda} \bar{K}_c \Xi &= K^+ \bar{\Lambda} \Xi^- + K^- \bar{\Xi}^- \Lambda + K^0 \bar{\Lambda} \Xi^0 + \bar{K}^0 \bar{\Xi}^0 \Lambda \\ \bar{M}^{\downarrow} \bar{K} \bar{\alpha} N + \bar{N} \bar{\alpha} K \bar{M} &= \sqrt{2} K^0 \bar{p} \bar{\Sigma}^+ + \sqrt{2} K^+ \bar{m} \bar{\Sigma}^- + K^+ \bar{p} \bar{\Sigma}^0 - K^0 \bar{m} \bar{\Sigma}^0 \\ &\quad + \sqrt{2} \bar{K}^0 \bar{\Sigma}^+ p + \sqrt{2} K^- \bar{\Sigma}^- m + K^- \bar{\Sigma}^0 p - \bar{K}^0 \bar{\Sigma}^0 m \} \\ \bar{M} \bar{K}_c \bar{\alpha} \Xi + \bar{\Xi} \bar{\alpha} K_c \bar{M} &= -K^+ \bar{M}^0 \bar{\Xi}^- + K^0 \bar{M}^0 \bar{\Xi}^0 + K^- \bar{\Xi}^- \bar{M}^0 + \bar{K}^0 \bar{\Xi}^0 \bar{M}^0 \\ &\quad - \sqrt{2} K^+ \bar{\Sigma}^+ \bar{\Xi}^0 - \sqrt{2} K^+ \bar{\Xi}^0 \bar{\Sigma}^+ - \sqrt{2} K^0 \bar{M}^- \bar{\Xi}^- - \sqrt{2} \bar{K}^0 \bar{\Xi}^- \bar{\Sigma}^- \end{aligned}$$

Se obtiene así finalmente

$$\begin{aligned} \phi(x) &= (g_s + g_A) \left\{ \bar{N} \bar{\alpha} N \cdot \bar{\eta} - \bar{M}^{\downarrow} \cdot \bar{K}_c \bar{\alpha} \Xi - \bar{\Xi} \bar{\alpha} K_c \cdot \bar{M}^{\downarrow} \right\} \\ &\quad + \frac{2}{\sqrt{3}} g_s \left\{ \bar{\Lambda} \bar{\Sigma} \cdot \bar{\eta} + \bar{M}^{\downarrow} \cdot \Lambda \bar{\eta} + \bar{M}^{\downarrow} \cdot \bar{\Sigma} \eta - \bar{\Lambda} \Lambda \eta \right\} + \\ &\quad + (\sqrt{3} g_A - \frac{1}{\sqrt{3}} g_s) \left\{ \bar{N} N \eta + \bar{\Xi} K_c \Lambda + \bar{\Lambda} \bar{K}_c \Xi \right\} \\ &\quad - (\sqrt{3} g_A + \frac{1}{\sqrt{3}} g_s) \left\{ \bar{\Xi} \Xi \eta + \bar{N} K \Lambda + \bar{\Lambda} \bar{K} N \right\} \\ &\quad + (g_A - g_s) \left\{ \bar{\Xi} \bar{\alpha} \Xi \cdot \bar{\eta} - \bar{M}^{\downarrow} \cdot \bar{K} \bar{\alpha} N - \bar{N} \bar{\alpha} K \cdot \bar{M}^{\downarrow} \right\} \\ &\quad - 2i g_A (\bar{M}^{\downarrow} \times \bar{M}^{\downarrow}) \cdot \bar{\eta} \end{aligned} \tag{1}$$

Introduciendo

$$g_s + g_A = g, \quad \alpha = g_A / g \tag{2}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \phi(x) &= g \left[\bar{N} \bar{\alpha} N \cdot \bar{\eta} - \bar{M}^{\downarrow} \cdot \bar{K}_c \bar{\alpha} \Xi - \bar{\Xi} \bar{\alpha} K_c \cdot \bar{M}^{\downarrow} \right] \\ &\quad + \frac{2}{\sqrt{3}} (1-\alpha) g \left[\bar{M}^{\downarrow} \cdot \bar{\Sigma} \eta + \bar{\Lambda} \bar{\Sigma} \cdot \bar{\eta} + \bar{M}^{\downarrow} \cdot \Lambda \bar{\eta} - \bar{\Lambda} \Lambda \eta \right] \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{3}} (1-4\alpha) g \left[\bar{N} N \eta + \bar{\Xi} K_c \Lambda + \bar{\Lambda} \bar{K}_c \Xi \right] \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{3}} (1+2\alpha) g \left[\bar{\Xi} \Xi \eta + \bar{N} K \Lambda + \bar{\Lambda} \bar{K} N \right] \\ &\quad - (1-2\alpha) g \left[\bar{\Xi} \bar{\alpha} \Xi \cdot \bar{\eta} - \bar{M}^{\downarrow} \cdot \bar{K} \bar{\alpha} N - \bar{N} \bar{\alpha} K \cdot \bar{M}^{\downarrow} \right] \\ &\quad - 2i\alpha g (\bar{M}^{\downarrow} \times \bar{M}^{\downarrow}) \cdot \bar{\eta} \end{aligned} \tag{3}$$

Los valores experimentales de g y α no son simples de determinar pues por las constantes de acoplamiento anteriores están bien determinadas. Para una discusión de todo esto vea Nagels et al [N.P. B157, 189 (1979)]

Aquí tomamos

$$\frac{g^2}{4\pi} = 14.3 \quad \frac{4}{3}(1-\alpha)^2 \frac{g^2}{4\pi} = 11.0 \quad (1)$$

que son probablemente (NNN, $\Lambda\Sigma$) las mejor determinadas. Esto da

$$\frac{g^2}{4\pi} = 14.3 \quad \alpha = 0.240 \quad (2)$$

Con estos valores se obtiene

$$\frac{g_{NNN}^2}{4\pi} = \frac{g_{\Sigma\Xi K}^2}{4\pi} = 14.3 \quad (\text{input})$$

$$\frac{g_{\Sigma\Sigma\eta}^2}{4\pi} = \frac{g_{\Lambda\Sigma\eta}^2}{4\pi} = \frac{g_{\Lambda\Lambda\eta}^2}{4\pi} = 11.0 \quad (\text{input})$$

$$\frac{g_{NN\eta}^2}{4\pi} = \frac{g_{\Xi\Lambda K}^2}{4\pi} = 0.0076$$

$$\frac{g_{\Xi\Xi\eta}^2}{4\pi} = \frac{g_{\Lambda\Lambda K}^2}{4\pi} = 10.4$$

$$\frac{g_{\Xi\Xi\pi}^2}{4\pi} = \frac{g_{\Sigma N K}^2}{4\pi} = 3.9$$

$$\frac{g_{\Sigma\Sigma\pi}^2}{4\pi} = 3.3$$

Valores experimentales conocidos son

$$\frac{g_{\Lambda\Lambda K}^2}{4\pi} = 13.7 \pm 1.9, \quad \frac{g_{\Sigma\Sigma\pi}^2}{4\pi} \approx 13.$$

Algunos mejores se obtienen haciendo conexiones de espino fauco.

iii) Amplitudes de transmisión

La invariancia SU(3) de las interacciones fuertes implica relaciones entre amplitudes de transmisión. La forma de procesos es la siguiente: Consideremos



donde todas las partículas están convenientemente descritas como miembros de representaciones irreducibles de SU(3). Sean los estados |X> = |X; v_X>, X = A, B, C, D.

El estado inicial es

|A; v_A> |B; v_B> = Σ_{μ, ν, γ} (A B μ_γ / v_A v_B ν) |μ_γ; A, B; ν> (2)

y el final

|C; v_C> |D; v_D> = Σ_{μ', ν', γ'} (C D μ'_γ' / v_C v_D ν') |μ'_γ'; C, D; ν'> (2)

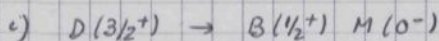
La amplitud de transmisión deseada es

T(AB → CD) = <D; v_D | C; v_C> T(|A; v_A> |B; v_B>) = Σ_{μ_γ μ'_γ' ν} (A B μ_γ / v_A v_B ν) (C D μ'_γ' / v_C v_D ν) <μ'_γ'; C, D; ν | T | μ_γ; A, B; ν>

donde hemos usado que T es un escalar bajo SU(3). El elemento de matriz no puede depender de ν por el teorema de Wigner-Eckart y en tanto

T(AB → CD) = Σ_{μ_γ μ'_γ' ν} (A B μ_γ / v_A v_B ν) (C D μ'_γ' / v_C v_D ν) T_{μ_γ → μ'_γ'} (3)

donde T_{μ_γ → μ'_γ'} juega el papel de elemento de matriz reducida y todas las amplitudes T(AB → CD) vienen dados en términos de este. Veamos un par de aplicaciones



Como la 8 ⊗ 8 solo contiene una vez la 10 todos estos elementos de matriz se pueden expresar en términos de un elemento de matriz reducido

T(D → BM) = (8 8 10 / v_B v_M v_D) T (5)

Para estudiar las relaciones típicas de SU(3) consideraremos los pocos dados a continuación en los archivos experimentales correspondientes (KeV)

$$\Gamma_1 \equiv \Gamma(\Delta^{++} \rightarrow p n^+) = 122.5 \quad (5.7) \qquad \Gamma_2 \equiv \Gamma(\Sigma^+ \rightarrow \Lambda n^+) = 30.8 \quad (2.5)$$

$$\Gamma_3 \equiv \Gamma(\bar{\Sigma}^+ \rightarrow \Sigma n) = 4.20 \quad (0.98) \qquad \Gamma_4 \equiv \Gamma(\Xi^- \rightarrow \Xi n) = 10.1 \quad (1.9)$$

De (147.4) se encuentra

$$|T_1|^2 = \frac{1}{2} |T|^2, \quad |T_2|^2 = \frac{1}{4} |T|^2, \quad |T_3|^2 = \frac{1}{6} |T|^2, \quad |T_4|^2 = \frac{1}{4} |T|^2 \quad (2)$$

Teniendo en cuenta que el acoplamiento es derivativo esperamos que la contribución del espino físico sea de la forma $p^2 \cdot p/M_D^2$ donde p es el momento final en el C.M. Luego las anchuras son

$$\Gamma_1 = \frac{1}{2} \frac{p^3}{M_D^2} \beta, \quad \Gamma_2 = \frac{1}{4} \frac{p^3}{M_D^2} \beta, \quad \Gamma_3 = \frac{1}{6} \frac{p^3}{M_D^2} \beta, \quad \Gamma_4 = \frac{1}{4} \frac{p^3}{M_D^2} \beta$$

donde β es una constante. De donde

$$\Gamma_1 = \frac{0.00772}{2} \beta, \quad \Gamma_2 = \frac{0.00451}{4} \beta, \quad \Gamma_3 = \frac{0.000997}{6} \beta, \quad \Gamma_4 = \frac{0.00166}{4} \beta$$

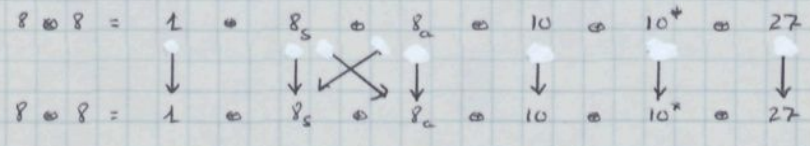
Tomando β para ajustar Γ_1 se obtiene

$$\Gamma_1 = 122.5 \text{ (ajustado)}, \quad \Gamma_2 = 36, \quad \Gamma_3 = 5.3, \quad \Gamma_4 = 13 \quad (3)$$

que está en buen acuerdo con los datos experimentales

ii) $B(1/2^+) H(0^-) \rightarrow B(1/2^+) H(0^-)$

Para obtener el número de elementos de matriz reducidos $T_{pp' \rightarrow pp'}$ tengamos en cuenta



Es decir que existe solo 8 amplitudes reducidas distintas. Si como es usual se supone la interacción invariante bajo inversión temporal entonces $T_{8_s \rightarrow 8_a} = T_{8_a \rightarrow 8_s}$ y quedan solo 7 independientes. Así se obtiene por ejemplo

$$T(\pi^- p \rightarrow \pi^- p) = \frac{1}{5} T_{27} + \frac{1}{6} T_{10} + \frac{1}{6} T_{10^*} + \frac{3}{8} T_8 + \frac{1}{6} T_{8^1} - \frac{1}{15} T_{8 \rightarrow 8^1}$$

$$T(K^- p \rightarrow K^- p) = \frac{7}{40} T_{27} + \frac{1}{12} T_{10} + \frac{1}{12} T_{10^*} + \frac{1}{5} T_8 + \frac{1}{3} T_{8^1} + \frac{1}{8} T_1$$

$$T(K^- p \rightarrow \Sigma^+ n) = -\frac{1}{50} T_{27} + \frac{1}{12} T_{10} - \frac{1}{12} T_{10^*} - \frac{1}{10} T_8 + \frac{1}{6} T_{8^1} + \frac{1}{15} T_{8 \rightarrow 8^1} + \frac{1}{8} T_1$$

de donde

$$T(K^-p \rightarrow K^-p) - T(n^-p \rightarrow n^-p) = T(K^-p \rightarrow \Sigma^+n^-)$$

que da origen a desigualdades entre secciones eficaces. Todas las relaciones típicas de SU(3) son

$$T(K^-p \rightarrow \Xi^0 K^0) = T(K^-p \rightarrow \Sigma^-n^+)$$

$$T(K^-p \rightarrow K^-p) - T(n^-p \rightarrow n^-p) = T(K^-p \rightarrow \Sigma^+n^-)$$

$$T(K^+p \rightarrow K^+p) - T(n^+p \rightarrow n^+p) = T(n^+p \rightarrow K^+\Sigma^+)$$

$$T(K^-p \rightarrow \Xi^-K^+) - T(K^-p \rightarrow \Xi^0K^0) = T(n^-p \rightarrow K^+\Sigma^-)$$

$$\sqrt{6} T(n^-p \rightarrow K^0\Lambda) = 2 T(K^-p \rightarrow \Xi^0K^0) - 2 T(K^-p \rightarrow \bar{K}^0m) + \sqrt{2} T(n^-p \rightarrow K^0\Sigma^0)$$

$$\sqrt{2} T(n^-p \rightarrow \eta n) = 2 T(K^-p \rightarrow \bar{K}^0m) - 2 T(K^-p \rightarrow \Xi^0K^0) + \sqrt{2} T(n^-p \rightarrow n^0m)$$

$$6 T(n^-p \rightarrow \eta \Lambda) = T(K^-p \rightarrow \Sigma^+n^-) + 5 T(K^-p \rightarrow \Sigma^-n^+) - 4\sqrt{2} T(n^-p \rightarrow m n^0) + 2\sqrt{3} T(K^-p \rightarrow \Sigma^0m) - 2\sqrt{3} T(K^-p \rightarrow m n^0)$$

$$T(n^-p \rightarrow K^+\Sigma^-) = T(n^+p \rightarrow K^+\Sigma^+) + T(K^-p \rightarrow \Xi^0K^0) - T(K^-p \rightarrow \Sigma^0n^0) + \sqrt{3} T(K^-p \rightarrow \Sigma^0\eta)$$

$$2\sqrt{3} T(K^-p \rightarrow \Lambda n^0) = -2\sqrt{2} T(n^-p \rightarrow m n^0) - 2 T(K^-p \rightarrow \bar{K}^0m) + 2 T(K^-p \rightarrow \Sigma^0n^0) \tag{1}$$

El primer problema que surge es como comparar las predicciones anteriores con los resultados experimentales. Las igualdades (1) se acostumbrar a traducir en desigualdades entre las secciones eficaces, con el bien entendido que el espacio físico debe ser limitado en energía si es posible. Por otra parte estas secciones eficaces dependen de t y s. El problema es saber para que valores de s se deben comparar las secciones eficaces. Se ha sugerido comparar a idénticos valores de $\sqrt{s} \approx \sqrt{s} - \sum_{\text{prods}} M_i$, sin embargo esto podría una falla cerca de las resonancias. No vamos a discutir evidencia experimental para estas relaciones y nos limitamos a la comparación a $K^-p \rightarrow \Xi^0 K^0$, $K^-p \rightarrow \Sigma^- n^+$ que de acuerdo en (1) deben satisfacer

$$\sigma(K^-p \rightarrow \Xi^0 K^0) = \sigma(K^-p \rightarrow \Sigma^- n^+) \tag{2}$$

Los umbrales son $\sqrt{s_{th}} = 1.813 \text{ GeV}$ y $\sqrt{s_{th}} = (M_{n^+p}) = 1.832 \text{ GeV}$

$$\left. \begin{aligned} \sigma(K^-p \rightarrow \Sigma^- n^+; \sqrt{s} = 2.615) &= 0.0380 (80) \text{ mb} \\ \sigma(K^-p \rightarrow \Xi^0 K^0; \sqrt{s} = 2.615) &= 0.0320 (90) \text{ mb} \end{aligned} \right\}$$

sin embargo en este caso particular la relación no es nada clara.

v) Interacciones electromagnéticas

Para las partículas que interactúan fuertemente es válida la relación de Gell-Mann - Nishijima $Q = T_3 + Y/2$ lo cual sugiere que bajo SU(3) la corriente electromagnética debe transformarse como

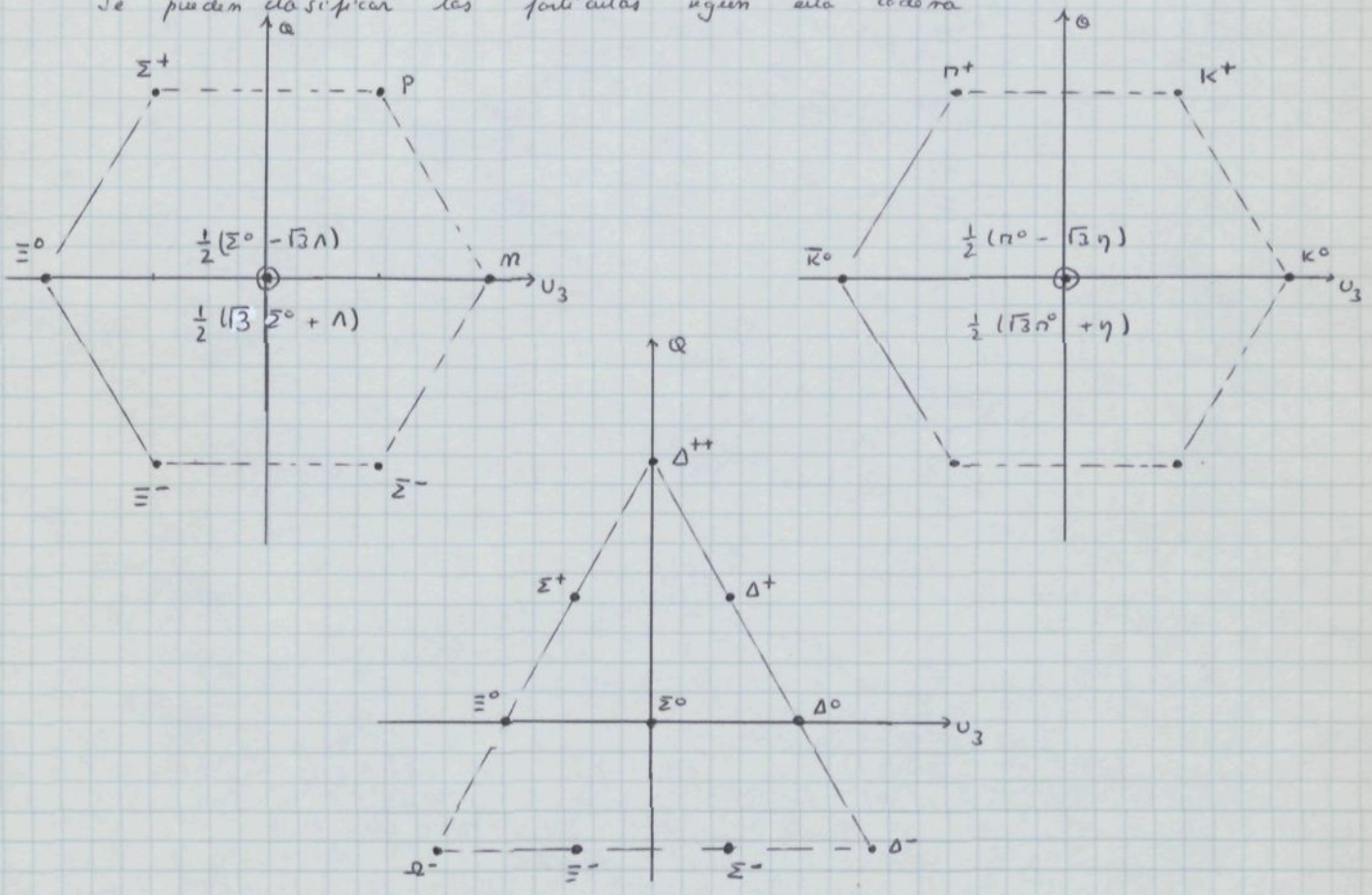
$$j_\mu \sim (F_3 + \frac{1}{\sqrt{3}} F_8) \tag{1}$$

Es útil en este caso manejar la cadena $SU(3) \supset SU_2 \supset U_1$ pues es evidente que

$$[\vec{U}, j_\mu] = 0 \tag{2}$$

es decir que las interacciones electromagnéticas conservan el U-spin.

Se pueden clasificar las partículas según esta cadena



Para ver que partícula es la de $U=1, U_3=0$ basta usar

$$|1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} U_- |m\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{6} E_{-3} |d\rangle |s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|s\rangle |s\rangle - |d\rangle |d\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\Sigma^0\rangle - \sqrt{3}|\Lambda\rangle)$$

Veamos algunas aplicaciones

i) Momentos magnéticos bariónicos $\frac{1}{2}^+$

Los momentos magnéticos son debidos a la acción de j_μ . Se obtienen por

mente que el operador carga se puede representar, en notación matricial, como

$$Q = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad (1)$$

y entonces si q es la transferencia de momento (final - inicial)

$$\begin{aligned} \langle B | j^\mu(0) | B \rangle &= e_A(q^2) \text{Tr} \left\{ \bar{B} \gamma^\mu [Q, B]_- \right\} + e_S(q^2) \text{Tr} \left\{ \bar{B} \gamma^\mu [Q, B]_+ \right\} + \\ &+ i \frac{\mu_A(q^2)}{2M_B} q_\nu \text{Tr} \left\{ \bar{B} \sigma^{\mu\nu} [Q, B]_- \right\} + i \frac{\mu_S(q^2)}{2M_B} q_\nu \text{Tr} \left\{ \bar{B} \sigma^{\mu\nu} [Q, B]_+ \right\} \end{aligned} \quad (2)$$

donde $e_A(q^2)$, $e_S(q^2)$, $\mu_A(q^2)$ y $\mu_S(q^2)$ son los factores de forma eléctricos y magnéticos, simétricos y antisimétricos. La conservación de la carga eléctrica implica $e_A(0) = 1$, $e_S(0) = 0$. Los momentos magnéticos están relacionados con $\mu_A(0)$ y $\mu_S(0)$. Tengamos en cuenta que

$$[Q, B]_- = \begin{vmatrix} 0 & \Sigma^+ & p \\ -\bar{\Sigma}^- & 0 & 0 \\ -\bar{\Xi}^- & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad [Q, B]_+ = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 2\sqrt{2} \Sigma^0 + 2\sqrt{\frac{2}{3}} \Lambda & \Sigma^+ & p \\ \Sigma^- & \sqrt{2} \Sigma^0 - \sqrt{\frac{2}{3}} \Lambda & -2m \\ \Xi^- & -2\Xi^0 & 2\sqrt{\frac{2}{3}} \Lambda \end{vmatrix}$$

$$\text{Tr} \left\{ \bar{B} [Q, B]_- \right\} = \bar{\Sigma}^+ \Sigma^+ + \bar{p} p - \bar{\Sigma}^- \Sigma^- - \bar{\Xi}^- \Xi^-$$

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left\{ \bar{B} [Q, B]_+ \right\} &= \frac{1}{3} \left\{ \bar{p} p - 2\bar{m} m + \bar{\Sigma}^+ \Sigma^+ + \bar{\Sigma}^- \Sigma^- + \bar{\Xi}^- \Xi^- - 2\bar{\Xi}^0 \Xi^0 \right. \\ &\quad \left. + \bar{\Sigma}^0 \Sigma^0 - \bar{\Lambda} \Lambda + \sqrt{3} \bar{\Sigma}^0 \Lambda + \sqrt{3} \bar{\Lambda} \Sigma^0 \right\} \end{aligned} \quad (3)$$

y en tanto (α y β constantes arbitrarias englobando nuestra ignorancia)

$$\mu(p) = \alpha + \beta, \quad \mu(m) = -2\beta$$

$$\mu(\Sigma^+) = \alpha + \beta, \quad \mu(\Sigma^0) = \beta, \quad \mu(\Sigma^-) = -\alpha + \beta$$

$$\mu(\Xi^0) = -2\beta, \quad \mu(\Xi^-) = -\alpha + \beta$$

$$\mu(\Lambda) = -\beta, \quad \mu(\Sigma^0 \Lambda^0) = \sqrt{3} \beta$$

y en tanto se pueden escribir todo en términos de $\mu(m)$ y $\mu(p)$. Así se obtiene

$$\mu(\Sigma^+) = \mu(p)$$

$$\mu(\Xi^0) = 2\mu(\Lambda) = -2\mu(\Sigma^0) = -\frac{2}{\sqrt{3}}\mu(\Sigma^0\Lambda) = \mu(m)$$

$$\mu(\Sigma^-) = \mu(\Xi^-) = -\mu(p) - \mu(m) \tag{1}$$

falso en momentos nucleones

$$\mu(p) = 2.7928456 \text{ (11)} \quad \mu(m) = -1.91304184 \text{ (88)} \tag{2}$$

entonces para los momentos magnéticos medidos

$$\begin{aligned} \mu(\Lambda) &= -0.962, & \mu(\Sigma^+) &= 2.793, & \mu(\Sigma^-) &= -0.880 \\ \mu(\Xi^0) &= -1.913, & \mu(\Xi^-) &= -0.880 \end{aligned} \tag{3}$$

a comparar con los valores experimentales

$$\begin{aligned} \mu(\Lambda) &= -0.614 \text{ (51)}, & \mu(\Sigma^+) &= 2.33 \text{ (13)}, & \mu(\Sigma^-) &= -1.41 \text{ (25)} \\ \mu(\Xi^0) &= -1.20 \text{ (6)}, & \mu(\Xi^-) &= -1.85 \text{ (75)} \end{aligned} \tag{4}$$

con un acuerdo satisfactorio.

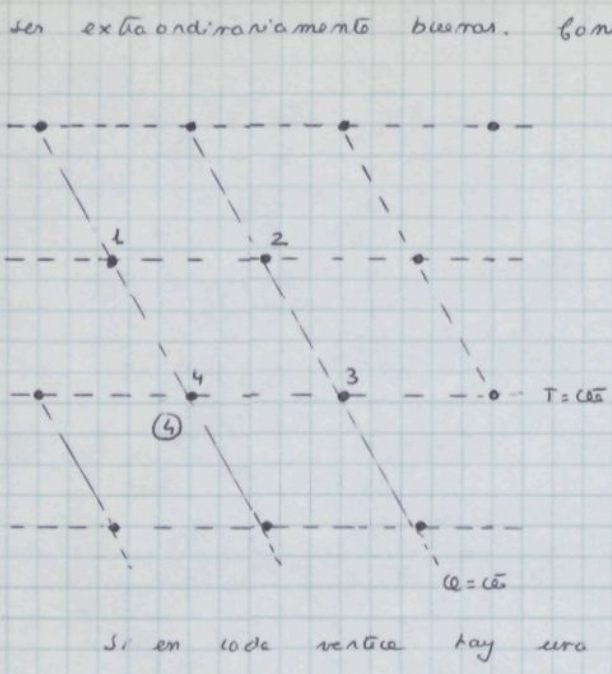
(i) Formulas masicas electromagnéticas

En un principio hemos supuesto que el Lagrangiano de las interacciones fuertes \mathcal{L}_S es invariante bajo $SU(3)$. Sabemos sin embargo que existen las interacciones medio-fuertes, \mathcal{L}_{MS} , invariantes sólo bajo $SU_T(2) \otimes U_Y(1)$ y finalmente las interacciones electromagnéticas, \mathcal{L}_{EM} , invariantes bajo $SU_C(3) \otimes U_E(1)$.

El Lagrangiano total es pues

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_S + \mathcal{L}_{MS} + \mathcal{L}_{EM} \tag{5}$$

Las diferencias masicas entre los términos de un isomultiplete son debidas a \mathcal{L}_{EM} y suelen ser de unos 10 MeV es decir del orden del 1% de la masa total. Por otra parte las diferencias masicas entre distintos isomultipletes pertenecientes a una representación dada de $SU(3)$ son del orden de 100 MeV, es decir un 10% de la masa total. La constante de acoplamiento electromagnético es $\alpha \approx 1/137$. y si \mathcal{L}_S tiene una constante de orden de la unidad, podemos atribuir a \mathcal{L}_{MS} una constante de acoplamiento de orden $1/10$. De todo ello podemos deducir que los términos cruzados \mathcal{L}_{EM} y \mathcal{L}_{MS} dan origen a efectos del orden 0.1% en las masas. Esperamos que formulas masicas es que solo se desprecie esto deben



son extraordinariamente buenas. Consideremos la figura adjunta que representa una porción de un diagrama de pesos. Como \mathcal{G}_{HS} es un isoscalar, en la ausencia de \mathcal{G}_{EM} pero en cualquier orden en \mathcal{G}_{HS} todos los miembros de un isomultiplete tienen la misma masa. Igualmente en ausencia de \mathcal{G}_{HS} pero en cualquier orden en \mathcal{G}_{EM} todos los miembros de un U-multiplete tienen la misma masa. Vamos a intentar buscar relaciones mágicas en las que solo desaparecerán interferencias \mathcal{G}_{EM} con \mathcal{G}_{HS} .

Si en cada vértice hay una sola partícula la fórmula deseada es

$$m(1) - m(2) + m(3) - m(4) = 0 \tag{1}$$

pues en ausencia de \mathcal{G}_{EM} se tiene $m(1) = m(2)$ y $m(3) = m(4)$; en ausencia de \mathcal{G}_{HS} se cumple $m(1) = m(4)$ y $m(2) = m(3)$.

Supongamos que en el vértice 4 hay dos partículas la 4 con isospin igual a la de la 3 y la 5 con isospin distinto. Considerados como miembros de U-multipletes

$$|4_u\rangle = \alpha |4\rangle + \sqrt{1-\alpha^2} |5\rangle, \quad |5_u\rangle = -\sqrt{1-\alpha^2} |4\rangle + \alpha |5\rangle \tag{2}$$

se tiene entonces

$$\mathcal{G}_{EM} = 0 \quad : \quad m(1) = m(2), \quad m(3) = m(4), \quad m(4_5) = 0 \tag{3}$$

$$\mathcal{G}_{HS} = 0 \quad : \quad m(2) = m(3), \quad m(1) = m(4_u), \quad m(4_u 5_u) = 0$$

De estas dos últimas ecuaciones

$$m(1) = \alpha^2 m(4) + (1-\alpha^2) m(5) + 2\alpha \sqrt{1-\alpha^2} m(4_5) \tag{4}$$

$$\Rightarrow \alpha \sqrt{1-\alpha^2} m(4) + \alpha \sqrt{1-\alpha^2} m(5) + (2\alpha^2 - 1) m(4_5) = 0$$

de donde si $\mathcal{G}_{HS} = 0$

$$m(1) - m(4) - \frac{1}{\alpha} \sqrt{1-\alpha^2} m(4_5) = 0 \tag{5}$$

La fórmula mágica deseada es entonces

$$m(1) - m(2) + m(3) - m(4) - \frac{1}{\alpha} \sqrt{1-\alpha^2} m(4_5) = 0 \tag{6}$$

Consideremos el doblete $3/2^+$ entonces aplicando (1) se obtiene

$$M(\Sigma^-) - M(\Sigma^0) + M(\Xi^0) - M(\Xi^-) = 0 \tag{1}$$

Experimentalmente

$$1.3875(6) - 1.3820(25) + 1.5319(3) - 1.5350(6) = 0.0023 \pm 0.0027 \text{ GeV}$$

en un acuerdo muy bueno como era de esperar.

Como de ser mas otros el octeto $\frac{1}{2}^+$, se puede escribir

$$M(\Lambda) - M(p) + M(\Sigma^+) - M(\Sigma^0) - \sqrt{3} M(\Sigma^0 \Lambda) = 0$$

$$M(\Xi^0) - M(\Xi^-) + M(\Sigma^-) - M(\Sigma^0) - \sqrt{3} M(\Sigma^0 \Lambda) = 0$$

de donde

$$M(\Lambda) - M(p) + M(\Sigma^+) - M(\Sigma^-) + M(\Xi^-) - M(\Xi^0) = 0 \tag{2}$$

Experimentalmente

$$1.29343(4) - 7.98(8) + 6.4(6) = -(0.29 \pm 0.61) \text{ MeV.}$$

en muy buen acuerdo con la experiencia.

(iii) Desintegraciones electromagnéticas

Consideremos en primer lugar las desintegraciones $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ y $\eta \rightarrow 2\gamma$. El estado final tiene $U=0$ y por tanto despreciando el mixing $\eta-\eta'$, se tiene

$$\langle 2\gamma | T | \frac{1}{2} (\pi^0 - \sqrt{3} \eta) \rangle = 0$$

de donde

$$\Gamma(\pi^0 \rightarrow 2\gamma) = \sqrt{3} \Gamma(\eta \rightarrow 2\gamma)$$

por lo cual teniendo en cuenta el espacio fásico ($T \sim E_{\mu\nu} p_1^\mu p_2^\nu \epsilon_1^\alpha \epsilon_2^\beta$) que es proporcional a la masa al cubo.

$$\frac{\Gamma(\eta \rightarrow 2\gamma)}{\Gamma(\pi^0 \rightarrow 2\gamma)} = \frac{1}{3} \left(\frac{M_\eta}{M_\pi} \right)^3 = 22.4$$

a comparar con el resultado experimental

$$\frac{\Gamma(\eta \rightarrow 2\gamma)}{\Gamma(\pi^0 \rightarrow 2\gamma)} = \frac{(323 \pm 55) \text{ eV}}{(7.86 \pm 0.59) \text{ eV}} = 41 \pm 11$$

Podemos ahora a considerar los procesos electromagnéticos $\omega \rightarrow e^+e^-$ y $\phi \rightarrow e^+e^-$ cuyas anchuras experimentales son

$$\Gamma(\omega \rightarrow e^+e^-) = (77 \pm 20) \text{ keV}, \quad \Gamma(\phi \rightarrow e^+e^-) = (127 \pm 11) \text{ keV} \quad (1)$$

Es evidente que como la interacción electromagnética es un miembro de un octeto o debe tener

$$\langle e^+e^- | T | 1 \rangle \equiv \langle e^+e^- | T | \cos \theta | \omega \rangle - \sin \theta | \phi \rangle = 0$$

es decir

$$\cos \theta \langle e^+e^- | T | \omega \rangle = \sin \theta \langle e^+e^- | T | \phi \rangle \quad (2)$$

y por tanto, teniendo en cuenta espacio parico, se obtiene

$$\frac{\Gamma(\omega \rightarrow e^+e^-)}{\Gamma(\phi \rightarrow e^+e^-)} = \frac{M_\omega}{M_\phi} \text{tg}^2 \theta \quad (3)$$

de donde

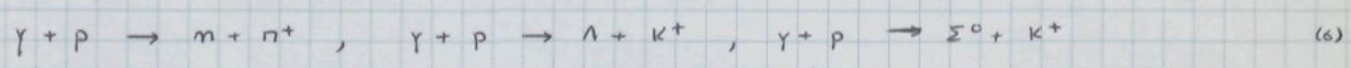
$$\frac{\Gamma(\omega \rightarrow e^+e^-)}{\Gamma(\phi \rightarrow e^+e^-)} = 0.768 \text{tg}^2 \theta = 0.552 \quad (4)$$

a comparar con el valor experimental

$$\frac{\Gamma(\omega \rightarrow e^+e^-)}{\Gamma(\phi \rightarrow e^+e^-)} = 0.61 \pm 0.23 \quad (5)$$

(v) Secuencias eficaces de fotoproducción

Como veremos en particular las reacciones de fotoproducción



El fotón por ser el cuanto del campo electromagnético tiene U-spin igual a cero y por tanto el estado inicial es $|1/2, 1/2\rangle$ de U-spin. Los estados finales son

$$|n\rangle |\pi^+\rangle = |11\rangle |1/2, -1/2\rangle \doteq \sqrt{\frac{2}{3}} |1/2, 1/2\rangle_{10, 1/2}$$

$$|\Lambda\rangle |K^+\rangle = \frac{1}{2} [100\rangle - \sqrt{3} 110\rangle] |1/2, 1/2\rangle \doteq \frac{1}{2} |1/2, 1/2\rangle_{00, 1/2} + \frac{1}{2} |1/2, 1/2\rangle_{10, 1/2}$$

$$|\Sigma^0\rangle |K^+\rangle = \frac{1}{2} [\sqrt{3} 100\rangle + 110\rangle] |1/2, 1/2\rangle \doteq \frac{\sqrt{3}}{2} |1/2, 1/2\rangle_{00, 1/2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} |1/2, 1/2\rangle_{10, 1/2}$$

Luego

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\gamma p \rightarrow n \pi^+) &= \sqrt{\frac{2}{3}} A_{10, 1/2} \\ \mathcal{M}(\gamma p \rightarrow \Lambda K^+) &= \frac{1}{2} A_{00, 1/2} + \frac{1}{2} A_{10, 1/2} \\ \mathcal{M}(\gamma p \rightarrow \Sigma^0 K^+) &= \frac{\sqrt{3}}{2} A_{00, 1/2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} A_{10, 1/2} \end{aligned} \quad (7)$$

a donde

$$\sqrt{\frac{3}{2}} T(\gamma p \rightarrow \Lambda K^+) - \frac{1}{\sqrt{2}} T(\gamma p \rightarrow \Sigma^0 K^+) = T(\gamma p \rightarrow n p^+) \tag{11}$$

que permite encontrar desigualdades entre secciones eficaces, tales como

$$\begin{aligned} | \sqrt{2\sigma(\gamma p \rightarrow n p^+)} - \sqrt{3\sigma(\gamma p \rightarrow \Lambda K^+)} | &\leq \sqrt{\sigma(\gamma p \rightarrow \Sigma^0 K^+)} \leq \\ &\leq \sqrt{2\sigma(\gamma p \rightarrow n p^+)} + \sqrt{3\sigma(\gamma p \rightarrow \Lambda K^+)} \end{aligned} \tag{12}$$

VIII - MODELO QUARK

El modelo quark fue introducido por M. Gell-Mann [Phys. Lett. 8, 214 (1964)] y G. Zweig [CERN prep. TH 401, 612 (1964) no pub.]. En este modelo se supone que todos los hadrones son estados ligados de partículas sin estructura: los quarks. Para explicar los hadrones como nucleones es necesario suponer la existencia de tres quarks y las antipartículas correspondientes. Los tres quarks se pueden denominar u , d y s y se transforman de acuerdo a una representación 3 de $SU(3)$. Por supuesto los antiquarks, \bar{u} , \bar{d} y \bar{s} , pertenecen a 3^* . La asociación usual es

$$\begin{aligned}
 |u\rangle &= |3; \frac{1}{3} \frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle, & |d\rangle &= |3; \frac{1}{3} \frac{1}{2} -\frac{1}{2}\rangle, & |s\rangle &= |3; -\frac{2}{3} 0 0\rangle \\
 |\bar{u}\rangle &= |3^*; -\frac{1}{3} \frac{1}{2} -\frac{1}{2}\rangle, & |\bar{d}\rangle &= |3^*; -\frac{1}{3} \frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle, & |\bar{s}\rangle &= |3^*; \frac{2}{3} 0 0\rangle
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Teniendo en cuenta que se asigna arbitrariamente a los quarks $B = \frac{1}{3}$, $J^P = \frac{1}{2}^+$ y que se supone válida la fórmula de Gell-Mann - Nishijima los números cuánticos de los quarks son

	J^P	B	T	T_3	Y	S	Q
u	$\frac{1}{2}^+$	$+\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{3}$	0	$+\frac{2}{3}$
d	$\frac{1}{2}^+$	$+\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$
s	$\frac{1}{2}^+$	$+\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{2}{3}$	-1	$-\frac{1}{3}$
\bar{u}	$\frac{1}{2}^-$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$
\bar{d}	$\frac{1}{2}^-$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	0	$+\frac{1}{3}$
\bar{s}	$\frac{1}{2}^-$	$-\frac{1}{3}$	0	0	$+\frac{2}{3}$	$+1$	$+\frac{1}{3}$

En el modelo quark se supone:

- i) Todos los mesones son estados ligados de un quark y un antiquark
- ii) Todos los bariones (antibariones) son estados ligados de tres quarks (antiquarks)

Esto garantiza inmediatamente que

$$\begin{aligned}
 \text{Mesones} &: & B &= 0 & J &= \text{entero} \\
 \text{Bariones} &: & B &= 1 & J &= \text{semientero}
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

Es evidente que se obtendrían mesones con valores de B y T correctos si suponemos que estos son estados ligados $(qq\bar{q}\bar{q})$, $(qqq\bar{q}\bar{q}\bar{q})$ y bariones con los valores de B y T correctos si estos fuesen estados ligados de la forma $(qqqq\bar{q})$, $(qqqqqq\bar{q}\bar{q})$. Hadrones con estas composiciones se llaman exóticos de primera clase y no se sabe que existan.

Por otra parte como

$$3 \otimes 3^* = 1 \oplus 8$$

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = (3^* \oplus 6) \otimes 3 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10 \quad (1)$$

en el modelo quark todos los mesones deben agruparse en singletes y octetes mientras que los bariones deben hacerlo en singletes, octetes y decupletes, lo cual parece suceder. Por otra parte teniendo en cuenta la codera $SU(3) \supset SU_2(2) \otimes U_1(1)$ se tiene que los únicos estados (Y, T) posibles son

$$\text{Mesones: } (1, 1/2), (0, 1), (0, 0), (-1, 1/2)$$

$$\text{Bariones: } (1, 3/2), (1, 1/2), (0, 1), (0, 0), (-1, 1/2), (-2, 0) \quad (2)$$

Veamos cual es el contenido en quarks de mesones y bariones. Para los mesones ya hemos visto que

$$18; 1 \ 1/2 \ 1/2 \rangle = -1u\bar{s} \rangle, \quad 18; 1 \ 1/2 \ -1/2 \rangle = -1d\bar{s} \rangle$$

$$18; 0 \ 1 \ 1 \rangle = -1u\bar{d} \rangle, \quad 18; 0 \ 1 \ 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [1u\bar{u} \rangle - 1d\bar{d} \rangle], \quad 18; 0 \ 1 \ -1 \rangle = 1d\bar{u} \rangle$$

$$18; 0 \ 0 \ 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} [1u\bar{u} \rangle + 1d\bar{d} \rangle - 21s\bar{s} \rangle]$$

$$18; -1/2 \ 1/2 \ 1/2 \rangle = -1s\bar{d} \rangle, \quad 18; -1/2 \ -1/2 \ 1/2 \rangle = 1s\bar{u} \rangle$$

$$11; 0 \ 0 \ 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} [1u\bar{u} \rangle + 1d\bar{d} \rangle + 1s\bar{s} \rangle] \quad (3)$$

Para los bariones la situación es algo más complicada. Se prueba inmediatamente que

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} =$$

$$= 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1$$

Una consecuencia inmediata es que los estados de cuaplete son totalmente simétricos y los singletes totalmente antisimétricos. Se puede entonces ver fácilmente

Decuplete

$$110; -200 \rangle = 1555 \rangle$$

$$110; -1\frac{1}{2} \frac{1}{2} \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} [1uss \rangle + 1sus \rangle + 1ssu \rangle], \quad 110; -1\frac{1}{2} -\frac{1}{2} \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} [1dss \rangle + 1sds \rangle + 1ssd \rangle]$$

$$110; 011 \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} [1suu \rangle + 1usu \rangle + 1uus \rangle], \quad 110; 01-1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} [1sda \rangle + 1dsd \rangle + 1dds \rangle]$$

$$110; 010 \rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} [1uds \rangle + 1usd \rangle + 1dsu \rangle + 1dus \rangle + 1sud \rangle + 1sdu \rangle]$$

$$110; 1\frac{3}{2} \frac{3}{2} \rangle = 1uuu \rangle, \quad 110; 1\frac{3}{2} \frac{1}{2} \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} [1duu \rangle + 1udu \rangle + 1uud \rangle]$$

$$110; 1\frac{3}{2} -\frac{3}{2} \rangle = 1ddd \rangle, \quad 110; 1\frac{3}{2} -\frac{1}{2} \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} [1udd \rangle + 1udu \rangle + 1duu \rangle] \quad (1)$$

Singlete

$$11; 000 \rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} [1uds \rangle - 1usd \rangle + 1dsu \rangle - 1dus \rangle + 1sud \rangle - 1sdu \rangle] \quad (2)$$

Quedan ahora por catalogar las octetas que tienen simetría mixta uno de los cuales proviene de $3 \otimes 3^*$ y otro $3 \otimes 6$ y se puede probar que

Octeto ($3 \times 3^*$)

$$18; -1\frac{1}{2} -\frac{1}{2} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [1dss \rangle - 1ssd \rangle], \quad 18; -1\frac{1}{2} \frac{1}{2} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [1uss \rangle - 1ssu \rangle]$$

$$18; 011 \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} [1suu \rangle - 1uus \rangle], \quad 18; 01-1 \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} [1sda \rangle - 1dds \rangle]$$

$$18; 010 \rangle = \frac{1}{2} [1uds \rangle + 1dus \rangle - 1sud \rangle - 1sdu \rangle]$$

$$18; 1\frac{1}{2} -\frac{1}{2} \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} [1udd \rangle - 1ddu \rangle], \quad 18; 1\frac{1}{2} \frac{1}{2} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [1duu \rangle - 1uud \rangle]$$

$$18; 000 \rangle = \frac{1}{2\sqrt{3}} [-1uds \rangle + 1dus \rangle - 1sud \rangle + 1sdu \rangle - 21usd \rangle + 21dsu \rangle] \quad (3)$$

Octeto (3×6)

$$18; -1\frac{1}{2} -\frac{1}{2} \rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} [1dss \rangle - 21sds \rangle + 1ssd \rangle], \quad 18; -1\frac{1}{2} \frac{1}{2} \rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} [1uss \rangle - 21sus \rangle + 1ssu \rangle]$$

$$18; 011 \rangle = -\frac{1}{\sqrt{6}} [1suu \rangle - 21usu \rangle + 1uus \rangle], \quad 18; 01-1 \rangle = -\frac{1}{\sqrt{6}} [1sda \rangle - 21dsd \rangle + 1dds \rangle]$$

$$18; 010 \rangle = \frac{1}{2\sqrt{3}} [-1uds \rangle - 1dus \rangle - 1sud \rangle - 1sdu \rangle + 21usa \rangle + 21dsu \rangle]$$

$$18; 1\frac{1}{2} -\frac{1}{2} \rangle = -\frac{1}{\sqrt{6}} [1udd \rangle - 21dud \rangle + 1ddu \rangle], \quad 18; 1\frac{1}{2} \frac{1}{2} \rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} [1duu \rangle - 21udu \rangle + 1uud \rangle]$$

$$18; 000 \rangle = \frac{1}{2} [-1uds \rangle + 1dus \rangle + 1sud \rangle - 1sdu \rangle] \quad (4)$$

En todo lo que sigue consideraremos únicamente el modelo quark no relativista, es decir supondremos que el comportamiento de los quarks dentro de un hadrón es describible mediante una ecuación de Schrödinger. Una segunda hipótesis básica que está en la base de muchas aplicaciones del modelo quark es la hipótesis de aditividad, según la cual una determinada propiedad de un hadrón se puede descubrir como la suma de las contribuciones de los quarks y antiquarks constituyentes. No hay una idea demasiado clara de la razón de la validez de las dos hipótesis.

Vamos a empezar considerando los mesones. Ya hemos dicho que los mesones son estados ligados ($Q\bar{Q}$) y ya hemos dicho que deben pertenecer a representaciones 1 y 8 de $SU(3)$. Para cada valor del momento angular orbital L del sistema son de esperar ciertos momentos que en la notación $^{2S+1}L_J$ son

$$^3L_{L-1}, \quad ^3L_L, \quad ^3L_{L+1}, \quad ^1L_L \tag{1}$$

Si $L=0$ solo existen $^3S_1, \quad ^1S_0$.

Como un quark y un antiquark tienen paridades opuestas, la paridad de un meson es

$$P = (-1)^{L+1} \tag{2}$$

Por otra parte para los estados neutros el número cuántico de conjugación de carga es (pág 38)

$$C = (-1)^{L+S} \tag{3}$$

Las consideraciones que acabamos de hacer implican que únicamente algunas combinaciones J^{PC} son permitidas en este modelo. Se ve que son prohibidas las

$$J^{PC} = 0^{--}, \quad (\text{impar})^{-+}, \quad (\text{par})^{+-} \tag{4}$$

Mesones de los tipos indicados en (4) son los llamados mesones exóticos de la segunda clase y no tenemos evidencia experimental a su favor. Queremos hacer notar, sin embargo, que en modelos quarks relativistas pueden aparecer estados con C opuesta a la considerada.

Sería de esperar que los mesones de menor masa correspondan a $L=0$ y en tanto formen dos momentos: 0^{-+} y 1^{--} y esta es precisamente la situación experimental.

En el modelo quark no relativista la función de ondas del sistema se puede siempre escribir como el producto de una parte espacial y una parte de spin-spin unitario. El conocimiento de la parte espacial implicaría saber calcular el potencial de interacción quark-quark. La parte de spin-spin unitario es fácil de obtener a partir de (158.3) haciendo las sustituciones

$$\begin{aligned}
 S=0 \quad S_3=0 & \quad |q_i \bar{q}_j\rangle \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} [q_i^\uparrow \bar{q}_j^\downarrow - q_i^\downarrow \bar{q}_j^\uparrow] \\
 S=1 \quad S_3=+1 & \quad |q_i \bar{q}_j\rangle \longrightarrow |q_i^\uparrow q_j^\uparrow\rangle \\
 S=1 \quad S_3=0 & \quad |q_i \bar{q}_j\rangle \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} [q_i^\uparrow \bar{q}_j^\downarrow + q_i^\downarrow \bar{q}_j^\uparrow] \\
 S=1 \quad S_3=-1 & \quad |q_i \bar{q}_j\rangle \longrightarrow |q_i^\downarrow q_j^\downarrow\rangle \tag{1}
 \end{aligned}$$

Así por ejemplo

$$\begin{aligned}
 |n^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|u^\uparrow d^\downarrow\rangle - |u^\downarrow d^\uparrow\rangle] \\
 |p^+; s_z=0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|u^\uparrow d^\downarrow\rangle + |u^\downarrow d^\uparrow\rangle]
 \end{aligned}$$

En la descripción no relativista que estamos usando se puede considerar que los bloques constituyentes de los hadrones son

$$|u^\uparrow\rangle, |d^\uparrow\rangle, |s^\uparrow\rangle, |u^\downarrow\rangle, |d^\downarrow\rangle, |s^\downarrow\rangle \tag{2}$$

y los correspondientes anti-quarks. Se pueden pensar que los estados (2) corresponden a la representación fundamental de SU(6) y por tanto los mesones quedan descritos en las representaciones inducidas contenidas en $6 \otimes 6^*$

$$6 \otimes 6^* = 1 \oplus 35 \tag{3}$$

El singlete contiene un singlete de SU(3) y otro de SU(2)-spin, mientras que la representación 35 contiene un ^{octete} ~~nonete~~ de S=0 (8 estados) y un ^{nonete} ~~octete~~ de S=1 (3x3 = 27 estados). Si SU(6) fuera una simetría exacta entonces los 35 estados de la representación 35 deberían tener todos ellos la misma masa que, salvo degeneración accidental, sería distinta de la masa de la partícula singlete.

Poco sabemos de las fuerzas entre quarks pero una posible jerarquía de estas fuerzas sería lo siguiente [R.H. Dalitz - Les Houches 1965].

i) Fuerzas superfuertes de naturaleza mal conocida. El espectro de masas de los hadrones sugieren que estas fuerzas son totalmente independientes del spin y del spin unitario. Si solo existieran estas fuerzas todos los estados mesonicos de un dado valor de L deberian tener la misma masa. Lo mismo es cierto para estados barionicos de una misma L e idomica simetria de formulacion para la parte espacial de la funcion de ondas

ii) Fuerzas fuertes que dependen del spin y del spin unitario, pero que caim son simetricas bajo SU(6), que causarian desdoblamiento de los multipletes de SU(6) cada multiplete de SU(6) en un grupo de particulas todas ellas de igual masa.

iii) Fuerzas centrales dependientes de $\vec{\sigma}$ y \vec{F} a la forma

$$V_{\sigma} = A \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j \quad V_F = B \vec{F}_i \cdot \vec{F}_j \quad (1)$$

que son simetricas bajo SU(3) pero que romperian la degeneracion de los distintos multipletes de SU(3) en un SU(6)-multiplete.

iv) Fuerzas spin-orbita de la forma

$$V_{so} = C \vec{S} \cdot \vec{L} \quad (2)$$

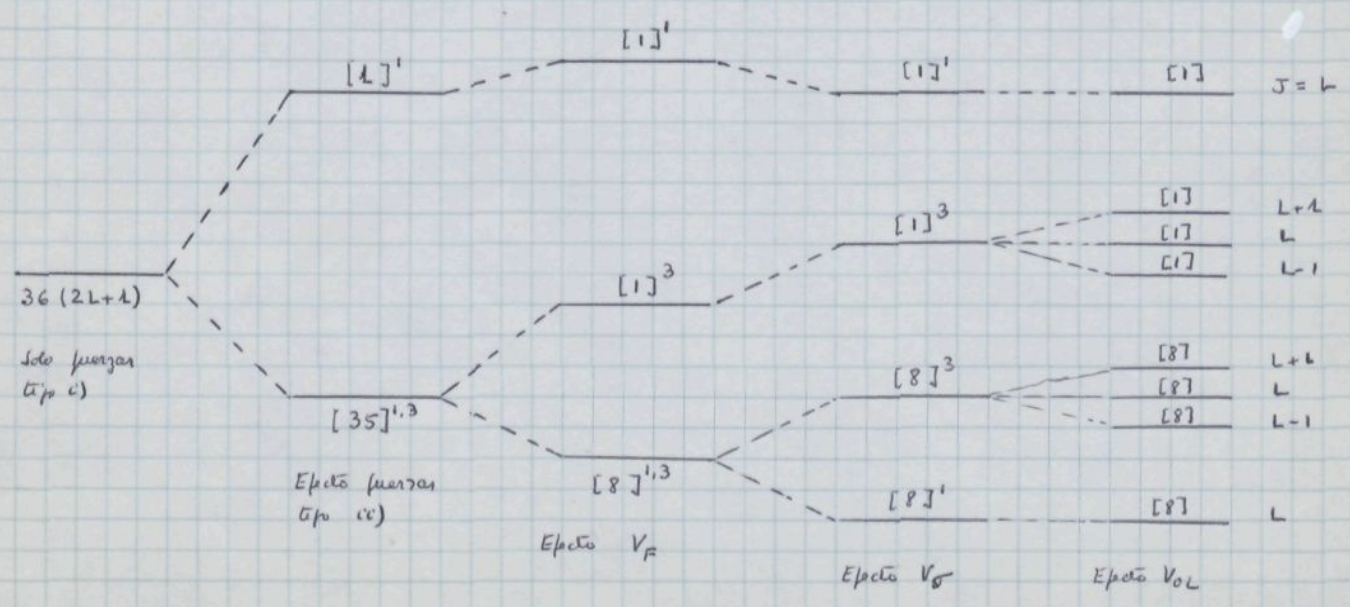
consistente en la invariancia SU(3)

v) Otras fuerzas no centrales que conserven SU(3)

vi) Fuerzas medio-fuertes que rompen SU(3) causando diferencias de masas entre las particulas de distintos isomultipletes. Estas fuerzas son invariantes bajo SU₇(2)

vii) Fuerzas electromagneticas que rompen la degeneracion maxima de los isomultipletes

El efecto de ataguas de estas fuerzas es el siguiente



Consideremos con algo más de detalle los estados $L=0$. Si todas las fuerzas fueran invariantes bajo $SU(6)$ ($i+iv$) entonces los mesones de la representación 35 deben tener todos las mismas masas que, salvo degeneración accidental, sero distinta de la del meson de la representación 1. Las considerables diferencias de masas entre estados de la 35 implican que actúen fuerzas de los tipos iii y iv . Por otra parte dentro de un $SU(3)$ -plet también aparecen diferencias de masas debidas a la rotura de $SU(3)$. La hipótesis más simple y natural que podemos hacer en el modelo quark es que estas últimas diferencias de masas son debidas a que el tercer quark es más pesado que los otros dos

$$M_u = M_d = M \qquad M_s = M + \Delta \qquad , \qquad \Delta > 0 \qquad (1)$$

En el modelo quark la masa de un meson A viene dada por

$$M(A) \equiv \langle \Psi(A) | \sum_i M_i - U(\{\alpha_i\}) | \Psi(A) \rangle \qquad (2)$$

donde $|\Psi(A)\rangle$ describe la función de ondas del meson A; U indica el potencial $Q\bar{Q}$ que en las hipótesis efectuadas depende unicamente de la representación $\{a\}$ a la que pertenece A; finalmente la suma se extiende a todos los constituyentes del meson.

Así obtenemos para las masas de los mesones vectoriales 1^- :

$$\begin{aligned} M(\rho) &= 2M - B(V, 8) & M(K^*) &= 2M + \Delta - B(V, 8) \\ M(\rho) &= 2M + \frac{4}{3}\Delta - B(V, 8) & M(1) &= 2M + \frac{2}{3}\Delta - B(V, 1) \\ M(\rho 1) &= -\frac{2\sqrt{2}}{3}\Delta F & & \end{aligned} \qquad (3)$$

donde $M(\rho)$ ($M(1)$) es la masa del estado $18; 000$ ($11; 000$) y $M(\rho 1)$ es el elemento de matriz del operador masa entre los dos estados anteriores. $B(V, a)$ indica el elemento de matriz de U y F es la integral de superposición de superposición de la parte espacial de la función de ondas del octeto y del singlete. Veamos algunas consecuencias de este

i) De las ecuaciones (3) se deduce inmediatamente que

$$\Delta = M(K^*) - M(\rho) = 116 \pm 3 \qquad (5)$$

ii) De (3) vemos que $18; 000$ y $11; 000$ no son estados propios de la energía. Para obtener los estados con masas bien definidas es necesario diagonalizar la matriz masica

$$\begin{vmatrix} M(8) & M(8,1) \\ M(18) & M(1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} M_8 + \frac{4}{3} \Delta & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \Delta F \\ -\frac{2\sqrt{2}}{3} \Delta F & M_1 + \frac{2}{3} \Delta \end{vmatrix} \quad (1)$$

$$M_8 \equiv 2M - B(V,8) \quad M_1 \equiv 2M - B(V,1)$$

Entonces los estados de masas bien definidos son

$$|\phi\rangle = \cos\theta |8\rangle - \sin\theta |1\rangle, \quad |\omega\rangle = \cos\theta |1\rangle + \sin\theta |8\rangle$$

$$M(\omega) + M(\phi) = M_1 + M_8 + 2\Delta$$

$$M(\omega) M(\phi) = M_1 M_8 + \frac{2}{3} \Delta [2M_1 + M_8] + \frac{8}{9} \Delta^2 (1-F^2)$$

$$\text{tg } 2\theta = \frac{(4\sqrt{2}/3) F \Delta}{M_8 - M_1 + (2\Delta)/3} \quad (2)$$

Notemos que $M_8 \equiv M(\rho)$ y M_1 es fácilmente calculable de (2). Así obtenemos

$$M_8 = 776(3) \text{ MeV}, \quad M_1 = 794(3) \text{ MeV} \quad (3)$$

Si $M_1 = M_8$ entonces $B(V,8) = B(V,1)$ y por tanto dos fuerzas que determinen la rotura de $SU(6)$ en la representación 35 son del tipo V_F . Si realmente es así, es decir $V_F \equiv 0$, entonces

$$M(1) = M(8) \quad F = 1 \quad (\text{situación ideal}) \quad (4)$$

y entonces

$$\text{tg } 2\theta = 2\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = 35.26^\circ \quad (\text{situación ideal}) \quad (5)$$

Entonces $\cos\theta = \sqrt{2/3}$, $\sin\theta = 1/\sqrt{3}$ y entonces

$$\begin{aligned} |\phi\rangle &= -|5\rangle |3\rangle \\ |\omega\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|u\rangle |u^*\rangle + |d\rangle |d^*\rangle] \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} |\phi\rangle &= -|5\rangle |3\rangle \\ |\omega\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|u\rangle |u^*\rangle + |d\rangle |d^*\rangle] } \right\} (\text{situación ideal}) \quad (6)$$

En este caso se obtiene

$$M(\omega) + M(\phi) = 2M(K^*) \quad , \quad M(\rho) = M(\omega) \quad (\text{situación ideal}) \quad (7)$$

$$1802.2(4) = 1784.4(8) \quad , \quad 776(3) = 782.6(3) \quad (8)$$

Todo lo cual prueba que estamos muy cerca de la situación ideal.

ii) Fijemos que en la situación ideal la Δ puede también calcularse usando

$$\Delta = \frac{1}{2} [M(\phi) - M(\omega)] = 118.5 \text{ (2) MeV} \tag{1}$$

en buen acuerdo con el caso anterior.

iii) Si bien por lo que sabemos no vamos a obtener grandes diferencias en este caso quizá sería conveniente, por tratarse de mesones, usar un operador más al cuadrado. Se preservan todas las ecuaciones anteriores sustituyendo $M \rightarrow M^2$, para todas las masas, y $\Delta \rightarrow \delta^2$. Usando los procedimientos anteriores

$$\delta^2 = M^2(K^+) - M^2(\rho) = 0.1938 \text{ (54) GeV}^2$$

$$M_8^2 = 0.6022 \text{ (47) GeV}^2, \quad M_1^2 = 0.6622 \text{ (48) GeV}^2 \tag{2}$$

$$M^2(\omega) + M^2(\phi) = 2M^2(K^+) \Rightarrow 1.6520 \text{ (9) GeV}^2 = 1.5920 \text{ (14) GeV}^2$$

$$M^2(\rho) = M^2(\omega) \Rightarrow 0.6022 \text{ (47) GeV}^2 = 0.61246 \text{ (47) GeV}^2$$

$$\delta^2 = \frac{1}{2} [M^2(\phi) - M^2(\omega)] \Rightarrow \delta^2 = 0.21356 \text{ (44) GeV}^2$$

situación ideal

Es decir que vemos que no estamos nada lejos de la situación ideal.

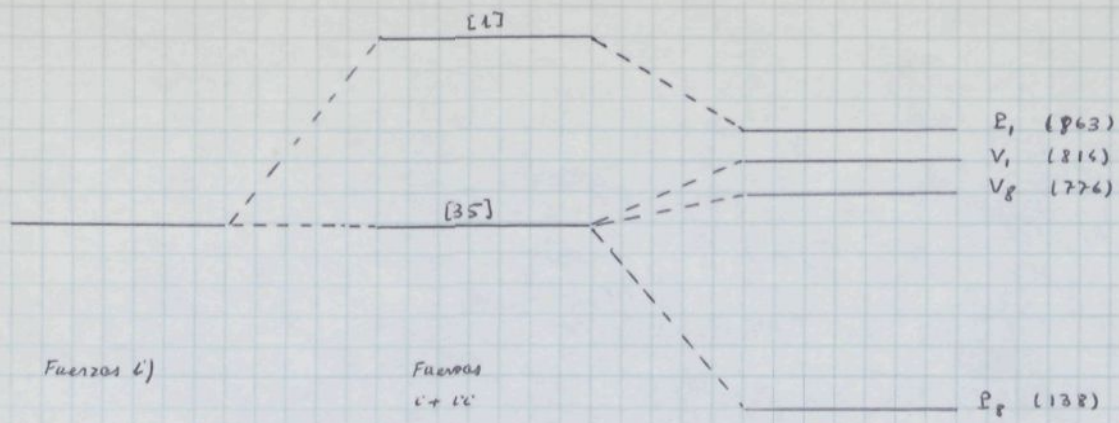
Veamos ahora la situación en el momento 0^- , en el que son válidas las mismas formulas del caso anterior. Si se usan formulas usuales se obtiene que $\Delta = M(K) - M(\pi) \approx 358 \text{ MeV}$ en claro desacuerdo con el valor obtenido antes. Usaremos por tanto formulas cuadráticas que nos conducen a

$$\delta^2 = M^2(K) - M^2(\pi) = 0.2266 \text{ GeV}^2 \tag{3}$$

$$M_8^2 = 0.01905 \text{ GeV}^2, \quad M_1^2 = 0.7459 \text{ GeV}^2$$

Fijemos que el valor de δ^2 calculado con 1^- y con el 0^- son muy parecidos. Ahora el singlete y el octeto pertenecen a representaciones de $SU(6)$ distintas, la 1 y 35, respectivamente, por lo cual si solo hay fuerzas de tipo (i) + (ii) la integral de superficie es nula. Esta situación ideal corresponde a $\theta = 0$, que sabemos que no es demasiado lejos de la realidad experimental.

Todos estos resultados indican que las fuerzas V_0 deben jugar un papel muy importante en la rotura de $SU(6)$, como se deduce fácilmente de la figura adjunta



Pasemos ahora a considerar los bariones. Si la simetría $SU(6)$ fuera exacta entonces como $6 \otimes 6 = 15 \oplus 21$, $15 \otimes 6 = 20 \oplus 70$ y $21 \otimes 6 = 56 \oplus 70$ se obtiene que

$$6 \otimes 6 \otimes 6 = 20 \oplus 56 \oplus 70 \oplus 70 \tag{1}$$

En la cadena $SU(6) \supset SU(3) \otimes SU_{spin}(2)$ se tiene que

$$20 = (1, 3/2) \oplus (8, 1/2)$$

$$56 = (8, 1/2) \oplus (10, 3/2)$$

$$70 = (1, 1/2) \oplus (8, 1/2) \oplus (8, 3/2) \oplus (10, 1/2) \tag{2}$$

Esperamos que los bariones de menor masa tengan un momento angular orbital $L=0$ y pertenecan a estas representaciones. Si solo hubiera fuerzas de tipo $l)$ estos 216 estados deberían tener todos la misma masa. Las fuerzas de tipo $l')$ son tales que separan estos tres niveles y experimentalmente sabemos que es precisamente el 56 el de masa menor es decir el octeto $1/2^+$ y el decuplete $3/2^+$.

Empecemos viendo cuales son los estados de $spin = spin$ unitario, para estas partículas. En el caso del decuplete basta tomar las funciones de $spin$ unitario dadas en (159.1) y hacer las sustituciones

$$\begin{aligned}
 s_3 = 3/2 & \quad | \omega_i \omega_j \omega_k \rangle \longrightarrow | \omega_i^\uparrow \omega_j^\uparrow \omega_k^\uparrow \rangle \\
 s_3 = 1/2 & \quad | \omega_i \omega_j \omega_k \rangle \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} [| \omega_i^\uparrow \omega_j^\uparrow \omega_k^\downarrow \rangle + | \omega_i^\uparrow \omega_j^\downarrow \omega_k^\uparrow \rangle + | \omega_i^\downarrow \omega_j^\uparrow \omega_k^\uparrow \rangle] \\
 s_3 = -1/2 & \quad | \omega_i \omega_j \omega_k \rangle \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} [| \omega_i^\downarrow \omega_j^\downarrow \omega_k^\uparrow \rangle + | \omega_i^\downarrow \omega_j^\uparrow \omega_k^\downarrow \rangle + | \omega_i^\uparrow \omega_j^\downarrow \omega_k^\downarrow \rangle] \\
 s_3 = -3/2 & \quad | \omega_i \omega_j \omega_k \rangle \longrightarrow | \omega_i^\downarrow \omega_j^\downarrow \omega_k^\downarrow \rangle
 \end{aligned} \tag{3}$$

Por tanto las funciones de onda de spin-spin unitario del decuplete $3/2^+$ son totalmente simétricas. Como los estados $1/2^+$ con $L=0$ completan, junto a los anteriores, el multiplete 56 de $SU(6)$ es de esperar que también para el octeto considerado las funciones de onda de spin-spin unitario sean totalmente simétricas. El método de proceder es algo más complicado y no lo expongo aquí. Los resultados son [W. Thirring *Ac. Phys. Austriaca Sup II*, 205 (1965)]

Decuplete ($S_z = 3/2$)

$$|\Omega^-\rangle = |s^\uparrow s^\uparrow s^\uparrow\rangle$$

$$|\Xi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} [|s^\uparrow s^\uparrow d^\uparrow\rangle + |s^\uparrow d^\uparrow s^\uparrow\rangle + |d^\uparrow s^\uparrow s^\uparrow\rangle]$$

$$|\Xi^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} [|s^\uparrow s^\uparrow u^\uparrow\rangle + |s^\uparrow u^\uparrow s^\uparrow\rangle + |u^\uparrow s^\uparrow s^\uparrow\rangle]$$

$$|\Sigma^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} [|s^\uparrow d^\uparrow d^\uparrow\rangle + |d^\uparrow s^\uparrow d^\uparrow\rangle + |d^\uparrow d^\uparrow s^\uparrow\rangle]$$

$$|\Sigma^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} [|s^\uparrow d^\uparrow u^\uparrow\rangle + |s^\uparrow u^\uparrow d^\uparrow\rangle + |d^\uparrow u^\uparrow s^\uparrow\rangle + |d^\uparrow s^\uparrow u^\uparrow\rangle + |u^\uparrow s^\uparrow d^\uparrow\rangle + |u^\uparrow d^\uparrow s^\uparrow\rangle]$$

$$|\Sigma^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} [|s^\uparrow u^\uparrow u^\uparrow\rangle + |u^\uparrow s^\uparrow u^\uparrow\rangle + |u^\uparrow u^\uparrow s^\uparrow\rangle]$$

$$|\Delta^-\rangle = |d^\uparrow d^\uparrow d^\uparrow\rangle$$

$$|\Delta^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} [|d^\uparrow d^\uparrow u^\uparrow\rangle + |d^\uparrow u^\uparrow d^\uparrow\rangle + |u^\uparrow d^\uparrow d^\uparrow\rangle]$$

$$|\Delta^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} [|u^\uparrow u^\uparrow d^\uparrow\rangle + |u^\uparrow d^\uparrow u^\uparrow\rangle + |d^\uparrow u^\uparrow u^\uparrow\rangle]$$

$$|\Delta^{++}\rangle = |u^\uparrow u^\uparrow u^\uparrow\rangle \quad (1)$$

Octeto ($S_z = 1/2$)

$$|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{18}} [2|u^\uparrow d^\downarrow u^\uparrow\rangle + 2|u^\uparrow u^\uparrow d^\downarrow\rangle + 2|d^\downarrow u^\uparrow u^\uparrow\rangle - |u^\uparrow u^\downarrow d^\uparrow\rangle - |u^\uparrow d^\uparrow u^\downarrow\rangle - |u^\downarrow d^\uparrow u^\uparrow\rangle - |d^\uparrow u^\downarrow u^\uparrow\rangle - |d^\uparrow u^\uparrow u^\downarrow\rangle - |u^\downarrow u^\uparrow d^\uparrow\rangle]$$

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{18}} [-2|d^\uparrow u^\downarrow d^\uparrow\rangle - 2|d^\uparrow d^\uparrow u^\downarrow\rangle - 2|u^\downarrow d^\uparrow d^\uparrow\rangle + |d^\uparrow d^\downarrow u^\uparrow\rangle + |d^\uparrow u^\uparrow d^\downarrow\rangle + |d^\downarrow u^\uparrow d^\uparrow\rangle + |u^\uparrow d^\downarrow d^\uparrow\rangle + |u^\uparrow d^\uparrow d^\downarrow\rangle + |d^\downarrow d^\uparrow u^\uparrow\rangle]$$

$$|\Sigma^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{18}} [2|u^\uparrow s^\downarrow u^\uparrow\rangle + 2|u^\uparrow u^\uparrow s^\downarrow\rangle + 2|s^\downarrow u^\uparrow u^\uparrow\rangle - |u^\uparrow u^\downarrow s^\uparrow\rangle - |u^\uparrow s^\uparrow u^\downarrow\rangle - |u^\downarrow s^\uparrow u^\uparrow\rangle - |s^\uparrow u^\downarrow u^\uparrow\rangle - |s^\uparrow u^\uparrow u^\downarrow\rangle - |u^\downarrow u^\uparrow s^\uparrow\rangle]$$

$$|\Sigma^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{18}} [-2|d^\uparrow s^\downarrow d^\uparrow\rangle - 2|d^\uparrow d^\uparrow s^\downarrow\rangle - 2|s^\downarrow d^\uparrow d^\uparrow\rangle + |d^\uparrow d^\downarrow s^\uparrow\rangle + |d^\uparrow s^\uparrow d^\downarrow\rangle + |d^\downarrow s^\uparrow d^\uparrow\rangle + |s^\uparrow d^\downarrow d^\uparrow\rangle + |s^\uparrow d^\uparrow d^\downarrow\rangle + |d^\downarrow d^\uparrow s^\uparrow\rangle]$$

$$|\Sigma^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{36}} [2|d^\uparrow s^\downarrow u^\uparrow\rangle + 2|d^\uparrow u^\uparrow s^\downarrow\rangle + 2|s^\downarrow u^\uparrow d^\uparrow\rangle + 2|s^\downarrow d^\uparrow u^\uparrow\rangle + 2|u^\uparrow d^\uparrow s^\downarrow\rangle + 2|u^\uparrow s^\downarrow d^\uparrow\rangle - |d^\downarrow s^\uparrow u^\uparrow\rangle - |d^\downarrow u^\uparrow s^\uparrow\rangle - |s^\uparrow u^\uparrow d^\downarrow\rangle - |s^\uparrow d^\downarrow u^\uparrow\rangle - |u^\uparrow d^\downarrow s^\uparrow\rangle - |u^\uparrow s^\uparrow d^\downarrow\rangle - |d^\uparrow s^\uparrow u^\downarrow\rangle - |d^\uparrow u^\downarrow s^\uparrow\rangle - |s^\uparrow u^\downarrow d^\uparrow\rangle - |s^\uparrow d^\uparrow u^\downarrow\rangle - |u^\downarrow d^\uparrow s^\uparrow\rangle - |u^\downarrow s^\uparrow d^\uparrow\rangle]$$

$$|\Lambda\rangle = \frac{1}{\sqrt{12}} [|d^\downarrow s^\uparrow u^\uparrow\rangle + |d^\downarrow u^\uparrow s^\uparrow\rangle + |s^\uparrow u^\uparrow d^\downarrow\rangle + |s^\uparrow d^\downarrow u^\uparrow\rangle + |u^\uparrow d^\downarrow s^\uparrow\rangle + |u^\uparrow s^\uparrow d^\downarrow\rangle - |d^\uparrow s^\uparrow u^\downarrow\rangle - |d^\uparrow u^\downarrow s^\uparrow\rangle - |s^\uparrow u^\downarrow d^\uparrow\rangle - |s^\uparrow d^\uparrow u^\downarrow\rangle - |u^\downarrow d^\uparrow s^\uparrow\rangle - |u^\downarrow s^\uparrow d^\uparrow\rangle]$$

$$|\Xi^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{18}} [-2|s^\uparrow u^\downarrow s^\uparrow\rangle - 2|s^\uparrow s^\uparrow u^\downarrow\rangle - 2|u^\downarrow s^\uparrow s^\uparrow\rangle + |s^\uparrow s^\downarrow u^\uparrow\rangle + |s^\uparrow u^\uparrow s^\downarrow\rangle + |s^\downarrow u^\uparrow s^\uparrow\rangle + |u^\uparrow s^\downarrow s^\uparrow\rangle + |u^\uparrow s^\uparrow s^\downarrow\rangle + |s^\downarrow s^\uparrow u^\uparrow\rangle]$$

$$|\Xi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{18}} [2|s^\uparrow d^\downarrow s^\uparrow\rangle + 2|s^\uparrow s^\uparrow d^\downarrow\rangle + 2|d^\downarrow s^\uparrow s^\uparrow\rangle + |s^\uparrow s^\downarrow d^\uparrow\rangle + |s^\uparrow d^\uparrow s^\downarrow\rangle - |s^\downarrow d^\uparrow s^\uparrow\rangle - |d^\uparrow s^\downarrow s^\uparrow\rangle - |d^\uparrow s^\uparrow s^\downarrow\rangle - |s^\downarrow s^\uparrow d^\uparrow\rangle] \tag{1}$$

Aquí troppezamos con una de las dificultades del modelo quark. Si aceptamos el principio de conexión spin-estadística, los quarks spin 1/2 deben ser fermiones y por tanto la función de ondas de un sistema ligado de tres quarks debe ser totalmente antisimétrica bajo el intercambio de las coordenadas de dos cualesquiera. Como la función de ondas correspondiente a SU(6) de la representación 56 considerada es totalmente simétrica, la parte espacial, de momento angular orbital total nulo, debe ser totalmente antisimétrica bajo el intercambio de dos coordenadas espaciales cualesquiera. Evidentemente es posible construir una función espacial con L=0 que sea totalmente antisimétrica como por ejemplo

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) = (r_1^2 - r_2^2)(r_2^2 - r_3^2)(r_3^2 - r_1^2) \phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) \tag{2}$$

donde ϕ es totalmente simétrica. Esta función de ondas corresponde a quarks en ondas nucleares p y f. Como tiene planes nodales la energía nuclear es alta y no esperamos que pueda corresponder al estado fundamental. En realidad para potenciales bastante generales se puede probar que la función de ondas del estado fundamental es L=0 y totalmente simétrica. Por otra parte si la función fuera antisimétrica

temdríamos problemas con los factores de forma de los nucleones. Para una discusión mas extensa de esto puntén ver J. J. J. Kokkedee ("The Quark Model" Benjamin N.Y. 1969). Si bien en un principio se intentaron distintas soluciones (para partículas, fuerzas típicas de tres cuerpos, --) ninguna de ellas era satisfactoria.

Una solución elegante a este problema y hoy totalmente aceptada es la siguiente: hasta aquí hemos considerado quarks de tres tipos o aromas distintos y esto nos ha conducido a la dificultad anterior. Una forma de lograr que la función de ondas de tres quarks sea, en su parte espacial, totalmente simétrica es introduciendo un nuevo grado de libertad para los quarks: el color. Supondremos que un quark de un determinado aroma puede ser de color verde, rojo o azul, es decir existen nueve quarks. De la misma forma que los tres aromas engendran un grupo $SU(3) \equiv SU_F(3)$, los tres colores engendran un nuevo grupo $SU(3) \equiv SU_C(3)$ y las partículas deben clasificarse en supermultipletes de $SU(6) \otimes O(3) \otimes SU_C(3)$. Se supone que la simetría $SU_C(3)$ es exacta y que todas las partículas que conocemos son singletes de color o blancas. Este hecho garantiza que todos los resultados obtenidos hasta aquí continúen siendo válidos. Al estudiar $SU_F(3)$ ya hemos visto que la función de onda singlete para tres cuerpos es totalmente antisimétrica y por tanto la parte $SU(6) \otimes O(3)$ de la función de ondas en la representación 56 debe ser totalmente simétrica y de aquí que la parte espacial con $L=0$ debe ser totalmente simétrica y por tanto la dificultad ha desaparecido.

¿Hay otras razones para creer en el color? Si, existen varias razones adicionales para creer en el color. Vámonos a apuntar algunas de ellas.

i) Consideremos la cantidad

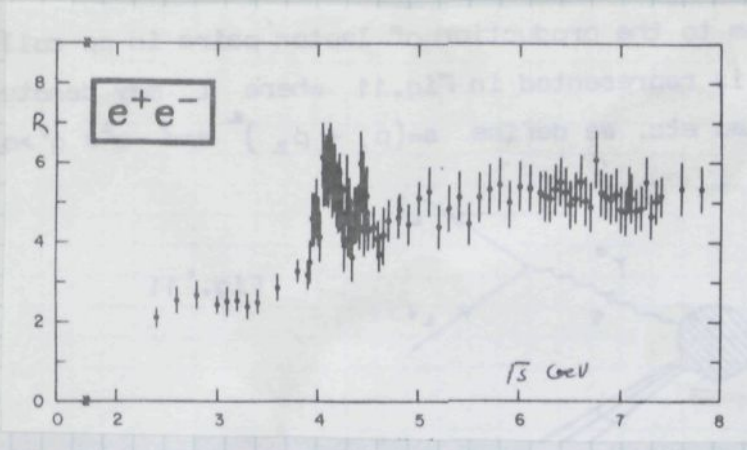
$$R \equiv \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrones})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} \tag{1}$$

Se puede probar, usando como dinámica cuántica, que a altas energías

$$R(s) = \sum_i e_{q_i}^2 \left[1 + \frac{\alpha_s(s)}{\pi} \right] \tag{2}$$

donde $\alpha_s(s)$ es la constante de "estructura fina" de la Q.C.D. Tenen presente que $\alpha_s(s) > 0$ decrece al crecer la energía. La fórmula (2) con $\alpha_s(s)$ es fácilmente derivable. Fijémosnos que $R(s) \rightarrow \sum_i e_{q_i}^2$ para $s \rightarrow \infty$ acordando con arriba.

Entonces ahora comparar la ecuación anterior con los datos experimentales olvidándonos de d_s . En la zona $1.8 \text{ GeV} \leq \sqrt{s} \leq 3.5 \text{ GeV}$, $R(s)$ es relativamente



constante y vale $R \approx 2.5$. En el modelo de los quarks u, d, s sin color $R = 2/3$ y cuando se incluye color $R = 2$, en buen acuerdo este último resultado con los datos experimentales. En la zona $5 \text{ GeV} \leq \sqrt{s} \leq 9 \text{ GeV}$, $R(s)$ se estabiliza de nuevo a

un valor $R \approx 5$. ¿Qué ha pasado? Al aumentar \sqrt{s} la energía es suficiente para crear no solo las partículas convencionales formadas a partir de los quarks u, d y s , sino también partículas encantadas que contienen un nuevo quark el c de carga $2/3$. Por otra parte también se ha abierto el canal $\sigma(e^+e^- \rightarrow e^+e^-)$ que en general se incluye en el numerador de R entonces que la producción teórica es $R = (4/9 + 4/9 + 1/9 + 4/9) + 1 = 19/9$ sin color y $R = 13/3$ con color y por tanto el color queda claramente favorecido. En la zona de energías $\sqrt{s} \approx 10 \text{ GeV}$ se producen resonancias nuevas en $R(s)$ para estabilizarse de nuevo a un valor $R \approx 5$ para $11 \text{ GeV} \leq \sqrt{s} \leq 37 \text{ GeV}$, que es la energía más alta alcanzada. En $\sqrt{s} \approx 10 \text{ GeV}$ se abre la posibilidad de crear partículas que además de tener u, d, s y c tengan un nuevo tipo de aroma el "bottom" b de carga $-1/3$. Entonces sin color $R = 20/9$ y con color $R = 14/3$

Hoy día tenemos evidencia de la existencia de quarks: u, d, s, c, b , cada uno de los cuales aparece en tres colores. Si bien el quark c fue descubierto en 1974, los teoricos lo habían postulado en 1970. El quark b fue descubierto experimentalmente en 1977 y los teoricos creen que si existe el b debe existir también el "top" t . Si bien volveremos más adelante sobre todo esto digamos que de momento general es que los constituyentes fundamentales de la naturaleza son

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}, \dots ? \quad (1)$$

Se suele hablar de tres generaciones. No sabemos que existan más generaciones y los teoricos creen que el número de generaciones debe ser ≤ 8 .

ii) Una razón teórica para creer en el color es la siguiente: Ya hemos mencionado antes el modelo de Weinberg-Salam que unifica las interacciones débiles y electromagnéticas. Esta teoría es renormalizable (es decir se pueden hacer cálculos en cualquier orden de teoría de perturbaciones) si no fuera por la existencia de anomalías. Para que estas anomalías desaparezcan es condición necesaria y suficiente que en cada generación la suma de las cargas sea cero y esto sucede si existe color pero no en caso contrario.

iii) La anchura $\Gamma(\pi^0 \rightarrow 2\gamma)$ se puede calcular exactamente y para que el resultado teórico y el experimental estén de acuerdo es necesario que

$$\sum_i T_3^{(i)} e_{Q_i}^2 = 1/2 \tag{1}$$

donde la e_{Q_i} es la carga del quark Q_i en unidades de la del fotón, $T_3^{(i)}$ es la tercera componente del isospin de Q_i y la suma se extiende a todos los componentes del π^0 es decir a los aromas u y d. Si no hay color $\sum_i T_3^{(i)} e_{Q_i}^2 = (1/2)(4/9) - (1/2)(1/9) = 1/6$, mientras que si hay color esta suma vale 1/2 como es de desear.

iv) Sin entrar en detalles también diremos que la existencia del color es necesaria para poder explicar la validez de la regla $|\Delta T| = 1/2$ en las desintegraciones débiles no leptónicas y para resolver el problema de la U(1)

Pasemos a considerar el problema de las masas en la representación 56. La fórmula (63.2) aplicada al decaimiento da

$$\begin{aligned} M(\Omega) &= 3M + 3\Delta - B \quad (10) & M(\Xi^-) &= 3M + 2\Delta - B \quad (10) \\ M(\Sigma) &= 3M + \Delta - B \quad (10) & M(\Delta) &= 3M - B \quad (10) \end{aligned} \tag{2}$$

y también

$$\Delta = M(\Omega) - M(\Xi^-) = M(\Xi^-) - M(\Sigma) = M(\Sigma) - M(\Delta) \tag{3}$$

de donde $\Delta \approx 147 \text{ MeV}$, lo cual no está en mal acuerdo con el valor $\Delta \approx 116 \text{ MeV}$ obtenido antes.

Para el octeto de bariones

$$\begin{aligned} M(N) &= 3M - B \quad (8) & M(\Xi) &= 3M + \Delta - B \quad (8) \\ M(\Lambda) &= 3M + \Delta - B \quad (8) & M(\Xi) &= 3M + 2\Delta - B \quad (8) \end{aligned} \tag{4}$$

De donde

$$M(\Lambda) = M(\Sigma) = M(N) + \Delta \tag{1}$$

$$M(\Xi) = M(N) + 2\Delta$$

La primera relación no refleja la situación experimental en la que $M(\Sigma) - M(\Lambda) = 77 \text{ MeV}$. Además los valores predichos para Δ son inconsistentes con los dados antes:

$$\Delta = M(\Sigma) - M(N) = 254 \text{ MeV}, \quad \Delta = M(\Lambda) - M(N) = 177 \text{ MeV}, \quad \Delta = \frac{1}{2}(M(\Xi) - M(N)) = 190 \text{ MeV}$$

Estas discrepancias deben atribuirse a efectos de rotura de simetrías en los potenciales de los quarks. Por ejemplo Federman et al [P.L. 22, 208 (1966)] toman en lugar de (163.2) la fórmula

$$M(\Lambda) = \langle \Psi(\Lambda) | \sum_i m_i - U(\{a\}) + \sum_{i \neq j} D_{ij} | \Psi(\Lambda) \rangle \tag{2}$$

con las masas de los quarks dados en (163.4). Los elementos de matriz de las interacciones entre dos cuerpos, D_{ij} , característicos de la rotura de la simetría dependerán, en general, del estado de spin y de isospin del sistema de los dos quarks $i-j$, pero se supone que son los mismos para todos los estados $L=0$. Esto permite obtener relaciones tales como

$$M(\Omega) - M(\Delta) = 3 [M(\Xi^*) - M(\Sigma^*)], \quad M(\Xi) - M(\Sigma) = M(\Xi^*) - M(\Sigma^*)$$

$$M(\Sigma) - M(\Lambda) + \frac{2}{3} [M(N) - M(\Xi)] = \frac{2}{3} [M(\Delta) - M(\Xi^*)] \tag{3}$$

a comparar con los resultados experimentales.

$$440 \text{ MeV} = 449 \text{ MeV}, \quad 125 \text{ MeV} = 150 \text{ MeV}$$

$$-175 \text{ MeV} = -201 \text{ MeV} \tag{4}$$

En un acuerdo relativamente aceptable con los datos experimentales.

No vamos a entrar en grandes detalles sobre el modelo quark pero si queremos estudiar los momentos magnéticos de los bariones. Como hemos dicho antes la hipótesis básica es la de covarianza: el operador momento magnético \vec{M}_A de un hadron A se escribe como la suma de los operadores de los momentos magnéticos \vec{M}_q de los quarks constituyentes. Consideramos sólo el caso $L=0$ de forma que no hay contribución orbital a \vec{M}_A . Mas aún, suponemos que el momento magnético total de un quark es proporcional a su carga

$$\vec{M}_A = \sum_e \vec{M}_e$$

$$\vec{M}_e = \frac{g_e}{2} \frac{e e}{2 M_e} \vec{\sigma}_e$$

(1)

donde e_q es la carga del quark q en unidades de la carga del positron e . Ademas M_e , g_e y $\vec{\sigma}_e$ son la masa, factor gromagnético y operador de spin para el quark q . Si realmente creemos que los quarks tienen la estructura $g_e = 2$. Se define el momento magnético de un hadrón A como el valor esperado de \vec{M}_A en el estado de $J_3 = J$. Se obtiene así:

$$\mu(p) = \frac{4}{3} \tilde{\mu}_u - \frac{1}{3} \tilde{\mu}_d$$

$$\mu(n) = \frac{4}{3} \tilde{\mu}_d - \frac{1}{3} \tilde{\mu}_u$$

$$\mu(\Sigma^+) = \frac{4}{3} \tilde{\mu}_u - \frac{1}{3} \tilde{\mu}_s$$

$$\mu(\Sigma^-) = \frac{4}{3} \tilde{\mu}_d - \frac{1}{3} \tilde{\mu}_s$$

$$\mu(\Sigma^0) = \frac{2}{3} \tilde{\mu}_u + \frac{2}{3} \tilde{\mu}_d - \frac{1}{3} \tilde{\mu}_s$$

$$\mu(\Lambda) = \tilde{\mu}_s$$

$$\mu(\Xi^0) = \frac{4}{3} \tilde{\mu}_s - \frac{1}{3} \tilde{\mu}_u$$

$$\mu(\Xi^-) = \frac{4}{3} \tilde{\mu}_s - \frac{1}{3} \tilde{\mu}_d$$

(1)

donde $\tilde{\mu}_e = (g_e/2) (e e / 2 M_e) = (g_e/2) e e (M_p / M_e) (e / 2 M_p)$. Luego en magnetones nucleares los momentos magnéticos resultan ser

$$\mu(p) = \left[\frac{4}{9} \frac{g_u}{M_u} + \frac{1}{18} \frac{g_d}{M_d} \right] M_p, \quad \mu(n) = - \left[\frac{1}{9} \frac{g_u}{M_u} + \frac{2}{9} \frac{g_d}{M_d} \right] M_p$$

$$\mu(\Sigma^+) = \left[\frac{4}{9} \frac{g_u}{M_u} + \frac{1}{18} \frac{g_s}{M_s} \right] M_p, \quad \mu(\Sigma^-) = - \left[\frac{2}{9} \frac{g_d}{M_d} - \frac{1}{18} \frac{g_s}{M_s} \right] M_p$$

$$\mu(\Sigma^0) = \left[\frac{2}{9} \frac{g_u}{M_u} + \frac{1}{9} \frac{g_d}{M_d} + \frac{1}{18} \frac{g_s}{M_s} \right] M_p, \quad \mu(\Lambda) = - \left[\frac{1}{6} \frac{g_s}{M_s} \right] M_p$$

$$\mu(\Xi^0) = - \left[\frac{1}{9} \frac{g_u}{M_u} + \frac{2}{9} \frac{g_s}{M_s} \right] M_p, \quad \mu(\Xi^-) = \left[\frac{1}{18} \frac{g_d}{M_d} - \frac{2}{9} \frac{g_s}{M_s} \right] M_p \quad (2)$$

En SU(3) exacto se va a esperar $g_e M_p / M_e = \alpha$ para todos los quarks y por tanto

$$\mu(p) = \mu(\Sigma^+) = \frac{1}{2} \alpha$$

$$\mu(n) = \mu(\Xi^0) = - \frac{1}{3} \alpha$$

$$\mu(\Sigma^-) = -\mu(\Sigma^0) = \mu(\Lambda) = \mu(\Xi^-) = - \frac{1}{6} \alpha \quad (3)$$

que no reproducen las relaciones del modelo SU(3) pero además dan

$$\frac{\mu(p)}{\mu(n)} = - \frac{3}{2} \quad (4)$$

a comparar con el valor experimental $\mu(p) / \mu(n) = - 1.4599$

Supongamos que los quarks son partículas elementales en la cual $g_q = 2$. Si $M_u = M_d = M$ entonces el momento magnético del protón se obtiene

$$M \approx 336 \text{ MeV} \quad (1)$$

Teniendo en cuenta que el protón es ligeramente más pesado que el neutrón y el valor de D dado antes masas generalmente aceptadas para los quarks constituyentes son

$$M_u \approx 336 \text{ MeV}, \quad M_d \approx 338 \text{ MeV}, \quad M_s = 470 \text{ MeV} \quad (2)$$

Con estos valores

$$\begin{aligned} \mu(p) &= 2.79 & \mu(n) &= -1.85 & \mu(\Sigma^+) &= 2.70 \\ \mu(\Sigma^-) &= -1.01 & \mu(\Lambda) &= +0.67 & \mu(\Xi^-) &= -0.58 & \mu(\Xi^0) &= -1.51 \end{aligned} \quad (3)$$

en acuerdo relativamente satisfactorio con los datos experimentales.

IX - CONSTITUYENTES FUNDAMENTALES

Ya hemos mencionado antes que la creencia general es que los constituyentes fundamentales de la naturaleza son los leptones y los quarks. Como ya comentamos hay evidencia experimental de que existen al menos tres leptones cargados (e^- , μ^- , τ^-) y sus correspondientes neutros. Por otra parte para explicar la estructura de las partículas convencionales son necesarios tres quarks (u , d , s), cada uno de los cuales aparece en tres colores posibles. Ya he mencionado antes que existe una teoría unificadora de las interacciones electromagnéticas y débiles (en el sentido que la una implica la otra) debida a Weinberg (1967) y Salam (1968). Un problema fundamental de esta teoría es que un proceso tal como el $K_L^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$ que sabemos que está fuertemente suprimido, no tenga por qué estarlo. La solución la dieron Glashow, Iliopoulos y Hara, en 1970, postulando la existencia de un nuevo quark: el encantado (c). Posteriormente (1975) se descubrió un mesón el ψ (3100) que es un estado ligado ($c\bar{c}$). En 1977 se encontró un nuevo mesón, el Υ (9500) que obligo a introducir un nuevo quark: el bottom (b). En términos de él el Υ (9500) es un estado ligado ($b\bar{b}$). Muchos teoricos creen que debe existir un nuevo aroma: el top (t).

Las partículas fundamentales son según esto

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_r & u_r & d_r \\ d_r & d_r & d_r \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_r & c_r & c_r \\ s_r & s_r & s_r \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_r & t_r & t_r \\ b_r & b_r & b_r \end{pmatrix}, \tag{1}$$

Se suele decir que sabemos de la existencia de tres generaciones, si bien podría ser que existieran otras de cuya existencia no tenemos noticia. Evidentemente cada una de estas partículas tiene la antipartícula correspondiente. Todas estas partículas tienen spin $1/2$ y se refieren puntuales, es decir sin estructura. Los quarks tienen todos ellos spin-paridad $1/2^+$ y número bariónico $B = 1/3$. Los quarks u, c, t tienen carga $+2/3$ y los d, s, b tienen carga $-1/3$. Para todos ellos vale la relación

$$Q = T_3 + \frac{1}{2} Y \tag{2}$$

$$Y \equiv B + S + C + b + t$$

donde tanto el charm (c), el bottom (b) y el top (t) son como la extrema carga

es decir números cuánticos aditivos

	T	T_3	S	C	b	t	γ
u	$1/2$	$1/2$	0	0	0	0	$1/3$
d	$1/2$	$-1/2$	0	0	0	0	$1/3$
s	0	0	-1	0	0	0	$-2/3$
c	0	0	0	1	0	0	$1/3$
b	0	0	0	0	-1	0	$-2/3$
t	0	0	0	0	0	1	$1/3$

Hay una diferencia esencial entre los leptones y los quarks; los leptones solo tienen interacciones débiles y si están cargados tienen también interacción electromagnética. Los quarks tienen los tres tipos de interacciones. Otra diferencia esencial es que los leptones aparecen como partículas libres, mientras que los quarks se ve que se hallan permanentemente confinados en el interior de los hadrones. El hecho de que los quarks no se hayan observado en el laboratorio como partículas libres y que muchos teoricos creen que se hallan permanentemente confinados hace extraordinariamente difícil hablar de la masa de los quarks. Las masas constituyentes es decir las masas de los quarks como constituyentes de los hadrones son del orden de:

$$M_u \approx 0.336 \text{ GeV}, \quad M_d \approx 0.338 \text{ GeV}, \quad M_s \approx 0.470 \text{ GeV}$$

$$M_c \approx 1.5 \text{ GeV}, \quad M_b \approx 4.7 \text{ GeV}, \quad M_t \approx 19 \text{ GeV} \quad (1)$$

Antes de pasar a ocuparnos de la espectroscopia de las nuevas partículas queremos decir algo sobre sus interacciones.

i) La teoría electrodébil

Así se designa a veces la teoría de Weinberg - Salam, que pretende explicar todas las interacciones débiles y electromagnéticas conocidas. No es unificada en el pleno sentido de la palabra pues requiere dos conjuntos de acoplamiento

g y g' , si bien la existencia de una de las interacciones implica la de la otra. En general el análisis de los resultados experimentales se hace en términos de g y g' , sino en términos de dos constantes relacionadas:

$$g \sin \theta_w = g' \cos \theta_w = e \tag{1}$$

donde e es la carga eléctrica elemental y θ_w el ángulo de Weimberg. Los valores experimentales son

$$\alpha = 1/137.03604 \tag{11} \quad \sin^2 \theta_w = 0.230 \tag{15} \tag{2}$$

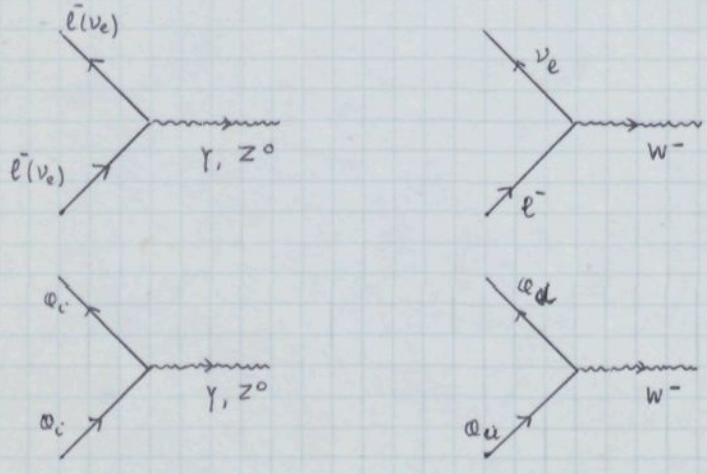
Exactamente igual que el electromagnetismo es una teoría gauge y también los mediadores de la interacción son partículas de spin uno. En este caso hay cuatro mediadores: γ , W^\pm , Z^0 . El fotón y el Z^0 coinciden con sus anti-partículas y el W^+ es la antipartícula del W^- . La masa del fotón es $M_\gamma = 0$ y la de los otros bosones intermedios es

$$M_W = \left[\frac{\pi \alpha}{12 G} \right]^{1/2} \frac{1}{\sin \theta_w} = \frac{37.2816 (41)}{\sin \theta_w} \text{ GeV} = 77.7 (2.7) \text{ GeV} \tag{13}$$

$$M_Z = \left[\frac{\pi \alpha}{12 G} \right]^{1/2} \frac{1}{\sin \theta_w \cos \theta_w} = \frac{37.2816 (41)}{\sin \theta_w \cos \theta_w} \text{ GeV} = 88.6 (2.1) \text{ GeV}$$

Notemos que sus masas son muy elevadas y hasta hoy día no han podido ser obtenidas.

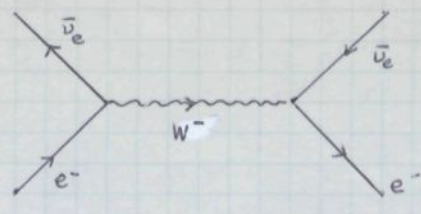
Los acoplamientos de los leptones y quarks con los bosones intermedios se puede representar esquemáticamente en los diagramas



con el bien entendido que el neutrino no se acopla al fotón. Hemos indicado por Q_u un quark de carga $2/3$ y por Q_d uno de carga $-1/3$. Los procesos mediados por el γ y Z^0 se llaman de corrientes neutras y los mediados por el W^\pm de corrientes cargadas.

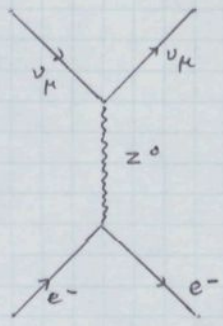
Veamos algunos ejemplos

i) $\bar{\nu}_e e^- \rightarrow \bar{\nu}_e e^-$



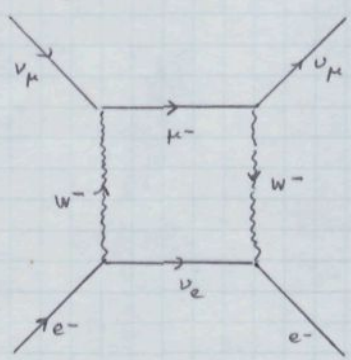
Proceso medido por corrientes cargadas

ii) $\nu_\mu e^- \rightarrow \nu_\mu e^-$



Proceso medido por corrientes neutras

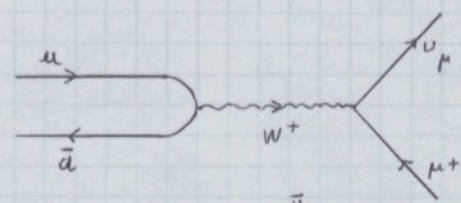
Uno de los grandes éxitos de la teoría de Weinberg - Salam fue predecir la existencia de corrientes neutras débiles. En esta teoría ambas secciones eficaces son del mismo orden de magnitud, mientras que si no hubiera corrientes débiles neutras el segundo proceso tendría una sección eficaz mucho más pequeña pues sería debido a diagramas del tipo



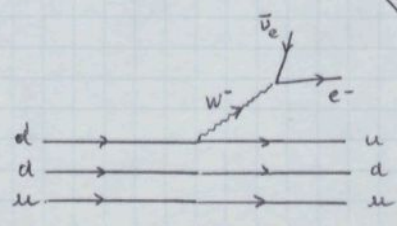
Segundo orden en débiles convencionales.

Las corrientes débiles neutras fueron descubiertas experimentalmente en el CERN en 1976

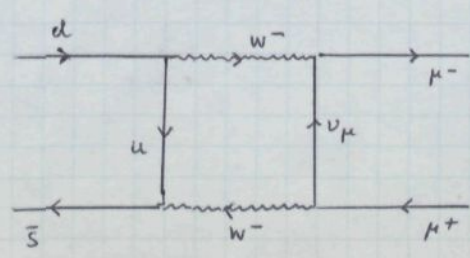
iii) $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$



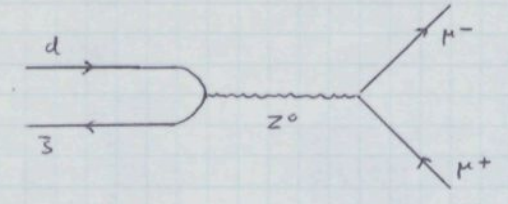
iv) $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$



v) $K^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$

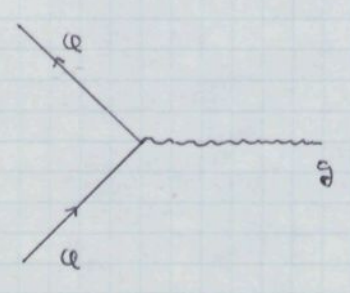


El hecho de que este diagrama sea de segundo orden explica la razón por la que la amplitud del proceso $K^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$ es muy pequeña. Fijémosnos que si hubiera corrientes neutras en cambio de extrínseca el proceso podría tener lugar en primer orden:



ii) Cromodinámica Cuántica

Con este nombre se designa la teoría que describe las interacciones fuertes entre los quarks. Es en analogía con la electrodinámica cuántica una teoría gauge y en tanto las interacciones entre quarks vienen mediadas por bosones intermedios de spin 1. Estos mediadores se llaman gluones y hay de ocho tipos distintos. Todos ellos tienen masa nula. La interacción quark-gluon puede representarse



siendo la única propiedad del quark que cambia en este vértice el color. Esto evidentemente implica que los gluones tienen carga nula. También se sigue inmediatamente que las interacciones fuertes conservan los números cuánticos $T, T_3, S, C, b, t, \dots$

Se obtiene que el equivalente a la constante de estructura fina de la Q.E.D, α_s , no es realmente una constante sino una función de la energía $\alpha_s(q^2)$ (constante de acoplamiento efectiva) que puede escribirse aproximadamente como

$$\alpha_s(q^2) = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{1 + [11 - \frac{2}{3}N] \frac{\alpha_s(\mu^2)}{4\pi} \ln\left(-\frac{q^2}{\mu^2}\right)} \tag{11}$$

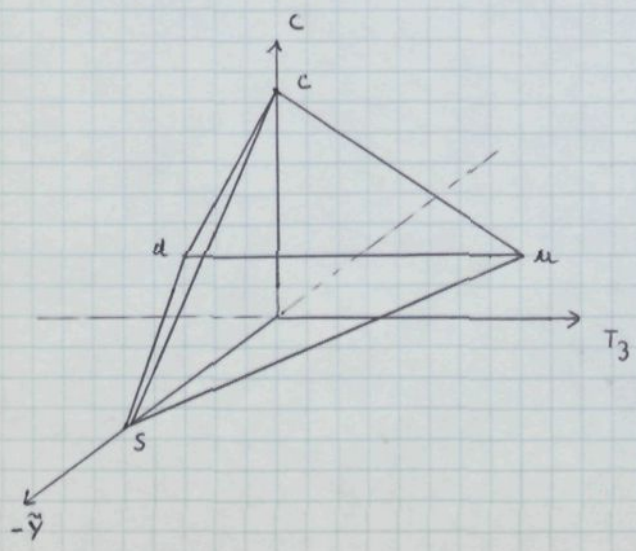
donde N es el número de aromas y μ^2 es un parámetro que fija la escala de energía, arbitrariamente elegido.

La ecuación anterior tiene una característica muy importante: si el número de aromas es $N \leq 16$ entonces a medida que $(-g^2)$ varía la constante de acoplamiento efectiva se hace más pequeña y en el límite de energías muy altas los quarks se comportan como partículas libres, lo cual está de acuerdo con los hechos experimentales. En procesos de altas energías los quarks constituyentes se comportan prácticamente como libres y es válido hacer cálculos perturbativos en serie de potencias de $\alpha_s(g^2)$ como los que se realizan en electrodinámica cuántica.

Se tiene la esperanza que la cromodinámica cuántica no solo presente libertad asintótica sino que también tenga es de virtud infrarroja. Esto implica que a grandes distancias entre los quarks, es decir cuando la energía de interacción es pequeña, la constante de interacción efectiva sea muy grande y que esto haga imposible o extraordinariamente difícil la liberación de los quarks o los gluones. Digamos sin embargo que la situación teórica es muy confusa y aun cuando el problema del confinamiento está siendo atacado de formas muy distintas de momento los resultados son muy pobres.

De momento la Q.C.D. permite hacer predicciones, que parecen estar de acuerdo con los datos experimentales, en procesos de altas energías, pero no sabemos prácticamente nada de como la Q.C.D. da origen a los complejos fenómenos que dictan la estructura de los hadrones y las interacciones fuertes a energías bajas.

Después de esta breve descripción de las interacciones fundamentales queremos volver al problema de la clasificación de los hadrones. Supongamos de momento que existen cuatro aromas de quarks: u, d, s y c . Los quarks pertenecen ahora a la representación fundamental de $SU(4)$. Es conveniente a efectos de



dibujar introduciendo $\tilde{Y} = Y - \frac{4}{3} C$ (1)

Evidentemente tanto Y como \tilde{Y} coinciden con la perpendicular normal para partículas sin encanto. Con la definición (1) la fórmula de Gell-Mann - Nishijima puede escribirse

$$Q = T_3 + \frac{1}{2} \tilde{Y} + \frac{2}{3} C \quad (2)$$

En la cadena $SU(4) \supset SU(3) \otimes U_c(1)$ es fácil ver que la representación 4 de $SU(4)$ contiene un triplete de $SU(3)$ con $C=0$ y un singlete de $SU(3)$ con $C=1$:

$$4 = (3, 0) \oplus (1, 1) \tag{1}$$

Similarmenete para la representación 4^* , que contiene los anti-quarks, se tiene

$$4^* = (3^*, 0) \oplus (1, -1) \tag{2}$$

Por otra parte

$$4^* \otimes 4 = \begin{matrix} \square \\ \square \\ \square \end{matrix} \otimes \begin{matrix} \square \\ \square \\ \square \end{matrix} = \begin{matrix} \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{matrix} \oplus \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \end{matrix} = 1 \oplus 15 \tag{3}$$

y

$$\begin{aligned} 4^* \otimes 4 &= [(3^*, 0) \oplus (1, -1)] \otimes [(3, 0) \oplus (1, 1)] = \\ &= (3^*, 0) \otimes (3, 0) \oplus (3^*, 0) \otimes (1, 1) \oplus (1, -1) \otimes (3, 0) \oplus (1, -1) \otimes (1, 1) \\ &= (1, 0) \oplus (8, 0) \oplus (3^*, 1) \oplus (3, -1) + (1, 0) \end{aligned} \tag{4}$$

y finalmente en la cadena $SU(6) \supset SU(3) \otimes U_c(1)$

$$1 = (1, 0) \tag{5}$$

$$15 = (8, 0) \oplus (1, 0) \oplus (3^*, 1) \oplus (3, -1)$$

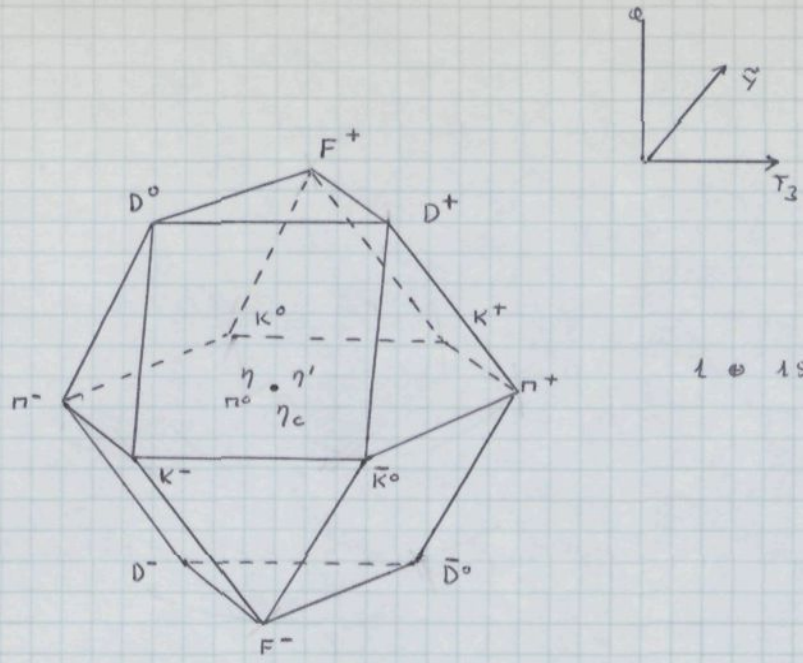
Como los mesones son estados ligados quark-anti-quark se deben colocar en representaciones 1 y 15 de $SU(6)$, cuyo contenido en la cadena $SU(6) \supset SU(3) \otimes U_c(1)$ es la dada en (5).

El papel jugado antes por $SU(6) \otimes O(3) \otimes SU_{color}(3)$ lo juega ahora $SU(8) \otimes O(3) \otimes SU_c(3)$ en la construcción del modelo quark no relativista como

$$8 \otimes 8 = 1 \oplus 63 \tag{6}$$

y en la hipótesis de que los estados ligados mas ligeros del sistema quark-anti-quark sean los de $L=0$ y singletes de color, los mesones mas ligeros son:

- i) Un singlete de $SU(3)$ con $C=0$ y spin-paridad 0^- (el de la 1)
- ii) Un 15-multiplete de $SU(4)$ con 0^-
- iii) Un 16-multiplete de $SU(4)$ con 1^- .



1 @ 15, 0-

Los contenidos en quarks en lo que podemos llamar mezcla ideal son

$$|K^+\rangle = |u\bar{s}\rangle, \quad |K^0\rangle = |d\bar{s}\rangle, \quad |K^-\rangle = |s\bar{u}\rangle, \quad |K^0\bar{0}\rangle = |s\bar{d}\rangle$$

$$|\pi^+\rangle = |u\bar{d}\rangle, \quad |\pi^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle], \quad |\pi^-\rangle = |d\bar{u}\rangle$$

$$|\eta\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} [|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle - 2|s\bar{s}\rangle], \quad |\eta'\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} [|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle + |s\bar{s}\rangle]$$

$$|\eta_c\rangle = |c\bar{c}\rangle$$

$$|D^+\rangle = |c\bar{d}\rangle, \quad |D^0\rangle = |c\bar{u}\rangle, \quad |D^-\rangle = |d\bar{c}\rangle, \quad |D^0\bar{0}\rangle = |u\bar{c}\rangle$$

$$|F^+\rangle = |c\bar{s}\rangle, \quad |F^-\rangle = |s\bar{c}\rangle$$

(1)

La situación para los mesones 1^- es análoga exceptuando que los estados unitales y con mezcla ideal son

$$|\omega\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle], \quad |\phi\rangle = -|s\bar{s}\rangle$$

$$|\psi\rangle = |c\bar{c}\rangle$$

(2)

La primera de todas estas partículas nuevas descubiertas fue la $\psi(3100)$ llamada a veces $\psi(1S)$ pues fue la primera, en 1976, por dos grupos y uno se llamaron ψ y los otros J . Sus características son

$$\psi(3100) \quad T^G(J^P)C = 0^-(1^-)- \quad M = 3097 \pm 1 \quad \Gamma = 63 \pm 9 \text{ keV} \quad (3)$$

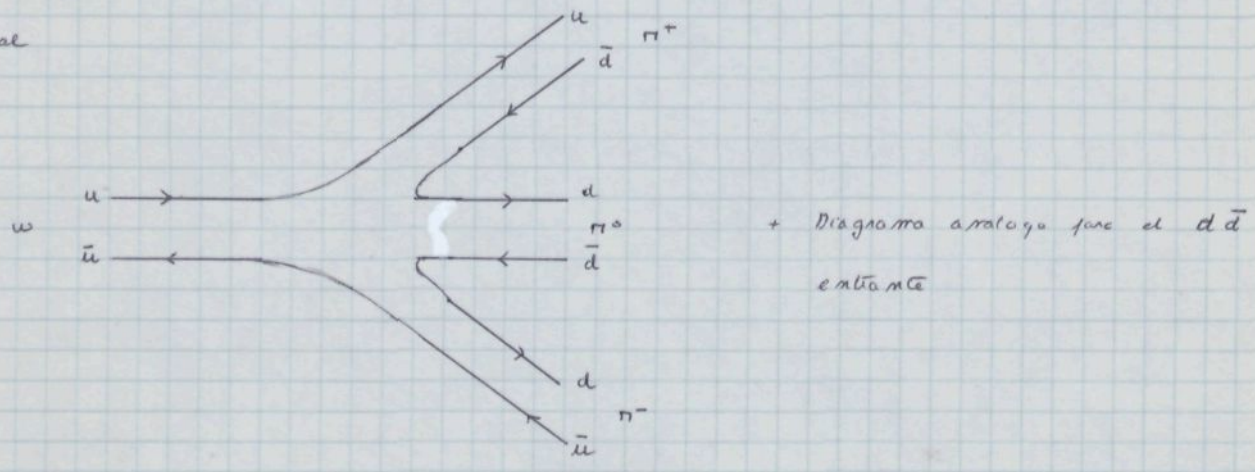
y los principales modos de desintegración y sus branching ratios son

$\psi \longrightarrow e^+ e^-$	0.07 ± 0.01	
$\longrightarrow \mu^+ \mu^-$	0.07 ± 0.01	
\longrightarrow hadrones	0.86 ± 0.02	(1)

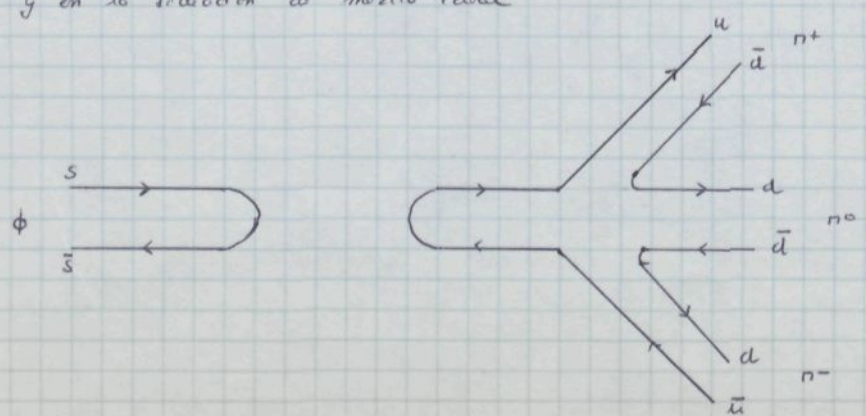
Como las ramitas de desintegraciones hadrónicas son extraordinariamente numerosas el hecho más sorprendente de la ψ es que su anchura es extraordinariamente pequeña, pues en general hadrones de esta masa tienen anchuras del orden de los 100 MeV. Vamos a intentar entender este hecho. En los anillos de almacenamiento e^+e^- se producen resonancias tales como el ω , ϕ , ψ todas ellas con $T^G(J^P)C$ análogas a la anterior, que se llaman mesones vectoriales. Sus anchuras y formas más importantes de desintegración para las dos primeras son

$\omega: \Gamma = 10.1 \pm 0.3 \text{ MeV}$	$\omega \longrightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$	$0.898 (5)$
	$\longrightarrow \pi^+ \pi^-$	$1.4 (2) \times 10^{-2}$
$\phi: \Gamma = 4.1 \pm 0.2 \text{ MeV}$	$\omega \longrightarrow K^+ K^-$	$0.486 (12)$
	$\longrightarrow K_L K_S$	$0.352 (12)$
	$\longrightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$	$0.147 (7)$

Como la G-paridad del estado inicial es -1 la desintegración normal de todas estas resonancias tendría que ser lógicamente a términos de 3π . Intentemos dibujar los diagramas de flujo de quarks. Para el ω tenemos en la solución de mezcla ideal



Para el ϕ y en la solución de mezcla ideal



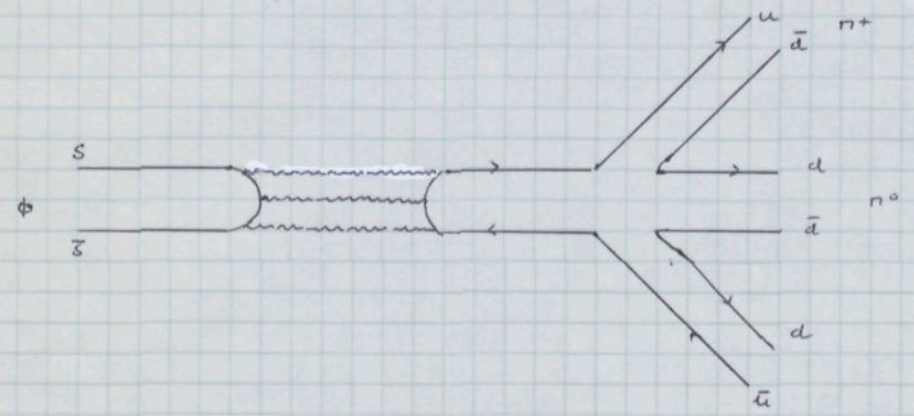
Los dos diagramas son topológicamente muy distintos. En el segundo es posible trazar una línea que sin cortar una línea de quarks aisle un hadrón (diagrama desconectado), mientras que en el primer caso esto no es posible. Ya en los años sesenta apareció la regla fenomenológica de Orubo - Zweig - Iizuka (OZI) [S. Orubo P.L. 5, 105 (1963), G. Zweig CERN Rep TH 401, 412 (1964), J. Iizuka, K. Okada y O. Stultz Prog. Theor. Phys. 35, 1061 (1966)]. Esta regla dice que los diagramas conectados son permitidos y los desconectados son prohibidos. Notemos en este caso que

$$\frac{\Gamma(\omega \rightarrow 3\pi)}{\Gamma(\phi \rightarrow 3\pi)} = 15.0 \pm 2.2 \tag{1}$$

cuando por supuesto se tiene $\Gamma(\phi \rightarrow 3\pi) > \Gamma(\omega \rightarrow 3\pi)$

El funcionamiento de la regla OZI puede entenderse en términos de la Q.C.D. En los diagramas conectados la interacción entre quarks es debida a gluones "suaves" y por lo tanto es fuerte. En diagramas desconectados se cuben intercambian gluones "duros" donde α_s es pequeña. Si la Q.C.D perturbativa es aplicable, entonces el número de un proceso con n gluones duros, cada uno de los cuales lleva una energía E , debe ser proporcional a $[\alpha_s(E)]^n$

Segun esto el diagrama $\phi \rightarrow 3\pi$ debe ser de la forma



El intercambio de un solo gluon real es prohibido por conservación de color.

Pues a semejanza del ortopositronio se debe desintegrar en tres gluones. Vemos pues que este diagrama está suprimido por un factor $[\alpha_s(E)]^3$

Un estado $J^P = 1^-$ puede desintegrarse en tres fotones reales como en el caso del ortopositronio. En analogía esperamos que también se pueda desintegrar en 3 gluones.

Para el positronio es

$$\Gamma(1^- \rightarrow 3\gamma) = \frac{64}{9} (n^2 - 9) \frac{1}{M^2} |\psi(0)|^2 \alpha^3 \tag{2}$$

y para el caso de cines (L=0)

$$\Gamma(1^- \rightarrow 3g) = \frac{64}{9} (n^2 - 9) \frac{1}{M^2} |\psi(0)|^2 \frac{5}{18} \alpha_s^3 (M^2) \tag{3}$$

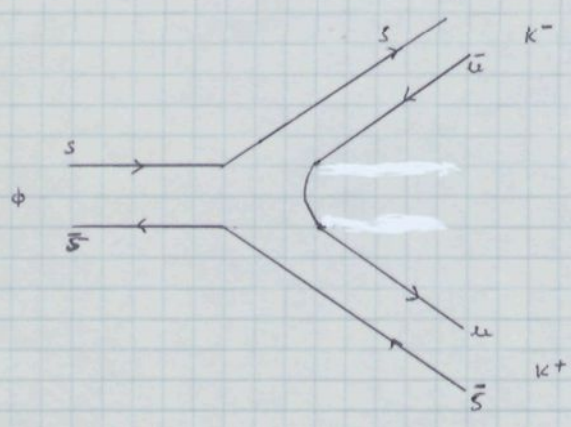
En estas expresiones M es la masa del sistema t^- y $\psi(0)$ es la función de ondas en el origen del sistema inercial. El factor $5/18$ es debido al color. Suponiendo que la conversión de los 3 gluones en hadrones ordinarios vaya con prácticamente 100% de probabilidad, la expresión anterior nos da la anchura de $t^- \rightarrow$ hadrones (solo los desconectados). Aquí nos falta $|\psi(0)|^2$ y una forma de hacerlo desaparecer es tomar en cuenta que un estado $(\bar{0}\bar{0})$ en t^- se desintegra en $t^- \rightarrow e^+e^-$ con una anchura $(L=0)$

$$\Gamma(t^- \rightarrow e^+e^-) = 16\pi\alpha^2\alpha_s^2 \frac{|\psi(0)|^2}{M^2} \left(1 + \frac{2M_e^2}{M^2}\right) \left(1 - \frac{4M_e^2}{M^2}\right)^{1/2} \quad (1)$$

Como en los casos de e, μ $M_e^2 \ll M^2$ despreciaremos los dos últimos factores. Entonces

$$R = \frac{\Gamma(t^- \rightarrow 3g \rightarrow \text{hadrones})}{\Gamma(t^- \rightarrow e^+e^-)} = \frac{10}{81\pi} (\pi^2 - 9) \frac{1}{\alpha^2} \frac{\alpha_s^3(M^2)}{\alpha^2} \approx 642 \frac{1}{\alpha^2} \alpha_s^3(M^2) \quad (2)$$

Para el ϕ se tiene que $R = 526 (74)$ lo cual da $\alpha_s^3(M_\phi^2) \approx 0.45 (2)$. Notemos que en R solo hemos incluido los canales de extraños. Al quedar despreciado el canal $\bar{0}\bar{0}$ la desintegración más probable del ϕ es yendo a partículas extrañas que no está prohibida



La anchura de este proceso está muy deprimida debido a espacio físico $M_\phi - 2M_u \approx 32 \text{ MeV}$. Hemos asumido la situación ideal en realidad la ϕ tiene una pequeña mezcla de $u\bar{u}$ y $d\bar{d}$ que se puede reintegrar normalmente a $3\bar{0}$.

Podemos ahora a considerar el $\psi(3100)$. Se sabe que es un estado muy puro de $c\bar{c}$, en el estado 3S_1 como los anteriores. Veamos cuales son las desintegraciones posibles:

i) la desintegración más normal permitida por la regla de OZI es $(c\bar{c}) \rightarrow (c\bar{u}) + (\bar{c}u)$.

Sin embargo la partícula conectada con menor masa es la D^0 con una masa $M(D^0) = 1863.3(9) \text{ MeV}$ y por tanto la ley de conservación de energía - momento prohíbe este canal.

(ii) Otra posibilidad es que el $(c\bar{c})$ se aniquile con la emisión de gluones o fotones dependiendo de si estamos tratando una desintegración fuerte o electromagnética. Como en el caso del positronio debemos recordar que un estado con $J=0$ puede decaer en dos gluones o dos fotones. Ejemplos de estos casos son $\psi \rightarrow 3\pi$ (análogo al caso $\phi \rightarrow 3\pi$) con anchura proporcional a α_s^3 , $\psi \rightarrow 2\pi$ que es puramente electromagnético pues G-paridad lo prohíbe como proceso fuerte y cuya anchura es proporcional a α^2 , $\psi \rightarrow \phi + 2\pi$ que es fuerte y con anchura proporcional a α_s^4 , etc.

Teniendo en cuenta que ahora $R = 12.3(2.3)$ se encuentra $\alpha_s(M_\psi^2) = 0.204(12)$, lo cual está de acuerdo con el valor obtenido por otros procedimientos y con el hecho de que α_s disminuye con la energía.

(iii) Si $(c\bar{c})$ no está en el estado fundamental puede desintegrarse emitiendo un fotón o gluones sin romper el sistema $(c\bar{c})$. Una desintegración típica de este tipo es $\psi(1^-) \rightarrow \eta_c(0^-) + \gamma$ que es HL.

Hoy día hay clara evidencia de partículas con encanto. libres es decir que tienen $C = \pm 1$. y tanto las mesones D y F han sido hallados. Memoraremos solo el D^\pm y el $D^0(\bar{D}^0)$ de spin-paridad 0^- y que son los de menor masa

$$D^\pm \quad T(J^P) = \frac{1}{2}(0^-) \quad M = 1868.3(9) \quad \tau = \left(2.5 \pm \frac{3.5}{1.5} \right) \times 10^{-13} \text{ ns}$$

$$D^0, \bar{D}^0 \quad \frac{1}{2}(0^-) \quad 1863.1(9) \quad \tau = \left(0.8 \pm \frac{0.3}{-0.15} \right) \times 10^{-13} \text{ s}$$

Como las interacciones fuertes y electromagnéticas conservan el encanto y estas partículas son los de menor masa deben desintegrarse débilmente de acuerdo con los valores observados para c . Por otra parte en las desintegraciones semileptónicas y no leptónicas del D tienden a estar favorecidas las desintegraciones con al menos un K en el estado final, lo cual está totalmente de acuerdo con la teoría electrodébil en la que la transición $c \rightarrow s$, queda favorecida frente a las $c \rightarrow u$ y $c \rightarrow d$.

Dinamos finalmente que no solo se ha observado el estado ligado $(c\bar{c})$ descrito anteriormente sino varios otros. Estos estados se conocen con el nombre de charmonium y a han encontrado, pero no lógicamente, fórmulas que describen la situación experimental. Para la parte central se suele usar

$$V(r) = -3 \frac{4}{9} \alpha_s(M^2) \frac{1}{r} + a r$$

La primera parte es pura Q.C.D y la segunda se introduce a modo para tener en cuenta el confinamiento. La constante $a \approx 1.2 \text{ GeV fm}^{-1}$.

Entonces podríamos extender esta discusión a los bariones, si bien no lo vamos a hacer pues todo el algebra resulta mas complicada. El mejor estado de todos ellos es

$$\Lambda_c \quad M = 2.273 (6) \text{ keV} \quad , \quad \tau = (1.14 \pm_{-0.44}^{+0.90}) \times 10^{-13} \text{ s.} \quad Q = 1$$

que es un estado $\frac{1}{2}^+$ con la composición (cud)

Antes de terminar con todo esto digamos unas pocas palabras sobre el bottom. En el estudio de la sección eficaz e^+e^- en canales de almacenamiento sincrotrón, en 1977, se pico muy estrecho que se denominó Υ

$$\Upsilon \quad J^P = 1^- \quad M = 9.458 (6) \text{ GeV} \quad \Gamma = (35 \pm_{-17}^{+34}) \text{ KeV}$$

y $\Gamma(\Upsilon \rightarrow e^+e^-) = (1.23 \pm 0.24) \text{ keV}$. Este estado se interpreta como un estado ligado ($b\bar{b}$) y es muy estrecho por razones análogas a las del ψ . En este caso $R = 28 \pm_{-16}^{+41}$ y $\alpha_s(M_p^2) = 0.17 \pm 0.5$. Hay duda si corren otras excitaciones del sistema ($b\bar{b}$) y hay una cierta evidencia experimental en favor de una partícula con bottom libre.