

ITZYKSON and ZUBER

- C. ITZYKSON and J. B. ZUBER "Quantum Field Theory" McGraw-Hill 1980
- P. RAMOND "Field Theory, A Modern Primer" Benjamin 1981
- A.I. AKHIEZER, and V. B. BERESTETSKII "Quantum Electrodynamics" Interscience 1955
- J.D.BJORKEN y S.D. DRELL "Relativistic Quantum Mechanics" McGraw-Hill 1964
"Fields" 1965
- N.N. BOGOLIOUBOV y D.V. SHIRKOV "Quantum Fields" Benjamin 1983 (1958)
- N.N. BOGOLIOUBOV "Axiomatic Quantum Field Theory" Benjamin 1975
- M. CREUTZ "Quarks, Gluons and Lattices" Cambridge U.P. 1983
- L.D. FADDEEV y A.A. SLAVNOV "Gauge Fields: Introduction to Quantum Theory" Benjamin 1980
- JAM. JAUCH y R. ROHLICH "The Theory of photons and electrons" Addison Wesley 1955
- D. LURIE "Particles and Fields" Interscience 1968
- C. NASH "Relativistic Quantum Fields" Acad. Press 1978
- S.S. SCHWEBER "An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory" ^{Harper-} Row. Peterson 1961
- J. SCHWINGER "Particles, Sources and Fields" Addison Wesley 1970
- ^{R.F.} STREATER, A.S. WIGHTMAN "PCT, Spin, Statistics and all that" Benjamin 1966

I - EL GRUPO DE POINCARÉ

Un proceso típico de la física de las partículas elementales es

$$A_1 + A_2 + \dots + A_{m_i} \longrightarrow B_1 + B_2 + \dots + B_{m_f} \quad (1)$$

donde el estado inicial consiste de m_i partículas que se mueven libremente en el pasado remoto, después sufren una interacción y finalmente emergen m_f partículas, que se mueven libremente en el futuro remoto. Para describir de forma apropiada un proceso de colisión del tipo anterior deberíamos conocer

- i) Las leyes de transformación de los estados de partícula libre bajo el grupo de Poincaré, pues entonces sobreemos automáticamente las leyes de transformación bajo este grupo de los estados inicial y final y por tanto las condiciones precisas que la invariancia relativista impone sobre las amplitudes de transición.
- ii) Las propiedades generales del operador invariante relativista (matriz S) que relaciona los estados entrantes y los salientes y cuyos elementos de matriz nos permiten calcular las secciones eficaces y las anchuras de transición.
- iii) Finalmente la pregunta central de toda la física de partículas ¿cuáles son las leyes fundamentales que gobiernan la dinámica de las partículas en interacción?

Vamos a empezar considerando el punto i). Una hipótesis básica es que los estados puros y los observables de un sistema físico pueden ser representados por rayos unitarios y por operadores autoadjuntos, respectivamente, en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ complejo y separable. La inversa no es cierta debido a la existencia de reglas de superselección. Se ve que el conjunto de todos los operadores asociados con reglas de superselección es abeliano, de forma que $\mathcal{H}$ se puede descomponer en una suma directa

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3 \oplus \dots \quad (2)$$

de subespacios inherentes mutuamente ortogonales, tales que:

- i) En cada $\mathcal{H}_i$ vale un limitaciónes el principio de superposición
- ii) No hay observables que conecten subespacios distintos, es decir

$$\langle \varphi_i | A | \varphi_j \rangle = 0 \quad \text{si} \quad |\varphi_i\rangle \in \mathcal{H}_i, \quad |\varphi_j\rangle \in \mathcal{H}_j \quad \text{con} \quad i \neq j \quad (1)$$

para cualquier observable A

- iii) Todos los elementos de un dado $\mathcal{H}_i$ representan estados puros realizables físicamente y son estados propios de todos los operadores de superselección con el mismo conjunto de valores propios, cambiando este conjunto de un espacio a otro.
- iv) La fase relativa de dos vectores, uno en $\mathcal{H}_i$ y el otro en $\mathcal{H}_j$, con $j \neq i$, está físicamente indeterminada.

El grupo de Poincaré $\mathcal{P}$ se define como el conjunto de aquellas transformaciones reales inhomogéneas

$$\{a, \Lambda\} : \quad \begin{aligned} x &\longrightarrow \Lambda x + a \\ x^\mu &\longrightarrow \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu \end{aligned} \quad (2)$$

que dejan invariante la distancia Minkowskiana

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dx^T G dx \quad (3)$$

$$G = |g_{\mu\nu}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Una transformación es de Poincaré si y sólo si

$$a^* = a, \quad \Lambda^* = \Lambda, \quad \Lambda^T G \Lambda = G \quad (4)$$

De la última de estas relaciones $(\det \Lambda)^2 = 1$ y por tanto

$$\det \Lambda = \pm 1 \quad (5)$$

lo cual implica que Λ tiene inversa. De (4) se deduce inmediata-

tamente que $(\Lambda^{-1})^T G (\Lambda^{-1}) = G$ y por tanto

$$\Lambda G \Lambda^T = G \quad (1)$$

De (2.2) se deduce la ley de multiplicación

$$\begin{aligned} \{a_1, \Lambda_1\} \{a_2, \Lambda_2\} &= \{a_1 + \Lambda_1 a_2, \Lambda_1 \Lambda_2\} \\ \{a, \Lambda\}^{-1} &= \{-\Lambda^{-1} a, \Lambda^{-1}\} \end{aligned} \quad (2)$$

Es inmediato probar que el conjunto de las transformaciones de Poincaré forman un grupo.

Una propiedad importante se deduce fácilmente de (2.4):

$$\Lambda^T G \Lambda = G \Leftrightarrow \Lambda_{\lambda\mu} \Lambda^{\lambda\nu} = g_{\mu\nu} \Rightarrow \text{si } \mu=\nu=0 \quad \Lambda_{\lambda 0} \Lambda^{\lambda 0} = 1$$

$$(\Lambda^0_0)^2 - (\Lambda^i_0)^2 = 1 \Rightarrow (\Lambda^0_0)^2 = 1 + (\Lambda^i_0)^2 \Rightarrow$$

$$(\Lambda^0_0)^2 \geq 1 \quad (3)$$

Entonces las transformaciones de Poincaré se pueden dividir en cuatro subconjuntos

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad \mathcal{P}_+^\uparrow & \quad \Lambda^0_0 \geq 1, \quad \det \Lambda = +1 \\ \text{ii)} \quad \mathcal{P}_-^\uparrow & \quad \Lambda^0_0 \geq 1, \quad \det \Lambda = -1 \\ \text{iii)} \quad \mathcal{P}_+^\downarrow & \quad \Lambda^0_0 \leq -1, \quad \det \Lambda = +1 \\ \text{iv)} \quad \mathcal{P}_-^\downarrow & \quad \Lambda^0_0 \leq -1, \quad \det \Lambda = -1 \end{aligned} \quad (4)$$

Subgrupos importantes del grupo de Poincaré $\mathcal{P}$ son

i) Grupo de Lorentz: Formado por las transformaciones $(0, \Lambda)$

ii) Grupo ortocrono propio: Formado por las transformaciones $\mathcal{P}_+^\uparrow$

iii) Grupo ortocrono: Formado por $\mathcal{P}_+^\uparrow \cup \mathcal{P}_-^\uparrow = \mathcal{P}^\uparrow$

iv) Grupo propio: Formado por $\mathcal{P}_+^\uparrow \cup \mathcal{P}_+^\downarrow = \mathcal{P}_+$

v) Grupo de rotaciones $O(3)$: Formado por las transformaciones

$$a \equiv 0, \quad \Lambda = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{vmatrix}, \quad R^* = R, \quad R^T R = R^T R = I$$

(1)

$$\det R = +1$$

Veamos que los elementos de $\mathcal{P}_+^\uparrow$ forman un grupo. Sean (a_1, Λ_1) y (a_2, Λ_2) dos elementos de $\mathcal{P}_+^\uparrow$, entonces

$$\det(\Lambda_1, \Lambda_2) = \det \Lambda_1, \det \Lambda_2 = +1$$

$$\begin{aligned} (\Lambda_1, \Lambda_2)^0_0 &= (\Lambda_1)_{00} (\Lambda_2)_{00} - (\Lambda_1)_{0k} (\Lambda_2)_{k0} \geq \\ &\geq (\Lambda_1)_{00} (\Lambda_2)_{00} - [(\Lambda_1)_{0k} (\Lambda_1)_{0k}]^{1/2} [(\Lambda_2)_{e0} (\Lambda_2)_{e0}]^{1/2} \\ &= (\Lambda_1)_{00} (\Lambda_2)_{00} - [(\Lambda_1)_{00}^2 - 1]^{1/2} [(\Lambda_2)_{00}^2 - 1]^{1/2} \geq 1 \end{aligned}$$

Los restantes casos se demuestran de forma trivial.

Notar además

c) Si $\Lambda \in L_-^\uparrow$ entonces existe una $\Lambda_1 \in L_+^\uparrow$ tal que

$$\Lambda = \Lambda_1 I_S \quad I_S = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -I \end{vmatrix} \quad (\text{inversión espacial}) \quad (2)$$

cc) Si $\Lambda \in L_-^\downarrow$ entonces existe una $\Lambda_1 \in L_+^\uparrow$ tal que

$$\Lambda = \Lambda_1 I_t \quad I_t = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I \end{vmatrix} \quad (\text{inversión temporal}) \quad (3)$$

ccc) Si $\Lambda \in L_+^\downarrow$ entonces existe una $\Lambda_1 \in L_+^\uparrow$ tal que

$$\Lambda = \Lambda_1 I_{st} \quad I_{st} \equiv I_S I_t \quad (\text{inversión total}) \quad (4)$$

En lo que sigue nos limitaremos a considerar el grupo de Poincaré ortónimo y propio que para abreviar la notación indicaremos simplemente por $\mathcal{P}$. Resulta conveniente escribir (2.2) en forma matricial

$$(x) = \begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (a, \Lambda) = \begin{bmatrix} \Lambda^0_0 & \Lambda^0_1 & \Lambda^0_2 & \Lambda^0_3 & a^0 \\ \Lambda^1_0 & \Lambda^1_1 & \Lambda^1_2 & \Lambda^1_3 & a^1 \\ \Lambda^2_0 & \Lambda^2_1 & \Lambda^2_2 & \Lambda^2_3 & a^2 \\ \Lambda^3_0 & \Lambda^3_1 & \Lambda^3_2 & \Lambda^3_3 & a^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$(x) \longrightarrow (a, \Lambda)(x)$$

La correspondencia $\{a, \Lambda\} \longrightarrow (a, \Lambda)$ define de forma natural una representación matricial de $\mathcal{P}$ cuya imagen puede identificarse con el grupo de Poincaré.

Los elementos de $\mathcal{P}$ infinitesimalmente cercanos a la identidad $(0, I)$ son de particular interés. Serán de la forma

$$(a, \Lambda) = (I) + i(P^\mu) \delta a_\mu - \frac{i}{2} (M^{\mu\nu}) \delta \omega_{\mu\nu} \quad (2)$$

donde (I) es la matriz identidad 5×5 , δa_μ , $\delta \omega_{\mu\nu} (\equiv -\delta \omega_{\nu\mu})$ son 10 parámetros reales infinitesimales y los llamados generadores de $\mathcal{P}$, (P^μ) , $(M^{\mu\nu}) (\equiv -(M^{\nu\mu}))$ son matrices 5×5 puramente imaginarias con elementos dados por

$$(P^\mu)^{\rho}_{\quad 4} = -i g^{\mu\rho} \quad (M^{\mu\nu})^{\rho}_{\quad \sigma} = i (g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\nu\rho} g^{\mu\sigma}) \quad (3)$$

siendo cero los restantes (el índice 4 ha sido introducido para caracterizar la última fila y columna de la matriz). Es inmediato comprobar que (2) corresponde a

$$x'^\mu = x^\mu + \delta a^\mu + \delta \omega^{\mu\nu} x^\nu \quad (4)$$

Las combinaciones lineales de estos 10 generadores sustentan la llamada álgebra de Lie de $\mathcal{P}$, que es cerrada bajo la operación de conmutación

$$[(P^\mu), (P^\nu)] = 0$$

$$[(M^{\lambda\rho}), (P^\mu)] = -i \{ g^{\lambda\mu} (P^\rho) - g^{\rho\mu} (P^\lambda) \} \quad (5)$$

$$[(M^{\lambda\rho}), (M^{\mu\nu})] = -i \{ g^{\lambda\mu} (M^{\rho\nu}) + g^{\rho\nu} (M^{\lambda\mu}) - g^{\rho\mu} (M^{\lambda\nu}) - g^{\lambda\nu} (M^{\rho\mu}) \}$$

que caracterizan de forma única, salvo isomorfismos, las propiedades

los valores de $\mathcal{P}$ y valen de idéntica forma para cualquier representación del grupo de Poincaré.

Cuando $\delta\omega_{\mu\nu} \equiv 0$, (a, I) representa una traslación infinitesimal pura $x^\mu \longrightarrow x^\mu + \delta a^\mu$ cuya integración para "a" finita es inmediata

$$(a, I) = \exp \{ i a_\mu (P^\mu) \} \quad (1)$$

Notar que

$$i a_\mu (P^\mu) = \begin{vmatrix} 0 & a^\mu \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (a_\mu (P^\mu))^2 = 0 \quad (2)$$

$$(a, I) = \begin{vmatrix} I & a^\mu \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$x^\mu \longrightarrow x^\mu + a^\mu$$

Similarmemente si $\delta a_\mu \equiv 0$, $\delta\omega_{0i} \equiv 0$ y $\delta\omega_{12} = m^3 \delta\theta$, $\delta\omega_{23} = m^1 \delta\theta$, $\delta\omega_{31} = m^2 \delta\theta$, donde $\vec{m}$ es un vector unitario, entonces $(0, 2)$ representa la rotación Euclídea infinitesimal de ángulo $\delta\theta$ alrededor del eje $\vec{m}$. Como $\delta\omega_{ij} = \epsilon_{ijk} m^k \delta\theta$ entonces

$$\vec{x}' = \vec{x} + (\vec{m} \times \vec{x}) \delta\theta \quad (3)$$

$$(0, R_{\vec{m}, \delta\theta}) = (I) - \frac{i}{2} (M^{ij}) \epsilon_{ijk} m^k \delta\theta$$

Introduciendo

$$(J^i) \equiv \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} (M^{jk}) \quad (4)$$

$$\Rightarrow (J^1) \equiv (M^{23}), \quad (J^2) \equiv (M^{31}), \quad (J^3) \equiv (M^{12})$$

y la transformación (3) es

$$(0, R_{\vec{m}, \delta\theta}) = (I) - i \delta\theta \vec{m} \cdot (\vec{J}) \quad (5)$$

y la transformación finita es

$$(0, R(\hat{m}, \theta)) = \exp \left\{ -i \theta \hat{m} \cdot (\vec{J}) \right\} \quad (1)$$

Es inmediato comprobar que las (J^i) satisfacen las reglas de conmutación usuales del momento angular

$$[(J^i), (J^j)] = i \epsilon_{ijk} (J^k) \quad (2)$$

Para las (J^i) los elementos de la quinta fila y de la quinta columna son idénticamente nulos y los restantes vienen dados por

$$(\hat{m} \cdot \vec{J})^{\mu}_{\nu} = -i \epsilon^{\mu}_{\nu\lambda} m^{\lambda} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -im^3 & im^2 \\ 0 & im^3 & 0 & -im^1 \\ 0 & -im^2 & im^1 & 0 \end{vmatrix} \quad (3)$$

$$[(\hat{m} \cdot \vec{J})^2]^{\mu}_{\nu} = g^{\mu}_{\nu} - g^{\mu 0} g^0_{\nu} + m^{\mu} m_{\nu}$$

$$[(\hat{m} \cdot \vec{J})^3]^{\mu}_{\nu} = (\hat{m} \cdot \vec{J})^{\mu}_{\nu}$$

Teniendo esto en cuenta

$$(R(\hat{m}, \theta))^{\mu}_{\nu} = g^{\mu}_{\nu} \cos \theta + g^{\mu 0} g_{0\nu} (1 - \cos \theta) - (1 - \cos \theta) m^{\mu} m_{\nu} + \epsilon^{\mu}_{\nu\lambda} m^{\lambda} \sin \theta \quad (4)$$

Notar que

$$(R(\hat{m}, \theta))^0_0 = 1 \quad (R(\hat{m}, \theta))^0_i = (R(\hat{m}, \theta))^i_0 = 0 \quad (5)$$

$$(R(\hat{m}, \theta))^i_j = \delta^i_j \cos \theta - (1 - \cos \theta) m^i m_j + \epsilon_{ijk} m^k \sin \theta$$

Es fácil comprobar que esto es una rotación de ángulo θ alrededor del eje $\hat{m}$.

De forma análoga podemos considerar $\delta a_{\mu} \equiv 0$, $d\omega_{ij} \equiv 0$ y $\delta\omega_{0i} = m^i d\psi$ donde $\vec{m}$ es unitario, entonces

$$x'^0 = x^0 + \delta\psi (\vec{m} \cdot \vec{X}) \quad (6)$$

$$x'^i = x^i + \delta\psi m^i x^0$$

Se tiene

$$(0, B(\hat{m}, \delta\psi)) = (I) - i (M^{0i}) m^i \delta\psi \quad (7)$$

Introduciendo

$$(N^i) \equiv (M^{0i})$$

(1)

$$(0, B(\hat{m}, \partial\psi)) = (1) - i(\vec{N}) \cdot \hat{m} \partial\psi$$

y la transformación finita es

$$(0, B(\hat{m}, \psi)) = \exp \left\{ -i\psi (\vec{N}) \cdot \hat{m} \right\} \quad (2)$$

Es fácil comprobar que

$$[(N^i), (N^j)] = -i\epsilon_{ijk} (J^k) \quad (3)$$

$$[(N^i), (J^j)] = +i\epsilon_{ijk} (N^k)$$

Para los (N^i) los elementos de la quinta fila y de la quinta columna son idénticamente nulos y los restantes vienen dados por

$$(\hat{m} \cdot \vec{N})^\mu{}_\nu = -i(g^{0\mu} m_\nu - g^0_\nu m^\mu) = \begin{vmatrix} 0 & im^1 & im^2 & im^3 \\ im^1 & 0 & 0 & 0 \\ im^2 & 0 & 0 & 0 \\ im^3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$[(\hat{m} \cdot \vec{N})^2]^\mu{}_\nu = -g^{0\mu} g^0_\nu + m^\mu m_\nu \quad (4)$$

$$[(\hat{m} \cdot \vec{N})^3]^\mu{}_\nu = -(\hat{m} \cdot \vec{N})^\mu{}_\nu$$

Teniendo esto en cuenta (2) y estos resultados

$$B(\hat{m}, \psi)^\mu{}_\nu = g^\mu{}_\nu + (1 - \cosh \psi) (\hat{m} \cdot \vec{N})^2{}^\mu{}_\nu - i \sinh \psi (\hat{m} \cdot \vec{N})^\mu{}_\nu \quad (5)$$

Introducimos

$$v^0 \equiv 0, \quad v^i \equiv m^i \tanh \phi, \quad v \equiv \sqrt{v^i v^i} = \tanh \phi < 1 \quad (6)$$

$$\sinh \psi = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}, \quad \cosh \psi = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$$

entonces si

$$B(\vec{n}) \equiv B(\hat{m}, \psi)$$

$$B(\vec{v})^\mu{}_\nu = g^\mu{}_\nu - \left[g^{0\mu} g_{0\nu} - \frac{v^\mu v_\nu}{v^2} \right] \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \right] - \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} (g^{0\mu} v_\nu - g_{0\nu} v^\mu) \quad (1)$$

es decir

$$B(\vec{v})^0{}_0 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \quad B(\vec{v})^0{}_i = B(\vec{v})^i{}_0 = + \frac{v^i}{\sqrt{1-v^2}} \quad (2)$$

$$B(\vec{v})^i{}_j = \delta^i{}_j + \frac{1}{v^2} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \right] v^i v_j$$

y la transformación de coordenadas correspondiente es

$$x'^\mu = B(\vec{v})^\mu{}_\nu x^\nu = \begin{cases} x'^0 = \frac{x^0 + \vec{v} \cdot \vec{x}}{\sqrt{1-v^2}} \\ \vec{x}' = \vec{x} + \left[\frac{1}{\sqrt{1-v^2}} - 1 \right] \frac{(\vec{v} \cdot \vec{x}) \vec{v}}{v^2} + \frac{\vec{v} x^0}{\sqrt{1-v^2}} \end{cases} \quad (3)$$

que es un boost puro. Notar que para $v \ll 1$ esto se reduce a la transformación de Galileo $x'^0 = x^0$ y $\vec{x}' = \vec{x} + \vec{v} t$

De las reglas de conmutación (8.3) es evidente que en general los boost no forman grupo. Sin embargo si se consideran los boosts en una dirección fija del espacio entonces estos forman grupo y a partir de (3) se prueba fácilmente que

$$B(\vec{v}_1) B(\vec{v}_2) = B \left(\frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{1 + \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2} \right) \quad \text{si } \vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2 \quad (4)$$

y en particular

$$B(\vec{v}) B(-\vec{v}) = I \quad (5)$$

Hemos dedicado especial atención a las rotaciones y a los boosts pues estos juegan un papel muy importante gracias al siguiente teorema: Cualquier $\Lambda \in L_+^\uparrow$ se puede escribir en forma única como

$$\Lambda = B(\vec{v}) R(\hat{m}, \theta) = R(\hat{m}', \theta') B(\vec{v}') \quad (6)$$

Procedamos a su demostración. Elijamos

$$v^i = + \frac{\Lambda^{i0}}{\Lambda^{00}} \quad (1)$$

Notar que

$$v^i v^i = \frac{\Lambda^{i0} \Lambda^{i0}}{\Lambda^{00} \Lambda^{00}} = 1 - \frac{1}{(\Lambda^{00})^2} < 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = \Lambda^{00} \quad (2)$$

Luego v^i es admisible como velocidad y de (9.2)

$$B(\vec{v})^0_0 = \Lambda^{00}, \quad B(\vec{v})^0_i = B(\vec{v})^i_0 = \Lambda^{i0}, \quad (3)$$

$$B(\vec{v})^i_j = \delta^i_j - \frac{1}{1 + \Lambda^{00}} \Lambda^{i0} \Lambda_{j0}$$

Consideremos ahora $\tilde{\Lambda} = B(-\vec{v}) \Lambda$, es fácil comprobar que

$$\tilde{\Lambda}^0_0 = B(-\vec{v})^0_0 \Lambda^0_0 + B(-\vec{v})^0_k \Lambda^k_0 = \Lambda^{00} \Lambda^{00} - \Lambda^{k0} \Lambda^{k0} = 1$$

$$\tilde{\Lambda}^0_i = B(-\vec{v})^0_0 \Lambda^0_i + B(-\vec{v})^0_j \Lambda^j_i = \Lambda^{00} \Lambda^0_i - \Lambda^{j0} \Lambda^j_i = 0$$

y análogamente $\tilde{\Lambda}^i_0 = 0$. Al ser $\tilde{\Lambda}$ una rotación se ha demostrado que $\Lambda = B(\vec{v}) \tilde{\Lambda}$ y en tanto la descomposición deseada existe. Veamos que es única. Supongamos que no fuera así

$$\Lambda = B(\vec{v}) R(\hat{m}, \theta) = B(\vec{v}') R(\hat{m}', \theta') \Rightarrow$$

$$B(-\vec{v}) B(\vec{v}) R(\hat{m}, \theta) R^{-1}(\hat{m}', \theta') = B(-\vec{v}) B(\vec{v}') R(\hat{m}', \theta') R^{-1}(\hat{m}', \theta') \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R(\hat{m}, \theta) R^{-1}(\hat{m}', \theta') = B(-\vec{v}) B(\vec{v}') \quad (4)$$

de donde se deduce que $B(-\vec{v}) B(\vec{v}')$ es una simple rotación. En particular

$$[B(-\vec{v}) B(\vec{v}')]^0_0 = \frac{1 - \vec{v} \cdot \vec{v}'}{\sqrt{1-v^2} \sqrt{1-v'^2}}$$

y como este debe valer +1 se tiene que $\vec{v} = \vec{v}'$. Ahora bien esto implica que $R(\hat{m}, \theta) R^{-1}(\hat{m}', \theta') = I$ y en tanto $\hat{m} = \hat{m}'$, $\theta = \theta'$ y en tanto la descomposición es única. De forma análoga se demuestra la otra descomposición.

Como cualquier elemento de $\mathcal{P}$ es el producto de una transformación pura de Lorentz y de una rotación Euclídea, seguida de un desplazamiento espacio-temporal, las fórmulas anteriores nos permiten expresar cualquier $\{a, \Lambda\} \in \mathcal{P}$ en términos de los generadores (P^μ) y $(M^{\mu\nu})$. Teniendo en cuenta lo anterior es fácil probar que

$$(a, \Lambda) (P^\mu) (a, \Lambda)^{-1} = \Lambda^\mu_\nu (P^\nu) \quad (1)$$

$$(a, \Lambda) (M^{\mu\nu}) (a, \Lambda)^{-1} = \Lambda^\mu_\lambda \Lambda^\nu_\rho [(M^{\lambda\rho}) + a^\lambda (P^\rho) - a^\rho (P^\lambda)]$$

Supongamos ahora que un observador inercial $\mathcal{O}$ prepara, con la ayuda de algún aparato $\mathcal{P}$, un estado puro de un sistema físico. Este observador representará el estado mediante un vector estado $|\psi\rangle$ normalizado, que está determinado salvo en fase y que es independiente del tiempo en la imagen de Heisenberg. Algún aparato de medida M permitirá a $\mathcal{O}$ obtener información física de $|\psi\rangle$ que podrá expresarse en términos de las probabilidades de transición $|\langle\varphi|\psi\rangle|^2$, donde $|\varphi\rangle$ represente un estado sobre el que proyecta M . Si una transformación de Poincaré $\{a, \Lambda\}$ es aplicada a $\mathcal{P}$ y a M , los vectores estado resultantes, vistos por $\mathcal{O}$, serán ahora $|\psi'\rangle$ y $|\varphi'\rangle$ y la nueva probabilidad de transición será $|\langle\varphi'|\psi'\rangle|^2$. Pero el principio de la relatividad exige la invariancia de los experimentos físicos bajo las transformaciones de Poincaré. Por tanto

$$|\langle\varphi'|\psi'\rangle|^2 = |\langle\varphi|\psi\rangle|^2 \quad (2)$$

Mas aún, es claro que los vectores estado que aparecen en la expresión anterior son realizables físicamente, por construcción, y que la correspondencia continua entre estados físicos inducida por la transformación de Poincaré es uno a uno. Como $\mathcal{P}$ es conexo, cualquier $\{a, \Lambda\}$ puede ser generado a partir de la identidad de forma continua. Como resultado, las operaciones $\{a, \Lambda\}$ transforman cada subespacio coherente $\mathcal{H}_i$ en sí mismo y un famoso teorema, debido a Wigner, establece que existe un operador unitario $U(a, \Lambda)$, único salvo un factor ± 1 , que deja invariante cada uno de los $\mathcal{H}_i$ y tal que

$$|\psi'\rangle = U(a, \Lambda) |\psi\rangle, \quad |\varphi'\rangle = U(a, \Lambda) |\varphi\rangle \quad (3)$$

$$U(a_1, \Lambda_1) U(a_2, \Lambda_2) = \pm U(a_1 + a_2, \Lambda_1 \Lambda_2)$$

esto es $U(a, \Lambda)$ al actuar sobre un vector estado de su transformado bajo $\{a, \Lambda\}$, y la correspondencia $\{a, \Lambda\} \rightarrow U(a, \Lambda)$ define una representación continua y unitaria, salvo un factor ± 1 , de $\mathcal{P}$. Como $\mathcal{P}$ es conexo esta representación quedará conocida tan pronto como los representantes de los generadores de las transformaciones infinitesimales de $\mathcal{P}$ queden determinados. Si $\{a, \Lambda\}$ está muy cercano a la identidad $\{0, I\}$, es decir la matriz (a, Λ) puede escribirse como en (5.2) y también

$$U(a, \Lambda) = I + i P^\mu \delta a_\mu - \frac{i}{2} M^{\mu\nu} \delta \omega_{\mu\nu} \quad (1)$$

donde los operadores P^μ y $M^{\mu\nu}$ son autoadjuntos pues $U(a, \Lambda)$ es unitaria y representan los generadores (P^μ) y $(M^{\mu\nu})$, respectivamente. Se puede demostrar que (11.3) implica que P^μ y $M^{\mu\nu}$ satisfacen las mismas reglas de conmutación y de transformación que los generadores *

$$[P^\mu, P^\nu] = 0$$

$$[M^{\lambda\rho}, P^\mu] = +i (g^{\lambda\mu} P^\rho - g^{\rho\mu} P^\lambda)$$

$$[M^{\lambda\rho}, M^{\mu\nu}] = -i (g^{\lambda\mu} M^{\rho\nu} + g^{\rho\nu} M^{\lambda\mu} - g^{\rho\mu} M^{\lambda\nu} - g^{\lambda\nu} M^{\rho\mu}) \quad (2)$$

$$U^{-1}(a, \Lambda) P^\mu U(a, \Lambda) = \Lambda^\mu_\nu P^\nu$$

$$U^{-1}(a, \Lambda) M^{\mu\nu} U(a, \Lambda) = \Lambda^\mu_\lambda \Lambda^\nu_\rho (M^{\lambda\rho} + a^\lambda P^\rho - a^\rho P^\lambda)$$

lo cual demuestra que P^μ es un operador escalar invariante bajo transformaciones y $M^{\mu\nu}$ un operador tensorial de rango dos, antisimétrico y no invariante bajo las traslaciones.

Como ya hemos dicho antes los operadores $U(a, \Lambda)$ no mezclan distintos espaciales coherentes y por tanto tampoco lo hacen los operadores autoadjuntos P^μ y $M^{\mu\nu}$ y son por tanto candidatos a observables del sistema físico bajo consideración. Sabemos de la mecánica cuántica que los generadores de las traslaciones (notaciones) pueden interpretarse físicamente como los observables energía-momento (momento angular). Entonces identificamos P^μ con el cuadrimomento y $J^i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} M^{jk}$ con el momento angular. La primera de las

43/001

* De $U(a_1, \Lambda_1) U(a_2, \Lambda_2) = U(a_1 + \Lambda_1 a_2, \Lambda_1 \Lambda_2)$

se obtiene

$$U(\delta a_1^\mu, g_{\mu\nu}) U(0, g_{\mu\nu} + \delta \omega_{\mu\nu}) U(-\delta a_1^\mu, g_{\mu\nu}) U(0, g_{\mu\nu} - \delta \omega_{\mu\nu}) = U(-\delta \omega_{\mu\nu} \delta a_1^\nu, 0) \Rightarrow$$

$$[I + i P_\mu \delta a_1^\mu] [I - \frac{i}{2} M^{\mu\nu} \delta \omega_{\mu\nu}] [I - i P_\mu \delta a_1^\mu] [I + \frac{i}{2} M^{\mu\nu} \delta \omega_{\mu\nu}] = [I - i P_\mu \delta \omega_{\mu\nu} \delta a_1^\nu]$$

$$\begin{aligned} I + \frac{i}{2} M^{\mu\nu} \delta \omega_{\mu\nu} - i P_\mu \delta a_1^\mu + \frac{1}{2} P_\mu \delta a_1^\mu M^{\rho\sigma} \delta \omega_{\rho\sigma} - \frac{i}{2} M^{\mu\nu} \delta \omega_{\mu\nu} - \\ - \frac{1}{2} M^{\mu\nu} \delta \omega_{\mu\nu} P_\rho \delta a_1^\rho + i P_\mu \delta a_1^\mu - \frac{1}{2} P_\rho \delta a_1^\rho M^{\mu\nu} \delta \omega_{\mu\nu} + \frac{1}{2} P_\mu \delta a_1^\mu M^{\rho\sigma} \delta \omega_{\rho\sigma} \\ = I - i P_\mu \delta \omega_{\mu\nu} \delta a_1^\nu \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} [P^\mu, M^{\rho\sigma}] a_{1\rho} \delta \omega_{\rho\sigma} = -i P^\mu \delta \omega_{\mu\nu} \delta a_1^\nu \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} [P^\mu, M^{\rho\sigma}] \delta \omega_{\rho\sigma} = -i P_\nu \delta \omega_{\nu}{}^\mu \Rightarrow (2).$$

Igualmente para el otro.

Si $|\psi\rangle$ es tal que $\langle \psi | P^\mu | \psi \rangle = p^\mu$ entonces $|\psi'\rangle = U(\Lambda, a) |\psi\rangle$ debe ser tal que

$$\langle \psi' | P^\mu | \psi' \rangle = \Lambda^\mu{}_\nu p^\nu, \text{ pero } \langle \psi | U^{-1}(\Lambda, a) P^\mu U(\Lambda, a) | \psi \rangle = \Lambda^\mu{}_\nu p^\nu$$

y esto implica que $U^{-1}(\Lambda, a) P^\mu U(\Lambda, a) = \Lambda^\mu{}_\nu P^\nu$

relaciones (12.2) muestra que los P^μ son observables que conmutan y por tanto los números cuánticos asociados pueden servir para especificar los estados cuánticos. Esta especificación será, en general, incompleta pues sabemos que en muchos casos (partículas con spin) son necesarios otros números cuánticos.

El spin, por tener naturaleza geométrica, debe aparecer de alguna forma a partir de los generadores de $\mathcal{P}$. Esto es así; introduzcamos los operadores autoadjuntos

$$W^\mu \equiv \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} P_\nu M_{\lambda\sigma} \quad (1)$$

De (12.2) se puede probar que W^μ es un operador cuadrivector invariante bajo traslaciones, exactamente como P^μ . Esto implica que $W^2 \equiv W^\mu W_\mu$ y $P^2 \equiv P^\mu P_\mu$ son escalares bajo el grupo de Poincaré y por tanto conmutan con P^μ y $M^{\mu\nu}$, lo cual también se puede probar fácilmente teniendo en cuenta que

$$[W^\mu, P^\nu] = 0$$

$$[W^\mu, W^\nu] = i \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} P_\lambda W_\sigma \quad (2)$$

$$[W^\mu, M^{\lambda\sigma}] = i (g^{\mu\lambda} W^\sigma - g^{\mu\sigma} W^\lambda)$$

El hecho de que los W^μ no conmuten entre sí significa que además de P^μ , P^2 , W^2 se puede elegir solo una de las componentes de W^μ para caracterizar los estados. Una elección conveniente de este nuevo observable es

$$W_m \equiv - \frac{W \cdot m}{[(P \cdot m)^2 - P^2 m^2]^{1/2}} \quad (3)$$

donde m^μ es un vector arbitrario de género tiempo, con $m^0 > 0$. Eligiendo $m^\mu \equiv (1, 0, 0, 0)$ entonces

$$W_{(0)} = \frac{\vec{J} \cdot \vec{P}}{|\vec{P}|} \quad (4)$$

que es el llamado operador helicidad. El operador W_m se transforma como

$$U(a, \Lambda) W_m U^{-1}(a, \Lambda) = W_{\Lambda^{-1}m} \quad (5)$$

y como existe siempre una transformación de Lorentz que hace pasar de un m^μ al $(1, 0, 0, 0)$, el operador W_m se puede interpretar como aquel observable que en un cierto sistema de referencia corresponde a la helicidad en otro sistema de referencia adecuado.

Hemos por tanto obtenido un sistema de observables que conmutan

$$P^2, W^2, P^\mu, W_m \quad (1)$$

y ahora quisiéramos dar el espectro de estos operadores para sistemas relativistas elementales caracterizados por el hecho de que los operadores $U(a, 1)$ dan lugar a representaciones irreducibles de $\mathcal{P}$. Esto es muy complejo y los únicos casos de interés físico parecen ser los siguientes:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad P^2 &: p^2 = m^2 > 0, \quad m > 0 \\ W^2 &: w^2 = -m^2 j(j+1), \quad j \geq 0 \text{ entero o semientero} \\ P^\mu &: p^\mu \in \Omega_+(m) \equiv \{p^\mu; p^2 = m^2, p^0 > 0\} \\ W_m &: w_m = -j, -j+1, \dots, j-1, j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad P^2 &: p^2 = 0 \\ W^2 &: w^2 = 0 \\ P^\mu &: p^\mu \in \Omega_+(0) \equiv \{p^\mu; p^2 = 0, p^0 > 0\} \\ W_m &: w_m = \pm j \text{ (sólo uno)}, \quad j > 0 \text{ entero o semientero} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad P^2 &: p^2 = 0 \\ W^2 &: w^2 = 0 \\ P^\mu &: p^\mu = 0 \\ W_m &: w_m = 0 \end{aligned}$$

Las representaciones a) corresponden a partículas de masa m y spin j y se las suele designar por $[m, j]$. Las representaciones b) corresponden a masa $m=0$, spin j y helicidad ϵj donde ϵ puede ser $+1$ o -1 y se representan por $[0, \epsilon j]$. Finalmente las representaciones c) corresponden al vacío. Los estados de partículas con masa m y spin j se transforman bajo $\mathcal{P}$ de acuerdo con la representación $[m, j]$. Los neutrones (antineutrones) se transforman como

$[0, -1/2]$ ($[0, +1/2]$) pues son levógiros (dextrogiros). Los fotones se presentan con ambas heliuidades, pues las interacciones electromagnéticas son invariantes bajo la paridad y el operador heliuidad es un pseudoescalar. La representación de $\mathcal{P}$ correspondiente a un fotón es pues $[0, +1] \oplus [0, -1]$, que es irreducible cuando el grupo $\mathcal{P}$ se amplifica para inducir la paridad.

Después de esta introducción podemos ya introducir los estados de heliuidad [M. JACOB and E. C. WICK Ann. Phys. (N.Y.) **7**, 404 (1959)] Empezaremos considerando los estados de una sola partícula de masa m y spin j y supondremos $m > 0$. Para esta partícula las observables (14.1) junto con operadores internos $\{A\}$ (número bariónico, isospin, ...) forman un conjunto completo de observables que conmutan. Indicaremos los vectores propios comunes por

$$|m, j; \vec{p}, \lambda; \alpha\rangle \equiv |m, j; \vec{p}, \lambda\rangle \equiv |\vec{p}, \lambda\rangle \quad (1)$$

donde α indica el conjunto de los valores propios de $\{A\}$. Se tiene

$$P^\mu |\vec{p}, \lambda\rangle = p^\mu |\vec{p}, \lambda\rangle, \quad W_{(0)} |\vec{p}, \lambda\rangle = \lambda |\vec{p}, \lambda\rangle \quad (2)$$

$$p^2 = m^2, \quad p^0 > 0, \quad \lambda = -j, -j+1, \dots, j-1, j$$

Los estados $|\vec{p}, \lambda\rangle$ quedan totalmente determinados salvo normalización y fase y sus combinaciones lineales (continuas) generan el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ del sistema. Los vectores estado los supondremos normalizados de la forma invariante

$$\langle \vec{p}', \lambda' | \vec{p}, \lambda \rangle = (2\pi)^3 2E(\vec{p}) \delta(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{\lambda\lambda'} \quad (3)$$

donde $p^0 \equiv E(\vec{p}) = (m^2 + \vec{p}^2)^{1/2}$. Elegida esta normalización los estados tienen aún una fase arbitraria. Veamos una prescripción para fijar estas fases. Como hemos supuesto $m \neq 0$ podemos ir a un sistema de referencia en el que la partícula se halle en reposo. Sus vectores estado serán combinaciones lineales de los $(2j+1)$ vectores $|\vec{0}, \lambda\rangle$, donde λ es el valor propio de la tercera componente del momento angular. Estos vectores se eligen de forma que

$$U(0, R) |\vec{0}, \lambda\rangle = \sum_{\mu} D_{\mu\lambda}^j(R) |\vec{0}, \mu\rangle \quad (1)$$

donde $D^j(R)$ es la representación matricial estándar de la rotación R para spin j . Entonces los vectores $|\vec{0}, \lambda\rangle$ quedan determinados salvo una fase global.

Veamos como fijar las fases de $|\vec{p}, \lambda\rangle$ donde $\vec{p}$ es un vector de módulo $p \equiv |\vec{p}|$ y cuya dirección viene determinada por los ángulos esféricos (θ, ϕ) . Escribiremos también

$$|\vec{p}, \lambda\rangle \equiv |p, \theta, \phi; \lambda\rangle, \quad p \equiv |\vec{p}| \quad (2)$$

Consideremos el boost $B_{\vec{p}}$ que da a la partícula un momento $\vec{p}$ partiendo del reposo y las rotaciones

$$R_{\vec{p}}(\alpha) \equiv e^{-i\phi J^3} e^{-i\theta J^2} e^{+i\alpha J^3} \quad (3)$$

que llevan el vector $(p, 0, 0)$ a (p, θ, ϕ) . Notemos que el ángulo α queda totalmente indeterminado. En el formalismo de helicidad se suele elegir $\alpha \equiv \phi$. Como el operador helicidad es un escalar bajo rotaciones, el vector estado $U(0, R_{\vec{p}}(\alpha)) |\vec{0}, \lambda\rangle$, que aún está en reposo, será ahora un estado propio de $\vec{J} \cdot \hat{p}$ con valor propio λ . Por otra parte, es inmediato probar, usando (12.2), que $\vec{J} \cdot \hat{p}$ conmuta con $U(0, B_{\vec{p}})$ y aplicando de nuevo (12.2) obtenemos que $U(0, B_{\vec{p}}) U(0, R_{\vec{p}}(\alpha)) |\vec{0}, \lambda\rangle$ define un estado con momento $\vec{p}$ y helicidad λ . Escribiremos entonces

$$|\vec{p}, \lambda\rangle \equiv U(0, B_{\vec{p}} R_{\vec{p}}(\alpha)) |\vec{0}, \lambda\rangle \quad (4)$$

y para un α dado usaremos esta relación para fijar las fases de $|\vec{p}, \lambda\rangle$. Ahora todas las fases se han determinado, salvo una fase global no esencial. Debe quedar claro que estamos alegremente olvidando el hecho de que los operadores $U(a, \Lambda)$ y la matriz $D^j(R)$ quedan determinados salvo un signo para j semi-entero. La forma correcta de proceder sería usar los grupos recubridores de $\mathcal{P}$ y $SO(3)$, pero esto es relativamente complicado.

Veamos ahora cuales son las leyes de transformación de los estados de helicidad. Para una transformación de Lorentz Λ obtenemos

$$U(0, \Lambda) |\vec{p}, \lambda\rangle = U(0, \Lambda) U(0, B_{\vec{p}} R_{\vec{p}}(\alpha)) |\vec{0}, \lambda\rangle =$$

$$= U(0, \Lambda B_{\vec{p}} R_{\vec{p}}(\alpha)) |\vec{0}, \lambda\rangle = U(0, B_{\Lambda \vec{p}} R_{\Lambda \vec{p}}(\alpha)) U(0, W_{\Lambda, \vec{p}}(\alpha)) |\vec{0}, \lambda\rangle \quad (1)$$

donde

$$W_{\Lambda, \vec{p}}(\alpha) \equiv R_{\Lambda \vec{p}}^{-1}(\alpha) B_{\Lambda \vec{p}}^{-1} \Lambda B_{\vec{p}} R_{\vec{p}}(\alpha) \quad (2)$$

Ahora bien $W_{\Lambda, \vec{p}}(\alpha)$ aplicado al vector $(m, \vec{0})$ no lo cambia y es por tanto una rotación. Entonces

$$U(0, \Lambda) |\vec{p}, \lambda\rangle = \sum_{\mu} D_{\mu\lambda}^j(W_{\Lambda, \vec{p}}(\alpha)) |\Lambda \vec{p}, \mu\rangle \quad (3)$$

y hemos obtenido la ley de transformación bajo el grupo de Lorentz. Tenemos además que $U(a, \Lambda) = U(a, I) U(0, \Lambda)$ donde $U(a, I) = \exp(i a_{\mu} P_{\mu})$ con lo cual

$$U(a, \Lambda) |\vec{p}, \lambda\rangle = e^{i a_{\mu} \Lambda p_{\mu}} \sum_{\mu} D_{\mu\lambda}^j(W_{\Lambda, \vec{p}}(\alpha)) |\Lambda \vec{p}, \mu\rangle \quad \left. \vphantom{\sum_{\mu}} \right\} m \neq 0 \quad (4)$$

$$W_{\Lambda, \vec{p}}(\alpha) \equiv R_{\Lambda \vec{p}}^{-1}(\alpha) B_{\Lambda \vec{p}}^{-1} \Lambda B_{\vec{p}} R_{\vec{p}}(\alpha)$$

que es la ley de transformación deseada una vez fijado el ángulo α .

Consideremos ahora el caso $m=0$. En este caso la helicidad λ es fija e invariante por $U(a, \Lambda)$ y vale $\pm j$. Los estados base son $|\vec{p}, \epsilon_j\rangle$. Demostremos cuenta que cualquier p^{μ} del tipo deseado puede obtenerse a partir de un vector $p_0 \equiv \omega(1, 0, 0, 1)$, $\omega > 0$. Aplicando primero la rotación $R_{\vec{p}}(\alpha)$ y después un boost $B_{\vec{p}}^{(0)}$ a lo largo de $\vec{p}$ que nos hace pasar de $R_{\vec{p}}(\alpha) p_0$ al p final deseado. Podemos escribir

$$|\vec{p}, \epsilon_j\rangle \equiv U(0, B_{\vec{p}}^{(0)} R_{\vec{p}}(\alpha)) |p_0, \epsilon_j\rangle \quad (5)$$

ecuación que permite determinar todas las fases si se fija $|p_0, \epsilon_j\rangle$. Análogamente al caso anterior y para determinar la ley de transformación debemos escribir

$$U(0, \Lambda) |\vec{p}, \epsilon_j\rangle = U(0, B_{\Lambda \vec{p}}^{(0)} R_{\Lambda \vec{p}}(\alpha)) U(0, W_{\Lambda, \vec{p}}^{(0)}(\alpha)) |p_0, \epsilon_j\rangle \quad (6)$$

$$W_{\Lambda, \vec{p}}^{(0)}(\alpha) \equiv R_{\Lambda \vec{p}}^{-1}(\alpha) B_{\Lambda \vec{p}}^{(0)-1} \Lambda B_{\vec{p}}^{(0)} R_{\vec{p}}(\alpha)$$

Ahora $W_{\Lambda, \vec{p}}^{(0)}(\alpha)$ transforma p_0 en sí mismo y su tanto

$$U(0, W_{\Lambda, \vec{p}}^{(0)}(\alpha)) |p_0, \epsilon_j\rangle = \beta(\Lambda, p, \alpha) |p_0, \epsilon_j\rangle \quad (1)$$

donde β es un número complejo de módulo uno, pues U es unitaria.

De aquí:

$$U(0, \Lambda) |\vec{p}, \epsilon_j\rangle = \beta(\Lambda, p, \alpha) |\Lambda \vec{p}, \epsilon_j\rangle \quad (2)$$

y

$$U(\alpha, \Lambda) |\vec{p}, \epsilon_j\rangle = e^{i\alpha \cdot \Lambda p} \beta(\Lambda, p, \alpha) |\Lambda \vec{p}, \epsilon_j\rangle \quad (3)$$

que es la ley deseada. La correspondencia

$$U(0, W_{\Lambda, \vec{p}}^{(0)}(\alpha)) \longrightarrow \beta(\Lambda, p, \alpha) \quad (4)$$

define una representación unitaria unidimensional (salvo un factor ± 1) del llamado grupo pequeño de p_0 , es decir, el conjunto de las transformaciones de Lorentz propias que dejan p_0 invariante. Evidentemente la ecuación (3) es inútil a menos que sepamos calcular β . Se puede demostrar que dado un conjunto de cuatro vectores reales $m^\mu, \ell^\mu, a^\mu, b^\mu$ tales que $m^2 > 0$, $\ell^2 = 0$ ($\ell^\mu \neq 0$), $a^2 < 0$ y $b^2 < 0$ y además $m \cdot a = m \cdot b = a \cdot b = \ell \cdot a = \ell \cdot b = 0$, entonces cualquier transformación de Lorentz Λ que cumpla $\Lambda \ell = \ell$, puede descomponerse de forma única en un producto $\Lambda = L R$ donde R y L son transformaciones de Lorentz puras tales que $R \ell = \ell$, $R m = m$, $L \ell = \ell$ y además L deja invariante alguna combinación lineal $\alpha a + \beta b \neq 0$. Aplicando este resultado a $W_{\Lambda, \vec{p}}^{(0)}(\alpha)$ tomando $\ell \equiv p_0$, $m \equiv (1, 0, 0, 0)$, $a \equiv (0, 1, 0, 0)$, $b \equiv (0, 0, 1, 0)$ podemos concluir que existe una descomposición única

$$W_{\Lambda, \vec{p}}^{(0)}(\alpha) = L_{\Lambda, \vec{p}}^{(0)}(\alpha) R_{\Lambda, \vec{p}}^{(0)}(\alpha) \quad (5)$$

donde $R_{\Lambda, \vec{p}}^{(0)}(\alpha)$ es una rotación alrededor del eje Oz con ángulo $\varphi(\Lambda, p, \alpha)$ y $L_{\Lambda, \vec{p}}^{(0)}(\alpha)$ tiene algún vector propio real en el plano Oxy . Entonces

$$\beta(\Lambda, p, \alpha) = e^{-i \epsilon_j \varphi(\Lambda, p, \alpha)} \quad (6)$$

salvo un factor ± 1 para j -semientero que se puede fijar introduciendo el grupo recubridor.

Hemos visto como definir los estados de helicidad y hemos dado sus leyes de transformación bajo la parte conexa del grupo de Poincaré. Queremos ahora considerar como se transforman estos estados bajo el operador de paridad. Consideremos de momento $p > 0$, entonces si U_p es el operador unitario que implementa la paridad

$$U_p | \vec{0}, \lambda \rangle = \eta_p | \vec{0}, \lambda \rangle \quad (1)$$

y la cantidad $\eta_p = \pm 1$ (siempre es posible esta elección) se denomina paridad. Consideremos además

$$Y \equiv e^{-i\pi J^2} U_p \quad (2)$$

entonces

$$\begin{aligned} Y | \vec{0}, \lambda \rangle &= \eta_p e^{-i\pi J^2} | \vec{0}, \lambda \rangle = \eta_p \sum_{\mu} d_{\mu\lambda}^j(\pi) | \vec{0}, \mu \rangle = \\ &= \eta_p \sum_{\mu} (-1)^{j-\lambda} \delta_{\mu, -\lambda} | \vec{0}, \mu \rangle = \eta_p (-1)^{j-\lambda} | \vec{0}, -\lambda \rangle \end{aligned} \quad (3)$$

Notar que Y es el operador unitario que implementa la reflexión en el plano Oxz . Como Y conmuta con los boost en la dirección Oz se tiene

$$Y | p, \theta = \phi = 0; \lambda \rangle = \eta_p (-1)^{j-\lambda} | p, \theta = \phi = 0; -\lambda \rangle \quad (4)$$

Notar que el η_p dado en (1) no depende de λ pues $[\vec{J}, U_p] = 0$. Para partículas de masa nula la paridad se define como

$$Y | p, \theta = \phi = 0; j \rangle = \eta | p, \theta = \phi = 0; -j \rangle \quad (5)$$

I - A - SL(2, C)

Let us consider the set of 2×2 matrices σ^μ defined as

$$\sigma^0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \sigma^1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \quad (1)$$

These matrices form a basis for two-by-two complex matrices. We can furthermore introduce

$$\sigma_\mu \equiv g_{\mu\nu} \sigma^\nu, \quad \tilde{\sigma}^\mu \equiv \sigma^\mu, \quad \tilde{\sigma}_\mu \equiv g_{\mu\nu} \tilde{\sigma}^\nu \quad (2)$$

Useful properties

$$i) \quad \sigma^{\mu\dagger} = \sigma^\mu, \quad \tilde{\sigma}^{\mu\dagger} = \tilde{\sigma}^\mu \quad (3)$$

$$ii) \quad \sigma^\mu \tilde{\sigma}_\nu = g^\mu_\nu I - \frac{i}{2} \epsilon^\mu_{\nu\lambda\rho} \sigma^\lambda \tilde{\sigma}^\rho \quad (4)$$

$$\tilde{\sigma}^\mu \sigma_\nu = g^\mu_\nu I + \frac{i}{2} \epsilon^\mu_{\nu\lambda\rho} \tilde{\sigma}^\lambda \sigma^\rho$$

$$iii) \quad \sigma^\mu \tilde{\sigma}_\nu + \sigma_\nu \tilde{\sigma}^\mu = 2g^\mu_\nu I, \quad \tilde{\sigma}^\mu \sigma_\nu + \tilde{\sigma}_\nu \sigma^\mu = 2g^\mu_\nu I \quad (5)$$

$$iv) \quad \sigma^\mu \tilde{\sigma}_\nu - \sigma_\nu \tilde{\sigma}^\mu = -i \epsilon^\mu_{\nu\lambda\rho} \sigma^\lambda \tilde{\sigma}^\rho \quad (6)$$

$$\tilde{\sigma}^\mu \sigma_\nu - \tilde{\sigma}_\nu \sigma^\mu = +i \epsilon^\mu_{\nu\lambda\rho} \tilde{\sigma}^\lambda \sigma^\rho$$

$$v) \quad \tilde{\sigma}^\mu \sigma^\nu \tilde{\sigma}^\lambda = g^{\mu\nu} \tilde{\sigma}^\lambda - g^{\mu\lambda} \tilde{\sigma}^\nu + g^{\nu\lambda} \tilde{\sigma}^\mu - i \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \tilde{\sigma}_\rho \quad (7)$$

$$\sigma^\mu \tilde{\sigma}^\nu \sigma^\lambda = g^{\mu\nu} \sigma^\lambda - g^{\mu\lambda} \sigma^\nu + g^{\nu\lambda} \sigma^\mu + i \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \sigma_\rho$$

$$vi) \quad \tilde{\sigma}^\mu \sigma^\nu \tilde{\sigma}^\lambda - \tilde{\sigma}^\lambda \sigma^\nu \tilde{\sigma}^\mu = -2i \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \tilde{\sigma}_\rho$$

$$\sigma^\mu \tilde{\sigma}^\nu \sigma^\lambda - \sigma^\lambda \tilde{\sigma}^\nu \sigma^\mu = +2i \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \sigma_\rho \quad (8)$$

$$vii) \quad \tilde{\sigma}^\mu \sigma^\nu \tilde{\sigma}^\lambda + \tilde{\sigma}^\lambda \sigma^\nu \tilde{\sigma}^\mu = 2 [g^{\mu\nu} \tilde{\sigma}^\lambda - g^{\mu\lambda} \tilde{\sigma}^\nu + g^{\nu\lambda} \tilde{\sigma}^\mu]$$

$$\sigma^\mu \tilde{\sigma}^\nu \sigma^\lambda + \sigma^\lambda \tilde{\sigma}^\nu \sigma^\mu = 2 [g^{\mu\nu} \sigma^\lambda - g^{\mu\lambda} \sigma^\nu + g^{\nu\lambda} \sigma^\mu] \quad (9)$$

$$viii) \quad \text{Tr} [\tilde{\sigma}_\mu \sigma^\nu] = 2g^\nu_\mu \quad (1)$$

$$ix) \quad \text{Tr} [\sigma^\mu \tilde{\sigma}_\nu \sigma^\lambda \tilde{\sigma}_\rho] = 2 [g^\mu_\nu g^\lambda_\rho - g^{\mu\lambda} g_{\nu\rho} + g^\mu_\rho g_\nu^\lambda + i \epsilon^\mu_{\nu\lambda} \gamma^\rho] \quad (2)$$

$$x) \quad [\tilde{\sigma}_\nu]_{ji} [\sigma^\nu]_{me} = 2 \delta_{je} \delta_{im} \quad (3)$$

Notice that any 2×2 matrix Σ can be expanded in terms of the $\tilde{\sigma}_\mu$

$$\Sigma = x^\mu \tilde{\sigma}_\mu = \begin{bmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - i x^2 \\ x^1 + i x^2 & x^0 - x^3 \end{bmatrix}, \quad x^\mu = \frac{1}{2} \text{Tr} [\Sigma \sigma^\mu] \quad (4)$$

where use has been made of (1). Notice that

$$\det [\Sigma] = x^\mu x_\mu \quad (5)$$

Furthermore the real fourvectors correspond to selfadjoint matrices and viceversa and therefore (4) establishes a biunivocal correspondence between the points x^μ and the set of hermitian 2×2 matrices.

Let us now consider a matrix $A \in SL(2, \mathbb{C})$, i.e. a 2×2 complex matrix of determinant equal to one. Let us now use A to transform $\Sigma = \Sigma^\dagger$ in the following way

$$\Sigma \longrightarrow \Sigma' = A \Sigma A^\dagger \quad (6)$$

The fourvector x'^μ associated with Σ' is such that $x'_\mu x'^\mu = x_\mu x^\mu$ and since $\Sigma'^\dagger = \Sigma'$ this fourvector x'^μ is also real and (6) corresponds to a Lorentz transformation

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad (7)$$

$$\Lambda^\mu_\nu = \frac{1}{2} \text{Tr} [A \tilde{\sigma}_\nu A^\dagger \sigma^\mu]$$

Since $\det A = +1$ we can change continuously the parameters of A in order to obtain $A = I$ and in this case $\Lambda^\mu_\nu = g^\mu_\nu$, i.e. $\det [\Lambda] = +1$ and hence $\det [\Lambda] = +1$. Furthermore $\Lambda^0_0 > 0$. Hence $\Lambda \in L_+^\uparrow$.

Let us check that (2.7) is an homomorphism. If

$$\Lambda^\mu_\nu(A) = \frac{1}{2} \text{Tr} [A \tilde{\sigma}_\nu A^\dagger \sigma^\mu] \quad , \quad \Lambda^\mu_\nu(B) = \frac{1}{2} \text{Tr} [B \tilde{\sigma}_\nu B^\dagger \sigma^\mu]$$

then

$$\begin{aligned} \Lambda^\mu_\nu(A) \Lambda^\nu_\rho(B) &= \frac{1}{4} [A^\dagger \sigma^\mu A]_{ij} [\tilde{\sigma}_\nu]_{ji} [B \tilde{\sigma}_\rho B^\dagger]_{em} [\sigma^\nu]_{me} = \\ &= \frac{1}{2} [A^\dagger \sigma^\mu A]_{ij} [B \tilde{\sigma}_\rho B^\dagger]_{em} \delta_{je} \delta_{im} = \frac{1}{2} \text{Tr} [A^\dagger \sigma^\mu A B \tilde{\sigma}_\rho B^\dagger] = \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr} [(AB) \tilde{\sigma}_\rho (AB)^\dagger \sigma^\mu] = \Lambda^\mu_\rho(AB) \end{aligned}$$

which is the desired result. Let us now consider the multiplicity of the homomorphism between $SL(2, \mathbb{C})$ and $L_+^\uparrow$; up to this end we must see how many $A \in SL(2, \mathbb{C})$ correspond to the $I \in L_+^\uparrow$ and it is clear that $A = \pm I$. Hence there exist an isomorphism

$$L_+^\uparrow \cong SL(2, \mathbb{C}) / \mathbb{Z}_2 \quad (1)$$

Let us remember that any matrix $A \in SL(2, \mathbb{C})$ can be written as

$$A = a^\mu \tilde{\sigma}_\mu \quad , \quad a^\mu a_\mu = 1 \quad (2)$$

and (2.7) is equivalent to

$$\Lambda^\mu_\nu = \frac{1}{2} \text{Tr} [\tilde{\sigma}_\rho \tilde{\sigma}_\nu \tilde{\sigma}_\lambda \sigma^\mu] a^\rho a^{\lambda*} \quad (3)$$

and using (2.2)

$$\Lambda^\mu_\nu = -g^{\mu\nu} (a_\lambda a^{\lambda*}) + a^\mu a^{\nu*} + a^{\mu*} a^\nu + i \epsilon^{\mu\rho\nu\lambda} a^\rho a^{\lambda*} \quad (4)$$

i.e.

$$\Lambda^0_0 = a^0 a^0 + a^1 a^1 + a^2 a^2 + a^3 a^3$$

$$\Lambda^i_0 = a^{i*} a^0 + a^i a^{0*} - i \epsilon^{0ijk} a^j a^{k*} \quad (5)$$

$$\Lambda^0_i = a^0 a^{i*} + a^i a^{0*} + i \epsilon^{0ijk} a^j a^{k*}$$

$$\Lambda^i_j = \delta_{ij} (a_\lambda a^{\lambda*}) + a^i a^{j*} + a^{i*} a^j - i \epsilon^{0ijk} (a^k a^{0*} - a^0 a^{k*})$$

Hence

$$4 a^0 a^{0*} = \Lambda^\mu{}_\mu, \quad \operatorname{Re} \left(\frac{a^i}{a^0} \right) = \frac{\Lambda^i{}_0 + \Lambda^0{}_i}{\Lambda^\mu{}_\mu}$$

$$\operatorname{Im} \left(\frac{a^i}{a^0} \right) = \frac{\epsilon_{0ij}{}^k \Lambda^j{}_k}{\Lambda^\mu{}_\mu} \quad (1)$$

Therefore

$$A = N^{-1} \left\{ \Lambda^\mu{}_\mu I + [\Lambda^i{}_0 + \Lambda^0{}_i + i \epsilon_{0ij}{}^k \Lambda^j{}_k] \sigma^i \right\} \quad (2)$$

with the condition $\det A = +1$. Notice

$$\begin{aligned} \det A &= N^{-2} \left\{ [\operatorname{Tr}(\Lambda)]^2 - [\Lambda^i{}_0 + \Lambda^0{}_i + i \epsilon_{0ij}{}^k \Lambda^j{}_k][\Lambda^i{}_0 + \Lambda^0{}_i + i \epsilon_{0ij}{}^k \Lambda^j{}_k] \right\} \\ &= N^{-2} \left\{ 4 + [\operatorname{Tr}(\Lambda)]^2 - \operatorname{Tr}[\Lambda^2] + i \epsilon_{\mu\nu\rho}{}^\sigma \Lambda^\mu{}_\nu \Lambda^\rho{}_\sigma \right\} \end{aligned}$$

where $\operatorname{Tr}[\Lambda] = \Lambda^\mu{}_\mu$, $\operatorname{Tr}[\Lambda^2] = \Lambda^\mu{}_\nu \Lambda^\nu{}_\mu$, $\Lambda^\mu{}_\lambda \Lambda^\lambda{}_\mu = +4$ have been used.

Therefore

$$N = \pm \left\{ 4 + [\operatorname{Tr}(\Lambda)]^2 - \operatorname{Tr}[\Lambda^2] + i \epsilon_{\mu\nu\rho}{}^\sigma \Lambda^\mu{}_\nu \Lambda^\rho{}_\sigma \right\}^{1/2} \quad (3)$$

Notice furthermore

$$\Lambda^\mu{}_\nu \tilde{\sigma}^\mu{}_\mu \sigma^\nu = \operatorname{Tr}[\Lambda] I + [\Lambda^i{}_0 + \Lambda^0{}_i + i \epsilon_{0ij}{}^k \Lambda^j{}_k] \sigma^i$$

$$\Lambda^\mu{}_\nu \tilde{\sigma}^\nu{}_\mu \sigma^\mu = \operatorname{Tr}[\Lambda] I - [\Lambda^i{}_0 + \Lambda^0{}_i + i \epsilon_{0ij}{}^k \Lambda^j{}_k] \sigma^i \quad (4)$$

$$\Lambda^\mu{}_\nu \tilde{\sigma}^\mu{}_\mu \sigma^\nu \Lambda^\rho{}_\lambda \tilde{\sigma}^\lambda{}_\rho \sigma^\rho = N^2 I$$

Therefore

$$A = \pm \frac{\Lambda^\mu{}_\nu \tilde{\sigma}^\mu{}_\mu \sigma^\nu}{[\Lambda^\mu{}_\nu \tilde{\sigma}^\mu{}_\mu \sigma^\nu \Lambda^\rho{}_\lambda \tilde{\sigma}^\lambda{}_\rho \sigma^\rho]^{1/2}} \quad (5)$$

Let us now consider an infinitesimal Lorentz transformation

$$\Lambda^\mu{}_\nu = g^\mu{}_\nu + \delta\omega^\mu{}_\nu, \quad \delta\omega_{\mu\nu} = -\delta\omega_{\nu\mu} \quad (6)$$

Then

$$A = I + \frac{1}{4} [\delta\omega^i{}_0 + \delta\omega^0{}_i + \epsilon^{0ij}{}^k \delta\omega^j{}_k] \sigma^i \quad (1)$$

or equivalently

$$A = I + \frac{1}{8} [\tilde{\sigma}^\mu \sigma^\nu - \tilde{\sigma}^\nu \sigma^\mu] \delta\omega_{\mu\nu} \quad (2)$$

and therefore the generators of the Lorentz group in the $SL(2, \mathbb{C})$ representation are

$$\tilde{M}^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\tilde{\sigma}^\mu \sigma^\nu - \tilde{\sigma}^\nu \sigma^\mu] \quad (3)$$

$$\tilde{M}^{0i} = \frac{i}{2} \sigma^i, \quad \tilde{M}^{ij} = \frac{1}{2} \epsilon^{0ij}{}^k \sigma^k$$

The matrix A corresponding to (I-7.5) is

$$A[R(\hat{n}, \theta)] = \pm \left[\cos \frac{\theta}{2} - i (\hat{n} \cdot \vec{\sigma}) \sin \frac{\theta}{2} \right] \quad (4)$$

and for the boost we have

$$A[B(\hat{n}, \psi)] = \pm \left\{ 2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \right) \right\}^{-1/2} \left[I + \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{\vec{n} \cdot \vec{\sigma}}{\sqrt{1-v^2}} \right] \quad (5)$$

Let us now consider a representation $\Lambda \longrightarrow A(\Lambda)$ of $L_+^\uparrow$, then it is obvious that other possible representations are

$$\begin{aligned} \Lambda &\longrightarrow A^*(\Lambda) \\ \Lambda &\longrightarrow [A^T(\Lambda)]^{-1} \\ \Lambda &\longrightarrow [A^\dagger(\Lambda)]^{-1} \end{aligned} \quad (6)$$

Notice that if

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow [A^T]^{-1} = \begin{bmatrix} A_{22} & -A_{21} \\ -A_{12} & A_{11} \end{bmatrix}$$

and therefore

$$[A^T]^{-1} = S A S^{-1}$$

$$S \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

and hence A and $[A^T]^{-1}$ are equivalent representations. The same is true for A^* and $[A^+]^{-1}$. Furthermore for $SO(3) \in L_+^\uparrow$ all four representations are equivalent.

Notice

$$[A^+]^{-1} = I - \frac{i}{8} [\sigma^\mu \tilde{\sigma}^\mu - \sigma^\nu \tilde{\sigma}^\nu] \delta \omega_{\mu\nu} \quad (1)$$

and we can define the corresponding generators as

$$M^{\mu\nu} = + \frac{i}{4} [\sigma^\mu \tilde{\sigma}^\nu - \sigma^\nu \tilde{\sigma}^\mu] \quad (2)$$

$$M^{0i} = - \frac{i}{2} \sigma^i, \quad M^{ij} = + \frac{1}{2} \epsilon^{0ij\kappa} \sigma^\kappa$$

Notice

$$i) \quad \text{Tr} [\tilde{M}^{\mu\nu} \tilde{M}^{\rho\lambda}] = \frac{1}{2} [g^{\mu\rho} g^{\nu\lambda} - g^{\mu\lambda} g^{\nu\rho} + i \epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}] \quad (3)$$

$$\text{Tr} [M^{\mu\nu} M^{\rho\lambda}] = \frac{1}{2} [g^{\mu\rho} g^{\nu\lambda} - g^{\mu\lambda} g^{\nu\rho} - i \epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}]$$

ii) From the infinitesimal transformation it is easy to prove that

$$[A(\Lambda)]^{-1} \tilde{\sigma}^\mu [A^+(\Lambda)]^{-1} = \Lambda^\mu_\nu \tilde{\sigma}^\nu \quad (4)$$

$$A^+(\Lambda) \sigma^\mu A(\Lambda) = \Lambda^\mu_\nu \sigma^\nu$$

II.- PRINCIPIO VARIACIONAL

En todo lo que sigue manejaremos frecuentemente los campos. Matemáticamente un campo es un conjunto de una o más funciones de las coordenadas de un punto del espacio-tiempo: $\phi_\alpha(x) \equiv \phi_\alpha(t, x)$. El subíndice α puede tomar N valores distintos que llamaremos número de componentes del campo. Aquí usaremos campos que se transforman de manera irreducible bajo el grupo de Poincaré y según la ley de transformación hablaremos de campos escalares, vectoriales,...

Usaremos ∂_μ para indicar la derivada parcial con respecto a x^μ y se refiere sólo a la dependencia explícita en x . Por otra parte usaremos D_μ para indicar la derivada total con respecto a x^μ y tiene en cuenta tanto la dependencia explícita como la implícita en x . Así por ejemplo

$$D_\mu \phi_\alpha(x) = \partial_\mu \phi_\alpha(x) = \frac{\partial \phi_\alpha(x)}{\partial x^\mu} \quad (1)$$

$$D_\mu F[x, \phi, D\phi] = \left\{ \partial_\mu + D_\mu \phi_\alpha \frac{\partial}{\partial \phi_\alpha} + D_\mu D_\nu \phi_\alpha \frac{\partial}{\partial (D_\nu \phi_\alpha)} \right\} F[x, \phi, D\phi]$$

Usaremos la convención de Einstein por la que índices repetidos se suman.

Al pretender describir un sistema físico que pueda ser representado por campos supondremos que existe una densidad Lagrangiana, que depende de las coordenadas espacio temporales, de los campos y de sus primeras derivadas, que nos describe el sistema bajo consideración. Para la densidad Lagrangiana usaremos la notación

$$L(x) \equiv L(x, \phi_\alpha(x), D_\mu \phi_\alpha(x)) \quad (2)$$

Pequeñas modificaciones de lo que sigue permiten suponer que $L(x)$ depende de derivadas de orden más alto en los campos. Esta función tiene dimensiones $[L(x)] = M^4$. A partir de ella definimos el funcional de acción como

$$J_V[\phi] \equiv \int_V d^4x L(x, \phi_\alpha(x), D_\mu \phi_\alpha(x)) \quad (3)$$

donde V es una región del espacio-tiempo. La acción no tiene dimensiones en unidades $\hbar = c = 1$, pero tiene dimensiones de $\hbar$ en el caso general.

Veamos ahora como se transforma la acción bajo una transformación infinitesimal de las coordenadas y los campos. Consideremos una transformación infinitesimal arbitraria

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu(x) \quad (1)$$

$$\phi_\alpha(x) \longrightarrow \phi'_\alpha(x) = \phi_\alpha(x) + \bar{\delta} \phi_\alpha(x, \phi(x))$$

De estas leyes de transformación se deduce inmediatamente que

$$\phi'_\alpha(x') = \phi_\alpha(x) + D_\mu \phi_\alpha(x) \delta x^\mu + \bar{\delta} \phi_\alpha(x, \phi(x)) \equiv \phi_\alpha(x) + \delta \phi_\alpha(x, \phi(x))$$

$$\begin{aligned} D'_\mu \phi'_\alpha(x') &= D_\mu \phi_\alpha(x) + D_\mu D_\nu \phi_\alpha(x) \delta x^\nu + D_\mu \bar{\delta} \phi_\alpha(x, \phi(x)) \equiv \\ &\equiv D_\mu \phi_\alpha(x) + \delta (D_\mu \phi_\alpha(x, \phi(x))) \end{aligned} \quad (2)$$

Hemos introducido nuevos símbolos pues en las aplicaciones suelen dárseles la primera de las ecuaciones (2) en lugar de la segunda de la (1), pero es más conveniente usar (1) para el desarrollo matemático que sigue.

Deseamos ahora calcular la variación de la acción correspondiente a estas transformaciones y definida como

$$\delta J \equiv J_{V'}[\phi'] - J_V[\phi] = \int_{V'} d^4x' L(x', \phi'(x'), D'\phi'(x')) - \int_V d^4x L(x, \phi(x), D\phi(x)) \quad (3)$$

donde V' es el transformado de V por la transformación de coordenadas considerada. Teniendo en cuenta que

$$d^4x' = [1 + \partial_\mu (\delta x^\mu)] d^4x \quad (4)$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_V d^4x \left\{ [1 + \partial_\mu (\delta x^\mu)] L(x', \phi'(x'), D'\phi'(x')) - L(x, \phi(x), D\phi(x)) \right\} = \\ &= \int_V d^4x \left\{ [1 + \partial_\mu (\delta x^\mu)] L(x + \delta x, \phi + D_\mu \phi \delta x^\mu + \bar{\delta} \phi, D_\mu \phi + D_\mu D_\nu \phi \delta x^\nu + D_\mu \bar{\delta} \phi) \right. \\ &\quad \left. - L(x, \phi, D\phi) \right\} = \\ &= \int_V d^4x \left\{ \frac{\partial L}{\partial x^\mu} \delta x^\mu + \frac{\partial L}{\partial \phi_\alpha} D_\mu \phi_\alpha \delta x^\mu + \frac{\partial L}{\partial \phi_\alpha} \bar{\delta} \phi_\alpha + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial L}{\partial (D_\mu \phi_\alpha)} D_\mu D_\nu \phi_\alpha \delta x^\nu + \frac{\partial L}{\partial (D_\mu \phi_\alpha)} D_\mu \bar{\delta} \phi_\alpha + L D_\mu (\delta x^\mu) \right\} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\delta J = \int_V d^4x \left\{ D_\mu \left[L \delta x^\mu + \frac{\partial L}{\partial (D_\mu \phi_\alpha)} \bar{\delta} \phi_\alpha \right] + \left[\frac{\partial L}{\partial \phi_\alpha} - D_\mu \frac{\partial L}{\partial (D_\mu \phi_\alpha)} \right] \bar{\delta} \phi_\alpha \right\} \quad (1)$$

Hasta aquí hemos realizado puramente transformaciones matemáticas.

Vamos ahora a enunciar el principio de Hamilton: Para un sistema dinámico descrito por una densidad Lagrangiana $L(x)$ las ecuaciones del movimiento se obtienen exigiendo que la acción sea invariante bajo toda transformación infinitesimal del tipo anterior tal que $\delta x^\mu = \bar{\delta} \phi_\alpha = 0$ sobre la hipersuperficie que limita V . Veamos que implica esto: El primer término del segundo miembro de (1) se puede convertir en una integral sobre la hipersuperficie que limita V y en las condiciones impuestas es nula. Así pues como en lo demás $\bar{\delta} \phi_\alpha(x)$ es arbitrario entonces las ecuaciones del movimiento del sistema dinámico son

$$\frac{\partial L}{\partial \phi_\alpha} - D_\mu \frac{\partial L}{\partial (D_\mu \phi_\alpha)} = 0 \quad (2)$$

que son las llamadas ecuaciones de Lagrange.

Es evidente que distintas densidades Lagrangianas pueden dar origen a unas mismas ecuaciones del movimiento. Por ejemplo

i) La densidad $L'(x) \equiv C L(x)$, donde C es una constante, da origen a las mismas ecuaciones que $L(x)$

ii) Similarmemente $L'(x) \equiv L(x) + D_\mu \Omega^\mu(x, \phi(x))$ donde Ω^μ es arbitraria da origen a las mismas ecuaciones que $L(x)$.

Consideremos ahora una transformación general de las variables de nuestro sistema

$$\begin{aligned} x^\mu &\longrightarrow x'^\mu = f^\mu(x) \\ \phi_\alpha(x) &\longrightarrow \phi'_\alpha(x') = F_\alpha(x, \phi(x)) \end{aligned} \quad (3)$$

y definamos una densidad Lagrangiana para las nuevas variables de forma que

$$L'(x', \phi'(x'), D'\phi'(x')) d^4x' = L(x, \phi(x), D\phi(x)) d^4x \quad (4)$$

Diremos que esta transformación es de simetría si:

$$L'(x', \phi'(x'), D'\phi'(x')) = L(x', \phi'(x'), D'\phi'(x')) + D'_\mu \Omega^\mu(x', \phi'(x')) \quad (1)$$

lo cual garantiza que $\phi(x)$ y $\phi'(x')$ satisfacen las mismas ecuaciones del movimiento.

Vamos a considerar, de momento, las transformaciones de simetría continuas, es decir conectables con la identidad, con lo cual nos podemos limitar a considerar transformaciones infinitesimales. Consideremos una transformación infinitesimal

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu(x) \quad (2)$$

$$\phi_\alpha(x) \longrightarrow \phi'_\alpha(x') = \phi_\alpha(x) + \delta \phi_\alpha(x, \phi(x))$$

y por consiguiente una ley del tipo (2.2) para la transformación de la derivada. Veamos que condiciones debe satisfacer (2) para que sea una transformación de simetría. De (3.4) y (1)

$$\begin{aligned} L(x, \phi(x), D\phi(x)) d^4x &= L'(x', \phi'(x'), D'\phi'(x')) d^4x' = \\ &= L(x', \phi'(x'), D'\phi'(x')) d^4x' + D'_\mu \delta \Omega^\mu(x', \phi'(x')) d^4x' \end{aligned} \quad (3)$$

Escribiendo la igualdad entre el primero y el último término de esta ecuación en función de las variables originales

$$\begin{aligned} L(x, \phi(x), D\phi(x)) &= L(x + \delta x, \phi + \delta \phi, D\phi + \delta(D\phi)) [1 + \partial_\mu(\delta x^\mu)] + \\ &+ D_\mu \delta \Omega^\mu(x, \phi(x)) \end{aligned} \quad (4)$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \left\{ \delta x^\mu \partial_\mu + \delta \phi_\alpha \frac{\partial}{\partial \phi_\alpha} + \delta(\partial_\mu \phi_\alpha) \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu \phi_\alpha)} + \partial_\mu(\delta x^\mu) \right\} L(x, \phi(x), D\phi(x)) = \\ = - D_\mu \delta \Omega^\mu(x, \phi(x)) \end{aligned} \quad (5)$$

que es la ecuación que nos permite saber si una transformación dada es de simetría; para ello basta calcular el primer miembro y si el resultado se puede escribir como una cantidad divergente entonces la transformación es de simetría y podemos obtener una expresión para $\delta \Omega^\mu(x, \phi(x))$.

Veamos ahora la demostración de un importante teorema debido a Noether. Este teorema afirma que a toda transformación continua de simetría se le puede asociar una cantidad que es conservada. En efecto de la definición de δJ y de (4.3) se obtiene que para todo recinto V de integración

$$\delta J + \int_V d^4x D_\mu (\delta \Omega^\mu) = 0 \quad (1)$$

y de (3.1)

$$\int_V d^4x \left\{ D_\mu \left[L \delta x^\mu + \frac{\partial L}{\partial (D_\mu \phi_\alpha)} (\delta \phi_\alpha - D_\nu \phi_\alpha \delta x^\nu) + \delta \Omega^\mu \right] + \left[\frac{\partial L}{\partial \phi_\alpha} - D_\mu \frac{\partial L}{\partial (D_\mu \phi_\alpha)} \right] \delta \phi_\alpha \right\} = 0 \quad (2)$$

y por tanto a lo largo de las trayectorias del movimiento se obtiene una ecuación de continuidad

$$D_\mu \left[\left(L g^{\mu\nu} - \frac{\partial L}{\partial (D_\mu \phi_\alpha)} D_\nu \phi_\alpha \right) \delta x^\nu + \frac{\partial L}{\partial (D_\mu \phi_\alpha)} \delta \phi_\alpha + \delta \Omega^\mu \right] = 0 \quad (3)$$

Es decir el teorema de Noether nos dice: A cada transformación continua de simetría de un sistema físico se le puede asociar una ecuación de continuidad válida sobre las trayectorias del movimiento.

Veamos algunas aplicaciones del teorema de Noether.

1) Invariancia Translacional

Consideremos la transformación

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta a^\mu \quad \delta a^\mu = \text{cte} \quad (4)$$

$$\phi_\alpha(x) \longrightarrow \phi'_\alpha(x') = \phi_\alpha(x)$$

En este caso $\delta \phi_\alpha(x) = \delta (D_\mu \phi_\alpha(x)) = 0$ y por tanto si $L(x)$ no depende explícitamente de x la transformación es de simetría con $\delta \Omega^\mu \equiv 0$, como se deduce de (4.5). Entonces la ecuación de continuidad (3) puede escribirse

$$D_\mu \tilde{T}^{\mu\nu} = 0, \quad \tilde{T}^{\mu\nu} = -L g^{\mu\nu} + \frac{\partial L}{\partial (D_\mu \phi_\alpha)} D^\nu \phi_\alpha \quad (5)$$

y la cantidad $\tilde{T}^{\mu\nu}$ se suele denominar tensor densidad de energía-momento. Se puede ahora definir un cuadrivector P^μ como

$$P^\mu(t) \equiv \int_t d^3x \tilde{T}^{0\mu}(t, \vec{x}) \quad (1)$$

donde la integración se halla extendida a todo el espacio, manteniendo fijo el tiempo. Veamos que esta cantidad no depende del tiempo

$$\frac{dP^\mu(t)}{dt} = \int_t d^3x D_0 \tilde{T}^{0\mu}(t, \vec{x}) = - \int_t d^3x D_i \tilde{T}^{i\mu}(t, \vec{x}) = 0 \quad (2)$$

donde hemos usado (5.5) y el teorema de Gauss. Hemos supuesto que el tensor densidad de energía-momento es tal que para todo t y para $|\vec{x}| \rightarrow \infty$ tiende hacia cero un suficiente rápido para que la integral sobre la superficie del infinito sea nula. Así queda probado que P^μ es conservado y que se puede calcular usando

$$P^\mu = \int_t d^3x \tilde{T}^{0\mu}(t, \vec{x}) \quad (3)$$

donde t se elige de forma que los cálculos resulten lo más simples posibles.

Notar que si $L(x)$ depende explícitamente de x^μ entonces

$$D_\mu \tilde{T}^{\mu\nu} = -\partial^\nu L(x) \quad (4)$$

En efecto

$$\begin{aligned} D_\mu \tilde{T}^{\mu\nu} &= D_\mu \left\{ \frac{\partial L}{\partial (D_\mu \phi_\alpha)} D^\nu \phi_\alpha - g^{\mu\nu} L \right\} = D_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial (D_\mu \phi_\alpha)} \right) D^\nu \phi_\alpha + \\ &+ \frac{\partial L}{\partial (D_\mu \phi_\alpha)} D_\mu D^\nu \phi_\alpha - g^{\mu\nu} D_\mu L = \frac{\partial L}{\partial \phi_\alpha} D^\nu \phi_\alpha + \frac{\partial L}{\partial (D_\mu \phi_\alpha)} D^\nu D_\mu \phi_\alpha \\ &- D^\nu L = -\partial^\nu L \quad \text{Q.E.D.} \end{aligned}$$

Notemos también que en general $\tilde{T}^{\mu\nu} \neq \tilde{T}^{\nu\mu}$, es decir que el tensor considerado no es simétrico, pero veremos más adelante como puede ser modificado para lograr uno simétrico.

(i) Transformaciones de Lorentz

Consideremos la transformación infinitesimal

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta\omega^\mu{}_\nu x^\nu \quad (1)$$

$$\phi_\alpha(x) \longrightarrow \phi'_\alpha(x') = \phi_\alpha(x) + \frac{1}{2} (S_{\mu\nu})_\alpha{}^\beta \delta\omega^{\mu\nu} \phi_\beta(x)$$

donde $\delta\omega_{\mu\nu} = -\delta\omega_{\nu\mu} = i\epsilon$ y es además real para que sea una transformación de Lorentz. La matriz $S_{\mu\nu}$ es antisimétrica ($S_{\mu\nu} = -S_{\nu\mu}$) y refleja como el campo se transforma bajo las transformaciones de Lorentz. Si el Lagrangiano es escalar bajo (1) entonces esta transformación es de simetría con $\delta\mathcal{L} \equiv 0$ y la ley de conservación asociada es

$$D_\mu \left[(L g^\mu{}_\nu - \frac{\partial L}{\partial (D_\mu \phi_\alpha)} D_\nu \phi_\alpha) \delta\omega^\nu{}_\sigma x^\sigma + \frac{\partial L}{\partial (D_\mu \phi_\alpha)} \frac{1}{2} (S_{\nu\sigma})_\alpha{}^\beta \phi_\beta \delta\omega^{\nu\sigma} \right] = 0 \quad (2)$$

Como los $\delta\omega_{\mu\nu}$ con $\mu < \nu$ son independientes se obtiene que la expresión anterior da origen a las ecuaciones de conservación

$$D_\mu \tilde{M}^\mu{}_{\nu\sigma} = 0 \quad (3)$$

$$\tilde{M}^\mu{}_{\nu\sigma} \equiv \tilde{T}^\mu{}_\nu x^\sigma - \tilde{T}^\mu{}_\sigma x_\nu - \frac{\partial L}{\partial (D_\mu \phi_\alpha)} (S_{\nu\sigma})_\alpha{}^\beta \phi_\beta$$

que es el llamado tensor densidad de momento angular y es tal que $\tilde{M}^\mu{}_{\nu\sigma} = -\tilde{M}^\mu{}_{\sigma\nu}$. De la misma forma que en el caso anterior podemos construir la cantidad conservada

$$\tilde{M}_{\mu\nu} = - \int_t d^3x \tilde{M}^0{}_{\mu\nu}(t, \vec{x}) \quad (4)$$

que recibe el nombre de tensor momento angular y evidentemente no depende de t . Notemos que $\tilde{M}_{\mu\nu}$ no es invariante bajo traslaciones según se deduce de (3) y (4). A partir de él se define el momento angular como

$$J^i = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} M^{jk} \quad (5)$$

Volvamos ahora a ocuparnos de la simetría de $\tilde{T}_{\mu\nu}$. De (3) se deduce

$$0 = D_\mu \tilde{M}^\mu{}_{\nu\sigma} = \tilde{T}_{\sigma\nu} - \tilde{T}_{\nu\sigma} - D_\mu \left[\frac{\partial L}{\partial (D_\mu \phi_\alpha)} (S_{\nu\sigma})_\alpha{}^\beta \phi_\beta \right] \quad (6)$$

que se puede escribir

$$\tilde{T}_{\sigma\nu} - \tilde{T}_{\nu\sigma} = -D_\mu \tilde{M}^{(S)\mu}{}_{\nu\sigma}$$

(1)

$$\tilde{M}^{(S)\mu}{}_{\nu\sigma} \equiv -\frac{\partial L}{\partial (D_\mu \phi_\alpha)} (S_{\nu\sigma})_\alpha{}^\beta \phi_\beta$$

Definamos ahora

$$T^{\mu\nu} \equiv \tilde{T}^{\mu\nu} + D_\sigma G^{\sigma\mu\nu}$$

(2)

$$G^{\sigma\mu\nu} \equiv -\frac{1}{2} \left[\tilde{M}^{(S)\sigma\mu\nu} + \tilde{M}^{(S)\mu\nu\sigma} + \tilde{M}^{(S)\nu\sigma\mu} \right]$$

Noten que

$$G^{\sigma\mu\nu} = -G^{\mu\sigma\nu}$$

(3)

Entonces

$$i) D_\mu T^{\mu\nu} = D_\mu D_\sigma G^{\sigma\mu\nu} = 0$$

$$ii) T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu} = \tilde{T}^{\mu\nu} + D_\sigma G^{\sigma\mu\nu} - \tilde{T}^{\nu\mu} - D_\sigma G^{\sigma\nu\mu} =$$

$$= -D_\sigma \left\{ \tilde{M}^{(S)\sigma\nu\mu} + \frac{1}{2} \tilde{M}^{(S)\sigma\mu\nu} + \frac{1}{2} \tilde{M}^{(S)\mu\nu\sigma} + \frac{1}{2} \tilde{M}^{(S)\nu\sigma\mu} \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \tilde{M}^{(S)\sigma\nu\mu} - \frac{1}{2} \tilde{M}^{(S)\nu\mu\sigma} + \frac{1}{2} \tilde{M}^{(S)\mu\sigma\nu} \right\} = 0$$

$$iii) \int d^3x T^{0\mu} - \int d^3x \tilde{T}^{0\mu} = \int d^3x D_\sigma G^{\sigma 0\mu} = \int d^3x D_\mu G^{\mu 0\mu} = 0$$

veremos pues que el nuevo tensor $T^{\mu\nu}$ cumple

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}, \quad D_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad P^\mu = \int_V d^3x T^{0\mu}(t, \vec{x}) \quad (4)$$

y es el llamado tensor densidad de energía - momento de Belinfante [F.J. BELINFANTE *Physica* 7, 449 (1940)] [L. ROSENFELD, *Mem. Acad. R. Belg. Sci.* 18, n° 6 (1940)].

Una de las implicaciones de la simetría del tensor energía - momento es que, al considerar un volumen fijo, la variación de densidad de energía es igual al flujo de momento por unidad de superficie y tiempo: De (4)

$$\frac{d}{dt} \int_V d^3x T^{00} = - \int_V d^3x D_\mu T^{\mu 0} = - \int_V d^3x D_\mu T^{0\mu} = - \int_{\Sigma(V)} d\sigma^\mu T^{0\mu} \quad (5)$$

donde $\Sigma(V)$ es la superficie cerrada que rodea a V .

Veamos ahora una forma más simple de escribir el tensor densidad de momento angular: se tiene

$$\begin{aligned}\tilde{M}^{\mu\nu\sigma} &= \tilde{T}^{\mu\nu} x^\sigma - \tilde{T}^{\mu\sigma} x^\nu + M^{(S)\mu\nu\sigma} = \\ &= [T^{\mu\nu} - D_\lambda G^{\lambda\mu\nu}] x^\sigma - [T^{\mu\sigma} - D_\lambda G^{\lambda\mu\sigma}] x^\nu + M^{(S)\mu\nu\sigma} = \\ &= T^{\mu\nu} x^\sigma - T^{\mu\sigma} x^\nu - x^\sigma D_\lambda G^{\lambda\mu\nu} + x^\nu D_\lambda G^{\lambda\mu\sigma} - M^{(S)\mu\nu\sigma} = \\ &= T^{\mu\nu} x^\sigma - T^{\mu\sigma} x^\nu - D_\lambda [x^\sigma G^{\lambda\mu\nu} - x^\nu G^{\lambda\mu\sigma}] + G^{\sigma\mu\nu} - G^{\nu\mu\sigma} + M^{(S)\mu\nu\sigma} \\ &= T^{\mu\nu} x^\sigma - T^{\mu\sigma} x^\nu - D_\lambda [x^\sigma G^{\lambda\mu\nu} - x^\nu G^{\lambda\mu\sigma}]\end{aligned}$$

tenemos pues

$$\tilde{M}^{\mu}{}_{\nu\sigma} = T^{\mu}{}_{\nu} x_\sigma - T^{\mu}{}_{\sigma} x_\nu - D_\lambda [G^{\lambda\mu}{}_{\nu} x_\sigma - G^{\lambda\mu}{}_{\sigma} x_\nu] \quad (1)$$

Definamos ahora

$$M^{\mu}{}_{\nu\sigma} \equiv T^{\mu}{}_{\nu} x_\sigma - T^{\mu}{}_{\sigma} x_\nu \quad (2)$$

entonces es fácil comprobar que

$$D_\mu M^{\mu}{}_{\nu\sigma, \beta} = 0 \quad (3)$$

$$M_{\mu\nu} = - \int_V d^3x M^0{}_{\mu\nu}$$

(ii) Transformaciones globales.

Consideremos la transformación infinitesimal

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = x^\mu \quad (4)$$

$$\phi_\alpha(x) \longrightarrow \phi'_\alpha(x') = \phi_\alpha(x) + i\lambda \Gamma_\alpha{}^\beta \phi_\beta(x)$$

donde λ es infinitesimal y $\Gamma_\alpha{}^\beta$ es independiente de x . Si esta transformación es de simetría con $\delta\Omega^\mu \equiv 0$, entonces la ecuación de continuidad es

$$D_\mu J^\mu(x) = 0, \quad J^\mu(x) \equiv -i \frac{\partial L}{\partial (D_\mu \phi_\alpha)} \Gamma_\alpha{}^\beta \phi_\beta \quad (5)$$

donde $J^\mu(x)$ se denomina el vector "corriente". A partir de él se define la carga conservada como

$$Q = \int_V d^3x J^0(t, \vec{x}) \quad (1)$$

II-A- SCALE TRANSFORMATIONS

We will denote by scale transformation

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = e^{-\rho} x^\mu \quad (1)$$

The joint action of Lorentz and scale transformation is given by

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = e^{-\rho} \Lambda^\mu_\nu x^\nu + e^{-\rho} a^\mu \quad (2)$$

If by $U(a, \Lambda, \rho)$ we denote the unitary operator that implements the transformation (2) then it is easy to check that its composition law is

$$U(a_2, \Lambda_2, \rho_2) U(a_1, \Lambda_1, \rho_1) = U(\Lambda_2 a_1 + e^{\rho_1} a_2, \Lambda_2 \Lambda_1, \rho_1 + \rho_2) \quad (3)$$

The infinitesimal operator is

$$U(a, \Lambda, \rho) = I + i P^\mu \delta a_\mu - \frac{i}{2} M^{\mu\nu} \delta \omega_{\mu\nu} - i D \delta \rho \quad (4)$$

where D is the generator of scale transformations. Now using (3) we can prove immediately

$$\begin{aligned} U(-\delta a, I, 0) U(0, I, -\delta \rho) U(\delta a, I, 0) U(0, I, \delta \rho) &= \\ &= U(\delta a \delta \rho, I, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U(0, g^\mu_\nu + \delta \omega^\mu_\nu, 0) U(0, I, -\delta \rho) U(0, g^\mu_\nu + \delta \omega^\mu_\nu, 0) U(0, I, \delta \rho) &= \\ &= U(0, I, 0) \end{aligned}$$

and hence

$$[D, P^\mu] = -i P^\mu \quad (5)$$

$$[D, M^{\mu\nu}] = 0$$

Let us now consider a field $\phi_\alpha(x)$ with canonical dimension d_α , i.e.

$$[\phi_\alpha(x)] = M^{d_\alpha} \quad (1)$$

where d_α is obtained from the Lagrangian density. From now on we will use

$$U(g) \equiv U(0, I, g) \quad (2)$$

and the field transformation law is

$$\phi'_\alpha(x) \equiv U(g) \phi_\alpha(x) U^{-1}(g) = e^{d_\alpha g} \phi_\alpha(e^g x) \quad (3)$$

Hence

$$[D, \phi_\alpha(x)] = i(d_\alpha + x^\mu \partial_\mu) \phi_\alpha(x) \quad (4)$$

Let us now consider the infinitesimal transformations

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = x^\mu - x^\mu \delta g$$

$$\phi_\alpha(x) \longrightarrow \phi'_\alpha(x) = \phi_\alpha(x) + d_\alpha \phi_\alpha(x) \delta g + x^\mu \partial_\mu \phi_\alpha(x) \delta g$$

$$\equiv \phi_\alpha(x) + \tilde{\delta} \phi_\alpha(x)$$

$\Rightarrow$

$$\partial_\mu \phi_\alpha(x) \longrightarrow \partial_\mu \phi'_\alpha(x) = \partial_\mu \phi_\alpha(x) + (d_\alpha + 1) \partial_\mu \phi_\alpha(x) \delta g + x^\lambda \partial_\lambda \partial_\mu \phi_\alpha(x) \delta g$$

$$\equiv \partial_\mu \phi_\alpha(x) + \partial_\mu (\tilde{\delta} \phi_\alpha(x))$$

Hence

$$\delta x^\mu = -x^\mu \delta g \equiv x'^\mu - x^\mu$$

$$\delta \phi_\alpha(x) = d_\alpha \phi_\alpha(x) \delta g \equiv \phi'_\alpha(x') - \phi_\alpha(x) \quad (5)$$

$$\delta(\partial_\mu \phi_\alpha(x)) = (d_\alpha + 1) \partial_\mu \phi_\alpha(x) \delta g \equiv \partial'_\mu \phi'_\alpha(x') - \partial_\mu \phi_\alpha(x)$$

This is a symmetry transformation if we can find a $\delta\Omega^\mu(x, \phi_\alpha(x))$ such that

$$-x^\mu \partial_\mu L(x) \delta\varphi + d_\alpha \phi_\alpha(x) \frac{\partial L}{\partial \phi_\alpha} \delta\varphi + (d_\alpha + 1) \partial_\mu \phi_\alpha(x) \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \phi_\alpha)} \delta\varphi - 4L(x) \delta\varphi = -D_\mu \delta\Omega^\mu(x, \phi_\alpha(x)) \quad (1)$$

Translational invariance implies $\partial_\mu L(x) = 0$. Furthermore let us consider some examples

i) Scalar field $\phi(x)$: $d = +1$

$$L = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi, \quad \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \phi)} = \partial^\mu \phi$$

$$d\phi \frac{\partial L}{\partial \phi} + (d+1) \partial_\mu \phi \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \phi)} - 4L = 2\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - 2\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi = 0$$

ii) Spinor field $\psi(x)$: $d = 3/2$

$$L = \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \frac{i}{2} \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$$

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} = -\frac{i}{2} \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu$$

$$\frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \psi)} = \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu$$

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{\psi}} = \frac{i}{2} \gamma^\mu \partial_\mu \psi$$

$$\frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} = -\frac{i}{2} \gamma^\mu \psi$$

$$d\bar{\psi} \frac{\partial L}{\partial \bar{\psi}} + d \frac{\partial L}{\partial \psi} \psi + (d+1) \partial_\mu \bar{\psi} \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} + (d+1) \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \psi)} \partial_\mu \psi - 4L =$$

$$i \frac{3}{4} \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - i \frac{3}{4} \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi - i \frac{5}{4} \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi + i \frac{5}{4} \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi$$

$$- 2i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi + 2i \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi = 0$$

The dilatation transformation is a symmetry transformation if.

$$4L(x) - d_\alpha \phi_\alpha(x) \frac{\partial L}{\partial \phi_\alpha} - (d_\alpha + 1) \partial_\mu \phi_\alpha(x) \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \phi_\alpha)} = 0 \quad (2)$$

In that case $\delta \Omega^\mu = 0$ and the dilatation current is

$$\tilde{J}_D^\mu(x) = + \tilde{T}^\mu{}_\nu(x) x^\nu + d_\alpha \phi_\alpha(x) \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi_\alpha)} \quad (1)$$

$$\partial_\mu \tilde{J}_D^\mu(x) = 0$$

and in terms of the Belinfante energy-momentum density tensor

$$\begin{aligned} \tilde{J}_D^\mu(x) &= T^\mu{}_\nu(x) x^\nu + d_\alpha \phi_\alpha(x) \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi_\alpha)} - x^\nu D_\sigma G^{\sigma\mu}{}_\nu(x) \\ &= T^\mu{}_\nu(x) x^\nu + d_\alpha \phi_\alpha(x) \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi_\alpha)} + G^{\sigma\mu}{}_\sigma(x) - D_\sigma [x_\nu G^{\sigma\mu\nu}(x)] \end{aligned} \quad (2)$$

But

$$\begin{aligned} G^{\sigma\mu}{}_\sigma(x) &= -\frac{1}{2} [\tilde{M}^{(s)\sigma\mu}{}_\sigma(x) + \tilde{M}^{\mu\sigma}{}_\sigma(x) + \tilde{M}_\sigma{}^{\sigma\mu}(x)] = \\ &= -\frac{1}{2} [\tilde{M}^{(s)\sigma\mu}{}_\sigma(x) + \tilde{M}_\sigma{}^{\sigma\mu}(x)] = -\frac{1}{2} [\tilde{M}^{(s)\sigma\mu}{}_\sigma(x) + \tilde{M}_\sigma{}^{\mu\sigma}(x)] = \\ &= -\tilde{M}^{(s)\sigma\mu}{}_\sigma(x) = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\sigma \phi_\alpha)} (S^{\mu\sigma})_\alpha{}^\beta \phi_\beta \end{aligned} \quad (3)$$

and hence

$$\begin{aligned} \tilde{J}_D^\mu(x) &= T^\mu{}_\nu(x) x^\nu + V^\mu(x) - D_\sigma [G^{\sigma\mu\nu}(x) x_\nu] \\ V^\mu(x) &\equiv d_\alpha \phi_\alpha(x) \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi_\alpha)} + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\sigma \phi_\alpha)} (S^{\mu\sigma})_\alpha{}^\beta \phi_\beta(x) \end{aligned} \quad (4)$$

The object $V^\mu(x)$ is called the field-mixed. The reason for this nomenclature is that $V^\mu(x)$, ignoring the spin term, consists of the product between the field momentum $\partial L / \partial(\partial_\mu \phi_\alpha)$ and the field ϕ_α , a structure analogous to the mixed in nonrelativistic Lagrangian theory. The last term in (4) is a total divergence of an antisymmetric tensor. Therefore it makes no contribution to the space integral of $\tilde{J}_D^0$, nor does it contribute to $\partial_\mu \tilde{J}_D^\mu(x)$. Without loss of physical content, we may drop it, and introduce a modified dilatation current

$$J_D^\mu(x) = T^{\mu\nu}(x) x_\nu + V^\mu(x)$$

(4)

$$V^\mu(x) = d_\alpha \phi_\alpha(x) \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi_\alpha)} + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\sigma \phi_\alpha)} (S^\mu{}_\sigma)_\alpha{}^\beta \phi_\beta(x)$$

In a scale invariant theory it is always true [S. COLEMAN and R. JACKIW
Ann. Phys. (N.Y.) 67, 552 (1971)] that

$$V^\mu(x) \equiv \partial_\sigma \sigma^{\mu\sigma}(x)$$

(2)

Then we can define

$$\sigma_\pm^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{2} [\sigma^{\mu\nu}(x) \pm \sigma^{\nu\mu}(x)]$$

(3)

$$\begin{aligned} \Sigma^{\lambda\rho\mu\nu} \equiv & g^{\lambda\rho} \sigma_+^{\mu\nu} - g^{\lambda\mu} \sigma_+^{\rho\nu} - g^{\lambda\nu} \sigma_+^{\mu\rho} + g^{\mu\nu} \sigma_+^{\lambda\rho} - \\ & - \frac{1}{3} g^{\lambda\rho} g^{\mu\nu} \sigma_+^\alpha{}_\alpha + \frac{1}{3} g^{\lambda\mu} g^{\rho\nu} \sigma_+^\alpha{}_\alpha \end{aligned}$$

(4)

and hence we can define a new energy-momentum tensor

$$\Theta^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\lambda \partial_\rho \Sigma^{\lambda\rho\mu\nu}$$

(5)

(improved energy-momentum density tensor). $\Theta^{\mu\nu}$ may be used instead of $T^{\mu\nu}$ in construction of the Poincaré generators, since the added term is symmetric and conserved, and does not contribute to the relevant space integrals. In terms of $\Theta^{\mu\nu}$ the dilatation current is

$$J_D^\mu(x) = x_\nu \Theta^{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2} \partial_\lambda \partial_\rho [\Sigma^{\lambda\rho\mu\nu}(x) x_\nu] + \partial_\lambda \sigma_-^{\mu\lambda}(x)$$

The last two terms may be dropped and our final expression for the dilatation current is

$$D^\mu(x) = x_\nu \Theta^{\mu\nu}(x)$$

(6)

The divergence of $D^\mu(x)$ is in general given by

$$\partial_\mu D^\mu(x) = \Theta^\mu_\mu(x)$$

(1)

Thus, it is seen that the vanishing of the trace of the energy momentum tensor becomes related to scale invariance.

II.-B - EL GRUPO CONFORME

El grupo conforme es el grupo continuo de 15 parámetros reales generados por el conjunto de las transformaciones

1) T_4 : Traslaciones

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = x^\mu + a^\mu$$

2) L_6 : Lorentz

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$$

3) D_1 : Dilataciones

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = e^{-\vartheta} x^\mu$$

4) K_4 : Transf. Conf. Especiales

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = \frac{x^\mu + x^2 c^\mu}{1 + 2(c \cdot x) + c^2 x^2}$$

(1)

su elemento más general es de la forma

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = \frac{S^\mu + S^2 c^\mu}{1 + 2(c \cdot S) + c^2 S^2} \quad (2)$$

$$S^\mu \equiv e^{-\vartheta} (\Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu)$$

Indiquemos por $U(a, \Lambda, \vartheta, c)$ el operador unitario que implementa la transformación (2). Para transformaciones infinitesimales podemos escribir

$$U(\delta a^\mu, \delta \Lambda^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu, \delta \vartheta, \delta c^\mu) = I + i P^\mu \delta a_\mu$$

$$- \frac{i}{2} M^{\mu\nu} \delta \omega_{\mu\nu} - i D \delta \vartheta + i K^\mu \delta c_\mu \quad (3)$$

Intentemos ahora obtener el álgebra de este grupo

i) Se tiene que

$$\begin{aligned} U(0, I, 0, -\delta c^\mu) U(0, I, 0, -\delta c^\nu) U(0, I, 0, \delta c^\mu) U(0, I, 0, \delta c^\nu) = \\ = U(0, I, 0, 0) \end{aligned} \quad (4)$$

de donde

$$[K^\mu, K^\nu] = 0 \quad (5)$$

ii) Por otra parte

$$U(0, I, -\delta p, 0) U(0, I, 0, -\delta c^{\mu}) U(0, I, \delta p, 0) U(0, I, 0, \delta c^{\mu}) = U(0, I, 0, \delta p \delta c^{\mu}) \quad (1)$$

de donde

$$[D, K^{\mu}] = i K^{\mu} \quad (2)$$

De forma análoga se obtienen las restantes y así resulta que el álgebra es

$$\begin{aligned} [P^{\mu}, P^{\nu}] &= 0, & [M^{\lambda\beta}, P^{\mu}] &= -i (g^{\lambda\mu} P^{\beta} - g^{\beta\mu} P^{\lambda}) \\ [M^{\lambda\beta}, M^{\mu\nu}] &= -i (g^{\lambda\mu} M^{\beta\nu} + g^{\beta\nu} M^{\lambda\mu} - g^{\beta\mu} M^{\lambda\nu} - g^{\lambda\nu} M^{\beta\mu}) \\ [P^{\mu}, D] &= i P^{\mu}, & [M^{\mu\nu}, D] &= 0 \end{aligned}$$

$$[P^{\mu}, K^{\nu}] = -2i (g^{\mu\nu} D - M^{\mu\nu}), \quad [D, K^{\mu}] = i K^{\mu} \quad (3)$$

$$[M^{\mu\nu}, K^{\rho}] = -i (g^{\mu\rho} K^{\nu} - g^{\nu\rho} K^{\mu}), \quad [K^{\mu}, K^{\nu}] = 0$$

$$[D, D] = 0$$

Notar que las reglas de conmutación de estos generadores se pueden escribir en la forma

$$[M^{AB}, M^{CD}] = -i (g^{AC} M^{BD} + g^{BD} M^{AC} - g^{BC} M^{AD} - g^{AD} M^{BC})$$

$$A, B, C, D = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

$$g^{AB} = (+1, -1, -1, -1, -1, +1)$$

(4)

$$M^{AB} = M^{\mu\nu} \quad \text{si } A, B = 0, 1, 2, 3, \quad M^{45} = -M^{54} = \frac{1}{2} (P^{\mu} + K^{\mu})$$

$$M^{45} = -M^{54} = \frac{1}{2} (P^{\mu} - K^{\mu}), \quad M^{45} = -M^{54} = D$$

y por tanto el grupo es equivalente a $O(4, 2)$

III. - LA ECUACIÓN DE KLEIN - GORDON

Para obtener la ecuación de Schrödinger, para una partícula de spin cero, una manera formal de proceder es partir de la ecuación $E = \vec{p}^2/2m$ y realizar en ella las sustituciones $E \rightarrow i\partial_t$, $\vec{p} \rightarrow -i\vec{\nabla}$ y hacer actuar el operador así obtenido sobre la función de ondas. Para obtener una ecuación de ondas relativista partiremos de la ecuación

$$p^\mu p_\mu = m^2 \quad (1)$$

y haciendo

$$p_\mu \longrightarrow i\partial_\mu \quad (2)$$

obtenemos la ecuación de Klein-Gordon [O. KLEIN. Z. Phys. 37, 895 (1926)] [W. GORDON Z. Phys. 40, 117, 121 (1926)]:

$$(\square + m^2) \phi(x) \equiv (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi(x) = 0 \quad (3)$$

donde suponemos que $\phi(x)$, en general complejo, se comporta como un escalar, hayo el grupo de Poincaré

$$x \longrightarrow x' = \Lambda x + a \quad (4)$$

$$\phi(x) \longrightarrow \phi'(x') = \phi(x)$$

Procedamos ahora a hallar la solución mas general de (3), que podemos escribir a través de su transformada de Fourier

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4p \tilde{\phi}(p) e^{-ip \cdot x} \quad (5)$$

Como $\phi(x)$ debe ser solución de (3) entonces

$$(p^2 - m^2) \tilde{\phi}(p) = 0 \quad (6)$$

por lo que $\tilde{\phi}(p)$ tiene el soporte en el hiperboloido masico $\Omega(m)$

$$\Omega(m) = \Omega_+(m) \cup \Omega_-(m), \quad \Omega_\pm(m) \equiv \{p^\mu: p^2 = m^2, p^0 \gtrless 0\} \quad (7)$$

esto es

$$\tilde{\phi}(p) = (2\pi)^{-1} \delta(p^2 - m^2) \hat{\phi}(p) \quad (8)$$

Por tanto la solución mas general de la ecuación de Klein-Gordon es

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4p \delta(p^2 - m^2) \hat{\phi}(p) e^{-i p \cdot x} \quad (1)$$

donde $\hat{\phi}(p)$ es una función arbitraria definida sobre $\Omega(m)$. Teniendo en cuenta que

$$\delta(p^2 - m^2) = \frac{1}{2E(\vec{p})} \left\{ \delta[p^0 - E(\vec{p})] + \delta[p^0 + E(\vec{p})] \right\} \quad (2)$$

donde $E(\vec{p}) = (m^2 + \vec{p}^2)^{1/2}$, la solución general se puede escribir

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2E(\vec{p})} \left\{ \hat{\phi}(E, \vec{p}) e^{-iEt + i\vec{p} \cdot \vec{x}} + \hat{\phi}(-E, \vec{p}) e^{+iEt + i\vec{p} \cdot \vec{x}} \right\} \quad (3)$$

esto es

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\Omega(m)} \frac{d^3p}{2|p^0|} \hat{\phi}(p) e^{-i p \cdot x} \quad (4)$$

El hecho de que esta integral se halle extendida a todo $\Omega(m)$ nos dice que la ecuación de Klein-Gordon tiene soluciones tanto de energías positivas como negativas. Notemos además que $d^3p / 2|p^0| (2\pi)^3$ es el elemento de volumen invariante Poincaré en $\Omega(m)$.

En orden a definir un producto escalar en el espacio de las soluciones de la ecuación de Klein-Gordon notemos que si $\phi_1(x)$ y $\phi_2(x)$ son soluciones de dicha ecuación entonces

$$\partial_\mu \left[i \phi_1^*(x) \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi_2(x) \right] = 0 \quad (5)$$

$$a(x) \overleftrightarrow{\partial}^\mu b(x) \equiv a(x) [\partial^\mu b(x)] - [\partial^\mu a(x)] b(x)$$

Definiremos el producto escalar como

$$(\phi_1, \phi_2) \equiv i \int d^3x \phi_1^*(t, \vec{x}) \overleftrightarrow{\partial}_t \phi_2(t, \vec{x}) \quad (6)$$

donde la integral se halla extendida a todo el espacio y en virtud de (5) su valor es independiente del instante t para el que se calcule. Veamos como expresar (6) en términos de las $\hat{\phi}(p)$. Sustituyendo las análogas de (4) en (6)

$$(\phi_1, \phi_2) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^3x \int_{\Omega(m)} \frac{d^3p}{2|p^0|} \int_{\Omega(m)} \frac{d^3p'}{2|p'^0|} \hat{\phi}_1^*(p') \phi_2(p) e^{-i(\vec{p} - \vec{p}') \cdot \vec{x}} (-i p^0 - i p'^0)$$

de donde

$$(\phi_1, \phi_2) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\Omega(m)} \frac{d^3p}{2|p_0|} \epsilon(p_0) \hat{\phi}_1^*(p) \hat{\phi}_2(p) \quad (1)$$

donde $\epsilon(p_0) = \pm 1$ si $p_0 \gtrless 0$. De aquí se ve claramente que este producto escalar es invariante Poincaré. Otra consecuencia de esto es que el producto escalar que hemos definido conduce a una métrica indefinida. En efecto si $\hat{\phi}(p)$ tiene el soporte en $\Omega_-(m)$, entonces $(\phi, \phi) < 0$.

Si solo pretendemos considerar partículas libres la ecuación de Klein-Gordon es aceptable en el sentido de que si consideramos únicamente las $\hat{\phi}(p)$ con soporte en $\Omega_+(m)$, entonces el conjunto de las soluciones con el producto escalar que hemos definido constituye un espacio de Hilbert. Notar sin embargo que el hecho de que la variedad de los estados realizables contiene sólo soluciones de energía positiva tiene varias consecuencias en relación a los operadores que representan observables físicos. Notemos en particular que las soluciones $e^{-ip \cdot x}$ con $p \in \Omega_+(m)$ representan estados con momento $\vec{p}$ y energía $E(\vec{p}) > 0$. Sin embargo el operador $\vec{x} = i \vec{\nabla}_p$ no puede interpretarse como el operador posición pues no es autoadjunto:

$$\begin{aligned} (\phi_1, \vec{x} \phi_2) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2|p_0|} \hat{\phi}_1^*(p) i \vec{\nabla}_p \phi_2(p) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2|p_0|} \left[\left(-i \vec{\nabla}_p + \frac{i \vec{p}}{\vec{p}^2 + m^2} \right) \hat{\phi}_1^*(p) \right] \phi_2(p) \neq (\vec{x} \phi_1, \phi_2) \end{aligned} \quad (2)$$

Se puede probar que un operador posición aceptable es el llamado operador posición de Newton-Wigner [T.D. NEWTON y E.P. WIGNER, Rev. Mod. Phys. 21, 400 (1949)]

$$\vec{q} \equiv i \vec{\nabla}_p - \frac{1}{2} \frac{i \vec{p}}{\vec{p}^2 + m^2} \quad (3)$$

Se puede probar entonces que la función de ondas representando una partícula localizada en $\vec{x}_0$ en $t_0 = 0$ no es $\delta(\vec{x} - \vec{x}_0)$ como en el caso no relativista sino una función $\psi_{\vec{x}_0}(\vec{x})$ cuya extensión en el espacio es de orden $1/m$ (longitud de Compton de la partícula) y después cae exponencialmente. Esto no es muy sorprendente pues para localizar

una partícula en una región del espacio del tamaño $\ll 1/m$, es necesario que actúen agentes externos con frecuencias $\gg m$, de forma que la creación de pares no puede ser evitada y el formalismo de una sola partícula se hace totalmente inconsistente.

La situación es sin embargo imposible cuando se supone que la partícula de Klein-Gordon esté en interacción. Aún cuando en $t=0$ elijamos $\hat{\phi}(p)$ con soporte en $\Omega_+(m)$, la evolución temporal, en general, hará aparecer estados con soporte en $\Omega_-(m)$, es decir existirá una probabilidad no nula de encontrar la partícula en un estado de energía negativa, lo cual, a priori, es difícil de interpretar físicamente. En resumen que una teoría totalmente consistente para una única partícula relativista sólo puede formularse en el caso de una partícula libre.

La forma de evitar todos estos problemas es considerar que $\phi(x)$ no representa la función de ondas de una partícula de spin cero, sino que $\phi(x)$ es el operador campo para partículas de spin cero, capaz de crear y destruir dichas partículas y las correspondientes antipartículas. Si en la segunda integral de (2.3) hacemos el cambio $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$ e introducimos $a(\vec{p}) \equiv \hat{\phi}(E, \vec{p})$, $b^+(\vec{p}) \equiv \hat{\phi}(-E, -\vec{p})$ entonces

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\Omega_+(m)} \frac{d^3p}{2E(\vec{p})} [a(\vec{p}) e^{-ip \cdot x} + b^+(\vec{p}) e^{+ip \cdot x}] \quad (1)$$

donde $a^+(\vec{p})$ [$a(\vec{p})$] es el operador creación [aniquilación] de partículas y $b^+(\vec{p})$ [$b(\vec{p})$] es el operador creación [aniquilación] de antipartículas y se postulan para ellos las relaciones de conmutación

$$[a(\vec{p}), a^+(\vec{p}')] = [b(\vec{p}), b^+(\vec{p}')] = (2\pi)^3 2E(\vec{p}) \delta(\vec{p} - \vec{p}') \quad (2)$$

siendo nulos los restantes. Noten que si $\phi(x) \equiv \phi^+(x)$ entonces $b(\vec{p}) \equiv a(\vec{p})$ y las relaciones (2) se mantienen para los $a(\vec{p})$ y $a^+(\vec{p}')$.

Indicaremos por $|0\rangle$ el estado de vacío definido como

$$a(\vec{p})|0\rangle = b(\vec{p})|0\rangle = 0 \quad \forall \vec{p} \quad (3)$$

Lo supondremos normalizado en la forma $\langle 0|0\rangle = 1$. A partir del

vacío y por actuación rectificada de los operadores creación y aniquilación construiremos estados con cualquier número de partículas o antipartículas. Es el espacio sustentado por estos estados se suele llamar espacio de Fock. Así, por ejemplo, el estado con una partícula es

$$|\vec{p}\rangle \equiv a^\dagger(\vec{p}) |0\rangle \quad (1)$$

que está normalizado de acuerdo con (I.15.3) $\langle \vec{p} | \vec{p}' \rangle = (2\pi)^3 2E(\vec{p}) \delta(\vec{p} - \vec{p}')$

En ocasiones es interesante disponer de expresiones de $a(\vec{p})$ y $b(\vec{p})$ en términos de los campos. Definamos

$$f_{\vec{p}}(x) \equiv e^{-i p \cdot x} \quad p \in \Omega_+(m) \quad (2)$$

De (3.6) se deduce inmediatamente que

$$(f_{\vec{p}_1}, f_{\vec{p}}) = -(f_{\vec{p}_1}^*, f_{\vec{p}}^*) = (2\pi)^3 2E(\vec{p}) \delta(\vec{p} - \vec{p}_1) \quad (3)$$

$$(f_{\vec{p}_1}, f_{\vec{p}}^*) = (f_{\vec{p}_1}^*, f_{\vec{p}}) = 0$$

Como

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{2E(\vec{p})} [f_{\vec{p}}(x) a(\vec{p}) + f_{\vec{p}}^*(x) b^\dagger(\vec{p})] \quad (4)$$

se obtiene

$$a(\vec{p}) = (f_{\vec{p}}^*, \phi) \quad , \quad b(\vec{p}) = (f_{\vec{p}}, \phi^\dagger) \quad (5)$$

En lo que sigue vamos a calcular el conmutador de $\phi(x)$ y $\phi^\dagger(y)$:

$$\begin{aligned} [\phi(x), \phi^\dagger(y)] &= \frac{1}{(2\pi)^6} \int \frac{d^3 p}{2E} \int \frac{d^3 p'}{2E'} [a(\vec{p}) e^{-i p \cdot x} + b^\dagger(\vec{p}) e^{+i p \cdot x}, a^\dagger(\vec{p}') e^{+i p' \cdot y} + b(\vec{p}') e^{-i p' \cdot y}] \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{2E} \int \frac{d^3 p'}{2E'} 2E \delta(\vec{p} - \vec{p}') [e^{-i p \cdot (x-y)} - e^{+i p \cdot (x-y)}] \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{2E(\vec{p})} [e^{-i p \cdot (x-y)} - e^{+i p \cdot (x-y)}] \end{aligned}$$

Introduciendo la función invariante

$$\Delta(x; m^2) \equiv - \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{E(\vec{p})} e^{+i \vec{p} \cdot \vec{x}} \sin[E(\vec{p}) x^0] \quad (6)$$

obtenemos

$$[\phi(x), \phi^\dagger(y)] = i \Delta(x-y; m^2) \quad (7)$$

$$[\phi(x), \phi(y)] = 0$$

Es evidente que $\Delta(x; m^2) \Big|_{x^0=0} = 0$ y como esta función es invariante

$$\Delta(x; m^2) = 0, \quad \forall x^2 < 0 \quad (1)$$

y por tanto si $(x-y)^2 < 0$ los conmutadores (5.7) son todos nulos. Esta es la llamada condición de microcausalidad y garantiza que observables, contruidos a partir de los campos, conmutan cuando se hallan referidos a puntos separados por una distancia de tipo tiempo, como era de esperar físicamente. De su definición se obtiene también

$$\partial_{x_i} \Delta(x; m^2) \Big|_{x^0=0} = 0 \quad (2)$$

$$\partial_{x_0} \Delta(x; m^2) \Big|_{x^0=0} = -\delta(\vec{x})$$

La ecuación de Klein-Gordon puede derivarse a partir de la densidad Lagrangiana

$$L(x) = : \partial_\mu \phi^+(x) \partial^\mu \phi(x) : - m^2 : \phi^+(x) \phi(x) : \quad (3)$$

La notación aquí es :: lo cual indica producto normal y significa que en los operadores que se construyan a partir de (3) al expresarlos en términos de operadores creación y destrucción se deben colocar todos los operadores destrucción a la derecha de los de creación como si estos operadores conmutaran entre sí. Veremos como proceder más adelante. En algunas ocasiones interesa introducir el operador $\pi(x)$ conjugado al campo $\phi(x)$:

$$\pi(x) \equiv \frac{\partial L}{\partial (\partial_0 \phi(x))} = \partial^0 \phi^+(x) \quad (4)$$

Notemos que

$$\delta(x^0 - y^0) [\phi(x), \pi(y)] = i \delta^{(4)}(x-y) \quad (5)$$

$$\delta(x^0 - y^0) [\phi(x), \phi(y)] = \delta(x^0 - y^0) [\pi(x), \pi(y)] = 0$$

que son las típicas reglas de conmutación de una variable y su momento conjugado. Evidentemente son consecuencia inmediata de (5.7), usando (2).

La $L(x)$ es invariante bajo el grupo de Poincaré lo cual implica la conservación del momento y del momento angular. El teorema de Noether de

energía-momento es

$$T^{\mu\nu} = -L g^{\mu\nu} + : \partial^\mu \phi^+(x) \partial^\nu \phi(x) : + : \partial^\nu \phi^+(x) \partial^\mu \phi(x) : \quad (1)$$

que es evidentemente simétrico. En particular

$$T^{00} = : \partial^0 \phi^+(x) \partial^0 \phi(x) : + : \vec{\nabla} \phi^+(x) \vec{\nabla} \phi(x) : + m^2 : \phi^+(x) \phi(x) : \quad (2)$$

$$T^{0i} = : \partial^0 \phi^+(x) \partial^i \phi(x) : + : \partial^i \phi^+(x) \partial^0 \phi(x) :$$

Veamos de expresar P^0 en términos de los operadores creación y aniquilación

$$\begin{aligned} P^0 &= \int d^3x T^{00}(0, \vec{x}) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^6} \int d^3x \int \frac{d^3p}{2E} \frac{d^3p'}{2E'} : \left\{ EE' [a^+(\vec{p}') e^{-i\vec{p}' \cdot \vec{x}} - b(\vec{p}') e^{+i\vec{p}' \cdot \vec{x}}] [a(\vec{p}) e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} - b^+(\vec{p}) e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}}] \right. \\ &+ (\vec{p} \cdot \vec{p}') [a^+(\vec{p}') e^{-i\vec{p}' \cdot \vec{x}} - b(\vec{p}') e^{+i\vec{p}' \cdot \vec{x}}] [a(\vec{p}) e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} - b^+(\vec{p}) e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}}] + \\ &+ m^2 [a^+(\vec{p}') e^{-i\vec{p}' \cdot \vec{x}} + b(\vec{p}') e^{+i\vec{p}' \cdot \vec{x}}] [a(\vec{p}) e^{+i\vec{p} \cdot \vec{x}} + b^+(\vec{p}) e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}}] \left. \right\} : = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{4E^2} : \left\{ E^2 a^+(\vec{p}) a(\vec{p}) - E^2 a^+(-\vec{p}) b^+(\vec{p}) - E^2 b(-\vec{p}) a(\vec{p}) + E^2 b(\vec{p}) b^+(\vec{p}) \right. \\ &+ \vec{p}^2 a^+(\vec{p}) a(\vec{p}) + \vec{p}^2 a^+(-\vec{p}) b^+(\vec{p}) + \vec{p}^2 b(-\vec{p}) a(\vec{p}) + p^2 b(\vec{p}) b^+(\vec{p}) \\ &+ m^2 a^+(\vec{p}) a(\vec{p}) + m^2 a^+(-\vec{p}) b^+(\vec{p}) + m^2 b(-\vec{p}) a(\vec{p}) + m^2 b(\vec{p}) b^+(\vec{p}) \left. \right\} : = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{1}{4} : 2 a^+(\vec{p}) a(\vec{p}) + 2 b(\vec{p}) b^+(\vec{p}) : \end{aligned}$$

De no existir el producto ordenado

$$P^0 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2E(\vec{p})} E(\vec{p}) [a^+(\vec{p}) a(\vec{p}) + b^+(\vec{p}) b(\vec{p}) + 2E(\vec{p}) \delta(\vec{0})]$$

y se encontraría, por ejemplo, $\langle 0 | P^0 | 0 \rangle = \delta(\vec{0}) \int d^3p E(\vec{p}) = \infty$, es decir la energía esperada del vacío sería infinita. Al tener en cuenta el producto normal

$$P^0 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2E(\vec{p})} E(\vec{p}) [a^+(\vec{p}) a(\vec{p}) + b^+(\vec{p}) b(\vec{p})] \quad (3)$$

$$\vec{P} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2E(\vec{p})} \vec{p} [a^+(\vec{p}) a(\vec{p}) + b^+(\vec{p}) b(\vec{p})]$$

resultados totalmente lógicos y que garantizan, como deseamos, que $\langle 0 | P^\mu | 0 \rangle = 0$.

De la expresión general se encuentra para el tensor densidad de momento angular

$$M^{\mu}_{\nu\sigma} = T^{\mu}_{\nu} x_{\sigma} - T^{\mu}_{\sigma} x_{\nu} \quad (1)$$

Supongamos que el campo tenga carga q . La densidad lagrangiana es invariante bajo la transformación

$$x^{\mu} \longrightarrow x'^{\mu} = x^{\mu} \quad (2)$$

$$\phi(x) \longrightarrow \phi'(x') = e^{iq\lambda} \phi(x) \quad \lambda = \text{real}$$

$$\Rightarrow \phi^+(x) \longrightarrow \phi'^+(x') = e^{-iq\lambda} \phi^+(x)$$

y por tanto la corriente conservada es

$$J^{\mu}(x) = -iq : [\partial^{\mu} \phi^+(x) \phi(x) - \phi^+(x) \partial^{\mu} \phi(x)] : \quad (3)$$

y la carga conservada es

$$Q = -iq \int d^3x : [\partial^0 \phi^+(x) \phi(x) - \phi^+(x) \partial^0 \phi(x)] : \quad (4)$$

y por tanto

$$Q = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2E(\vec{p})} q [a^+(\vec{p}) a(\vec{p}) - b^+(\vec{p}) b(\vec{p})] \quad (5)$$

es decir que la carga del vacío es nula y la partícula y antipartícula tienen cargas opuestas, lo cual es cierto para todo tipo de cargas.

Veamos ahora las leyes de transformación de los campos de Klein-Gordon bajo el grupo de Poincaré (ortocrono propio). El hecho de que $\phi(x)$ sea un escalar bajo este grupo implica que existe una representación unitaria $U(a, \Lambda)$ de $\mathcal{P}$ tal que

$$U(a, \Lambda) \phi(x) U^{-1}(a, \Lambda) = \phi(\Lambda x + a) \quad (6)$$

Vamos a comprobar esto. De las reglas de conmutación (5.7) se encuentra

$$\delta(x^0 - y^0) [\phi(x), T^{0\mu}(y)] = i \delta^{(4)}(x - y) \partial^{\mu} \phi(x) \quad (7)$$

y por tanto

$$[\phi(x), P^\mu] = i \partial^\mu \phi(x) \quad (1)$$

$$[\phi(x), M^{\mu\nu}] = i [x^\mu \partial^\nu \phi(x) - x^\nu \partial^\mu \phi(x)]$$

Entonces para las transformaciones infinitesimales

$$U(a, \Lambda) \phi(x) U^{-1}(a, \Lambda) =$$

$$= \left\{ I + i P^\mu \delta a_\mu - \frac{i}{2} M^{\mu\nu} \delta \omega_{\mu\nu} \right\} \phi(x) \left\{ I - i P^\mu \delta a_\mu + \frac{i}{2} M^{\mu\nu} \delta \omega_{\mu\nu} \right\} =$$

$$= \phi(x) - i \delta a_\mu [\phi(x), P^\mu] + \frac{i}{2} \delta \omega_{\mu\nu} [\phi(x), M^{\mu\nu}] =$$

$$= \phi(x) + \delta a_\mu \partial^\mu \phi(x) + \partial^\mu \phi(x) \delta \omega_{\mu\nu} x^\nu = \phi(x_\mu + \delta a_\mu + \delta \omega_{\mu\nu} x^\nu) \quad \text{Q.E.D.}$$

No tenemos además

$$U(a, \Lambda) a^\dagger(p) U^{-1}(a, \Lambda) = -i \int d^3x U(a, \Lambda) [f_p \overleftrightarrow{\partial}_t \phi^\dagger(x)] U^{-1}(a, \Lambda)$$

$$= -i \int d^3x [f_p \overleftrightarrow{\partial}_t \phi^\dagger(\Lambda x + a)] =$$

$$= -i \int d^3x \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p'}{2E'} [a^\dagger(p') f_p \overleftrightarrow{\partial}_t e^{i p'(\Lambda x + a)} + b(\bar{p}') f_p \overleftrightarrow{\partial}_t e^{-i p'(\Lambda x + a)}]$$

$$= -i \int d^3x \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p'}{2E'} [a^\dagger(\Lambda p') f_p \overleftrightarrow{\partial}_t f_{p'}^* e^{i \Lambda p' a} + b(\Lambda p') f_p \overleftrightarrow{\partial}_t f_{p'} e^{-i \Lambda p' a}]$$

donde hemos hecho el cambio $p' \rightarrow \Lambda p'$ y hemos tenido en cuenta que $\Lambda p' \cdot \Lambda x = p' \cdot x$. Usando (5.3) se obtiene inmediatamente

$$U(a, \Lambda) a^\dagger(\vec{p}) U^{-1}(a, \Lambda) = e^{i a \cdot \Lambda \vec{p}} a^\dagger(\Lambda \vec{p}) \quad (2)$$

y suponiendo $U(a, \Lambda) |0\rangle = |0\rangle$ se obtiene

$$U(a, \Lambda) |\vec{p}\rangle = e^{i a \cdot \Lambda \vec{p}} |\Lambda \vec{p}\rangle \quad (3)$$

de acuerdo con (I. 47.4)

Pasemos a considerar ahora simetrías discretas.

1) Paridad

Como es bien sabido la operación de paridad es implementada

por un operador unitario U_P tal que

$$U_P \phi(x) U_P^{-1} = \eta_P \phi(Px) \quad (1)$$

$Px \equiv (x^0, -\vec{x})$ y $\eta_P = \pm 1$, es la llamada paridad del campo. Notemos que

$$\begin{aligned} U_P a(\vec{p}) U_P^{-1} &= U_P (f_{\vec{p}}, \phi) U_P^{-1} = \\ &= i \eta_P \int d^3x [f_{\vec{p}}^*(x) \partial^0 \phi(Px) - \partial^0 f_{\vec{p}}^*(x) \phi(Px)] = \\ &= i \eta_P \int d^3x [f_{P\vec{p}}^*(Px) \partial^0 \phi(Px) - \partial^0 f_{P\vec{p}}^*(Px) \phi(Px)] = \eta_P a(P\vec{p}) \end{aligned}$$

Obtenemos pues

$$U_P a(\vec{p}) U_P^{-1} = \eta_P a(-\vec{p}) \quad (2)$$

$$U_P b(\vec{p}) U_P^{-1} = \eta_P b(-\vec{p})$$

En la hipótesis de que $U_P |0\rangle = |0\rangle$, vemos que para un campo de Klein-Gordon la partícula y la antipartícula tienen la misma paridad η_P .

(i) Inversión temporal

La operación de inversión temporal viene implementada por un operador antiunitario U_T tal que

$$U_T \phi(x) U_T^{-1} = \eta_T \phi(Tx) \quad (3)$$

$Tx \equiv (-x^0, \vec{x})$ y η_T es una fase arbitraria. Una demostración análoga a la del caso anterior permite comprobar que

$$U_T a(\vec{p}) U_T^{-1} = \eta_T a(-\vec{p}) \quad (4)$$

$$U_T b(\vec{p}) U_T^{-1} = \eta_T b(-\vec{p})$$

de donde, suponiendo $U_T |0\rangle = |0\rangle$, se deducen las leyes de transformación de los estados

(ii) Conjugación de carga

La operación de conjugación de carga o conjugación partícula-antipartícula es implementada por un operador unitario U_C que intercambia los papeles de las partículas y antipartículas:

$$U_c a^+(\vec{p}) U_c^{-1} = \eta_c b^+(\vec{p})$$

(1)

$$U_c b^+(\vec{p}) U_c^{-1} = \eta_c^* a^+(\vec{p})$$

donde una ecuación es consecuencia de la otra, siendo $|\eta_c| = 1$. Suponiendo $U_c |0\rangle = |0\rangle$ las ecuaciones anteriores permiten encontrar las leyes de transformación de los estados. Para los campos es inmediato deducir

$$U_c \phi(x) U_c^{-1} = \eta_c^* \phi^+(x)$$

(2)

Antes de terminar debemos mencionar que si $\phi^+(x) = \phi(x)$ entonces el campo describe partículas que coinciden con sus antipartículas y el desarrollo anterior se lleva a cabo a partir de

$$L(x) = \frac{1}{2} : \partial^\mu \phi(x) \partial_\mu \phi(x) : - \frac{1}{2} m^2 : \phi(x) \phi(x) :$$

(3)

III-A - ENERGY - MOMENTUM TENSOR

Let us consider the Lagrangian density for a charged scalar field

$$L(x) = \partial_\mu \phi^+(x) \partial^\mu \phi(x) - m^2 \phi^+(x) \phi(x) \quad (1)$$

Since

$$\frac{\partial L}{\partial \phi^+} = -m^2 \phi(x)$$

$$\frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \phi^+)} = \partial^\mu \phi(x)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = -m^2 \phi^+(x)$$

$$\frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \phi)} = \partial^\mu \phi^+(x)$$

the equations of motion are

$$[\partial^\mu \partial_\mu + m^2] \phi(x) = 0, \quad [\partial^\mu \partial_\mu + m^2] \phi^+(x) = 0 \quad (2)$$

and using the equations of motion

$$L(x) = \partial_\mu [\phi^+(x) \partial^\mu \phi(x)] \quad (3)$$

Now let us introduce the canonical momentum-energy density tensor

$$\tilde{T}^{\mu\nu}(x) = -L(x) g^{\mu\nu} + \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi + \partial^\nu \phi^+ \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \phi^+)} \quad (4)$$

i.e.

$$\tilde{T}^{\mu\nu}(x) = -L(x) g^{\mu\nu} + \partial^\mu \phi^+(x) \partial^\nu \phi(x) + \partial^\nu \phi^+(x) \partial^\mu \phi(x) \quad (5)$$

which is clearly symmetric and coincides with the Belinfante energy-momentum density tensor

$$T^{\mu\nu}(x) \equiv \tilde{T}^{\mu\nu}(x) = -L(x) g^{\mu\nu} + \partial^\mu \phi^+(x) \partial^\nu \phi(x) + \partial^\nu \phi^+(x) \partial^\mu \phi(x) \quad (6)$$

$$T^{\mu\nu}(x) = T^{\nu\mu}(x)$$

Note

$$\partial_\mu T^{\mu\nu}(x) = [\partial^\nu \phi^+(x)] \{ [\partial^\mu \partial_\mu + m^2] \phi(x) \} + \{ [\partial_\mu \partial^\mu + m^2] \phi^+(x) \} \partial^\nu \phi(x)$$

and therefore using the equations of motion

$$\partial_\mu T^{\mu\nu}(x) = 0 \quad (1)$$

as it must be. Notice furthermore

$$T^\mu{}_\mu(x) = -2 \partial_\mu \phi^+(x) \partial^\mu \phi(x) + 4m^2 \phi^+(x) \phi(x) \quad (2)$$

Similarly the angular momentum density tensor is

$$\tilde{M}^\mu{}_{\nu\sigma}(x) = \tilde{T}^\mu{}_\nu(x) x_\sigma - \tilde{T}^\mu{}_\sigma(x) x_\nu \quad (3)$$

and hence

$$M^\mu{}_{\nu\sigma}(x) = \tilde{M}^\mu{}_{\nu\sigma}(x) = T^\mu{}_\nu(x) x_\sigma - T^\mu{}_\sigma(x) x_\nu \quad (4)$$

From here

$$M^\mu{}_{\nu\sigma}(x) = -M^\mu{}_{\sigma\nu}(x), \quad \partial_\mu M^\mu{}_{\nu\sigma}(x) = 0 \quad (5)$$

being the last equation valid if the equations of motion are used.

Now let us proceed to the construction of the improved energy-momentum density tensor. Since $d=4$ and $S^{\mu\nu} \equiv 0$, hence the field-variant is

$$\begin{aligned} V_\mu(x) &= \partial_\mu \phi^+(x) \cdot \phi(x) + \phi^+(x) \partial_\mu \phi(x) = \\ &= \partial_\mu [\phi^+(x) \phi(x)] \Rightarrow \sigma^{\mu\nu}(x) = g^{\mu\nu} \phi^+(x) \phi(x) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\Rightarrow \sigma_+^{\mu\nu}(x) = g^{\mu\nu} \phi^+(x) \phi(x) \quad \sigma_-^{\mu\nu}(x) = 0 \quad (7)$$

$$\tilde{\Sigma}^{\lambda\rho\mu\nu}(x) = + \left\{ \frac{2}{3} g^{\lambda\rho} g^{\mu\nu} + \frac{1}{3} g^{\lambda\mu} g^{\rho\nu} - g^{\lambda\nu} g^{\rho\mu} \right\} \phi^+(x) \phi(x)$$

and hence

$$\begin{aligned}
 \Theta^{\mu\nu}(x) &= T^{\mu\nu}(x) + \frac{1}{2} \partial_\rho \partial_\lambda \Sigma^{\lambda\rho\mu\nu}(x) \\
 &= T^{\mu\nu}(x) + \frac{1}{3} g^{\mu\nu} \square [\phi^+(x) \phi(x)] - \frac{1}{3} \partial^\mu \partial^\nu [\phi^+(x) \phi(x)]
 \end{aligned} \quad (1)$$

and therefore the improved energy-momentum density tensor is

$$\begin{aligned}
 \Theta^{\mu\nu}(x) &= -L(x) g^{\mu\nu} + \partial^\mu \phi^+(x) \partial^\nu \phi(x) + \partial^\nu \phi^+(x) \partial^\mu \phi(x) \\
 &\quad + \frac{1}{3} g^{\mu\nu} \square [\phi^+(x) \phi(x)] - \frac{1}{3} \partial^\mu \partial^\nu [\phi^+(x) \phi(x)]
 \end{aligned} \quad (2)$$

and therefore

$$\Theta^\mu{}_\mu(x) = +4m^2 \phi^+(x) \phi(x) + [\partial^\mu \partial_\mu \phi^+(x)] \phi(x) + \phi^+(x) [\partial^\mu \partial_\mu \phi(x)]$$

and using the equations of motion

$$\Theta^\mu{}_\mu(x) = 2m^2 \phi^+(x) \phi(x) \quad (3)$$

which is zero for scale invariant theories ($m=0$).

III - B - P, C, T TRANSFORMATIONS

A) Charged scalar field

The most general form for the charged scalar field is

$$\phi(x) = \frac{g}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2E(\vec{p})} [a(\vec{p}) e^{-ipx} + \xi b^+(\vec{p}) e^{+ipx}] \quad (1)$$

where $g^*g = \xi^*\xi = 1$ are arbitrary phases, and the creation and annihilation operators satisfy the usual commutation rules.

Parity is implemented by a unitary operator U_P such that

$$U_P a^+(\vec{p}) |0\rangle = \tilde{\eta}_P^* a^+(-\vec{p}) |0\rangle, \quad U_P b^+(\vec{p}) |0\rangle = \tilde{\eta}'_P^* b^+(-\vec{p}) |0\rangle$$

Then

$$\begin{aligned} U_P \phi(x) U_P^{-1} &= g \int d^3z [\tilde{\eta}_P a(-\vec{p}) e^{-ipx} + \xi \tilde{\eta}'_P^* b^+(-\vec{p}) e^{+ipx}] = \\ &= g \int d^3z [\tilde{\eta}_P a(\vec{p}) e^{-ip \cdot Px} + \xi \tilde{\eta}'_P^* b^+(\vec{p}) e^{+ip \cdot Px}] \end{aligned}$$

where

$$\int d^3z \equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2E(\vec{p})}$$

Then in order to have a local transformation law for the fields:

$$U_P \phi(x) U_P^{-1} = \eta_P \phi(Px)$$

we have

$$\tilde{\eta}_P = \eta_P, \quad \tilde{\eta}'_P = \eta_P^*$$

and hence

$$U_P a^+(\vec{p}) |0\rangle = \epsilon_P^* a^+(-\vec{p}) |0\rangle, \quad U_P b^+(\vec{p}) |0\rangle = \epsilon_P b^+(-\vec{p}) |0\rangle \quad (2)$$

$$U_P \phi(x) U_P^{-1} = \epsilon_P \phi(Px)$$

where $\epsilon_P \equiv \eta_P$.

Charge conjugation is implemented by a unitary operator U_C such that

$$U_C a^+(\vec{p}) |0\rangle = \tilde{\eta}_C^* b^+(\vec{p}) |0\rangle, \quad U_C b^+(\vec{p}) |0\rangle = \tilde{\eta}'_C^* a^+(\vec{p}) |0\rangle$$

then

$$U_C \phi(x) U_C^{-1} = \rho \int d\tau [\tilde{\eta}_C b(\bar{p}) e^{-i p \cdot x} + \bar{\xi} \tilde{\eta}'_C^* a^\dagger(\bar{p}) e^{+i p \cdot x}]$$

and in order to have a local law for the field transformation

$$U_C \phi(x) U_C^{-1} = \eta_C \phi^+(x)$$

we must have

$$\tilde{\eta}_C = \eta_C [\rho^2 \bar{\xi}]^* \quad \tilde{\eta}'_C = \eta_C^* [\rho^2 \bar{\xi}]$$

and therefore

$$U_C a^\dagger(\bar{p}) |0\rangle = \epsilon_C^* b^\dagger(\bar{p}) |0\rangle, \quad U_C b^\dagger(\bar{p}) |0\rangle = \epsilon_C a^\dagger(\bar{p}) |0\rangle$$

(1)

$$U_C \phi(x) U_C^{-1} = \epsilon_C [\rho^2 \bar{\xi}] \phi^+(x)$$

where $\eta_C \equiv \epsilon_C [\rho^2 \bar{\xi}]$.

Time reversal invariance is implemented by an antiunitary operator such that

$$U_T a^\dagger(\bar{p}) |0\rangle = \tilde{\eta}_T^* a^\dagger(-\bar{p}) |0\rangle, \quad U_T b^\dagger(\bar{p}) |0\rangle = \tilde{\eta}'_T^* b^\dagger(-\bar{p}) |0\rangle$$

Hence

$$\begin{aligned} U_T \phi(x) U_T^{-1} &= \rho^* \int d\tau [\tilde{\eta}_T a(-\bar{p}) e^{+i p \cdot x} + \bar{\xi}^* \tilde{\eta}'_T^* b^\dagger(-\bar{p}) e^{-i p \cdot x}] = \\ &= \rho^* \int d\tau [\tilde{\eta}_T a(\bar{p}) e^{-i p \cdot T x} + \bar{\xi}^* \tilde{\eta}'_T^* b^\dagger(\bar{p}) e^{+i p \cdot T x}] \end{aligned}$$

If

$$U_T \phi(x) U_T^{-1} = \eta_T \phi(Tx)$$

we must have

$$\tilde{\eta}_T = \eta_T [\rho^2]^* \quad , \quad \tilde{\eta}'_T = \eta_T^* [\rho^2 \bar{\xi}^2]^*$$

and hence

$$U_T a^\dagger(\bar{p}) |0\rangle = \epsilon_T^* \bar{\xi} a^\dagger(-\bar{p}) |0\rangle, \quad U_T b^\dagger(\bar{p}) |0\rangle = \epsilon_T \bar{\xi} b^\dagger(-\bar{p}) |0\rangle$$

(2)

$$U_T \phi(x) U_T^{-1} = \epsilon_T [\rho^2 \bar{\xi}]^* \phi(Tx)$$

where $\eta_T \equiv \epsilon_T [\rho^2 \bar{\xi}]^*$

Hence

$$U_C U_P a^+(\vec{p}) |0\rangle = \epsilon_p^* \epsilon_c^* b^+(-\vec{p}) |0\rangle, \quad U_C U_P b^+(\vec{p}) |0\rangle = \epsilon_p \epsilon_c a^+(-\vec{p}) |0\rangle$$

$$U_C U_P \phi(x) U_P^{-1} U_C^{-1} = \epsilon_p \epsilon_c [\gamma^2 \xi] \phi^+(2x) \quad (1)$$

and if $W \equiv U_C U_T U_P$ we have

$$W a^+(\vec{p}) |0\rangle = \epsilon_c^* \epsilon_T^* \epsilon_p \xi b^+(\vec{p}) |0\rangle, \quad W b^+(\vec{p}) |0\rangle = \epsilon_c \epsilon_T \epsilon_p^* \xi a^+(\vec{p}) |0\rangle$$

$$W \phi(x) W^{-1} = \epsilon_c \epsilon_T \epsilon_p^* \phi^+(-x) \quad (2)$$

B) Neutral Scalar Field

Now the most general form is

$$\phi(x) = \frac{g}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2E(\vec{p})} [a(\vec{p}) e^{-ip \cdot x} + \xi a^+(\vec{p}) e^{+ip \cdot x}] \quad (3)$$

where $p^*p = \xi^*\xi = 1$ are arbitrary phases, and where the creation and annihilation operators satisfy the usual commutation relations.

Parity is implemented by a unitary operator U_P such that

$$U_P a^+(\vec{p}) |0\rangle = \tilde{\eta}_p^* a^+(-\vec{p}) |0\rangle$$

Hence

$$\begin{aligned} U_P \phi(x) U_P^{-1} &= g \int d^3x [\tilde{\eta}_p a(-\vec{p}) e^{-ip \cdot x} + \xi \tilde{\eta}_p^* a^+(-\vec{p}) e^{+ip \cdot x}] \\ &= g \int d^3x [\tilde{\eta}_p a(\vec{p}) e^{-ip \cdot 2x} + \xi \tilde{\eta}_p^* a^+(\vec{p}) e^{+ip \cdot 2x}] \end{aligned}$$

and

$$U_P \phi(x) U_P^{-1} = \eta_p \phi(2x)$$

implies

$$\tilde{\eta}_p = \eta_p, \quad \tilde{\eta}_p = \eta_p^*$$

Hence

$$U_P a^+(\vec{p}) |0\rangle = \epsilon_p a^+(\vec{p}) |0\rangle$$

$$\epsilon_p^2 = +1$$

(4)

$$U_P \phi(x) U_P^{-1} = \epsilon_p \phi(2x)$$

where $\eta_p \equiv \epsilon_p$.

The unitary operator U_C that implements charge conjugation acts as

$$U_C a^\dagger(\vec{p}) |0\rangle = \tilde{\eta}_C^* a^\dagger(\vec{p}) |0\rangle$$

Hence

$$U_C \phi(x) U_C^{-1} = \vartheta \int d\tau [\tilde{\eta}_C a(\vec{p}) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} + \xi \tilde{\eta}_C^* a^\dagger(\vec{p}) e^{+i\vec{p}\cdot\vec{x}}]$$

and imposing

$$U_C \phi(x) U_C^{-1} = \eta_C \phi^\dagger(x)$$

we get

$$\tilde{\eta}_C = \eta_C [\vartheta^2 \xi]^*$$

$$\tilde{\eta}_C = \eta_C^* [\vartheta^2 \xi]$$

Then

$$U_C a^\dagger(\vec{p}) |0\rangle = \epsilon_C a^\dagger(\vec{p}) |0\rangle$$

$$\epsilon_C^2 = +1$$

(1)

$$U_C \phi(x) U_C^{-1} = \epsilon_C [\vartheta^2 \xi] \phi^\dagger(x)$$

where $\eta_C \equiv \epsilon_C [\vartheta^2 \xi]$

Notice furthermore that for an arbitrary election of ϑ and ξ the condition of neutral field is

$$\phi^\dagger(x) = [\vartheta^2 \xi]^* \phi(x) \quad (2)$$

and hence

$$U_C a^\dagger(\vec{p}) |0\rangle = \epsilon_C a^\dagger(\vec{p}) |0\rangle$$

$$\epsilon_C^2 = +1$$

(3)

$$U_C \phi(x) U_C^{-1} = \epsilon_C [\vartheta^2 \xi] \phi^\dagger(x) = \epsilon_C \phi(x)$$

Finally for time reversal

$$U_T a^\dagger(\vec{p}) |0\rangle = \tilde{\eta}_T^* a^\dagger(-\vec{p}) |0\rangle$$

Hence

$$\begin{aligned} U_T \phi(x) U_T^{-1} &= \vartheta^* \int d\tau [\tilde{\eta}_T a(-\vec{p}) e^{+i\vec{p}\cdot\vec{x}} + \xi^* \tilde{\eta}_T^* a^\dagger(-\vec{p}) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}] = \\ &= \vartheta^* \int d\tau [\tilde{\eta}_T a(\vec{p}) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{T}\vec{x}} + \xi^* \tilde{\eta}_T^* a^\dagger(\vec{p}) e^{+i\vec{p}\cdot\vec{T}\vec{x}}] \end{aligned}$$

and

$$U_T \phi(x) U_T^{-1} = \eta_T \phi(\vec{T}\vec{x})$$

implies

$$\tilde{\eta}_T = \eta_T [\gamma^2]$$

$$\tilde{\eta}_T = \eta_T^* [\gamma^2 \xi^2]^*$$

and hence

$$U_T a^+(\vec{p}) |0\rangle = \epsilon_T \xi a^+(-\vec{p}) |0\rangle$$

$$\epsilon_T^2 = +1$$

(1)

$$U_T \phi(x) U_T^{-1} = \epsilon_T [\gamma^2 \xi]^* \phi(Tx)$$

where $\eta_T \equiv \epsilon_T [\gamma^2 \xi]$

Also

$$U_C U_P a^+(\vec{p}) |0\rangle = \epsilon_C \epsilon_P a^+(-p) |0\rangle$$

(2)

$$U_C U_P \phi(x) U_P^{-1} U_C^{-1} = \epsilon_C \epsilon_P [\gamma^2 \xi] \phi^+(Px) = \epsilon_C \epsilon_P \phi(Px)$$

and

$$W a^+(\vec{p}) |0\rangle = \epsilon_C \epsilon_T \epsilon_P \xi a^+(\vec{p}) |0\rangle$$

(3)

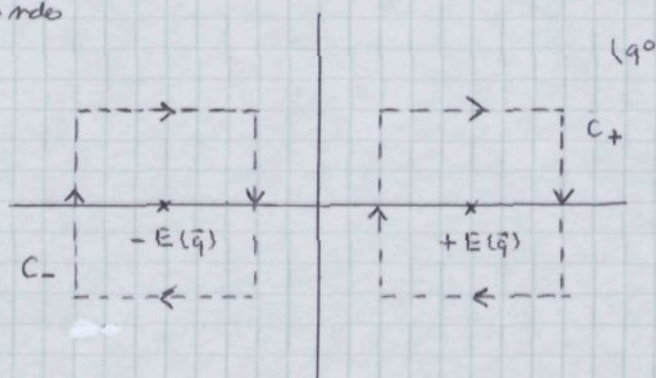
$$W \phi(x) W^{-1} = \epsilon_C \epsilon_T \epsilon_P \phi^+(-x) = \epsilon_C \epsilon_T \epsilon_P [\gamma^2 \xi]^* \phi(-x)$$

V. - FUNCIONES INVARIANTES

En el desarrollo de la teoría cuántica de campos aparecen frecuentemente una serie de funciones invariantes cuyas propiedades más importantes vamos a analizar. Definiremos estas funciones como

$$\Delta_i(x; m^2) \equiv \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C_i} d^4q \frac{e^{-i q \cdot x}}{q^2 - m^2} \quad (1)$$

donde el denominador tiene dos polos simples en $q^0 = \pm E(\vec{q}) \equiv \sqrt{\vec{q}^2 + m^2}$ y C_i indica el camino de integración elegido en el plano complejo q^0 . Empezamos considerando



De donde

$$\Delta_{\pm}(x; m^2) = \mp \frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3q}{2E(\vec{q})} e^{\mp i q \cdot x} \quad q^0 \equiv E(\vec{q}) \quad (2)$$

o también

$$\Delta_{\pm}(x; m^2) = \mp \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4q \delta(q^2 - m^2) \Theta(\pm q^0) e^{-i q \cdot x} \quad (3)$$

donde $\Theta(q^0) = 0$ si $q^0 < 0$ y $\Theta(q^0) = +1$ si $q^0 > 0$. Usaremos también

$$\Delta(x; m^2) \equiv \Delta_+(x; m^2) + \Delta_-(x; m^2) \quad (4)$$

y de (2)

$$\Delta(x; m^2) = - \frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3q}{E(\vec{q})} e^{i \vec{q} \cdot \vec{x}} \sin E(\vec{q}) x^0 \quad (5)$$

y de (3)

$$\Delta(x; m^2) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4q \delta(q^2 - m^2) \epsilon(q^0) e^{+i q \cdot x} \quad (6)$$

donde $\epsilon(q^0) = \pm 1$ si $q^0 \gtrless 0$.

De (2) se deduce inmediatamente que

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \Delta_\pm(x; m^2) = (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \Delta(x; m^2) = 0 \quad (1)$$

Algunas propiedades derivables inmediatamente son

$$\Delta(x; m^2) = 0 \quad \forall x^2 < 0 \quad (\text{microcausalidad})$$

$$\Delta(-x; m^2) = -\Delta(x; m^2), \quad \Delta_+(x; m^2) = -\Delta_-(-x; m^2) \quad (2)$$

$$\partial_i \Delta(x; m^2) \Big|_{x^0=0} = 0, \quad \partial_0 \Delta(x; m^2) \Big|_{x^0=0} = -\delta(\vec{x})$$

$$[\Delta_\pm(x; m^2)] = [\Delta_\mp(x; m^2)]^*$$

Otra función invariante útil es

$$\Delta_F(x; m^2) \equiv \theta(x^0) \Delta_+(x; m^2) - \theta(-x^0) \Delta_-(-x; m^2) \quad (3)$$

De (1.2)

$$\Delta_F(x; m^2) = -\frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3q}{2E(\vec{q})} [\theta(x^0) e^{-iq \cdot x} + \theta(-x^0) e^{+iq \cdot x}] \quad (4)$$

$$\Delta_F(x; m^2) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4q \frac{e^{-iq \cdot x}}{q^2 - m^2 + i\epsilon}$$

Además

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \Delta_F(x; m^2) = -\delta^{(4)}(x) \quad (5)$$

Para clasificar las singularidades de estas funciones invariantes vamos a calcularlas explícitamente. Vamos a necesitar $\Delta_+(x; m^2)$ pues todas las demás se obtienen fácilmente a partir de ella. Usaremos $r \equiv (\vec{x}^2)^{1/2}$.

$$\Delta_+(x; m^2) = -\frac{i}{8\pi^3} \int_0^\infty dq \frac{q^2}{2E} e^{-iEx^0} \int_{-1}^{+1} d\mu e^{iqr\mu} \int_0^{2\pi} d\phi$$

con $|\vec{q}| \equiv q$. De aquí:

$$\begin{aligned} \Delta_+(x; m^2) &= \frac{i}{8\pi^2 r} \int_{-\infty}^{+\infty} dq \frac{q}{E} e^{-i(Ex^0 + qr)} = \\ &= \frac{i}{4\pi r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dq \frac{1}{E} e^{-i(Ex^0 + qr)} \right\} \equiv \frac{i}{4\pi r} \frac{\partial}{\partial r} f(r) \end{aligned} \quad (6)$$

Introducimos la nueva variable de integración

$$q \equiv m \sinh \varphi \Rightarrow E = m \cosh \varphi \Rightarrow dq = m \cosh \varphi d\varphi, \quad -\infty \leq \varphi \leq +\infty \quad (7)$$

$$f(r) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi \exp \left\{ -im \left[x^0 \cosh \varphi + r \sinh \varphi \right] \right\} \quad (1)$$

calculerons ahora esta integral en los distintos casos posibles

i) $x^0 > 0$, $x^0 > r$, $\lambda \equiv x_0^2 - r^2 > 0$

Introducimos $x^0 \equiv \sqrt{\lambda} \cosh \varphi_0$, $r = \sqrt{\lambda} \sinh \varphi_0$

$$\begin{aligned} f(r) &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi e^{-im\sqrt{\lambda} \cosh(\varphi + \varphi_0)} = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi e^{-im\sqrt{\lambda} \cosh \varphi} = \\ &= \frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} d\varphi \cos(m\sqrt{\lambda} \cosh \varphi) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\varphi \sin(m\sqrt{\lambda} \cosh \varphi) = \frac{1}{2} J_0(m\sqrt{\lambda}) - \frac{i}{2} Y_0(m\sqrt{\lambda}) \end{aligned} \quad (2)$$

ii) $x^0 < 0$, $|x^0| > r$, $\lambda \equiv x_0^2 - r^2 > 0$

Introducimos $x^0 \equiv -\sqrt{\lambda} \cosh \varphi_0$, $r = \sqrt{\lambda} \sinh \varphi_0$

$$f(r) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi e^{+im\sqrt{\lambda} \cosh(\varphi - \varphi_0)} = -\frac{1}{2} J_0(m\sqrt{\lambda}) - \frac{i}{2} Y_0(m\sqrt{\lambda}) \quad (3)$$

iii) $x^0 > 0$, $x^0 < r$, $\lambda \equiv x_0^2 - r^2 < 0$

Introducimos $x^0 \equiv \sqrt{-\lambda} \sinh \varphi_0$, $r = \sqrt{-\lambda} \cosh \varphi_0$

$$\begin{aligned} f(r) &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi e^{-im\sqrt{-\lambda} \sinh(\varphi + \varphi_0)} = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi e^{-im\sqrt{-\lambda} \sinh \varphi} = \\ &= \frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} d\varphi \cos(m\sqrt{-\lambda} \sinh \varphi) = \frac{i}{\pi} K_0(m\sqrt{-\lambda}) \end{aligned} \quad (4)$$

iv) $x^0 < 0$, $|x^0| < r$, $\lambda \equiv x_0^2 - r^2 < 0$

Introducimos $x^0 \equiv -\sqrt{-\lambda} \sinh \varphi_0$, $r = \sqrt{-\lambda} \cosh \varphi_0$

$$f(r) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi e^{-im\sqrt{-\lambda} \sinh(\varphi - \varphi_0)} = \frac{i}{\pi} K_0(m\sqrt{-\lambda}) \quad (5)$$

Por tanto

$$f(r) \equiv \varphi(x^0; \lambda) = \begin{cases} \epsilon(x^0) \frac{1}{2} J_0(m\sqrt{\lambda}) - \frac{i}{2} Y_0(m\sqrt{\lambda}) & \lambda > 0 \\ \frac{i}{\pi} K_0(m\sqrt{-\lambda}) & \lambda < 0 \end{cases} \quad (6)$$

donde

$$J_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{2^{2k} (k!)^2}$$

$$Y_0(z) = \frac{2}{\pi} \left[\ln \frac{z}{2} + \gamma \right] J_0(z) - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{2^{2k} (k!)^2} \left(\sum_{m=1}^k \frac{1}{m} \right) \quad (1)$$

$$K_0(z) = \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(iz) = \frac{\pi i}{2} [J_0(iz) + i Y_0(iz)]$$

donde γ es la constante de Euler $\gamma = 0.577215 \dots$

Teniendo en cuenta que

$$X_1(z) = - \frac{d}{dz} X_0(z), \quad X = J, Y, K \quad (2)$$

es fácil obtener, reemplazando en (2.6) la derivación en respecto a r por una con respecto a λ y teniendo en cuenta la discontinuidad de f en $\lambda=0$, la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \Delta_+(x; m^2) = & - \frac{1}{4\pi} \epsilon(x^0) \delta(\lambda) + \frac{m}{8\pi \sqrt{\lambda}} \Theta(\lambda) [\epsilon(x^0) J_1(m\sqrt{\lambda}) - i Y_1(m\sqrt{\lambda})] \\ & - \frac{i m}{4\pi^2 \sqrt{-\lambda}} \Theta(-\lambda) K_1(m\sqrt{-\lambda}) \end{aligned} \quad (3)$$

y de aquí

$$\begin{aligned} \Delta_-(x; m^2) = & - \frac{1}{4\pi} \epsilon(x^0) \delta(\lambda) + \frac{m}{8\pi \sqrt{\lambda}} \Theta(\lambda) [\epsilon(x^0) J_1(m\sqrt{\lambda}) + i Y_1(m\sqrt{\lambda})] \\ & + \frac{i m}{4\pi^2 \sqrt{-\lambda}} \Theta(-\lambda) K_1(m\sqrt{-\lambda}) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\Delta(x; m^2) = - \frac{1}{2\pi} \epsilon(x^0) \delta(\lambda) + \frac{m}{4\pi \sqrt{\lambda}} \Theta(\lambda) \epsilon(x^0) J_1(m\sqrt{\lambda}) \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \Delta_F(x; m^2) = & - \frac{1}{4\pi} \delta(\lambda) + \frac{m}{8\pi \sqrt{\lambda}} \Theta(\lambda) [J_1(m\sqrt{\lambda}) - i Y_1(m\sqrt{\lambda})] \\ & - \frac{i m}{4\pi^2 \sqrt{-\lambda}} \Theta(-\lambda) K_1(m\sqrt{-\lambda}) \end{aligned} \quad (6)$$

De estas expresiones es evidente que todas las singularidades se hallan situadas en el cono de luz: $\lambda=0$. De (1) y (2)

$$J_1(z) = \frac{1}{2} z + O(z^3)$$

$$Y_1(z) = - \frac{2}{\pi} \frac{1}{z} + \frac{z}{\pi} \ln \frac{z}{2} - \frac{1}{2\pi} z + \frac{1}{\pi} \gamma z + O(z^3 \ln z) \quad (7)$$

$$K_1(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{2} z \ln \frac{z}{2} - \frac{1}{4} z + \frac{1}{2} \gamma z + O(z^3 \ln z)$$

y por tanto el comportamiento cerca del cono de luz es ($\lambda \equiv x^2$)

$$\Delta_{\pm}(x; m^2) = -\frac{1}{4\pi} \epsilon(x^0) \delta(\lambda) \pm \frac{i}{4\pi^2 \lambda} \mp \frac{i m^2}{8\pi^2} \ln \frac{m \sqrt{|\lambda|}}{2} +$$

$$+ \frac{m^2}{16\pi} \theta(\lambda) \epsilon(x^0) \pm \frac{i m^2}{16\pi^2} (1 - 2\gamma) + O(|\lambda| \ln |\lambda|) \quad (1)$$

$$\Delta(x; m^2) = -\frac{1}{2\pi} \epsilon(x^0) \delta(\lambda) + \frac{m^2}{8\pi} \theta(\lambda) \epsilon(x^0) + O(|\lambda| \ln |\lambda|) \quad (2)$$

$$\Delta_F(x; m^2) = -\frac{1}{4\pi} \delta(\lambda) + \frac{i}{4\pi^2 \lambda} - \frac{i m^2}{8\pi^2} \ln \frac{m \sqrt{|\lambda|}}{2} +$$

$$+ \frac{m^2}{16\pi} \theta(\lambda) + \frac{i m^2}{16\pi^2} (1 - 2\gamma) + O(|\lambda| \ln |\lambda|) \quad (3)$$

Observemos que en cada una de estas expresiones las singularidades dominantes son independientes de la masa. Para ellas se puede escribir

$$\Delta_{\pm}(x; m^2) \underset{x^2 \rightarrow 0}{\sim} \pm \frac{i}{4\pi^2} \frac{1}{x^2 \mp i x^0 \epsilon}$$

$$\Delta(x; m^2) \underset{x^2 \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{2\pi} \epsilon(x^0) \delta(x^2) \quad (4)$$

$$\Delta_F(x; m^2) \underset{x^2 \rightarrow 0}{\sim} \frac{i}{4\pi^2} \frac{1}{x^2 - i \epsilon}$$

donde $\epsilon \downarrow 0$.

En algunas ocasiones interesa

$$D(x) \equiv \Delta(x; m^2=0) \quad (5)$$

De las expresiones generales dadas antes se obtiene inmediatamente

$$D_{\pm}(x) = -\frac{1}{4\pi} \epsilon(x^0) \delta(\lambda) \pm \frac{i}{4\pi^2 \lambda}$$

$$D(x) = -\frac{1}{2\pi} \epsilon(x^0) \delta(\lambda) \quad (6)$$

$$D_F(x) = -\frac{1}{4\pi} \delta(\lambda) + \frac{i}{4\pi^2 \lambda}$$

que se pueden escribir, si se desea, de forma análoga a (4)

Es interesante relacionar estas cantidades con $\phi(x)$. Escribamos

$$\phi(x) = \phi^{(+)}(x) + \phi^{(-)}(x) \quad (1)$$

$$\phi^{(+)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2E(\vec{p})} e^{-i p \cdot x} a(\vec{p}) \quad , \quad \phi^{(-)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2E(\vec{p})} e^{+i p \cdot x} b^+(\vec{p})$$

de donde los conmutadores no nulos son

$$[\phi^{(+)}(x), \phi^{(+)}(y)^+] = i \Delta_+(x-y; m^2)$$

$$[\phi^{(-)}(x), \phi^{(-)}(y)^+] = i \Delta_-(x-y; m^2) \quad (2)$$

$$[\phi(x), \phi(y)^+] = i \Delta(x-y; m^2)$$

lo cual implica

$$\Delta_+(x-y; m^2) = -i \langle 0 | [\phi^{(+)}(x), \phi^{(+)}(y)^+] | 0 \rangle$$

$$\Delta_-(x-y; m^2) = -i \langle 0 | [\phi^{(-)}(x), \phi^{(-)}(y)^+] | 0 \rangle \quad (3)$$

$$\Delta(x-y; m^2) = -i \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)^+] | 0 \rangle$$

Definiendo el producto ordenado en el tiempo como

$$T(\phi(x) \phi^+(y)) = \theta(x^0) \phi(x) \phi^+(y) + \theta(y^0) \phi^+(y) \phi(x) \quad (4)$$

se obtiene

$$\Delta_F(x-y; m^2) = -i \langle 0 | T(\phi(x) \phi^+(y)) | 0 \rangle \quad (5)$$

De resultados anteriores se encuentra también

$$\Delta_+(x-y; m^2) = -i \langle 0 | \phi(x) \phi^+(y) | 0 \rangle \quad (6)$$

$$\Delta_-(x-y; m^2) = +i \langle 0 | \phi^+(y) \phi(x) | 0 \rangle$$

En el estudio de las singularidades dominantes son útiles algunas relaciones entre distribuciones que vamos a derivar. Usando (4.6), (4.5) y (4.4) podemos escribir

$$\int d^4 q e^{i q \cdot x} \delta(q^2 - m^2) \in (q^0) = i 4 \pi^2 \in(x^0) \delta(x^2) - i \pi^2 \in(x^0) \Theta(x^2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (m^2)^{k+1} (x^2)^k}{2^{2k} k! (k+1)!} \quad (1)$$

Derivando esta expresión m veces con respecto a m^2 y haciendo $m^2 \rightarrow 0$ se obtiene

$$\int d^4 q e^{i q \cdot x} \delta^{(m)}(q^2) \in (q^0) = \frac{2^{2(1-m)}}{(m-1)!} \pi^2 i (x^2)^{m-1} \Theta(x^2) \in(x^0) \quad (2)$$

$m = 1, 2, \dots$

cuya transformada de Fourier da

$$\int d^4 x e^{i q \cdot x} (x^2)^m \Theta(x^2) \in(x^0) = 2^{2m+4} \pi^2 i m! \delta^{(m+1)}(q^2) \in(q^0) \quad (3)$$

Otra relación usual es

$$\left[-\frac{1}{x^2 - i\epsilon x^0} \right] - \left[-\frac{1}{x^2 + i\epsilon x^0} \right] = -2i\pi \delta(x^2) \in(x^0) \quad (4)$$

y derivando repetidamente con respecto a x^2

$$\left[-\frac{1}{x^2 - i\epsilon x^0} \right]^m - \left[-\frac{1}{x^2 + i\epsilon x^0} \right]^m = -\frac{2i\pi}{(m-1)!} \delta^{(m-1)}(x^2) \in(x^0) \quad (5)$$

Tengamos también en cuenta los siguientes resultados: Sea $\phi(x)$ un campo escalar o pseudoscalar que obedezca la ecuación

$$(\square + m^2) \phi(x) = J(x) \quad (1)$$

$$\lim_{x^0 \rightarrow \mp \infty} \phi(x) = \phi_{in/out}(x)$$

donde

$$(\square + m^2) \phi_{in/out}(x) = 0 \quad (2)$$

entonces

$$\phi(x) = \phi_{in}(x) - \int d^4y \Delta_R(x-y; m^2) J(y) \quad (3)$$

$$\phi(x) = \phi_{out}(x) - \int d^4y \Delta_A(x-y; m^2) J(y)$$

donde

$$\Delta_R(x; m^2) \equiv \Theta(x^0) \Delta(x; m^2), \quad \Delta_A(x; m^2) \equiv -\Theta(-x^0) \Delta(x; m^2) \quad (4)$$

que son las funciones de Green retardadas y avanzadas de (1) y satisfacen

$$(\square + m^2) \Delta_{\epsilon}(x; m^2) = -\delta^{(4)}(x) \quad \epsilon = R, A.$$

En ocasiones puede ser necesario generalizar los propagadores a un espacio de dimensión D . Usando "I.M. GEL'FAND y G.E. SHILOV "Generalized Functions - Properties and Operations" Academic Press 1955

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} [p^2 + i0]^\lambda e^{-i p \cdot x} = \frac{(-i)^{D-1} 2^{2\lambda} \Gamma(\frac{D}{2} + \lambda)}{\pi^{D/2} \Gamma(-\lambda)} \frac{1}{[x^2 - i0]^{D/2 + \lambda}}$$

En particular

$$\Delta_F(x; 0) = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{p^2 + i0} e^{-i p \cdot x} = \frac{(-i)^{D-1} \Gamma(\frac{D}{2} - 1)}{4 \pi^{D/2}} \frac{1}{[x^2 - i0]^{D/2 - 1}}$$

Las funciones de Green hasta aquí introducidas son sólo adecuadas para describir sistemas a temperatura nula. Veamos como generalizarlas a $T \neq 0$.

Supongamos que $|\psi_i\rangle$ sea un estado puro, que sea estado propio del Hamiltoniano (III.7.3) con valor propio E_i . Entonces también será estado propio del operador número N con valor propio n_i . Ya que tanto la energía como el número de partículas son variables, un sistema en equilibrio a la temperatura T viene descrito por una gran asamblea canónica de estados. La probabilidad de que el sistema esté en el estado $|\psi_i\rangle$ viene dada por

$$g_i = \frac{1}{Z} e^{-\beta(E_i - \mu n_i)} \quad , \quad \beta \equiv 1/k_B T \quad (1)$$

donde k_B es la constante de Boltzmann, μ el potencial químico, y Z , la llamada gran función de partición, es

$$Z = \sum_i e^{-\beta(E_i - \mu n_i)} = e^{-\beta\Omega} \quad (2)$$

Entonces $\text{Tr}(\rho) = 1$. La cantidad Ω se denomina potencial termodinámico. El promedio sobre la asamblea a una temperatura T de cualquier operador A es

$$\langle A \rangle_\beta = \sum_i g_i \langle \psi_i | A | \psi_i \rangle \quad (3)$$

Es útil introducir el operador densidad cuántica

$$\rho \equiv \exp [\beta (\Omega + \mu N - H)] \quad (4)$$

y entonces se obtiene inmediatamente

$$g_i \equiv \langle \psi_i | \rho | \psi_i \rangle \quad , \quad \text{Tr}(\rho) = 1 \quad , \quad \langle A \rangle_\beta = \text{Tr}[\rho A] \quad (5)$$

Se definen las funciones de Green para $T \neq 0$ reemplazando el valor esperado en el vacío de la definición usual a $T=0$, por el promedio sobre la asamblea. Así por ejemplo

$$\Delta_+^{\beta}(x, y) \equiv -i \langle \phi(x) \phi^{\dagger}(y) \rangle_{\beta} \quad (6)$$

Veamos algunas de sus propiedades. Se tiene que

$$\Delta_+^\beta(x, y) = -i \text{Tr} [e^{\beta(\mu N - H)} \phi(x) \phi^\dagger(y)] / \text{Tr} [e^{\beta(\mu N - H)}] =$$

$$= -i \text{Tr} [e^{\beta \mu N} e^{-\beta H} \phi(x) e^{+\beta H} e^{-\beta H} \phi^\dagger(y)] / \text{Tr} [e^{\beta(\mu N - H)}] \quad (1)$$

donde hemos tenido en cuenta que $[N, H] = 0$. Debemos además que

$$\phi(t, \vec{x}) = e^{iH(t-t_0)} \phi(t_0, \vec{x}) e^{-iH(t-t_0)} \quad (2)$$

por lo cual

$$\Delta_+^\beta(x, y) = -i \text{Tr} [e^{\beta \mu N} \phi(t+i\beta, \vec{x}) e^{-\beta H} \phi^\dagger(y)] / \text{Tr} [e^{\beta(\mu N - H)}] =$$

$$= -i \text{Tr} [e^{-\beta H} \phi^\dagger(y) e^{\beta \mu N} \phi(t+i\beta, \vec{x})] / \text{Tr} [e^{\beta(\mu N - H)}]$$

$$= -i \text{Tr} [e^{\beta(\mu N - H)} e^{-\beta \mu N} \phi^\dagger(y) e^{\beta \mu N} \phi(t+i\beta, \vec{x})] / \text{Tr} [e^{\beta(\mu N - H)}] \quad (3)$$

Pero

$$e^{-\beta \mu N} \phi^\dagger(y) e^{\beta \mu N} = \phi^\dagger(y) + \beta \mu [\phi^\dagger(y), N] + \frac{1}{2!} \beta^2 \mu^2 [[\phi^\dagger(y), N], N] + \dots \quad (4)$$

Como

$$\phi^\dagger(y) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{2E(p)} [a^\dagger(p) e^{i p y} + b(p) e^{-i p y}] \quad (5)$$

$$N = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{2E(p)} [a^\dagger(p) a(p) - b^\dagger(p) b(p)]$$

(Recordar que partículas y anti-partículas tienen momento químicamente igual y opuesto)

se obtiene

$$[\phi^\dagger(y), N] = - \phi^\dagger(y) \quad (6)$$

con lo cual

$$e^{-\beta \mu N} \phi^\dagger(y) e^{\beta \mu N} = e^{-\beta \mu} \phi^\dagger(y) \quad (7)$$

y en tanto

$$\Delta_+^\beta(x, y) = -i e^{-\beta \mu} \text{Tr} [e^{\beta(\mu N - H)} \phi^\dagger(y) \phi(t+i\beta, \vec{x})] / \text{Tr} [e^{\beta(\mu N - H)}]$$

y de aquí

$$\Delta_+^\beta(t, \vec{x}; t', \vec{y}) = -e^{-\beta \mu} \Delta_-^\beta(t+i\beta, \vec{x}; t', \vec{y}) \quad (8)$$

Demostremos además que puesto que $[\phi(x), \phi^\dagger(y)]$ es un número c-entero

$$\Delta^\beta(x, y) = \Delta(x, y) \quad (1)$$

Veamos ahora como con estas dos propiedades podemos encontrar representaciones integrales de $\Delta_\pm^\beta(x, y)$. Sabemos que (IV.1.3)

$$\Delta^\beta(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \, c(\omega) e^{-i\omega(t-t')} \quad (2)$$

$$c(\omega) = -\frac{i}{(2\pi)^3} \int d^3q \, \delta(\omega^2 - \vec{q}^2 - m^2) [\theta(\omega) - \theta(-\omega)] e^{+i\vec{q} \cdot (\vec{x} - \vec{y})}$$

Escribamos

$$\Delta_\pm^\beta(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \, c_\pm(\omega) e^{-i\omega(t-t')} \quad (3)$$

y como

$$\Delta^\beta(x, y) = \Delta_+^\beta(x, y) + \Delta_-^\beta(x, y) \quad (4)$$

se tiene que

$$c(\omega) = c_+(\omega) + c_-(\omega) \quad (5)$$

De (4.8)

$$c_+(\omega) = -e^{-\beta\mu} c_-(\omega) e^{\omega\beta} \quad (6)$$

De (5) y (6)

$$c_\pm(\omega) = \frac{c(\omega)}{1 - e^{\pm\beta(\mu - \omega)}} \quad (7)$$

por lo cual

$$\Delta_\pm^\beta(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \, \frac{c(\omega)}{1 - e^{\pm\beta(\mu - \omega)}} e^{-i\omega(t-t')} \quad (8)$$

Ahora bien

$$\Delta_\pm^\beta(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \, c(\omega) e^{-i\omega \left[(t \mp i\beta\mu(1 - \frac{\mu}{\omega})) - t' \right]} \quad (9)$$

If we assume that the chemical potential is zero

$$\Delta_{\pm}^{\beta}(t, \vec{x}; t', \vec{y}) = \sum_{m=0}^{\infty} \Delta(t \mp i m \beta, \vec{x}; t', \vec{y}) \quad , \quad \mu \equiv 0 \quad (1)$$

Let us now consider $\Delta_{\mp}^{\beta}(x, y)$. As it is well known

$$\Delta_{\mp}^{\beta}(t, \vec{x}; t', \vec{y}) = \theta(t - t') \Delta_{+}^{\beta}(t, \vec{x}; t', \vec{y}) - \theta(t' - t) \Delta_{-}^{\beta}(t, \vec{x}; t', \vec{y}) \quad (2)$$

and if $\mu = 0$

$$\Delta_{\mp}^{\beta}(t, \vec{x}; t', \vec{y}) = \theta(t - t') \sum_{m=0}^{\infty} \Delta(t - i m \beta, \vec{x}; t', \vec{y}) - \theta(t' - t) \sum_{m=0}^{\infty} \Delta(t + i m \beta, \vec{x}; t', \vec{y})$$

V - MATRICES DE DIRAC

Vamos en lo que sigue a dar algunas propiedades importantes de los tensores de Levi-Civita, las matrices de spin de Pauli y las matrices de Dirac.

En un espacio tridimensional existe un tensor totalmente antisimétrico e invariante ϵ_{ijk}

$$\epsilon_{123} = +1$$

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{ijk} = +6$$

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{ije} = 2 \delta_{ke}$$

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{iem} = \delta_{je} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{ke}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} \epsilon_{emr} &= \delta_{ie} \delta_{jm} \delta_{kr} - \delta_{ie} \delta_{jr} \delta_{km} + \delta_{im} \delta_{jr} \delta_{ke} - \\ &\quad - \delta_{im} \delta_{je} \delta_{kr} + \delta_{ir} \delta_{je} \delta_{km} - \delta_{ir} \delta_{jm} \delta_{ke} = \\ &= \det (\delta_{\alpha\alpha'}) \quad \alpha = i, j, k \quad \alpha' = e, m, r \end{aligned}$$

Em um espaço Minkowskiano existe um tensor totalmente antisimétrico e invariante $\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}$

$$\epsilon^{0123} = +1$$

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} = -24$$

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \epsilon_{\mu\nu\lambda z} = -6g_z^{\rho}$$

$$\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -2(g_{\rho}^{\alpha} g_{\sigma}^{\beta} - g_{\sigma}^{\alpha} g_{\rho}^{\beta})$$

$$\epsilon^{\mu\alpha\beta\delta} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = - (g_{\nu}^{\alpha} g_{\rho}^{\beta} g_{\sigma}^{\delta} - g_{\nu}^{\alpha} g_{\sigma}^{\beta} g_{\rho}^{\delta} + g_{\rho}^{\alpha} g_{\sigma}^{\beta} g_{\nu}^{\delta} - g_{\rho}^{\alpha} g_{\nu}^{\beta} g_{\sigma}^{\delta} + g_{\sigma}^{\alpha} g_{\nu}^{\beta} g_{\rho}^{\delta} - g_{\sigma}^{\alpha} g_{\rho}^{\beta} g_{\nu}^{\delta})$$

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \epsilon_{\mu'\nu'\lambda'\rho'} = -\det(g_{\alpha}^{\alpha'}) \quad \alpha = \mu, \nu, \lambda, \rho \quad \alpha' = \mu', \nu', \lambda', \rho'$$

Ademais todo vetor A^{μ} cumpre

$$A^{\mu} \epsilon^{\nu\alpha\beta\gamma} = A^{\nu} \epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} + A^{\alpha} \epsilon^{\nu\mu\beta\gamma} + A^{\beta} \epsilon^{\nu\alpha\mu\gamma} + A^{\gamma} \epsilon^{\nu\alpha\beta\mu}$$

Les matrices de Pauli son

$$\sigma_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2 \delta_{ij}$$

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i \epsilon_{ijk} \sigma_k$$

$$\text{Tr}(\sigma_i) = 0$$

$$\text{Tr}(\sigma_i \sigma_j) = 2 \delta_{ij}$$

$$\text{Tr}(\sigma_i \sigma_j \sigma_k) = 2i \epsilon_{ijk}$$

$$\text{Tr}(\sigma_i \sigma_j \sigma_k \sigma_l) = 2(\delta_{ij} \delta_{kl} - \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

$$\text{Tr}[\sigma_k (\vec{A} \times \vec{\sigma})_e] = 2 \epsilon_{ker} A_r$$

$$\text{Tr}[(\vec{A} \times \vec{\sigma})_k (\vec{B} \times \vec{\sigma})_e] = 2[\delta_{ke} \vec{A} \cdot \vec{B} - A_e B_k]$$

$$\text{Tr}[(\vec{A} \times \vec{\sigma})_k \sigma_e \sigma_m] = 2i[\delta_{ke} A_m - \delta_{km} A_e]$$

$$\text{Tr}[(\vec{A} \times \vec{\sigma})_k (\vec{B} \times \vec{\sigma})_e \sigma_m] = -2i[\epsilon_{ekp} A_m B_p + \delta_{mk} (\vec{A} \times \vec{B})_e]$$

$$\text{Tr}[(\vec{A} \times \vec{\sigma})_k \sigma_e \sigma_m \sigma_j] = 2[\epsilon_{kre} \delta_{mj} A_r - \epsilon_{krm} \delta_{ej} A_r + \epsilon_{krj} \delta_{em} A_r]$$

$$i(\vec{A} \times \vec{\sigma}) = \vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\sigma}) \vec{\sigma}$$

$$(\vec{A} \cdot \vec{\sigma})(\vec{B} \cdot \vec{\sigma}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + i \epsilon_{ijk} A_i B_j \sigma_k = \vec{A} \cdot \vec{B} + i(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{\sigma}$$

$$(\vec{A} \cdot \vec{\sigma}) \vec{\sigma} (\vec{B} \cdot \vec{\sigma}) = \vec{A} (\vec{B} \cdot \vec{\sigma}) - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{\sigma} + \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{\sigma}) + i(\vec{B} \times \vec{A})$$

$$(\vec{A} \cdot \vec{\sigma}) \vec{\sigma} = \vec{A} - i(\vec{A} \times \vec{\sigma})$$

$$\vec{\sigma} (\vec{A} \cdot \vec{\sigma}) = \vec{A} + i(\vec{A} \times \vec{\sigma})$$

$$\sigma_k (\vec{A} \cdot \vec{\sigma}) \sigma_k = -(\vec{A} \cdot \vec{\sigma})$$

$$(\sigma_j)_{\alpha\beta} (\sigma_j)_{\gamma\delta} = 2 \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} - \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta}$$

Matrices γ 's de Dirac

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$$

$$\gamma_5 \equiv \frac{i}{24} \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\rho = -i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$$

$$\gamma^\mu \gamma_5 = -\gamma_5 \gamma^\mu$$

$$\gamma^0 \gamma^0 = I, \quad \gamma^i \gamma^i = -I \quad i=1,2,3, \quad \gamma_5 \gamma_5 = +I$$

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

$$\sigma^{0i} = i \gamma^0 \gamma^i \quad i=1,2,3, \quad \sigma^{ij} = i \gamma^i \gamma^j \quad i \neq j=1,2,3,$$

$$\Sigma^i \equiv \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \sigma^{jk}$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = g^{\mu\nu} - i \sigma^{\mu\nu}$$

$$\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} = 2i \gamma_5 \sigma^{\mu\nu}$$

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda\alpha} \gamma_\alpha = -i \gamma_5 [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda - g^{\mu\nu} \gamma^\lambda + g^{\mu\lambda} \gamma^\nu - g^{\nu\lambda} \gamma^\mu]$$

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} = -i \gamma_5 [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\rho - g^{\mu\nu} g^{\lambda\rho} + g^{\mu\lambda} g^{\nu\rho} - g^{\mu\rho} g^{\nu\lambda} + \\ + i (g^{\mu\nu} \sigma^{\lambda\rho} + g^{\lambda\rho} \sigma^{\mu\nu} - g^{\mu\lambda} \sigma^{\nu\rho} - g^{\nu\rho} \sigma^{\mu\lambda} + g^{\mu\rho} \sigma^{\nu\lambda} + g^{\nu\lambda} \sigma^{\mu\rho})]$$

$$\gamma^\mu = \gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 \Rightarrow \gamma^{0\dagger} = \gamma^0, \quad \gamma^{i\dagger} = -\gamma^i \quad i=1,2,3, \quad \gamma_5^\dagger = \gamma_5$$

$$\sigma^{\mu\nu\dagger} = \gamma^0 \sigma^{\mu\nu} \gamma^0 \Rightarrow \sigma^{0i\dagger} = -\sigma^{0i}, \quad \sigma^{ij\dagger} = \sigma^{ij}, \quad \Sigma^{i\dagger} = \Sigma^i$$

Se puede definir una matriz $\mathcal{C}$ tal que

$$\mathcal{C} \gamma^\mu \mathcal{C}^{-1} = -\gamma^{\mu T}$$

$$\Rightarrow \mathcal{C} \gamma_5 \mathcal{C}^{-1} = \gamma_5^T, \quad \mathcal{C} \sigma_{\mu\nu} \mathcal{C}^{-1} = -\sigma_{\mu\nu}^T$$

También se puede introducir una matriz $\mathcal{Z}$ tal que

$$\mathcal{Z} \gamma^\mu \mathcal{Z}^{-1} = \gamma^{\mu T}$$

$$\Rightarrow \mathcal{Z} \gamma_5 \mathcal{Z}^{-1} = \gamma_5^T, \quad \mathcal{Z} \sigma_{\mu\nu} \mathcal{Z}^{-1} = -\sigma_{\mu\nu}^T$$

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = +4$$

$$\gamma^\mu \gamma_5 \gamma_\mu = -4 \gamma_5$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = -2 \gamma^\nu$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_5 \gamma_\mu = +2 \gamma^\nu \gamma_5$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu = +4 g^{\nu\rho}$$

$$\gamma^\mu \sigma^{\nu\rho} \gamma_\mu = 0$$

$$\sigma^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} = +12$$

$$\sigma^{\mu\nu} \gamma_5 \sigma_{\mu\nu} = +12 \gamma_5$$

$$\sigma^{\mu\nu} \gamma_\rho \sigma_{\mu\nu} = 0$$

$$\sigma^{\mu\nu} \gamma_\rho \gamma_5 \sigma_{\mu\nu} = 0$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu \gamma_\nu = -8$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu = -8 \gamma_5$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu \gamma_\nu = +4 \gamma^\rho$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\lambda \gamma_\mu \gamma_\nu = 8 \gamma^\rho \gamma^\lambda - 16 g^{\rho\lambda}$$

$$\sigma^{\mu\nu} \sigma^{\rho\lambda} \sigma_{\mu\nu} = -4 \sigma^{\rho\lambda}$$

$$\gamma^\mu \gamma^\lambda \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu = -2 \gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\lambda$$

$$\gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\lambda + \gamma^\lambda \gamma^\sigma \gamma^\rho = 2 (g^{\sigma\lambda} \gamma^\rho + g^{\rho\sigma} \gamma^\lambda - g^{\rho\lambda} \gamma^\sigma)$$

Si S contiene un número impar de matrices γ^μ y cualquier número de γ_5 entonces

$$\gamma^\mu S \gamma_\mu = -2 S_R$$

donde S_R se obtiene a partir de S invirtiendo el orden de todas las γ .
En las mismas circunstancias

$$\gamma^\mu S \gamma^\alpha \gamma_\mu = 2 [\gamma^\alpha S + S_R \gamma^\alpha]$$

Also

$$\gamma^\mu \sigma^{\nu\rho} + \sigma^{\mu\nu} \gamma^\rho + \gamma^\mu \sigma^{\nu\sigma} + \sigma^{\nu\sigma} \gamma^\mu + \gamma^\nu \sigma^{\sigma\mu} + \sigma^{\sigma\mu} \gamma^\nu =$$

$$= 6i \{ \gamma^\sigma \gamma^\mu \gamma^\nu - g^{\sigma\mu} \gamma^\nu + g^{\sigma\nu} \gamma^\mu - g^{\mu\nu} \gamma^\sigma \} = 6 \epsilon^{\sigma\mu\nu\rho} \gamma_\rho \gamma_5$$

$$\gamma^\mu \sigma^{\nu\sigma} + \sigma^{\nu\sigma} \gamma^\mu = 2i [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\sigma - g^{\mu\nu} \gamma^\sigma + g^{\mu\sigma} \gamma^\nu - g^{\nu\sigma} \gamma^\mu] = 2 \epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} \gamma_\rho \gamma_5$$

$$\not{x} \equiv \gamma^\mu a_\mu$$

$$\text{Tr}(\not{x}_1 \not{x}_2 \dots \not{x}_{2m+1}) = 0$$

$$\text{Tr}(\gamma^\mu) = 0, \quad \text{Tr}(\gamma_5) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\not{x}_1 \not{x}_2 \dots \not{x}_m) &= (a_1 \cdot a_2) \text{Tr}(\not{x}_3 \dots \not{x}_m) - (a_1 \cdot a_3) \text{Tr}(\not{x}_2 \dots \not{x}_m) + \dots \\ &+ \dots + (a_1 \cdot a_m) \text{Tr}(\not{x}_2 \dots \not{x}_{m-1}) \quad m = \text{par} \end{aligned}$$

$$= 4 \sum_P \delta_P (a_{i_1} \cdot a_{i_2}) \dots (a_{i_{m-1}} \cdot a_{i_m}) \quad m = \text{par}$$

La suma es sobre todos los pares distintos (i_v, i_{v+1}) con $i_v < i_{v+1}$. El número de términos en la suma es $(m-1)!!$ y δ_P es la signatura de la permutación $(i_1 i_2 \dots i_{m-1} i_m)$ comparada con $(1, 2, \dots, m-1, m)$.

$$\text{Tr}(\not{x}_1 \not{x}_2) = 4(a_1 \cdot a_2)$$

$$\text{Tr}(\not{x}_1 \not{x}_2 \not{x}_3 \not{x}_4) = 4[(a_1 \cdot a_2)(a_3 \cdot a_4) - (a_1 \cdot a_3)(a_2 \cdot a_4) + (a_1 \cdot a_4)(a_2 \cdot a_3)]$$

$$\text{Tr}(\not{x}_1 \not{x}_2 \dots \not{x}_{m-1} \not{x}_m) = \text{Tr}(\not{x}_m \not{x}_{m-1} \dots \not{x}_2 \not{x}_1)$$

$$\text{Tr}(\not{x}_1 \not{x}_2 \gamma_5) = 0$$

$$\text{Tr}(\not{x}_1 \not{x}_2 \not{x}_3 \not{x}_4 \gamma_5) = +4i \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} a_1^\mu a_2^\nu a_3^\lambda a_4^\rho$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\sigma^{\lambda\rho} \not{x}_1 \sigma^{\mu\nu} \not{x}_2) &= 4[(a_1 \cdot a_2)(g^{\lambda\mu} g^{\rho\nu} - g^{\lambda\nu} g^{\rho\mu}) - \\ &- g^{\rho\nu}(a_1^\lambda a_2^\mu + a_1^\mu a_2^\lambda) + g^{\lambda\nu}(a_1^\rho a_2^\mu + a_1^\mu a_2^\rho) + \\ &+ g^{\rho\mu}(a_1^\lambda a_2^\nu + a_1^\nu a_2^\lambda) - g^{\lambda\mu}(a_1^\rho a_2^\nu + a_1^\nu a_2^\rho)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\sigma^{\lambda\rho} \not{x}_1 \not{x}_2 \sigma^{\mu\nu}) &= 4[(a_1 \cdot a_2)(g^{\lambda\mu} g^{\rho\nu} - g^{\lambda\nu} g^{\rho\mu}) + \\ &+ g^{\rho\nu}(a_1^\lambda a_2^\mu - a_1^\mu a_2^\lambda) - g^{\lambda\nu}(a_1^\rho a_2^\mu - a_1^\mu a_2^\rho) - \\ &- g^{\rho\mu}(a_1^\lambda a_2^\nu - a_1^\nu a_2^\lambda) + g^{\lambda\mu}(a_1^\rho a_2^\nu - a_1^\nu a_2^\rho)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\sigma^{\lambda\rho} \not{x}_1 \sigma^{\mu\nu} \not{x}_2 \gamma_5) &= -4i[\epsilon^{\lambda\rho\mu\nu}(a_1 \cdot a_2) - \\ &- \epsilon^{\lambda\rho\alpha\nu}(a_{1\alpha} a_2^\mu + a_1^\mu a_{2\alpha}) - \epsilon^{\lambda\rho\mu\alpha}(a_{1\alpha} a_2^\nu + a_1^\nu a_{2\alpha})] \end{aligned}$$

$$\text{Tr}(\sigma^{\lambda\rho} \not{x}_1 \not{x}_2 \sigma^{\mu\nu} \gamma_5) = -4i [\epsilon^{\lambda\rho\mu\nu} (a_1 \cdot a_2) + \\ + \epsilon^{\lambda\rho\alpha\nu} (a_{1\alpha} a_2^\mu - a_1^\mu a_{2\alpha}) + \epsilon^{\lambda\rho\mu\alpha} (a_{1\alpha} a_2^\nu - a_1^\nu a_{2\alpha})]$$

$$\text{Tr}(\not{x}_1 \not{x}_2 \sigma^{\lambda\nu} \gamma_5) = -4 \epsilon^{\lambda\nu\alpha\beta} a_{1\alpha} a_{2\beta}$$

$$\text{Tr}(\not{x}_1 \not{x}_2 \sigma^{\lambda\nu}) = 4i (a_1^\nu a_2^\lambda - a_1^\lambda a_2^\nu)$$

$$\text{Tr}(\not{x}_1 \gamma^\mu \sigma^{\lambda\nu}) = 4i (a_1^\nu g^{\mu\lambda} - a_1^\lambda g^{\mu\nu})$$

$$\text{Tr}(\sigma^{\mu\lambda} \sigma^{\nu\rho}) = 4 (g^{\mu\nu} g^{\lambda\rho} - g^{\mu\rho} g^{\lambda\nu})$$

$$\text{Tr}(\not{x}_1 \not{x}_2 \not{x}_3 \not{x}_4 \sigma^{\lambda\rho}) = 4i [(a_1 \cdot a_2) (a_3^\rho a_4^\lambda - a_3^\lambda a_4^\rho) + (a_1 \cdot a_3) (a_2^\lambda a_4^\rho - a_2^\rho a_4^\lambda) + \\ + (a_1 \cdot a_4) (a_2^\rho a_3^\lambda - a_2^\lambda a_3^\rho) + (a_2 \cdot a_3) (a_1^\rho a_4^\lambda - a_1^\lambda a_4^\rho) + \\ + (a_2 \cdot a_4) (a_1^\lambda a_3^\rho - a_1^\rho a_3^\lambda) + (a_3 \cdot a_4) (a_1^\rho a_2^\lambda - a_1^\lambda a_2^\rho)]$$

$$\text{Tr}(\not{x}_1 \not{x}_2 \not{x}_3 \not{x}_4 \sigma^{\lambda\rho} \gamma_5) = 4 \epsilon^{\lambda\rho\alpha\beta} [- (a_1 \cdot a_2) a_{3\alpha} a_{4\beta} + (a_1 \cdot a_3) a_{2\alpha} a_{4\beta} - \\ - (a_1 \cdot a_4) a_{2\alpha} a_{3\beta} - (a_2 \cdot a_3) a_{1\alpha} a_{4\beta} + (a_2 \cdot a_4) a_{1\alpha} a_{3\beta} - (a_3 \cdot a_4) a_{1\alpha} a_{2\beta}]$$

$$\text{Tr}(\not{x}_1 \not{x}_2 \dots \not{x}_{m-2} \not{x}_{m-1} \not{x}_m \gamma_5) =$$

$$= (a_{m-1} \cdot a_m) \text{Tr}(\not{x}_1 \not{x}_2 \dots \not{x}_{m-2} \gamma_5) - \frac{1}{2} a_{m-1\mu} a_{m\nu} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \text{Tr}(\not{x}_1 \not{x}_2 \dots \not{x}_{m-2} \sigma_{\alpha\beta}) =$$

$$= (a_{m-1} \cdot a_m) \text{Tr}(\not{x}_1 \not{x}_2 \dots \not{x}_{m-2} \gamma_5) - \frac{i}{2} a_{m-1\mu} a_{m\nu} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \text{Tr}(\not{x}_1 \not{x}_2 \dots \not{x}_{m-2} \gamma_\alpha \gamma_\beta)$$

Si S y S' son productos de matrices γ , conteniendo cada uno un número impar de γ^μ y cualquier número de γ_5 , entonces

$$\text{Tr} [\gamma_\mu S] \text{Tr} [\gamma^\mu S'] = 2 \text{Tr} [(S + S_R) S']$$

donde S_R se obtiene a partir de S intercambiando el orden de todas las matrices γ .

$$\text{Tr} (\gamma_\mu \not{x}_1) \text{Tr} (\gamma^\mu \not{y}_1) = 16 (a_1 \cdot b_1)$$

$$\text{Tr} (\gamma_\mu \not{x}_1 \not{x}_2 \not{x}_3) \text{Tr} (\gamma^\mu \not{y}_1) = 16 [(b_1 \cdot a_1)(a_2 \cdot a_3) - (b_1 \cdot a_2)(a_1 \cdot a_3) + (b_1 \cdot a_3)(a_1 \cdot a_2)]$$

$$\text{Tr} (\gamma_\mu \not{x}_1 \not{x}_2 \not{x}_3 \gamma_5) \text{Tr} (\gamma^\mu \not{y}_1) = 16 i \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} b_1^\mu a_2^\nu a_3^\lambda a_3^\rho$$

$$\begin{aligned} \text{Tr} (\gamma_\mu \not{x}_1 \not{x}_2 \not{x}_3) \text{Tr} (\gamma^\mu \not{y}_1 \not{y}_2 \not{y}_3) = & 16 [(a_1 \cdot a_2)(a_3 \cdot b_1)(b_2 \cdot b_3) - \\ & - (a_1 \cdot a_2)(a_3 \cdot b_2)(b_1 \cdot b_3) + (a_1 \cdot a_2)(a_3 \cdot b_3)(b_1 \cdot b_2) - (a_1 \cdot a_3)(a_2 \cdot b_1)(b_2 \cdot b_3) + \\ & + (a_1 \cdot a_3)(a_2 \cdot b_2)(b_1 \cdot b_3) - (a_1 \cdot a_3)(a_2 \cdot b_3)(b_1 \cdot b_2) + (a_2 \cdot a_3)(a_1 \cdot b_1)(b_2 \cdot b_3) \\ & - (a_2 \cdot a_3)(a_1 \cdot b_2)(b_1 \cdot b_3) + (a_2 \cdot a_3)(a_1 \cdot b_3)(b_1 \cdot b_2)] \end{aligned}$$

En ocasiones puede interesar introducir las matrices $\tilde{\gamma}^A$ $A=0,1,2,3,5$

$$\tilde{\gamma}^\mu \equiv \gamma^\mu \gamma_5, \quad \tilde{\gamma}^5 \equiv \gamma_5$$

$$\Rightarrow \tilde{\gamma}^A \tilde{\gamma}^B + \tilde{\gamma}^B \tilde{\gamma}^A = 2 g^{AB}, \quad g^{00} = -1, \quad g^{11} = g^{22} = g^{33} = g^{55} = +1$$

$$g^{AB} = 0 \quad \text{si } A \neq B$$

Introducimos $\tilde{B} \equiv B_A \tilde{\gamma}^A = B_5 \gamma_5 + B_\mu \gamma^\mu \gamma_5$

Definamos $A * B \equiv A_5 B_5 - (A \cdot B) = A_5 B_5 - A^\mu B_\mu$

Entonces

$$\tilde{A} \cdot \tilde{B} = 2(A * B) - \tilde{B} \tilde{A}$$

$$\text{Tr}(\tilde{A} \tilde{B}) = 4(A * B)$$

$$\text{Tr}(\tilde{A} \tilde{B} \tilde{C} \tilde{D}) = 4[(A * B)(C * D) - (A * C)(B * D) + (A * D)(B * C)]$$

Représentation de Dirac

$$\gamma^0 = \begin{vmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{vmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{vmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{vmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{vmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{vmatrix}$$

$$\sigma^{0i} = i \begin{vmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{vmatrix}, \quad \sigma^{ij} = \epsilon^{ijk} \begin{vmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{vmatrix}, \quad \Sigma^i = \begin{vmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{vmatrix}$$

$$\gamma^{0*} = +\gamma^0, \quad \gamma^{1*} = +\gamma^1, \quad \gamma^{2*} = -\gamma^2, \quad \gamma^{3*} = +\gamma^3$$

$$\gamma^{0T} = +\gamma^0, \quad \gamma^{1T} = -\gamma^1, \quad \gamma^{2T} = +\gamma^2, \quad \gamma^{3T} = -\gamma^3$$

$$\epsilon \equiv \gamma^0 \gamma^2 \Rightarrow \epsilon^+ = \epsilon^{-1} = -\epsilon^T = -\epsilon^* = \epsilon, \quad \epsilon \epsilon^+ = I, \quad \epsilon \epsilon = I$$

$$\epsilon = \begin{vmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\tau \equiv -i \gamma^1 \gamma^3 \Rightarrow \tau^+ = \tau^{-1} = -\tau^T = -\tau^* = \tau, \quad \tau \tau^+ = I, \quad \tau \tau = I$$

$$\tau = \begin{vmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{vmatrix}$$

Representación chiral

$$\gamma^0 = \begin{vmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{vmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{vmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{vmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{vmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{vmatrix}$$

$$\sigma^{\mu\nu} = -i \begin{vmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & -\sigma_i \end{vmatrix}, \quad \sigma^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\lambda} \begin{vmatrix} \sigma_\lambda & 0 \\ 0 & \sigma_\lambda \end{vmatrix}, \quad \Sigma^i = \begin{vmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{vmatrix}$$

Notemos que la relación entre ambas representaciones es

$$\gamma_c^\mu = U \gamma_D^\mu U^\dagger \quad U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} I & -I \\ I & I \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (I + \gamma_D^0 \gamma_{5D})$$

$$U U^\dagger = I$$

$$\gamma^{0*} = +\gamma^0, \quad \gamma^{1*} = +\gamma^1, \quad \gamma^{2*} = -\gamma^2, \quad \gamma^{3*} = +\gamma^3$$

$$\gamma^{0T} = +\gamma^0, \quad \gamma^{1T} = -\gamma^1, \quad \gamma^{2T} = +\gamma^2, \quad \gamma^{3T} = -\gamma^3$$

$\mathcal{C} \equiv \gamma^0 \gamma^2$ con propiedades idénticas al caso de Dirac. Su forma explícita es

$$\mathcal{C} = \begin{vmatrix} -\sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{vmatrix}$$

$\mathcal{C} \equiv -i \gamma^1 \gamma^3$ con propiedades idénticas al caso de Dirac. Su forma explícita es

$$\mathcal{C} = \begin{vmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{vmatrix}$$

Representación de Majorana

$$\gamma^0 = \begin{vmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{vmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{vmatrix} i\sigma_3 & 0 \\ 0 & i\sigma_3 \end{vmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{vmatrix} 0 & -\sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\gamma^3 = \begin{vmatrix} -i\sigma_1 & 0 \\ 0 & -i\sigma_1 \end{vmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{vmatrix} -\sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{vmatrix}, \quad \sigma^{01} = -i \begin{vmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\sigma^{02} = i \begin{vmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{vmatrix}, \quad \sigma^{03} = -i \begin{vmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Sigma^1 = \begin{vmatrix} 0 & i\sigma_3 \\ -i\sigma_3 & 0 \end{vmatrix}, \quad \Sigma^2 = \begin{vmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{vmatrix}, \quad \Sigma^3 = \begin{vmatrix} 0 & -i\sigma_1 \\ i\sigma_1 & 0 \end{vmatrix}$$

No tenemos $\gamma_M^\mu = u \gamma_D^\mu u^+$ $u = u^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} I & \sigma_2 \\ \sigma_2 & -I \end{vmatrix}$

$$u u^+ = I$$

$$\gamma^{0*} = -\gamma^0, \quad \gamma^{1*} = -\gamma^1, \quad \gamma^{2*} = -\gamma^2, \quad \gamma^{3*} = -\gamma^3$$

$$\gamma^{0T} = -\gamma^0, \quad \gamma^{1T} = +\gamma^1, \quad \gamma^{2T} = +\gamma^2, \quad \gamma^{3T} = +\gamma^3$$

$\epsilon \equiv -\gamma^0$ con propiedades idénticas al caso de Dirac

$\zeta \equiv i\gamma^0\gamma_5$ con propiedades idénticas al caso de Dirac y una expresión explícita

$$\zeta = \begin{vmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{vmatrix}$$

No tenemos

$$[\gamma^0]^T = -\gamma^0, \quad [\gamma^\mu \gamma^0]^T = \gamma^\mu \gamma^0, \quad [\sigma^{\mu\nu} \gamma^0]^T = \sigma^{\mu\nu} \gamma^0,$$

$$[\gamma^\mu \gamma_5 \gamma^0]^T = -\gamma^\mu \gamma_5 \gamma^0, \quad [\gamma_5 \gamma^0]^T = -\gamma^0 \gamma_5$$

El álgebra generada por las γ^μ es un álgebra de Clifford definida en un espacio vectorial de dimensión 4 y su única representación irreducible de las matrices de Dirac es de orden 4. Para estudiar sus propiedades es útil introducir las matrices $\Gamma^{(A)}$ $A=1, 2, \dots, 16$ definidas en el orden

I

$$\gamma^0, \quad i\gamma^1, \quad i\gamma^2, \quad i\gamma^3$$

$$\gamma^0\gamma^1, \quad \gamma^0\gamma^2, \quad \gamma^0\gamma^3, \quad i\gamma^2\gamma^3, \quad i\gamma^3\gamma^1, \quad i\gamma^1\gamma^2$$

$$i\gamma^0\gamma^5, \quad \gamma^1\gamma^5, \quad \gamma^2\gamma^5, \quad \gamma^3\gamma^5$$

$$\gamma^5 \equiv -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$$

Las propiedades más importantes de las $\Gamma^{(A)}$ son

$$i) [\Gamma^{(A)}]^2 = I, \quad \forall A$$

ii) Si $\Gamma^{(A)}$ se multiplica por las 16 matrices $\Gamma^{(B)}$ se muestran a obtener todas las matrices del cuadro salvo factores de módulo 1

iii) Para cada $\Gamma^{(A)}$ ($A \neq 1$) es posible encontrar una $\Gamma^{(B)}$ tal que $\Gamma^{(A)}$ y $\Gamma^{(B)}$ anticommutan

$$\Gamma^{(A)} = -\Gamma^{(B)} \Gamma^{(A)} \Gamma^{(B)}, \quad A \neq 1 \quad (2)$$

iv) Se tiene

$$\text{Tr}(\Gamma^{(1)}) = 4, \quad \text{Tr}(\Gamma^{(A)}) = 0 \quad A \neq 1 \quad (3)$$

lo cual es consecuencia inmediata de (2).

v) Las 16 matrices $\Gamma^{(A)}$ son linealmente independientes. En efecto supongamos

$$\sum_{A=1}^{16} a_A \Gamma^{(A)} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_B \Gamma^{(B)} + \sum_{A \neq B} a_A \Gamma^{(A)} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_B + \sum_{A \neq B} a_A \Gamma^{(A)} \Gamma^{(B)} = 0 \quad (4)$$

pero $\Gamma^{(A)} \Gamma^{(B)}$ es, salvo un factor de módulo uno, una matriz de la tabla distinta de $\Gamma^{(1)} = I$ y tomando trazas $4a_B = 0 \Rightarrow a_B = 0$ Q.E.D.

vi) cualquier matriz 4×4 puede escribirse

$$\bar{X} = \frac{1}{4} \sum_{A=1}^{16} \text{Tr}[\bar{X} \Gamma^{(A)}] \Gamma^{(A)} \quad (1)$$

cuya prueba es inmediata

vii) Si F y G son matrices (4×4) entonces

$$F_{\alpha\sigma} G_{\beta\beta} = \frac{1}{4} \sum_{A=1}^{16} \Gamma_{\beta\sigma}^{(A)} [F \Gamma^{(A)} G]_{\alpha\beta} \quad (2)$$

donde $\bar{X}_{\sigma\alpha}$ significa el elemento $\sigma\alpha$ de la matriz $\bar{X}$. En efecto de (1) se deduce

$$\bar{X}_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} \sum_{A=1}^{16} \bar{X}_{\gamma\lambda} \Gamma_{\lambda\gamma}^{(A)} \Gamma_{\alpha\beta}^{(A)} \quad (3)$$

Consideremos una matriz $\bar{X}$ tal que $(\bar{X})_{\alpha\beta} \equiv \delta_{\alpha\sigma} \delta_{\beta\beta}$, entonces

$$\delta_{\alpha\sigma} \delta_{\beta\beta} = \frac{1}{4} \sum_{A=1}^{16} \Gamma_{\alpha\beta}^{(A)} \delta_{\gamma\sigma} \delta_{\beta\lambda} \Gamma_{\lambda\gamma}^{(A)} = \frac{1}{4} \sum_{A=1}^{16} \Gamma_{\alpha\beta}^{(A)} \Gamma_{\beta\sigma}^{(A)}$$

y

$$\begin{aligned} F_{\alpha\sigma} G_{\beta\beta} &= F_{\alpha\alpha'} G_{\beta'\beta} \delta_{\alpha'\sigma} \delta_{\beta\beta'} = \frac{1}{4} \sum_{A=1}^{16} F_{\alpha\alpha'} G_{\beta'\beta} \Gamma_{\alpha'\beta'}^{(A)} \Gamma_{\beta\sigma}^{(A)} = \\ &= \frac{1}{4} \sum_{A=1}^{16} \Gamma_{\beta\sigma}^{(A)} [F \Gamma^{(A)} G]_{\alpha\beta} \quad \text{Q.E.D.} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu = g^{\mu\rho} \gamma^\nu - g^{\mu\nu} \gamma^\rho + g^{\rho\nu} \gamma^\mu - i \epsilon^{\mu\rho\nu\lambda} \gamma_\lambda \gamma_5 \quad (1)$$

es inmediata comprobación

$$\begin{aligned} [\bar{A} \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu B] [\bar{C} \gamma_\mu \gamma^\rho \gamma_\nu D] &= 2 \left\{ g^{\rho\tau} [\bar{A} \gamma^\lambda B] [\bar{C} \gamma_\lambda D] \right. \\ &\quad \left. + [\bar{A} \gamma^\tau B] [\bar{C} \gamma^\rho D] + g^{\rho\tau} [\bar{A} \gamma^\lambda \gamma_5 B] [\bar{C} \gamma_\lambda \gamma_5 D] - [\bar{A} \gamma^\tau \gamma_5 B] [\bar{C} \gamma^\rho \gamma_5 D] \right\} \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\bar{A} \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu B] [\bar{C} \gamma_\nu \gamma^\rho \gamma_\mu D] &= 2 \left\{ g^{\rho\tau} [\bar{A} \gamma^\lambda B] [\bar{C} \gamma_\lambda D] \right. \\ &\quad \left. + [\bar{A} \gamma^\tau B] [\bar{C} \gamma^\rho D] - g^{\rho\tau} [\bar{A} \gamma^\lambda \gamma_5 B] [\bar{C} \gamma_\lambda \gamma_5 D] + [\bar{A} \gamma^\tau \gamma_5 B] [\bar{C} \gamma^\rho \gamma_5 D] \right\} \quad (3) \end{aligned}$$

donde A, B, C y D son espinores arbitrarios. Introduzcamos

$$P_\pm \equiv \frac{1}{2} (I \pm \gamma_5) \quad (4)$$

entonces

$$[\bar{A} \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu P_\pm B] [\bar{C} \gamma_\mu \gamma^\rho \gamma_\nu P_\pm D] = 4 g^{\rho\tau} [\bar{A} \gamma^\lambda P_\pm B] [\bar{C} \gamma_\lambda P_\pm D] \quad (5)$$

$$[\bar{A} \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu P_\pm B] [\bar{C} \gamma_\mu \gamma^\rho \gamma_\nu P_\mp D] = 4 [\bar{A} \gamma^\tau P_\pm B] [\bar{C} \gamma^\rho P_\mp D] \quad (6)$$

$$[\bar{A} \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu P_\pm B] [\bar{C} \gamma_\nu \gamma^\rho \gamma_\mu P_\pm D] = 4 [\bar{A} \gamma^\tau P_\pm B] [\bar{C} \gamma^\rho P_\pm D] \quad (7)$$

$$[\bar{A} \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu P_\pm B] [\bar{C} \gamma_\nu \gamma^\rho \gamma_\mu P_\mp D] = 4 g^{\rho\tau} [\bar{A} \gamma^\lambda P_\pm B] [\bar{C} \gamma_\lambda P_\mp D] \quad (8)$$

De forma análoga

$$\begin{aligned} &[\bar{A} \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu \left(\frac{1+\lambda_1 \gamma_5}{2} \right) B] [\bar{C} \gamma_\mu \gamma^\rho \gamma_\nu \left(\frac{1+\lambda_2 \gamma_5}{2} \right) D] = \\ &= (1+\lambda_1)(1+\lambda_2) g^{\rho\tau} [\bar{A} \gamma^\lambda P_+ B] [\bar{C} \gamma_\lambda P_+ D] + (1-\lambda_1)(1-\lambda_2) g^{\rho\tau} [\bar{A} \gamma^\lambda P_- B] [\bar{C} \gamma_\lambda P_- D] \\ &+ (1-\lambda_1)(1+\lambda_2) [\bar{A} \gamma^\tau P_- B] [\bar{C} \gamma^\rho P_+ D] + (1+\lambda_1)(1-\lambda_2) [\bar{A} \gamma^\tau P_+ B] [\bar{C} \gamma^\rho P_- D] \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &[\bar{A} \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu \left(\frac{1+\lambda_1 \gamma_5}{2} \right) B] [\bar{C} \gamma_\nu \gamma^\rho \gamma_\mu \left(\frac{1+\lambda_2 \gamma_5}{2} \right) D] = \\ &= (1+\lambda_1)(1+\lambda_2) [\bar{A} \gamma^\tau P_+ B] [\bar{C} \gamma^\rho P_+ D] + (1-\lambda_1)(1-\lambda_2) [\bar{A} \gamma^\tau P_- B] [\bar{C} \gamma^\rho P_- D] \\ &+ (1-\lambda_1)(1+\lambda_2) g^{\rho\tau} [\bar{A} \gamma^\lambda P_- B] [\bar{C} \gamma_\lambda P_+ D] + (1+\lambda_1)(1-\lambda_2) g^{\rho\tau} [\bar{A} \gamma^\lambda P_+ B] [\bar{C} \gamma_\lambda P_- D] \quad (10) \end{aligned}$$

Generalizaciones de estas formulas se obtienen facilmente

$$\begin{aligned}
 & [\bar{A} \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu P_\pm B] [\bar{C} \gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\delta \gamma_\nu P_\pm D] = \\
 & = 4 [g^{\alpha\beta} g^{\rho\delta} - g^{\alpha\delta} g^{\rho\beta} + g^{\beta\delta} g^{\rho\alpha} \pm i \epsilon^{\alpha\beta\delta\rho}] [\bar{A} \gamma^\lambda P_\pm B] [\bar{C} \gamma_\lambda P_\pm D] \quad (1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & [\bar{A} \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu P_\pm B] [\bar{C} \gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\delta \gamma_\nu P_\mp D] = \\
 & = 4 \{ \bar{A} [g^{\alpha\beta} \gamma^\delta - g^{\alpha\delta} \gamma^\beta + g^{\beta\delta} \gamma^\alpha \mp i \epsilon^{\alpha\beta\delta\epsilon} \gamma_\epsilon] P_\pm B \} [\bar{C} \gamma^\rho P_\mp D] \quad (2)
 \end{aligned}$$

Formulas que se simplifican considerablemente si ρ esta contruido con α, β, δ . Estas formulas se demuestran usando para $\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\delta$ la expresion (15.4) y despues usando (15.5) (15.6) (15.7) y (15.8). Uno repetido de estas cuatro relaciones permite probar

$$\begin{aligned}
 & [\bar{A} \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\tau \gamma^\nu P_\pm B] [\bar{C} \gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma_\sigma \gamma^\beta \gamma_\nu P_\pm D] = \\
 & = 16 g^{\rho\alpha} g^{\tau\beta} [\bar{A} \gamma^\lambda P_\pm B] [\bar{C} \gamma_\lambda P_\pm D] \quad (3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & [\bar{A} \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\tau \gamma^\nu P_\pm B] [\bar{C} \gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma_\sigma \gamma^\beta \gamma_\nu P_\mp D] = \\
 & = 4 [\bar{A} \gamma^\alpha \gamma^\tau \gamma^\nu P_\pm B] [\bar{C} \gamma^\rho \gamma^\beta \gamma_\nu P_\mp D] \\
 & = 4 [\bar{A} \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\beta P_\pm B] [\bar{C} \gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\tau P_\mp D] \quad (4)
 \end{aligned}$$

VI - LA ECUACION DE DIRAC

El hecho de que la ecuación de Klein-Gordon contiene derivadas segundas en el tiempo hizo pensar, durante algunos años, que era el origen de las dificultades de su interpretación como ecuación de ondas para una partícula. Dirac [P.A.M. DIRAC Proc. Roy. Soc. 117, 610, 118, 341 (1928)] propuso para el electrón una ecuación que no adolecía de este "defecto": *

$$[i\gamma - m] \psi(x) \equiv [i\gamma^\mu \partial_\mu - m] \psi(x) = 0 \quad (1)$$

donde las matrices γ^μ son una representación irreducible del álgebra engendrada por los γ^μ y que satisfacen

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \quad (2)$$

Se sabe que el álgebra generada por γ^μ es un álgebra de Clifford definida en un espacio n -dimensional y por tanto tiene una única representación irreducible de orden 4. Hoy día sabemos que esta ecuación es la adecuada para partículas libres de spin 1/2.

Vamos a empezar probando que para todo elemento (a, Λ) del grupo propio ortogonal $\mathcal{P}$ se puede determinar una matriz $S(\Lambda)$ tal que bajo la transformación

$$x \longrightarrow x' = \Lambda x + a \quad (3)$$

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x') = S(\Lambda) \psi(x) \quad \Lambda_\mu^\lambda \Lambda_\nu^\rho = g^{\lambda\rho} \quad x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu + \Lambda_\lambda^\mu a^\lambda$$

la ecuación de Dirac permanece invariante. En efecto, como $\partial_\mu = \Lambda^\nu_\mu \partial'_\nu$ en las (1) puede escribirse

$$(i\gamma^\mu \Lambda^\nu_\mu \partial'_\nu - m) S^{-1}(\Lambda) \psi'(x') = 0 \Rightarrow (i\Lambda^\nu_\mu S(\Lambda) \gamma^\mu S^{-1}(\Lambda) \partial'_\nu - m) \psi'(x') = 0$$

y para mantener la invariancia de forma u debe cumplir

$$\Lambda^\nu_\mu S(\Lambda) \gamma^\mu S^{-1}(\Lambda) = \gamma^\nu$$

esto es

$$S^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu S(\Lambda) = \Lambda^\mu_\nu \gamma^\nu \quad (4)$$

Veamos que (4) determina unívocamente $S(\Lambda)$, salvo un factor constante. Supongamos que no fuera así y que existieran dos matrices $S_1(\Lambda)$ y $S_2(\Lambda)$ que cumplieran (4), entonces

43/001

$$+ \quad [i \gamma^\mu \partial_\mu - m] \psi(x) = 0$$

$$[i \gamma^\nu \partial_\nu + m] [i \gamma^\mu \partial_\mu - m] \psi(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad [\gamma^\nu \gamma^\mu \partial_\nu \partial_\mu + m^2] \psi(x) = 0$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2 g^{\mu\nu}$$

$$S_1^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu S_1(\Lambda) = S_2^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu S_2(\Lambda) \Rightarrow [S_2(\Lambda) S_1^{-1}(\Lambda)] \gamma^\mu = \gamma^\mu [S_2(\Lambda) S_1^{-1}(\Lambda)]$$

y el lema de Schur nos dice que $S_2(\Lambda) = C S_1(\Lambda)$, donde C es una constante y al mismo localmente siempre podemos elegir

$$\det [S(\Lambda)] = +1 \quad (1)$$

Veamos cual es la $S(\Lambda)$ correspondiente a una transformación infinitesimal de Lorentz. Escribamos

$$\Lambda^\mu{}_\nu = g^\mu{}_\nu + \delta\omega^\mu{}_\nu, \quad S(\Lambda) = I - \frac{i}{4} A^{\mu\nu} \delta\omega_{\mu\nu} \quad (2)$$

Para determinar $A^{\mu\nu} \equiv -A^{\nu\mu}$ usamos (1.4)

$$[I + \frac{i}{4} A^{\alpha\beta} \delta\omega_{\alpha\beta}] \gamma^\mu [I - \frac{i}{4} A^{\gamma\delta} \delta\omega_{\gamma\delta}] = [g^\mu{}_\nu + \delta\omega^\mu{}_\nu] \gamma^\nu \Rightarrow$$

$$\left[\frac{i}{4} A^{\alpha\beta} \gamma^\mu - \frac{i}{4} \gamma^\mu A^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha} \gamma^\beta + g^{\mu\beta} \gamma^\alpha \right] \delta\omega_{\alpha\beta} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{i}{2} [A^{\alpha\beta} \gamma^\mu - \gamma^\mu A^{\alpha\beta}] - g^{\mu\alpha} \gamma^\beta + g^{\mu\beta} \gamma^\alpha = 0$$

y se comprueba inmediatamente que $A^{\alpha\beta} = \sigma^{\alpha\beta}$ y por tanto

$$S(\Lambda) = I - \frac{i}{4} \sigma^{\mu\nu} \delta\omega_{\mu\nu} \quad \sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (3)$$

Se tiene además que para una transformación infinitesimal

$$\begin{aligned} S(\Lambda) \gamma^0 S(\Lambda)^\dagger &= [I - \frac{i}{4} \sigma^{\mu\nu} \delta\omega_{\mu\nu}] \gamma^0 [I + \frac{i}{4} \sigma^{\mu\nu\dagger} \delta\omega_{\mu\nu}] = \\ &= \gamma^0 - \frac{i}{4} (\sigma^{\mu\nu} \gamma^0 - \gamma^0 \sigma^{\mu\nu\dagger}) \delta\omega_{\mu\nu} = \gamma^0 \end{aligned}$$

y por continuidad se tiene que para cualquier transformación de Lorentz propia

$$S(\Lambda) \gamma^0 S^\dagger(\Lambda) = \gamma^0 \quad (4)$$

En el estudio de la ecuación de Dirac es útil introducir

$$\bar{\psi}(x) \equiv \psi^\dagger(x) \gamma^0 \quad (5)$$

que en el caso libre cumple

$$i \partial_\mu \bar{\psi}(x) \gamma^\mu + m \bar{\psi}(x) \equiv \bar{\psi}(x) [i \gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu + m] = 0 \quad (6)$$

y de (1.3) se encuentra

$$\bar{\psi}(x) \longrightarrow \bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x) S^{-1}(\Lambda) \quad (7)$$

Es interesante saber como se transforman bajo elementos de $\mathcal{P}$ cantidades tales como $\bar{\psi}(x) A \psi(x)$, donde A es una matriz 4×4 . Como A se puede escribir como combinación lineal de $I, \gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma^\nu, \gamma^\mu \gamma_5$ y γ_5 bastará considerar estos casos

$$\bar{\psi}(x) \psi(x) \longrightarrow \bar{\psi}'(x') \psi'(x') = \bar{\psi}(x) \psi(x) \quad S$$

$$\bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) \longrightarrow \bar{\psi}'(x') \gamma^\mu \psi'(x') = \Lambda^\mu_\nu \bar{\psi}(x) \gamma^\nu \psi(x) \quad V$$

$$\bar{\psi}(x) \gamma^\mu \gamma^\nu \psi(x) \longrightarrow \bar{\psi}'(x') \gamma^\mu \gamma^\nu \psi'(x') = \Lambda^\mu_\lambda \Lambda^\nu_\rho \bar{\psi}(x) \gamma^\lambda \gamma^\rho \psi(x) \quad T \quad (1)$$

$$\bar{\psi}(x) \gamma^\mu \gamma_5 \psi(x) \longrightarrow \bar{\psi}'(x') \gamma^\mu \gamma_5 \psi'(x') = \Lambda^\mu_\nu \bar{\psi}(x) \gamma^\nu \gamma_5 \psi(x) \quad A$$

$$\bar{\psi}(x) \gamma_5 \psi(x) \longrightarrow \bar{\psi}'(x') \gamma_5 \psi'(x') = \bar{\psi}(x) \gamma_5 \psi(x) \quad P$$

donde S, V, T, A y P indican el carácter escalar, vectorial, tensorial, vector axial y pseudoescalar, respectivamente, bajo la acción combinada de $\mathcal{P}$ y de la paridad, como veremos más adelante

Consideremos ahora el problema de hallar la solución más general de la ecuación de Dirac. Esta puede escribirse como

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4 p e^{-i p \cdot x} \tilde{\psi}(p) \quad (2)$$

y como $\psi(x)$ debe ser solución de (1.1), entonces $\tilde{\psi}(p)$ debe satisfacer

$$(\not{p} - m) \tilde{\psi}(p) = 0 \quad (3)$$

Multipliicando por la izquierda por $(\not{p} + m)$ se obtiene $(p^2 - m^2) \tilde{\psi}(p) = 0$ y por tanto el soporte de $\tilde{\psi}(p)$ está en $\Omega(m)$. Como antes escribíamos

$$\tilde{\psi}(p) = (2\pi)^{-1} \delta(p^2 - m^2) \hat{\psi}(p) \quad (4)$$

y en tanto la solución general se puede escribir como

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{2|p_0|} \hat{\psi}(p) e^{-i p \cdot x} \quad (5)$$

donde $\hat{\psi}(p)$ está sólo definida en $\Omega(m)$ y debe cumplir

$$(\not{p} - m) \hat{\psi}(p) = 0 \quad (6)$$

Antes de continuar el análisis de la solución general quisiéramos introducir

en el espacio de las soluciones un producto escalar. Notemos que si $\psi_1(x)$ y $\psi_2(x)$ son soluciones de la ecuación de Dirac, entonces

$$\partial_\mu [\bar{\psi}_1(x) \gamma^\mu \psi_2(x)] = 0 \quad (1)$$

y como en el caso anterior definimos el producto escalar como

$$(\psi_1, \psi_2) \equiv \int d^3x \bar{\psi}_1(x) \gamma^0 \psi_2(x) = \int d^3x \psi_1^\dagger(x) \psi_2(x) \quad (2)$$

Notemos que su valor es independiente del instante t para el que se realice el cálculo, es invariante Lorentz y $(\psi, \psi) \geq 0$. Vemos pues como el conjunto de todas las soluciones de la ecuación de Dirac forman un espacio de Hilbert bajo el producto escalar que acabamos de definir. En términos de $\hat{\psi}(p)$ se tiene

$$(\psi_1, \psi_2) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{(2p^0)^2} \hat{\psi}_1^\dagger(p) \hat{\psi}_2(p) \quad (3)$$

Dificultades análogas a las que aparecen en la ecuación de Klein-Gordon surgen aquí al tratar de interpretar la ecuación de Dirac como ecuación de ondas relativista para una sola partícula. Así, por ejemplo, también aquí el operador $\vec{x}$ puede interpretarse como operador posición. En efecto la ecuación de Dirac se puede escribir en forma Hamiltoniana como

$$i \frac{\partial \psi(x)}{\partial t} = [c \gamma^0 \vec{\gamma} \cdot \vec{\partial} + m \gamma^0] \psi(x) \equiv H \psi(x) \quad (4)$$

Entonces si $\vec{x}$ fuera el operador posición, el operador velocidad sería

$$\vec{v} = i [H, \vec{x}] = -c \gamma^0 \vec{\gamma} \quad (5)$$

y los valores propios de cualquiera de sus componentes son ± 1 , lo cual indicaría que ni $\vec{x}$ es el operador posición ni $\vec{v}$ la velocidad. No vamos a discutir más este punto.

Volvamos al problema de escribir la ecuación de Dirac libre. Vimos ya que la solución más general se puede escribir

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4p \delta(p^2 - m^2) \hat{\psi}(p) e^{-i p \cdot x} \quad (6)$$

donde $\hat{\psi}(p)$ tiene el soporte en $\Omega(m)$ y debe cumplir

$$(p - m) \hat{\psi}(p) = 0 \quad (7)$$

y por tanto la solución más general es

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4p \delta(p^2 - m^2) (m + \not{p}) \chi(p) e^{-i p \cdot x} \quad (1)$$

donde $\chi(p)$ definida en $\Omega(m)$, es por lo demás totalmente arbitraria. De aquí

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\Omega_+(m)} \frac{d^3p}{2E(\vec{p})} \left\{ (m + \not{p}) \chi(p) e^{-i p \cdot x} + (m - \not{p}) \chi(-p) e^{+i p \cdot x} \right\} \quad (2)$$

Consideremos las ecuaciones

$$(\not{p} - m) u(\vec{p}, \lambda) = 0, \quad (\not{p} + m) v(\vec{p}, \lambda) = 0, \quad p \in \Omega_+(m) \quad (3)$$

Es fácil ver que estas ecuaciones homogéneas tienen, cada una de ellas, dos soluciones independientes y además como $(m + \not{p}) \chi(p)$ [$(m - \not{p}) \chi(-p)$] es solución de la primera [segunda] podemos escribir

$$(m + \not{p}) \chi(p) = \sum_{\lambda} u(\vec{p}, \lambda) a(\vec{p}, \lambda) \quad (4)$$

$$(m - \not{p}) \chi(-p) = \sum_{\lambda} v(\vec{p}, \lambda) b^+(\vec{p}, \lambda)$$

y entonces la solución más general puede escribirse como

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\Omega_+(m)} \frac{d^3p}{2E(\vec{p})} \sum_{\lambda} \left[u(\vec{p}, \lambda) a(\vec{p}, \lambda) e^{-i p \cdot x} + v(\vec{p}, \lambda) b^+(\vec{p}, \lambda) e^{+i p \cdot x} \right] \quad (5)$$

donde λ es una variable discreta que distingue las dos soluciones independientes de las ecuaciones (3). En la teoría cuántica $a^+(\vec{p}, \lambda)$ y $b^+(\vec{p}, \lambda)$ se interpretan, como veremos más adelante, como los operadores creación de partículas y antipartículas, respectivamente.

Antes de proceder a la segunda cuantización queremos caracterizar las $u(\vec{p}, \lambda)$ y $v(\vec{p}, \lambda)$ de alguna forma física. Consideraremos un espacio $\mathcal{H}^{(u)}$ formado por la primera de las ecuaciones (3) con el producto inducido por las definiciones anteriores. Para lograr lo que deseamos buscaremos dos proyectores complementarios ortogonales $P_{\lambda}^{(u)}(p)$, en algún sentido físico, definidos en $\mathcal{H}^{(u)}$. Para que una matriz arbitraria 4×4 sea un proyector en $\mathcal{H}^{(u)}$ debe cumplir las siguientes condiciones

$$P_{\lambda}^{(u)}(p)^2 = P_{\lambda}^{(u)}(p) \quad (6)$$

$$(\not{p} - m) P_{\lambda}^{(u)}(p) (\not{p} + m) = 0 \quad (7)$$

$$(p+m) [P_\lambda^{(u)}(p) - \gamma^0 P_\lambda^{(u)}(p)^\dagger \gamma^0] (p+m) = 0 \quad (1)$$

La ecuación (5.6) tiene un sentido claro. La condición (5.7) nos asegura que $P_\lambda^{(u)}(p)$ transforma un elemento de $\mathcal{H}^{(u)}$ en otro de $\mathcal{H}^{(u)}$. Finalmente (4) nos asegura que $P_\lambda^{(u)}(p)$ es autoadjunto en $\mathcal{H}^{(u)}$. Para ver este último consideraremos (4.3). Como $\hat{\psi}_1(p)$ y $\hat{\psi}_2(p)$ son soluciones de (4.7) podemos escribir

$$(\gamma^0 p^0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{p} - m) \hat{\psi}_2(p) = 0, \quad \hat{\psi}_1^\dagger(p) (\gamma^0 p^0 + \vec{\gamma} \cdot \vec{p} - m) = 0 \quad (2)$$

de donde

$$\hat{\psi}_1^\dagger(p) (\gamma^0 p^0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{p} - m) \hat{\psi}_2(p) = 0, \quad \hat{\psi}_1^\dagger(p) (\gamma^0 p^0 + \vec{\gamma} \cdot \vec{p} - m) \hat{\psi}_2(p) = 0 \quad (3)$$

y sumando ambas ecuaciones

$$p^0 \hat{\psi}_1^\dagger(p) \hat{\psi}_2(p) = m \hat{\psi}_1^\dagger(p) \hat{\psi}_2(p) \quad (4)$$

y para $m \neq 0$

$$(\psi_1, \psi_2) = \frac{1}{2m} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{2p^0} \hat{\psi}_1^\dagger(p) \hat{\psi}_2(p) \quad (5)$$

que es manifiestamente covariante. La condición covariante de que un operador sea autoadjunto es pues

$$A = \gamma^0 A^\dagger \gamma^0 \quad (6)$$

que por continuidad aceptaremos también para $m=0$. Restringiendo esta condición a $\mathcal{H}^{(u)}$ se obtiene (4).*

Para construir $P_\lambda^{(u)}(p)$ explícitamente consideraremos un cuadirrección real arbitrario S^K . Como el significado del operador debe ser invariante bajo transformaciones de Lorentz empezaremos construyendo la matriz más general 4×4 covariante bajo estas transformaciones y que dependa de $p^\mu \in \Omega_+(m)$ y de S^K :

$$P_\lambda^{(u)}(p, s) = A_\lambda + B_\lambda \gamma_5 + C_\lambda \not{s} + D_\lambda \gamma_5 \not{s} \quad (7)$$

Notar que posibles términos en $\not{p}$ pueden reducirse a los anteriores teniendo en cuenta que este operador actúa en $\mathcal{H}^{(u)}$. La condición (5.7) implica

43/001

$$* \int \frac{d^3 p}{2E} \hat{\psi}_2^+(p) \gamma^0 (A \hat{\psi}_1(p)) = \int \frac{d^3 p}{2E} (A \hat{\psi}_2(p))^\dagger \gamma^0 \hat{\psi}_1(p)$$

$$\int \frac{d^3 p}{2E} \{ \hat{\psi}_2^+(p) \gamma^0 A \hat{\psi}_1(p) - \hat{\psi}_2^+(p) A^\dagger \gamma^0 \hat{\psi}_1(p) \} = 0$$

$$(p+m)\phi = 0$$

$$\phi^\dagger \gamma^0 (p+m) \gamma^0 = 0$$

$$= \int \frac{d^3 p}{2E} \{ \hat{\psi}_2^+ \gamma^0 (p+m) \gamma^0 \gamma^0 A (p+m) - \gamma^0 (p+m) \gamma^0 A^\dagger \gamma^0 (p+m) \} \hat{\psi}_1(p) = 0$$

$$\gamma^0 (p+m) A (p+m) - \gamma^0 (p+m) \gamma^0 A^\dagger \gamma^0 (p+m) = 0 \Rightarrow (p+m) [A - \gamma^0 A^\dagger \gamma^0] (p+m) = 0$$

$$[-2m B_\lambda \gamma_5 + C_\lambda (2p \cdot s - \not{s} \not{s} - m \not{s}) - D_\lambda \gamma_5 (2p \cdot s - \not{s} \not{s} + m \not{s})] (\not{s} + m) = 0 \Rightarrow$$

$$[-2m B_\lambda - 2(p \cdot s) D_\lambda] (m \gamma_5 + \gamma_5 \not{s}) + 2m (p \cdot s) C_\lambda +$$

$$+ [2(p \cdot s) \not{s} - 2m^2 \not{s}] C_\lambda - 2m \not{s} \not{s} C_\lambda = 0$$

de donde $C_\lambda = 0$ y $D_\lambda = -m B_\lambda / (p \cdot s)$ y en tanto

$$P_\lambda^{(u)}(p, s) = A_\lambda + B_\lambda \gamma_5 \left[1 - \frac{m}{(p \cdot s)} \not{s} \right] \quad (1)$$

Impongamos ahora (5.6) lo cual implica

$$A_\lambda^2 + B_\lambda^2 - \frac{m^2}{(p \cdot s)^2} B_\lambda^2 s^2 = A_\lambda^2, \quad 2A_\lambda B_\lambda = B_\lambda \quad (2)$$

$$(s \cdot p)^{-1} 2m A_\lambda B_\lambda = (s \cdot p)^{-1} m B_\lambda$$

$$\Rightarrow A_\lambda = \frac{1}{2} \quad B_\lambda^2 = \frac{(p \cdot s)^2}{4 [(p \cdot s)^2 - m^2 s^2]} \quad (3)$$

y en tanto

$$P_\pm^{(u)}(p, s) = \frac{1}{2} \left\{ I \pm \frac{1}{[(p \cdot s)^2 - m^2 s^2]^{1/2}} [(p \cdot s) \gamma_5 - m \gamma_5 \not{s}] \right\} \quad (4)$$

Es fácil darse cuenta que (6.1) es inmediatamente satisfecho y en tanto estos son los proyectores deseados. Notemos que

$$P_+^{(u)}(p, s) + P_-^{(u)}(p, s) = I, \quad P_\pm^{(u)}(p, s) P_\mp^{(u)}(p, s) = 0 \quad (5)$$

Una propiedad interesante de este proyector es la siguiente: consideremos un nuevo cuadri-vector $s'^\mu \equiv s^\mu + \tau p^\mu$, donde τ es un número real cualquiera, entonces

$$P_\pm^{(u)}(p, s') = P_\pm^{(u)}(p, s) = \pm \frac{1}{[(p \cdot s)^2 - m^2 s^2]^{1/2}} \tau m \gamma_5 (m - \not{s}) \quad (6)$$

pero estos proyectores están definidos en $\mathcal{H}^{(u)}$ donde $\not{s} = m$ y vemos que

$$P_\pm^{(u)}(p, s') = P_\pm^{(u)}(p, s) \quad s'^\mu = s^\mu + \tau p^\mu \quad (7)$$

Similarmemente

$$P_\pm^{(v)}(p, s) = \frac{1}{2} \left\{ I \mp \frac{1}{[(p \cdot s)^2 - m^2 s^2]^{1/2}} [(p \cdot s) \gamma_5 + m \gamma_5 \not{s}] \right\} \quad (8)$$

con propiedades análogas.

Podemos por tanto definir, para un dado S^μ , y salvo normalización, $u(\vec{p}, \pm)$ y $v(\vec{p}, \pm)$ mediante las ecuaciones

$$\begin{aligned} P_\lambda^{(u)}(p, s) u(\vec{p}, \lambda) &= u(\vec{p}, \lambda) \quad , \quad P_\lambda^{(u)}(p, s) u(\vec{p}, -\lambda) = 0 \\ P_\lambda^{(v)}(p, s) v(\vec{p}, \lambda) &= v(\vec{p}, \lambda) \quad , \quad P_\lambda^{(v)}(p, s) v(\vec{p}, -\lambda) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Veamos ahora de clarificar su sentido físico.

i) $m \neq 0$. De acuerdo con lo anterior siempre podemos elegir $p \cdot s = 0$ y $s^2 = -1$, de donde

$$P_\lambda^{(z)}(p, s) = \frac{1}{2} [I - \lambda \gamma_5 \not{s}] \quad z \equiv u, v \quad (2)$$

Si $\vec{p} \neq 0$, entonces una elección de partículas intenes es tomar $\vec{s} \parallel \vec{p}$:

$$S^\mu \equiv \left(\frac{|\vec{p}|}{m}, \frac{E \vec{p}}{m |\vec{p}|} \right) \quad (3)$$

con lo que

$$P_\lambda^{(z)}(p, s) = \frac{1}{2} \left\{ I - \lambda \frac{|\vec{p}|}{m} \gamma_5 \gamma^0 + \lambda \frac{E}{m |\vec{p}|} \gamma_5 (\vec{\gamma} \cdot \vec{p}) \right\} \quad (4)$$

Ahora bien como

$$E \gamma^0 \doteq \vec{p} \cdot \vec{\gamma} + z m \quad \begin{cases} z = +1 & \text{en } \chi^{(u)} \\ z = -1 & \text{en } \chi^{(v)} \end{cases} \quad (5)$$

se obtiene

$$\begin{aligned} P_\lambda^{(z)}(p, s) &= \frac{1}{2} \left\{ I - \lambda \frac{|\vec{p}|}{m} \gamma_5 \gamma^0 + \lambda \frac{1}{m |\vec{p}|} \gamma_5 (\vec{\gamma} \cdot \vec{p}) \gamma^0 (E \gamma^0) \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ I - \lambda \frac{|\vec{p}|}{m} \gamma_5 \gamma^0 + \lambda \frac{1}{m |\vec{p}|} \gamma_5 (\vec{\gamma} \cdot \vec{p}) \gamma^0 (\vec{p} \cdot \vec{\gamma} + z m) \right\} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$P_\lambda^{(z)}(p, s) = \frac{1}{2} \left\{ I + \lambda z \frac{\gamma_5 \vec{\gamma} \gamma^0 \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \right\} \quad (6)$$

o equivalentemente $(\vec{\Sigma}^i \equiv \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \sigma^{jk})$

$$P_\lambda^{(z)}(p, s) = \frac{1}{2} \left\{ I + \lambda z \vec{\Sigma} \cdot \hat{\vec{p}} \right\}, \quad m \neq 0, \quad \vec{p} \neq 0 \quad (7)$$

y como de (2,3) se deduce que $M^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sigma^{\mu\nu}$ estos no son más que los proyectores sobre estados de helicidad bien definida.

Si $\vec{p} = 0$ entonces se puede elegir $s^k = (0, \vec{s})$ con $\vec{s}^2 = +1$ y

$$P_{\lambda}^{(\tau)}(p, s) = \frac{1}{2} \left[I + \lambda \gamma_5 \vec{\gamma} \cdot \vec{s} \right] \quad (1)$$

y usando (8.5) con $\vec{p} = 0$

$$P_{\lambda}^{(\tau)}(p, s) = \frac{1}{2} \left[I + \lambda \tau \vec{\Sigma} \cdot \vec{s} \right], \quad m \neq 0, \quad \vec{p} = 0 \quad (2)$$

y por tanto son los proyectores de spin en la dirección de $\vec{s}$.

ii) $m=0$. En este caso los proyectores se convierten en $1 \pm \gamma_5 / 2$. Para clarificar su sentido tengamos en cuenta que $\vec{\Sigma} \cdot \hat{p} = \gamma_5 (\vec{\gamma} \cdot \hat{p}) \gamma^0 = -\gamma_5 \gamma^0 (\vec{\gamma} \cdot \hat{p}) = -\gamma_5 \gamma^0 \gamma^0 = -\gamma_5$ y por tanto

$$P_{\lambda}^{(\tau)}(p, s) = \frac{1}{2} \left[I - \lambda \tau \gamma_5 \right], \quad m=0 \quad (3)$$

Todo esto nos permite caracterizar físicamente las dos soluciones independientes de $\mathcal{H}^{(\tau)}$. Usaremos los proyectores de helicidad (8.7), (2) y (3). Fijáremos la normalización como

$$u^+(\vec{p}, \lambda) u(\vec{p}, \lambda) = v^+(\vec{p}, \lambda) v(\vec{p}, \lambda) = 2E(\vec{p}) \quad (4)$$

de donde

$$\bar{u}(\vec{p}, \lambda) u(\vec{p}, \lambda') = 2m \delta_{\lambda\lambda'}, \quad \bar{v}(\vec{p}, \lambda) v(\vec{p}, \lambda') = -2m \delta_{\lambda\lambda'} \quad (5)$$

$$\bar{v}(\vec{p}, \lambda) u(\vec{p}, \lambda') = \bar{u}(\vec{p}, \lambda) v(\vec{p}, \lambda') = 0$$

donde hemos usado (6.4) y (8.1). Notemos

$$\sum_{\lambda} u(\vec{p}, \lambda) \bar{u}(\vec{p}, \lambda) = \not{p} + m \quad (6)$$

$$\sum_{\lambda} v(\vec{p}, \lambda) \bar{v}(\vec{p}, \lambda) = \not{p} - m$$

$$\left. \begin{aligned} u(\vec{p}, \lambda) \bar{u}(\vec{p}, \lambda) &= \frac{1}{2} (\not{p} + m) (I - \lambda \gamma_5 \not{s}) \\ v(\vec{p}, \lambda) \bar{v}(\vec{p}, \lambda) &= \frac{1}{2} (\not{p} - m) (I - \lambda \gamma_5 \not{s}) \end{aligned} \right\} m \neq 0 \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} u(\vec{p}, \lambda) \bar{u}(\vec{p}, \lambda) &= \frac{1}{2} \not{p} (1 + \lambda \gamma_5) \\ v(\vec{p}, \lambda) \bar{v}(\vec{p}, \lambda) &= \frac{1}{2} \not{p} (1 - \lambda \gamma_5) \end{aligned} \right\} m = 0 \quad (8)$$

Finalmente

$$\vec{\Sigma} \cdot \hat{p} \, u(\vec{p}, \lambda) = +\lambda \, u(\vec{p}, \lambda) \quad , \quad \vec{\Sigma} \cdot \hat{p} \, v(\vec{p}, \lambda) = -\lambda \, v(\vec{p}, \lambda) \quad , \quad m \neq 0 \quad (1)$$

$$\gamma_5 \, u(\vec{p}, \lambda) = -\lambda \, u(\vec{p}, \lambda) \quad , \quad \gamma_5 \, v(\vec{p}, \lambda) = +\lambda \, v(\vec{p}, \lambda) \quad , \quad m=0$$

Con esto los espinores $u(\vec{p}, \lambda)$ y $v(\vec{p}, \lambda)$ quedan determinados salvo fase y en la mayoría de los cálculos lo anterior es suficiente, sin embargo por completitud vamos a dar las expresiones explícitas para estos espinores. Veamos como fijar las fases. De (2.3) resulta que los generadores $M^{\mu\nu}$ de las transformaciones de Lorentz son

$$M^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sigma^{\mu\nu} \quad (2)$$

por lo cual los generadores de las rotaciones y de los boosts son

$$J^i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} M^{jk} = \frac{1}{2} \Sigma^i \quad , \quad N^i = \frac{1}{2} \sigma^{0i} \equiv \frac{i}{2} B^i \quad (3)$$

Notar que

$$(\Sigma^i)^2 = +I \quad , \quad (B^i)^2 = -I \quad , \quad i=1,2,3 \quad (4)$$

Consideremos la rotación

$$R(\vec{p}) \equiv \exp(-i\Phi J^3) \exp(-i\Theta J^2) \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow R(\vec{p}) &= \left[\cos \frac{\Phi}{2} - i \Sigma^3 \sin \frac{\Phi}{2} \right] \left[\cos \frac{\Theta}{2} - i \Sigma^2 \sin \frac{\Theta}{2} \right] = \\ &= \cos \frac{\Theta}{2} \left[I \cos \frac{\Phi}{2} - i \Sigma^3 \sin \frac{\Phi}{2} \right] + \sin \frac{\Theta}{2} \left[-i \Sigma^2 \cos \frac{\Phi}{2} + i \Sigma^1 \sin \frac{\Phi}{2} \right] \end{aligned}$$

En la representación de Dirac

$$R(\vec{p}) = \begin{vmatrix} \tilde{R}(\vec{p}) & 0 \\ 0 & \tilde{R}(\vec{p}) \end{vmatrix} \quad , \quad \tilde{R}(\vec{p}) = \begin{vmatrix} e^{-i\Phi/2} \cos \frac{\Theta}{2} & -e^{-i\Phi/2} \sin \frac{\Theta}{2} \\ e^{+i\Phi/2} \sin \frac{\Theta}{2} & e^{+i\Phi/2} \cos \frac{\Theta}{2} \end{vmatrix} \quad (6)$$

Por otra parte consideremos el boost

$$B(\vec{p}) \equiv \exp(-i\psi \hat{p} \cdot \vec{N}) \quad , \quad \tanh \psi = \frac{|\vec{p}|}{E} \quad (7)$$

$$B(\vec{p}) = \exp \left(\frac{1}{2} \psi \hat{p} \cdot \vec{\sigma} \right) = \cosh \frac{\psi}{2} + (\hat{p} \cdot \vec{\sigma}) \sinh \frac{\psi}{2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2m}} \left[(E+m)^{1/2} + (\hat{p} \cdot \vec{\sigma}) (E-m)^{1/2} \right] \quad (1)$$

y en la representación de Dirac

$$B(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{vmatrix} (E+m)^{1/2} & (E-m)^{1/2} \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \\ (E-m)^{1/2} \vec{\sigma} \cdot \hat{p} & (E+m)^{1/2} \end{vmatrix} \quad (2)$$

Notemos además que

$$(E+m)^{1/2} + (E-m)^{1/2} = [2(E+|\vec{p}|)]^{1/2} \quad (3)$$

$$(E+m)^{1/2} - (E-m)^{1/2} = \sqrt{2} m [E+|\vec{p}|]^{-1/2}$$

relaciones que nos serán útiles mas adelante. En la representación de Dirac se tiene además

$$B(\vec{p}) R(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{vmatrix} (E+m)^{1/2} \tilde{R}(\vec{p}) & (E-m)^{1/2} \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \tilde{R}(\vec{p}) \\ (E-m)^{1/2} \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \tilde{R}(\vec{p}) & (E+m)^{1/2} \tilde{R}(\vec{p}) \end{vmatrix} \quad (4)$$

Supongamos $m \neq 0$. Resolvamos ahora la ecuación de Dirac para una partícula en reposo y con spin $\pm 1/2$ en la dirección OZ. Usaremos como es habitual

$$\alpha \equiv \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \equiv \alpha(+), \quad \beta \equiv \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \equiv \alpha(-) \quad (5)$$

Definamos

$$\alpha(\hat{p}; \lambda) \equiv \tilde{R}(p) \alpha(\lambda) \quad (6)$$

de donde

$$\alpha(\hat{p}; +) = \begin{vmatrix} e^{-i\phi/2} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{+i\phi/2} \sin \frac{\theta}{2} \end{vmatrix}, \quad \alpha(\hat{p}; -) = \begin{vmatrix} -e^{-i\phi/2} \sin \frac{\theta}{2} \\ e^{+i\phi/2} \cos \frac{\theta}{2} \end{vmatrix} \quad (7)$$

Entonces si

$$u(\vec{p}, \lambda) \equiv B(\vec{p}) R(\vec{p}) u(\vec{0}, \lambda), \quad v(\vec{p}, \lambda) \equiv B(\vec{p}) R(\vec{p}) v(\vec{0}, \lambda) \quad (8)$$

obtenemos

$$u(\vec{p}, \lambda) = (E+m)^{1/2} \begin{bmatrix} \alpha(\hat{p}, \lambda) \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \alpha(\hat{p}, \lambda) \end{bmatrix}, \quad v(\vec{p}, \lambda) = (E+m)^{1/2} \begin{bmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \alpha(\hat{p}, -\lambda) \\ \alpha(\hat{p}; -\lambda) \end{bmatrix} \quad (1)$$

(Representación Dirac)

Un cálculo a lo largo de líneas parecidas da en la representación chiral

$$u(\vec{p}, +) = \frac{m}{(E+|\vec{p}|)^{1/2}} \begin{bmatrix} \alpha(\hat{p}, +) \\ \frac{E+|\vec{p}|}{m} \alpha(\hat{p}, +) \end{bmatrix}, \quad u(\vec{p}, -) = \frac{m}{(E+|\vec{p}|)^{1/2}} \begin{bmatrix} \frac{E+|\vec{p}|}{m} \alpha(\hat{p}, -) \\ \alpha(\hat{p}, -) \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$v(\vec{p}, +) = \frac{m}{(E+|\vec{p}|)^{1/2}} \begin{bmatrix} -\frac{E+|\vec{p}|}{m} \alpha(\hat{p}, -) \\ \alpha(\hat{p}, -) \end{bmatrix}, \quad v(\vec{p}, -) = \frac{m}{(E+|\vec{p}|)^{1/2}} \begin{bmatrix} -\alpha(\hat{p}, +) \\ \frac{E+|\vec{p}|}{m} \alpha(\hat{p}, +) \end{bmatrix}$$

Este resultado se puede obtener directamente teniendo en cuenta que

$$u_c(\vec{p}, \lambda) = U u_D(\vec{p}, \lambda) \quad (3)$$

(similarmente para v) donde U ha sido dada en (V.14). Para escribir (2) se ha hecho uso de (11.3). De forma similar se pueden obtener las expresiones de las soluciones en la representación de Majorana.

Vamos a dar algunas nuevas propiedades de los los spinores introducidos

$$\alpha^+(\hat{p}, \lambda') \alpha(\hat{p}, \lambda) = \delta_{\lambda\lambda'}, \quad \lambda \alpha^+(\hat{p}, \lambda) \vec{\sigma} \alpha(\hat{p}, \lambda) = \hat{p} \quad (4)$$

$$\vec{\sigma} \cdot \hat{p} \alpha(\hat{p}, \lambda) = \lambda \alpha(\hat{p}, \lambda) \quad (5)$$

$$\sum_{\lambda} \alpha(\hat{p}, \lambda) \alpha^+(\hat{p}, \lambda) = I \quad (6)$$

$$\alpha(\hat{p}, \lambda) \alpha^+(\hat{p}, \lambda) = \frac{1}{2} [1 + \lambda \vec{\sigma} \cdot \hat{p}] \quad (7)$$

Por otra parte teniendo en cuenta que si $\hat{p}$ está caracterizado por los ángulos (θ, ϕ) entonces $-\hat{p}$ lo está por $(\pi - \theta, \phi + \pi)$, de (11.7) se deduce

$$\alpha(-\hat{p}, \lambda) = i \alpha(\hat{p}, -\lambda) \quad (8)$$

En muchas ocasiones es útil introducir los tres vectores $S^i(i)$, $i=1, 2, 3$, tales que

$$(p, s(u)) = 0, \quad s(u) \cdot s(j) = -\delta_{uj} \quad (1)$$

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda\delta} p_\mu s_\nu(1) s_\lambda(2) s_\delta(3) = -m$$

Una forma explícita de construirlos es

$$p^\mu \equiv (E(\vec{p}), |\vec{p}| \vec{A}(3))$$

$$s^\mu(1) \equiv (0, \vec{A}(1)), \quad s^\mu(2) \equiv (0, \vec{A}(2)), \quad s^\mu(3) \equiv \frac{1}{m} (|\vec{p}|, E(\vec{p}) \vec{A}(3))$$

$$\vec{A}(i) \cdot \vec{A}(j) = \delta_{ij}, \quad \vec{A}(i) \times \vec{A}(j) = \epsilon_{ijk} \vec{A}(k)$$

$$\vec{A}(1) \equiv (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta) \quad (2)$$

$$\vec{A}(2) \equiv (-\sin \phi, \cos \phi, 0)$$

$$\vec{A}(3) \equiv (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$$

Entonces es fácil comprobar que

$$\alpha(\vec{p}, \lambda') \alpha^\dagger(\vec{p}, \lambda) = \frac{1}{2} \left\{ I_{\lambda\lambda'} + \sum_{k=1}^3 (\tau_k)_{\lambda\lambda'} [\vec{\sigma} \cdot \vec{A}(k)] \right\} \quad (3)$$

donde I es la matriz identidad y las $\vec{\sigma}$ son las matrices de Pauli en la representación usual

Finalmente

$$u(\vec{p}, \lambda') \bar{u}(\vec{p}, \lambda) = \frac{1}{2} (\not{p} + m) [I_{\lambda\lambda'} - \gamma_5 \vec{\epsilon}_{\lambda\lambda'} \cdot \vec{\not{A}}]$$

$$u(\vec{p}, \lambda') \bar{v}(\vec{p}, \lambda) = \frac{1}{2} (\not{p} + m) [(\tau_1)_{\lambda\lambda'} \gamma_5 + (\tau_1 \vec{\epsilon})_{\lambda\lambda'} \cdot \vec{\not{A}}] \quad (4)$$

$$v(\vec{p}, \lambda') \bar{u}(\vec{p}, \lambda) = \frac{1}{2} (\not{p} - m) [(\tau_1)_{\lambda\lambda'} \gamma_5 - (\vec{\epsilon} \tau_1)_{\lambda\lambda'} \cdot \vec{\not{A}}]$$

$$v(\vec{p}, \lambda') \bar{v}(\vec{p}, \lambda) = \frac{1}{2} (\not{p} - m) [I_{\lambda\lambda'} + \gamma_5 \vec{\epsilon}_{-\lambda, -\lambda'} \cdot \vec{\not{A}}]$$

y en particular

$$u(\vec{p}, \lambda) \bar{u}(\vec{p}, \lambda) = \frac{1}{2} (\not{p} + m) [I - \lambda \gamma_5 \not{A}(3)] \quad (5)$$

$$v(\vec{p}, \lambda) \bar{v}(\vec{p}, \lambda) = \frac{1}{2} (\not{p} - m) [I - \lambda \gamma_5 \not{A}(3)]$$

Consideremos algunas otras propiedades de las soluciones libres de la ecuación de Dirac. En la representación de Dirac y usando (12.8) es fácil comprobar que

$$u(-\vec{p}, -\lambda) = i\gamma^0 u(\vec{p}, \lambda) \quad , \quad v(-\vec{p}, -\lambda) = -i\gamma^0 v(\vec{p}, \lambda) \quad (1)$$

de donde

$$u^\dagger(\vec{p}, \lambda) v(-\vec{p}, \lambda) = 0 \quad (2)$$

Así mismo, teniendo en cuenta que

$$\sigma_2 \alpha^*(\vec{p}, \lambda) = i\lambda \alpha(\vec{p}, -\lambda) \quad (3)$$

se comprueba que $(\epsilon\gamma^\mu\epsilon^{-1}) = -\gamma^{\mu T}$, $(\tilde{\epsilon}\gamma^\mu\tilde{\epsilon}^{-1}) = \gamma^{\mu T}$, $\epsilon = \gamma^0\gamma^2$, $\tilde{\epsilon} = -i\gamma^1\gamma^3$

$$u(\vec{p}, \lambda) = -i\lambda \epsilon \bar{v}^T(\vec{p}, \lambda) \quad , \quad v(\vec{p}, \lambda) = -i\lambda \epsilon \bar{u}^T(\vec{p}, \lambda) \quad (4)$$

$$u(\vec{p}, \lambda) = -\lambda \tilde{\epsilon} u^*(-\vec{p}, \lambda) \quad , \quad v(\vec{p}, \lambda) = +\lambda \tilde{\epsilon} v^*(-\vec{p}, \lambda) \quad (5)$$

$$u(\vec{p}, \lambda) = -\gamma_5 v(\vec{p}, -\lambda) \quad , \quad v(\vec{p}, \lambda) = -\gamma_5 u(\vec{p}, -\lambda) \quad (6)$$

válidas todas ellas en cualquier representación.

En la segunda cuantificación la expresión del campo viene dada por

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2E(\vec{p})} \sum_{\lambda} \left[u(\vec{p}, \lambda) a(\vec{p}, \lambda) e^{-ip \cdot x} + v(\vec{p}, \lambda) b^\dagger(\vec{p}, \lambda) e^{+ip \cdot x} \right] \quad (7)$$

donde los operadores de creación y aniquilación cumplen

$$\{a(\vec{p}, \lambda), a^\dagger(\vec{p}', \lambda')\} = \{b(\vec{p}, \lambda), b^\dagger(\vec{p}', \lambda')\} = (2\pi)^3 2E(\vec{p}) \delta_{\lambda\lambda'} \delta(\vec{p}-\vec{p}') \quad (8)$$

siendo nulos los restantes anticommutadores.

Veamos ahora las reglas de anticonmutación de los campos

$$\begin{aligned} \{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(y)\} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2E} \frac{d^3p'}{2E'} \sum_{\lambda\lambda'} \left\{ u_\alpha(\vec{p}, \lambda) \bar{u}_\beta(\vec{p}', \lambda') 2E \delta_{\lambda\lambda'} \delta(\vec{p}-\vec{p}') e^{-ip \cdot x + ip' \cdot y} + \right. \\ &\quad \left. + v_\alpha(\vec{p}, \lambda) \bar{v}_\beta(\vec{p}', \lambda') 2E \delta_{\lambda\lambda'} \delta(\vec{p}-\vec{p}') e^{+ip \cdot x - ip' \cdot y} \right\} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2E(\vec{p})} \sum_{\lambda} \left[u_\alpha(\vec{p}, \lambda) \bar{u}_\beta(\vec{p}, \lambda) e^{-ip \cdot (x-y)} + v_\alpha(\vec{p}, \lambda) \bar{v}_\beta(\vec{p}, \lambda) e^{+ip \cdot (x-y)} \right] = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2E(\vec{p})} \left[(\not{p} + m)_{\alpha\beta} e^{-ip \cdot (x-y)} + (\not{p} - m)_{\alpha\beta} e^{+ip \cdot (x-y)} \right] = \\ &= [i\not{\partial}_x + m]_{\alpha\beta} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2E(\vec{p})} \left[e^{-ip \cdot (x-y)} - e^{+ip \cdot (x-y)} \right] \end{aligned}$$

Si para cualquier función invariante definimos

$$S_c(x; m) \equiv (i\not{\partial} + m) \Delta_c(x; m^2) \quad (9)$$

entonces

$$\{\psi(x), \bar{\psi}(y)\} = i S(x-y; m) \quad (1)$$

$$\{\psi(x), \psi(y)\} = \{\bar{\psi}(x), \bar{\psi}(y)\} = 0$$

que cumplen el principio de microcausalidad como es de desear

La ecuación de Dirac se deduce de la densidad Lagrangiana

$$L(x) = \frac{i}{2} : \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) : - \frac{i}{2} : \partial_\mu \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) : - m : \bar{\psi}(x) \psi(x) : \quad (2)$$

la cual, salvo una uadidivergencia, es equivalente a

$$L(x) = i : \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) : - m : \bar{\psi}(x) \psi(x) : \quad (3)$$

De esta última ecuación se deduce que el momento asociado a $\psi(x)$ es

$$\pi(x) \equiv \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 \psi(x))} = i \psi^\dagger(x) \quad (4)$$

y de (1) se deduce

$$\delta(x^0 - y^0) \{\psi(x), \pi(y)\} = i \delta^{(4)}(x - y) \quad (5)$$

$$\delta(x^0 - y^0) \{\psi(x), \psi(y)\} = \delta(x^0 - y^0) \{\pi(x), \pi(y)\} = 0$$

Es lícito preguntarse que hubiera ocurrido si hubiéramos cuantificado el campo usando conmutadores. Entonces las partículas de spin $1/2$ aparecerían como bosones, su energía no estaría acotada inferiormente y se violaría el principio de microcausalidad. En realidad existe un teorema que bajo hipótesis muy débiles establece la conocida conexión de spin y estadística.

A partir de (2) se puede construir el tensor densidad de energía-momento (II.5.5)

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = -L g^{\mu\nu} + \frac{i}{2} : \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \partial^\nu \psi(x) : - \frac{i}{2} : \partial^\nu \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) : \quad (6)$$

y usando las ecuaciones del movimiento

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = \frac{i}{2} \left\{ : \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \partial^\nu \psi(x) : - : \partial^\nu \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) : \right\} \quad (7)$$

Entonces

$$\begin{aligned}
 P^\mu &= \int_{t=0} d^3x \tilde{T}^{0\mu} = \frac{i}{2} \int_{t=0} d^3x \left[: \psi^\dagger(x) \partial^\mu \psi(x) : - : \partial^\mu \psi^\dagger(x) \psi(x) : \right] \\
 &= \frac{i}{2(2\pi)^6} \int_{t=0} d^3x \int \frac{d^3p}{2E} \frac{d^3p'}{2E'} \sum_{\lambda\lambda'} : \left\{ (-i p^\mu) [u^*(\vec{p}', \lambda') a^\dagger(\vec{p}', \lambda') e^{ip'x} + v^*(\vec{p}', \lambda') b(\vec{p}', \lambda') e^{-ip'x}] \right. \\
 &\quad \left. [u(\vec{p}, \lambda) a(\vec{p}, \lambda) e^{-ipx} - v(\vec{p}, \lambda) b^\dagger(\vec{p}, \lambda) e^{ipx}] + (-i p'^\mu) [u^*(\vec{p}, \lambda) a^\dagger(\vec{p}, \lambda) e^{ipx} - v^*(\vec{p}, \lambda) b(\vec{p}, \lambda) e^{-ipx}] \right. \\
 &\quad \left. [u(\vec{p}, \lambda) a(\vec{p}, \lambda) e^{-ipx} + v(\vec{p}, \lambda) b^\dagger(\vec{p}, \lambda) e^{ipx}] \right\} : = \\
 &= \frac{1}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2E} \frac{d^3p'}{2E'} \sum_{\lambda\lambda'} \left\{ (p+p')^\mu \delta(\vec{p}-\vec{p}') u^*(\vec{p}', \lambda') u(\vec{p}, \lambda) a^\dagger(\vec{p}', \lambda') a(\vec{p}, \lambda) + \right. \\
 &\quad + (p+p')^\mu \delta(\vec{p}-\vec{p}') v^*(\vec{p}', \lambda') v(\vec{p}, \lambda) b^\dagger(\vec{p}, \lambda) b(\vec{p}', \lambda') - \\
 &\quad - (p-p')^\mu \delta(\vec{p}+\vec{p}') u^*(\vec{p}', \lambda') v(\vec{p}, \lambda) a^\dagger(\vec{p}', \lambda') b^\dagger(\vec{p}, \lambda) - \\
 &\quad \left. - (p-p')^\mu \delta(\vec{p}+\vec{p}') v^*(\vec{p}', \lambda') u(\vec{p}, \lambda) b(\vec{p}', \lambda') a(\vec{p}, \lambda) \right\}
 \end{aligned}$$

Usando (14.2) se ve que los dos últimos términos no contribuyen. Teniendo además en cuenta la ortogonalidad de los espinores y (9.3) se obtiene

$$P^\mu = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2E} \sum_{\lambda} p^\mu [a^\dagger(\vec{p}, \lambda) a(\vec{p}, \lambda) + b^\dagger(\vec{p}, \lambda) b(\vec{p}, \lambda)] \quad (1)$$

como era de esperar.

Similarmemente se obtiene para el tensor densidad de momento angular

$$\tilde{M}^{\mu}_{\nu\sigma} = \tilde{T}^{\mu}_{\nu} x_{\sigma} - \tilde{T}^{\mu}_{\sigma} x_{\nu} - \frac{\partial L}{\partial (\partial_{\mu} \psi)} S_{\nu\sigma} \psi - \bar{\psi} \bar{S}_{\nu\sigma} \frac{\partial L}{\partial (\partial_{\mu} \bar{\psi})} \quad (2)$$

y como $S_{\nu\sigma} = -\frac{i}{2} \sigma_{\nu\sigma}$, $\bar{S}_{\nu\sigma} = +\frac{i}{2} \sigma_{\nu\sigma}$ se deduce que

$$\tilde{M}^{\mu}_{\nu\sigma} = : \tilde{T}^{\mu}_{\nu} x_{\sigma} - \tilde{T}^{\mu}_{\sigma} x_{\nu} - \frac{1}{4} \bar{\psi}(x) \gamma^{\mu} \sigma_{\nu\sigma} \psi(x) - \frac{1}{4} \bar{\psi}(x) \sigma_{\nu\sigma} \gamma^{\mu} \psi(x) : \quad (3)$$

Consideremos finalmente que el campo tiene una carga q . La densidad Lagrangiana es invariante bajo la transformación de gauge local

$$\begin{aligned}
 x^{\mu} &\longrightarrow x'^{\mu} = x^{\mu} \\
 \psi(x) &\longrightarrow \psi'(x') = e^{iq\lambda} \psi(x) \quad \lambda = \lambda^*
 \end{aligned} \quad (4)$$

y la corriente conservada es

$$J^{\mu}(x) = q : \bar{\psi}(x) \gamma^{\mu} \psi(x) : \quad (5)$$

y por tanto la carga resulta ser

$$Q = q \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2E} \sum_{\lambda} [a^\dagger(\vec{p}, \lambda) a(\vec{p}, \lambda) - b^\dagger(\vec{p}, \lambda) b(\vec{p}, \lambda)] \quad (1)$$

es decir que las cargas de la partícula y la antipartícula son opuestas.

Veamos ahora las leyes de transformación del campo bajo Poincaré. El hecho de que la ecuación de Dirac sea invariante implica la existencia de una representación unitaria $U(a, \Lambda)$ de $\mathcal{P}$ tal que

$$U(a, \Lambda) \psi(x) U^{-1}(a, \Lambda) = S^{-1}(\Lambda) \psi(\Lambda x + a) \quad (2)$$

$$S^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu S(\Lambda) = \Lambda^\mu_\nu \gamma^\nu$$

Necesitamos también las leyes de transformación bajo paridad, inversión temporal y conjugación partícula-antipartícula, pero antes veamos como expresar los operadores creación y aniquilación en términos de los campos. De (5.5) y usando (9.4) y (14.2) se obtiene fácilmente

$$\begin{aligned} a(\vec{p}, \lambda) &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \bar{u}(\vec{p}, \lambda) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \gamma^0 \psi(x) \\ b(\vec{p}, \lambda) &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \bar{\psi}(x) \gamma^0 e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} v(\vec{p}, \lambda) \end{aligned} \quad (3)$$

i) Paridad

Esta transformación viene implementada por un operador unitario U_P tal que

$$U_P a(\vec{p}, \lambda) U_P^{-1} = \eta_P a(-\vec{p}, -\lambda) \quad , \quad U_P b(\vec{p}, \lambda) U_P^{-1} = -\eta_P^* b(-\vec{p}, -\lambda) \quad (4)$$

donde se han elegido paridades opuestas para la partícula y la antipartícula a fin de obtener una ley de transformación local para los campos. $\eta_P = \pm 1$ es la paridad intrínseca de la partícula. Para los campos tenemos

$$\begin{aligned} U_P \psi(x) U_P^{-1} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \eta_P \int \frac{d^3p}{2E} \sum_{\lambda} [\mu(\vec{p}, \lambda) a(-\vec{p}, -\lambda) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} - \nu(\vec{p}, \lambda) b^\dagger(-\vec{p}, -\lambda) e^{+i\vec{p}\cdot\vec{x}}] = \\ &= \eta_P \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2E} \sum_{\lambda} [\mu(-\vec{p}, -\lambda) a(\vec{p}, \lambda) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} - \nu(-\vec{p}, -\lambda) b^\dagger(\vec{p}, \lambda) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}] = \\ &= \eta_P \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2E} \sum_{\lambda} [i\gamma^0 \mu(\vec{p}, \lambda) a(\vec{p}, \lambda) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} + i\gamma^0 \nu(\vec{p}, \lambda) b^\dagger(\vec{p}, \lambda) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}] \end{aligned}$$

donde hemos usado (14.1). Entonces

$$U_P \psi(x) U_P^{-1} = i \eta_P \gamma^0 \psi(Px) \quad (1)$$

ii) Inversión temporal

Esta transformación viene implementada por una transformación antiunitaria U_T tal que

$$U_T a(\vec{p}, \lambda) U_T^{-1} = -\eta_T \lambda a(-\vec{p}, \lambda), \quad U_T b(\vec{p}, \lambda) U_T^{-1} = \eta_T^* \lambda b(-\vec{p}, \lambda) \quad (2)$$

donde las fases $|\eta_T| = 1$ se han elegido para obtener una ley local de transformación de los campos

$$\begin{aligned} U_T \psi(x) U_T^{-1} &= \eta_T \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2E} \sum_{\lambda} [-u^*(\vec{p}, \lambda) \lambda a(-\vec{p}, \lambda) e^{+ip \cdot x} + v^*(\vec{p}, \lambda) \lambda b^*(-\vec{p}, \lambda) e^{-ip \cdot x}] \\ &= \eta_T \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2E} \sum_{\lambda} [-u^*(-p, \lambda) a(p, \lambda) e^{-ip \cdot Tx} + v^*(-\vec{p}, \lambda) b^+(\vec{p}, \lambda) e^{+ip \cdot Tx}] \end{aligned}$$

y usando (14.5)

$$U_T \psi(x) U_T^{-1} = \eta_T \tilde{\psi}(Tx) \quad (3)$$

iii) Conjugación de carga.

Esta transformación viene implementada por un operador unitario

$$U_C a(\vec{p}, \lambda) U_C^{-1} = +i \eta_C \lambda b(\vec{p}, \lambda), \quad U_C b(\vec{p}, \lambda) U_C^{-1} = -i \eta_C^* \lambda a(\vec{p}, \lambda) \quad (4)$$

donde de nuevo las fases η_C han sido elegidas para obtener una ley de transformación local para los campos. Siguiendo un procedimiento análogo y usando (14.4)

$$U_C \psi(x) U_C^{-1} = +i \eta_C \psi^T(x) \quad (5)$$

Veamos finalmente como se transforman los bilineales

$$S(x) \equiv \bar{\psi}(x) \psi(x), \quad V^\mu(x) \equiv \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x)$$

$$T^{\mu\nu}(x) \equiv \bar{\psi}(x) \sigma^{\mu\nu} \psi(x), \quad A^\mu(x) \equiv \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \gamma_5 \psi(x) \quad (6)$$

$$P(x) \equiv i \bar{\psi}(x) \gamma_5 \psi(x)$$

donde se ha introducido una i en la última para garantizar que todas ellas

son autoadjuntos. Sus propiedades de transformación bajo el grupo propio son consecuencia inmediata de (3.4). Además es fácil comprobar que

$$U_P \bar{\psi}(x) A \psi(x) U_P^{-1} = \bar{\psi}(Px) \gamma^0 A \gamma^0 \psi(Px)$$

$$U_T \bar{\psi}(x) A \psi(x) U_T^{-1} = \bar{\psi}(Tx) \tilde{A}^* \tilde{\psi}(Tx) \quad (1)$$

$$U_C \bar{\psi}(x) A \psi(x) U_C^{-1} = \bar{\psi}(x) \mathcal{C} A^T \mathcal{C} \psi(x)$$

donde en la derivación de la última ecuación hemos usado el hecho de que los operadores campo anticomutan. Entonces

$$U_P S(x) U_P^{-1} = + S(Px), \quad U_P V^\mu(x) U_P^{-1} = (-1)^{1-\delta_{\mu 0}} V^\mu(Px)$$

$$U_P T^{\mu\nu}(x) U_P^{-1} = (-1)^{2-\delta_{\mu 0}-\delta_{\nu 0}} T^{\mu\nu}(Px) \quad (2)$$

$$U_P A^\mu(x) U_P^{-1} = -(-1)^{1-\delta_{\mu 0}} A^\mu(Px), \quad U_P P(x) U_P^{-1} = -P(Px)$$

$$U_T S(x) U_T^{-1} = + S(Tx), \quad U_T V^\mu(x) U_T^{-1} = (-1)^{1-\delta_{\mu 0}} V^\mu(Tx)$$

$$U_T T^{\mu\nu}(x) U_T^{-1} = -(-1)^{2-\delta_{\mu 0}-\delta_{\nu 0}} T^{\mu\nu}(Tx) \quad (3)$$

$$U_T A^\mu(x) U_T^{-1} = (-1)^{1-\delta_{\mu 0}} A^\mu(Tx), \quad U_T P(x) U_T^{-1} = -P(Tx)$$

$$U_C S(x) U_C^{-1} = S(x), \quad U_C V^\mu(x) U_C^{-1} = -V^\mu(x)$$

$$U_C T^{\mu\nu}(x) U_C^{-1} = -T^{\mu\nu}(x) \quad (4)$$

$$U_C A^\mu(x) U_C^{-1} = A^\mu(x), \quad U_C P(x) U_C^{-1} = P(x)$$

Se puede también considerar la simetría $PCT \equiv \Theta$ que es implementada por un operador unitario U_Θ . Pauli, Zumino, Schwinger... demostraron el teorema PCT que establece que, bajo condiciones muy generales, una teoría debe ser invariante bajo Θ aún cuando las simetrías P , C y T sean separadamente violadas.

VI-A - PROPIEDADES DE BILINEALES

En muchas ocasiones es útil conocer el comportamiento a bajas energías de cantidades del tipo $\bar{u}(\vec{p}', \lambda') A u(\vec{p}, \lambda)$. Escríbamos

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad (1)$$

donde las cantidades A_{ij} son matrices 2×2 . Es conveniente usar la representación de Dirac y usando (12.6) y despreciando los términos de orden $|\vec{p}| |\vec{p}'| / m^2$ obtenemos fácilmente

$$\begin{aligned} \bar{u}(\vec{p}', \lambda') A u(\vec{p}, \lambda) &\longrightarrow 2m \alpha^\dagger(\hat{p}', \lambda') \left[A_{11} + A_{12} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{2m} - \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}'}{2m} A_{21} \right] \alpha(\hat{p}, \lambda) \\ \bar{v}(\vec{p}', \lambda') A v(\vec{p}, \lambda) &\longrightarrow 2m \alpha^\dagger(\hat{p}', -\lambda') \left[-A_{22} - A_{21} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{2m} + \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}'}{2m} A_{12} \right] \alpha(\hat{p}, -\lambda) \\ \bar{u}(\vec{p}', \lambda') A v(\vec{p}, \lambda) &\longrightarrow 2m \alpha^\dagger(\hat{p}', \lambda') \left[A_{12} + A_{11} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{2m} - \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}'}{2m} A_{22} \right] \alpha(\hat{p}, -\lambda) \\ \bar{v}(\vec{p}', \lambda') A u(\vec{p}, \lambda) &\longrightarrow 2m \alpha^\dagger(\hat{p}', -\lambda') \left[-A_{21} - A_{22} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{2m} + \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}'}{2m} A_{11} \right] \alpha(\hat{p}, \lambda) \end{aligned} \quad (2)$$

Introduciendo

$$\begin{aligned} M^{\ell} &\equiv \frac{1}{2m} [\sigma_\ell (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) + (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}') \sigma_\ell] = \frac{1}{2m} [p^\ell + p'^\ell + i \epsilon_{\ell j k} (p^j - p'^j) \sigma_k] \\ R^{\ell} &\equiv \frac{1}{2m} [\sigma_\ell (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) - (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}') \sigma_\ell] = \frac{1}{2m} [p^\ell - p'^\ell + i \epsilon_{\ell j k} (p^j + p'^j) \sigma_k] \\ N^{\ell j} &\equiv \frac{1}{2m} \epsilon_{\ell j k} [\sigma_k (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) - (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}') \sigma_k] = \\ &= \frac{1}{2m} [\epsilon_{\ell j k} (p^k - p'^k) - i \sigma_\ell (p^j + p'^j) + i \sigma_j (p^\ell + p'^\ell)] \end{aligned} \quad (3)$$

se puede construir inmediatamente los conchets de las expresiones (2) para las combinaciones de matrices γ independientes y son dadas en la siguiente tabla.

A	$\bar{u}(\vec{p}', \lambda') A u(\vec{p}, \lambda)$	$\bar{v}(\vec{p}', \lambda') A v(\vec{p}, \lambda)$	$\bar{u}(\vec{p}', \lambda') A v(\vec{p}, \lambda)$	$\bar{v}(\vec{p}', \lambda') A u(\vec{p}, \lambda)$
I	I	-I	$+\frac{i}{2m} \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - \vec{p}')$	$-\frac{i}{2m} \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - \vec{p}')$
γ^0	I	I	$+\frac{i}{2m} \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} + \vec{p}')$	$+\frac{i}{2m} \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} + \vec{p}')$
γ^i	M^i	M^i	σ_i	σ_i
σ^{0i}	$i R^i$	$-i R^i$	$i \sigma_i$	$-i \sigma_i$
σ^{ij}	$\epsilon_{ijk} \sigma_k$	$-\epsilon_{ijk} \sigma_k$	N^{ij}	$-N^{ij}$
$\gamma^0 \gamma_5$	$-\frac{i}{2m} \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} + \vec{p}')$	$-\frac{i}{2m} \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} + \vec{p}')$	-I	-I
$\gamma^i \gamma_5$	$-\sigma_i$	$-\sigma_i$	$-M^i$	$-M^i$
$i \gamma_5$	$-\frac{i}{2m} \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - \vec{p}')$	$+\frac{i}{2m} \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - \vec{p}')$	$-i I$	$+i I$

VI-B.- INTERACCIÓN DE CUATRO CAMPOS

Por razones de completitud deseamos estudiar aquí algunas propiedades de las cantidades

$$L_c(x) \equiv [\bar{\psi}_1(x) O_c \psi_2(x)] [\bar{\psi}_3(x) O_c \psi_4(x)] \equiv L_c(1,2,3,4) \quad (1)$$

$$L'_c(x) \equiv [\bar{\psi}_1(x) O_c \psi_2(x)] [\bar{\psi}_3(x) O_c \gamma_5 \psi_4(x)] \equiv L'_c(1,2,3,4)$$

donde los índices son $c = S, V, T, A, P$ y

$$O_S \equiv I, \quad O_V \equiv \gamma^\mu, \quad O_T \equiv \frac{i}{2} \sigma^{\mu\nu}, \quad O_A \equiv i\gamma^\mu \gamma_5, \quad O_P \equiv \gamma_5 \quad (2)$$

Se trata de averiguar ahora qué relación existe entre (1) y expresiones análogas con los campos reordenados de otras formas. Empecemos considerando

$$L_c(1432) = \bar{\psi}_{1\alpha}(x) [O_c]_{\alpha\beta} \psi_{4\beta}(x) \bar{\psi}_{3\gamma}(x) [O_c]_{\gamma\delta} \psi_{2\delta}(x) \quad (3)$$

y usando (XIV.2)

$$L_c(1432) = \bar{\psi}_{1\alpha}(x) \psi_{4\beta}(x) \bar{\psi}_{3\gamma}(x) \psi_{2\delta}(x) \frac{1}{4} \sum_{A=1}^{16} \Gamma_{\gamma\beta}^{(A)} [O_c \Gamma^{(A)} O_c]_{\alpha\delta}$$

y teniendo en cuenta la anticomutación de los campos fermiónicos

$$L_c(1432) = -\frac{1}{4} \sum_{A=1}^{16} [\bar{\psi}_1(x) O_c \Gamma^{(A)} O_c \psi_2(x)] [\bar{\psi}_3(x) \Gamma^{(A)} \psi_4(x)] \quad (4)$$

que puede escribirse eligiendo como las 16 matrices independientes las dadas en (2) (es fácil darse cuenta que (XIV.2) continúa siendo válida)

$$\begin{aligned} L_c(1432) = & -\frac{1}{4} \left\{ [\bar{\psi}_1(x) O_c O_c \psi_2(x)] [\bar{\psi}_3(x) \psi_4(x)] + \right. \\ & + [\bar{\psi}_1(x) O_c \gamma^\mu O_c \psi_2(x)] [\bar{\psi}_3(x) \gamma_\mu \psi_4(x)] + \frac{1}{2} [\bar{\psi}_1(x) O_c \sigma^{\mu\nu} O_c \psi_2(x)] [\bar{\psi}_3(x) \sigma_{\mu\nu} \psi_4(x)] - \\ & - [\bar{\psi}_1(x) O_c \gamma^\mu \gamma_5 O_c \psi_2(x)] [\bar{\psi}_3(x) \gamma_\mu \gamma_5 \psi_4(x)] + [\bar{\psi}_1(x) O_c \gamma_5 O_c \psi_2(x)] [\bar{\psi}_3(x) \gamma_5 \psi_4(x)] \left. \right\} \end{aligned}$$

Pero

$$O_S(I, \gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu}, \gamma^\mu \gamma_5, \gamma_5) O_S = (I, \gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu}, \gamma^\mu \gamma_5, \gamma_5)$$

$$O_V(I, \gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu}, \gamma^\mu \gamma_5, \gamma_5) O_V = (4, -2\gamma^\mu, 0, 2\gamma^\mu \gamma_5, -4\gamma_5)$$

$$O_T(I, \gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu}, \gamma^\mu \gamma_5, \gamma_5) O_T = (12, 0, -4\sigma^{\mu\nu}, 0, 12\gamma_5)$$

$$O_A(I, \gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu}, \gamma^\mu \gamma_5, \gamma_5) O_A = (-4, -2\gamma^\mu, 0, 2\gamma^\mu \gamma_5, 4\gamma_5)$$

$$U_P (\mathbb{I}, \gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu}, \gamma^\mu \gamma_5, \gamma_5) U_P = (-\mathbb{I}, \gamma^\mu, -\sigma^{\mu\nu}, \gamma^\mu \gamma_5, -\gamma_5)$$

De donde

$$L_i(1,4,3,2) = \sum_j f_{ij} L_j(1,2,3,4) \quad (1)$$

$$f_{ij} = -\frac{1}{4} \begin{array}{c|ccccc|c} & S & V & T & A & P & \\ \hline S & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & S \\ V & 4 & -2 & 0 & 2 & -4 & V \\ T & 6 & 0 & -2 & 0 & 6 & T \\ A & 4 & 2 & 0 & -2 & -4 & A \\ P & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & P \end{array}$$

Es necesario tener en cuenta que la misma fórmula aplicada a los cuadrispinores es válida pero cambiando el signo global negativo de la matriz anterior por el positivo (recordar que el signo negativo proviene de la anticomutación de los campos). El mismo método puede ser aplicado para reordenar $L'_i(1,2,3,4)$, ya que la demostración anterior es válida si $\psi_4 \rightarrow \gamma_5 \psi_4$.

Consideremos ahora la ordenación $L_i(1234)$ y tengamos presente (18.5)

$$\psi_i^c(x) \equiv U_c \psi_i(x) U_c^{-1} = \eta_{ic} \otimes \bar{\psi}_i^T(x), \quad \bar{\psi}_i^c(x) = \eta_{ic}^* \otimes \psi_i(x) \quad (2)$$

de donde

$$L_i(1234) = \eta_{ic}^* \eta_{2c} [\bar{\psi}_2^c(x) \otimes O_c^T \otimes \psi_1^c(x)] [\bar{\psi}_3(x) \otimes O_c \psi_4(x)] \quad (3)$$

pero

$$\otimes O_S^T \otimes = O_S, \quad \otimes O_V^T \otimes = -O_V, \quad \otimes O_T^T \otimes = -O_T \quad (4)$$

$$\otimes O_A^T \otimes = O_A, \quad \otimes O_P^T \otimes = O_P$$

de donde

$$L_i(1234) = \delta_{ic} \eta_{1c}^* \eta_{2c} L_i(2134) \quad (5)$$

$$\delta_S = \delta_A = \delta_P = +1, \quad \delta_V = \delta_T = -1$$

Estas son las llamadas reordenaciones de Fierz

Em particular

$$\begin{aligned}
 L(x) &= [\bar{\psi}_a(x) \gamma^\mu (f_V - f_A \gamma_5) \psi_b(x)] [\bar{\psi}_c(x) \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \psi_d(x)] = \\
 &= \frac{1}{2} (f_V - f_A) [\bar{\psi}_a(x) \gamma^\mu (1 + \gamma_5) \psi_b(x)] [\bar{\psi}_c(x) \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \psi_d(x)] \\
 &+ \frac{1}{2} (f_V + f_A) [\bar{\psi}_a(x) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_b(x)] [\bar{\psi}_c(x) \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \psi_d(x)] \quad (1)
 \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned}
 L(x) &= \frac{1}{2} (f_V - f_A) [\bar{\psi}_a(x) \gamma^\mu (1 + \gamma_5) \psi_b(x)] [\bar{\psi}_c(x) \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \psi_d(x)] \\
 &- (f_V + f_A) [\bar{\psi}_a(x) (1 + \gamma_5) \psi_d(x)] [\bar{\psi}_c(x) (1 - \gamma_5) \psi_b(x)] \quad (2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L(x) &= -\frac{1}{2} (f_V - f_A) [\bar{\psi}_a(x) \gamma^\mu (1 + \gamma_5) \psi_b(x)] [\bar{\psi}_d(x) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \psi_c(x)] \\
 &- (f_V + f_A) [\bar{\psi}_a(x) (1 + \gamma_5) \psi_d(x)] [\bar{\psi}_c(x) (1 - \gamma_5) \psi_b(x)] \quad (3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L(x) &= (f_V - f_A) [\bar{\psi}_a(x) (1 - \gamma_5) \psi_c(x)] [\bar{\psi}_d(x) (1 + \gamma_5) \psi_b(x)] \\
 &- (f_V + f_A) [\bar{\psi}_a(x) (1 + \gamma_5) \psi_d(x)] [\bar{\psi}_c(x) (1 - \gamma_5) \psi_b(x)] \quad (4)
 \end{aligned}$$

VI-C- PARTICULA DE DIRAC EN INTERACCION ELECTROMAGNETICA

Considerando la ecuación de Dirac como ecuación relativista para partículas de spin $1/2$ sólo se pueden formular un número relativamente limitado de problemas. Son aquellos problemas en los que el número de partículas no cambia y en los que la interacción se puede introducir en el concepto de campo externo. Deseamos en particular estudiar la interacción de una partícula de Dirac en presencia de un campo electromagnético externo (clásico) caracterizado por un potencial vector $A^\mu(x)$. Consideraremos que el acoplamiento tiene lugar de la forma

$$[i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu(x) - m]\psi(x) = 0 \quad (1)$$

es decir es un acoplamiento mínimo. Más adelante volveremos sobre la razón de la elección. La e indica la carga de la partícula y $e = -|e|$ para el electrón. Nos limitaremos al caso de un campo electromagnético que pueda ser descrito de la forma

$$A^0(x) = A^0(r) \equiv \frac{1}{e} V(r), \quad \vec{A}(x) \equiv 0 \quad (2)$$

Entonces separando de la forma usual la variable temporal (1) equivale a

$$H\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}) \quad (3)$$

$$H \equiv \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m + V(r), \quad \vec{\alpha} \equiv \gamma^0 \vec{\gamma}, \quad \beta \equiv \gamma^0$$

Teniendo en cuenta que tratamos fuerzas centrales es conveniente introducir coordenadas esféricas. Introduzcamos para empezar el momento angular total

$$\vec{J} = \vec{L} + \frac{1}{2} \vec{\Sigma} \quad (4)$$

$$L^i \equiv \epsilon_{ijk} x^j p^k, \quad \Sigma^i \equiv \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \sigma^{jk}$$

$$\text{Si } \alpha_r \equiv \frac{1}{r} (\vec{\alpha} \cdot \vec{r}), \quad p_r \equiv \frac{1}{r} (\vec{r} \cdot \vec{p} - i) = -i \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \quad (5)$$

es fácil probar que

$$\vec{\Sigma} \cdot \vec{L} = -i (\vec{\alpha} \cdot \vec{r}) (\vec{\alpha} \cdot \vec{p}) + i (\vec{r} \cdot \vec{p})$$

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{p} = \alpha_r p_r + \frac{i}{r} \alpha_r [\vec{\Sigma} \cdot \vec{L} + 1] \quad (6)$$

$$\vec{\Sigma} \cdot \vec{L} + 1 = \vec{J}^2 - \vec{L}^2 + \frac{1}{4}$$

Entonces (C.1.3) se puede escribir

$$\left\{ \alpha_r \left[p_r + \frac{c}{r} \left(\vec{J}^2 - \vec{L}^2 + \frac{1}{4} \right) \right] + \beta m + V(r) \right\} \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r}) \quad (1)$$

Notar que si P es el operador paridad, como L y $\vec{J}$ conmutan con H buscaremos estados propios que lo sean de $\vec{J}^2$, J_3 y P . Es conveniente introducir

$$y_{JM}^L(\hat{r}) = \sum_{\mu} C(1/2, L, J; \mu, M-\mu, M) y_L^{M-\mu}(\hat{r}) \chi(\mu) \quad (2)$$

donde $\chi(\mu)$ son las funciones de onda de spin del electrón. Se puede ver

$$\vec{J}^2 y_{JM}^L(\hat{r}) = J(J+1) y_{JM}^L(\hat{r})$$

$$J^3 y_{JM}^L(\hat{r}) = M y_{JM}^L(\hat{r}) \quad (3)$$

$$\vec{L}^2 y_{JM}^L(\hat{r}) = L(L+1) y_{JM}^L(\hat{r})$$

Los valores posibles de L son $J \pm 1/2$ y de aquí obtenemos para cada J dos $y_{JM}^L(\hat{r})$ con paridades opuestas ya que la paridad de $y_{JM}^L(\hat{r})$ es $(-1)^L$. Consideremos combinaciones de éstos que den un *u*-spinor de paridad bien definida. Sean $\varphi(\vec{r})$ y $\chi(\vec{r})$ las dos componentes superiores e inferiores, respectivamente, del *u*-spinor en la representación de Dirac. Entonces

$$P \varphi(\vec{r}) = \Pi \varphi(\vec{r}), \quad P \chi(\vec{r}) = -\Pi \chi(\vec{r}) \quad (4)$$

Por tanto los estados propios simultáneos de $\vec{J}^2$, J^3 y P son

$$\Psi_{JM}^{\Pi}(\vec{r}) = \begin{vmatrix} g(r) y_{JM}^L(\hat{r}) \\ f(r) y_{JM}^{L'}(\hat{r}) \end{vmatrix} \quad (5)$$

$$L' = 2J - L, \quad \Pi = (-1)^L$$

donde las funciones $g(r)$ y $f(r)$ deben determinarse de forma que (5) sea un estado propio de H . Es decir

$$+ \frac{1}{r} (\vec{\sigma} \cdot \vec{r}) \left\{ \left[p_r + \frac{c}{r} \left[J(J+1) - L'(L'+1) + \frac{1}{4} \right] \right] \right\} f(r) y_{JM}^{L'}(\hat{r}) + [m + V(r) - E] g(r) y_{JM}^L(\hat{r}) = 0 \quad (6)$$

$$+ \frac{1}{r} (\vec{\sigma} \cdot \vec{r}) \left\{ \left[p_r + \frac{c}{r} \left[J(J+1) - L(L+1) + \frac{1}{4} \right] \right] \right\} g(r) y_{JM}^L(\hat{r}) + [-m + V(r) - E] f(r) y_{JM}^{L'}(\hat{r}) = 0$$

Pasemos ahora a demostrar que

$$\frac{1}{r} (\vec{\sigma} \cdot \vec{r}) y_{JM}^L(\hat{r}) = + y_{JM}^{L'}(\hat{r}) \quad L' = 2J - L \quad (7)$$

En efecto

$$\frac{1}{r} (\vec{\sigma} \cdot \vec{r}) y_{JM}^L(\hat{r}) = \frac{1}{r} \sum_{L''M''} (y_{JM''}^{L''} | \vec{\sigma} \cdot \vec{r} | y_{JM}^L) y_{JM''}^{L''}(\hat{r})$$

pero por ser $\vec{\sigma} \cdot \vec{r}$ un pseudoescalar este se reduce a

$$\frac{1}{r} (\vec{\sigma} \cdot \vec{r}) y_{JM}^L(\hat{r}) = \frac{1}{r} (y_{JM}^{L'} | \vec{\sigma} \cdot \vec{r} | y_{JM}^L) y_{JM}^{L'}(\hat{r})$$

y un simple cálculo conduce a (C.2-7). Entonces

$$\left[\frac{d}{dr} - \frac{1}{r} \left[J(J+1) - L(L+1) - \frac{3}{4} \right] \right] g(r) - [E + m - V(r)] f(r) = 0 \quad (1)$$

$$\left[\frac{d}{dr} - \frac{1}{r} \left[J(J+1) - L'(L'+1) - \frac{3}{4} \right] \right] f(r) + [E - m - V(r)] g(r) = 0$$

Introduciendo *

$$\kappa = \begin{cases} -(J+1/2) & J = L + 1/2 \\ + (J+1/2) & J = L - 1/2 \end{cases} \quad (2)$$

podemos escribir las ecuaciones anteriores como

$$\frac{d g(r)}{dr} + (1 + \kappa) \frac{1}{r} g(r) - [E + m - V(r)] f(r) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{d f(r)}{dr} + (1 - \kappa) \frac{1}{r} f(r) + [E - m - V(r)] g(r) = 0$$

y de aquí

$$\frac{d}{dr} [r g(r)] + \frac{\kappa}{r} [r g(r)] - [E + m - V(r)] [r f(r)] = 0 \quad (4)$$

$$\frac{d}{dr} [r f(r)] - \frac{\kappa}{r} [r f(r)] + [E - m - V(r)] [r g(r)] = 0$$

Empezamos considerando el problema de los estados ligados en un potencial coulombiano.

Introducimos

$$\lambda \equiv (m^2 - E^2)^{1/2}, \quad m^2 > E^2$$

$$\rho \equiv 2\lambda r$$

$$r g(r) \equiv \left[1 + \frac{E}{m} \right]^{1/2} e^{-\rho/2} [F_1(\rho) + F_2(\rho)] \quad (5)$$

$$r f(r) \equiv \left[1 - \frac{E}{m} \right]^{1/2} e^{-\rho/2} [F_1(\rho) - F_2(\rho)]$$

$$V(r) = - \frac{Z\alpha}{r}$$

entonces las ecuaciones (4) se pueden escribir

* Notar que

$$X \equiv 1 + 2 \vec{S} \cdot \vec{L} = 1 + \vec{J}^2 - \vec{L}^2 - \vec{S}^2$$

es tal que $X Y_{JM}^L(\hat{r}) = \left[1 + J(J+1) - L(L+1) - \frac{3}{4} \right] Y_{JM}^L(\hat{r})$

Si $J = L + 1/2$ $X Y_{JM}^L(\hat{r}) = (J + 1/2) Y_{JM}^L(\hat{r})$

$J = L - 1/2$ $X Y_{JM}^L(\hat{r}) = -(J + 1/2) Y_{JM}^L(\hat{r})$

y por tanto los valores propios de X son $\pm (J + 1/2)$

$$\frac{dF_1(\rho)}{d\rho} = \left[1 - \frac{Z\alpha E}{\lambda\rho} \right] F_1(\rho) - \left[\frac{\kappa}{\rho} + \frac{Z\alpha m}{\lambda\rho} \right] F_2(\rho) \quad (1)$$

$$\frac{dF_2(\rho)}{d\rho} = - \left[\frac{\kappa}{\rho} - \frac{Z\alpha m}{\lambda\rho} \right] F_1(\rho) + \frac{Z\alpha E}{\lambda\rho} F_2(\rho)$$

Para $\rho \rightarrow 0$ el comportamiento de estas funciones es $F_1(\rho) \sim \rho^\gamma$, $F_2(\rho) \sim \rho^\gamma$ donde $\gamma = \pm [\kappa^2 - Z^2\alpha^2]^{1/2}$, pero las condiciones para $r \rightarrow 0$ prohíben la solución negativa. Introduzcamos

$$F_i(\rho) \equiv \rho^\gamma G_i(\rho) \quad i=1,2 \quad \gamma \equiv [\kappa^2 - Z^2\alpha^2]^{1/2} \quad (2)$$

Entonces

$$\frac{dG_1(\rho)}{d\rho} = \left[1 - \frac{Z\alpha E}{\lambda\rho} - \frac{\gamma}{\rho} \right] G_1(\rho) - \left[\frac{\kappa}{\rho} + \frac{Z\alpha m}{\lambda\rho} \right] G_2(\rho) \quad (3)$$

$$\frac{dG_2(\rho)}{d\rho} = - \left[\frac{\kappa}{\rho} - \frac{Z\alpha m}{\lambda\rho} \right] G_1(\rho) - \left[-\frac{Z\alpha E}{\lambda\rho} + \frac{\gamma}{\rho} \right] G_2(\rho)$$

De aquí, derivando la segunda y usando la primera

$$\left\{ \rho \frac{d^2}{d\rho^2} + [12\gamma+1] - \rho \right\} \frac{d}{d\rho} - \left[\gamma - \frac{Z\alpha E}{\lambda} \right] \} G_2(\rho) = 0 \quad (4)$$

que no es más que una ecuación hipergeométrica confluyente y por tanto

$$F_2(\rho) = A \rho^\gamma M\left(\gamma - \frac{Z\alpha E}{\lambda}, 2\gamma+1; \rho\right) \quad (5)$$

Por otra parte

$$\rho \frac{d}{d\rho} M(a, b; \rho) = a M(a+1, b; \rho) - a M(a, b; \rho) \quad (6)$$

Usando esta ecuación junto con la segunda (3) y (5) obtenemos

$$F_1(\rho) = A \frac{\gamma - \frac{Z\alpha E}{\lambda}}{-\kappa + \frac{Z\alpha m}{\lambda}} \rho^\gamma M\left(\gamma+1 - \frac{Z\alpha E}{\lambda}, 2\gamma+1; \rho\right) \quad (7)$$

$$F_2(\rho) = A \rho^\gamma M\left(\gamma - \frac{Z\alpha E}{\lambda}, 2\gamma+1; \rho\right)$$

donde A es una constante de normalización. Como

$$M(a, b, \rho) \underset{\rho \rightarrow \infty}{\sim} \frac{e^{i\pi a} \Gamma(b)}{\Gamma(b-a)} \rho^{-a} + \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} \rho^{a-b} e^\rho \quad (8)$$

la condición de que la función de ondas sea normalizable es pues

$$\frac{1}{\Gamma\left(\gamma - \frac{Z\alpha E}{\lambda}\right)} = 0 \quad \frac{1}{\left(\kappa - \frac{Z\alpha m}{\lambda}\right) \Gamma\left(\gamma - \frac{Z\alpha E}{\lambda}\right)} = 0 \quad (1)$$

Si $Z\alpha m/\lambda - \kappa \neq 0$, lo cual siempre sucede si $\kappa < 0$, entonces la segunda condición coincide con la primera y

$$\frac{Z\alpha E}{\lambda} - \gamma = m_r = \text{entero no negativo} \quad (2)$$

$$\Rightarrow E = m \left\{ 1 + \frac{Z^2 \alpha^2}{(m_r + \gamma)^2} \right\}^{-1/2} \quad (3)$$

Si $\kappa = Z\alpha m/\lambda$, entonces $\gamma = Z\alpha E/\lambda$ y $m_r = 0$. Al mismo tiempo, la segunda ecuación de (1) no se satisface*. Entonces

$$m_r = \begin{cases} 0, 1, 2, \dots & \kappa < 0 \\ 1, 2, 3, \dots & \kappa > 0 \end{cases} \quad (4)$$

En general en lugar de usar m_r se usa

$$n \equiv m_r + (j + 1/2) \quad (5)$$

que coincide con el número cuántico principal de la teoría no relativista.

Si $Z\alpha \ll 1$, entonces

$$E = m - \frac{1}{2} m (Z\alpha)^2 \frac{1}{m^2} \left\{ 1 + \frac{(Z\alpha)^2}{m} \left(\frac{1}{j+1/2} - \frac{3}{4m} \right) + \dots \right\} \quad (6)$$

que es la conocida fórmula de la estructura fina. Una característica de la misma es que solo contiene el valor absoluto de κ , por lo cual todos los niveles energéticos, excepto el fundamental, están dos veces degenerados.

En particular los niveles $2s_{1/2}$ ($m=2, l=0, j=1/2, m_r=1, \kappa=-1$) y $2p_{1/2}$ ($m=2, l=1, j=1/2, m_r=1, \kappa=1$). Veremos más adelante que esta degeneración no existe y que es debida a la forma aproximada de tratar el campo electromagnético. Las funciones radiales son pues

$$y(r) = C \left(1 + \frac{E}{m}\right)^{1/2} e^{-\frac{Zr}{Na_0}} \left(\frac{2Zr}{Na_0}\right)^{\gamma-1} \left\{ m_r M(-m_r+1, 2\gamma+1; \frac{2Zr}{Na_0}) - (\kappa-x) M(-m_r, 2\gamma+1; \frac{2Zr}{Na_0}) \right\} \quad (7)$$

43/001

$$\star \quad \kappa \equiv \frac{Z\alpha m}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \gamma = [\kappa^2 - Z^2\alpha^2]^{1/2} = Z\alpha \sqrt{\frac{m^2}{m^2 - E^2} - 1} = Z\alpha E/\lambda \quad \Rightarrow \quad m_{\gamma} = 0$$

$$\text{If } \kappa = \frac{Z\alpha m}{\lambda} + \eta \quad \gamma = Z\alpha \frac{E}{\lambda} + \eta \frac{m}{E}$$

$$\frac{1}{(\kappa - \frac{Z\alpha m}{\lambda}) + i\eta} \sim \frac{1}{\eta} \frac{1}{\frac{1}{\frac{m}{E}}} \sim \frac{m}{E} \neq 0.$$

$$f(r) = c \left(1 - \frac{E}{m}\right)^{1/2} e^{-\frac{Zr}{Na_0}} \left(\frac{2Zr}{Na_0}\right)^{\gamma-1} \left\{ m_r M(-m_r+1, 2\gamma+1; \frac{2Zr}{Na_0}) + (N-x) M(-m_r, 2\gamma+1; \frac{2Zr}{Na_0}) \right\} \quad (1)$$

donde

$$a_0 = \frac{1}{m\alpha}, \quad N \equiv \frac{Zm\alpha}{\lambda} = [m^2 - 2m_r(|x| - \gamma)]^{1/2} \quad (2)$$

y C es una constante de normalización. Si exigimos que

$$\int d^3r \bar{\Psi}_{JM}^{\dagger}(\vec{r}) \Psi_{JM}^{\dagger}(\vec{r}) = \int_0^{\infty} dr r^2 [|g(r)|^2 + |f(r)|^2] = 1 \quad (3)$$

entonces

$$C = - \frac{\sqrt{\Gamma(2\gamma+m_r+1)}}{\Gamma(2\gamma+1) \sqrt{m!}} \frac{1}{\sqrt{4N(N-x)}} \left(\frac{2Z}{Na_0}\right)^{3/2} \quad (4)$$

Sobre soluciones de la ecuación de Dirac en potenciales centrales

A.I. AKHIEZER y V.B. BERESTETSKI "Quantum Electrodynamics" Interscience. N.Y. 1965

(i) Solución en un potencial Coulombiano

(ii) $V(r) = -V_0$, $r < R$, $V(r) = 0$, $r > R$

(iii) Campo magnético homogéneo y constante

(iv) Efectos nucleares finitos. Ver también E.M. ROSE Phys. Rev. 82, 389 (1951)

J. RAFELSKI, L.P. FULCHER y A. KLEIN. Phys. Rep. 38, 227 (1978)

Para ver que el trabajo fundamental para una esfera uniformemente cargada es W. PIEPER

y W. GREINER Z.f. Physik 218, 327 (1969)

Consideremos ahora los estados de colisión, esto es aquellos en los que $E \geq m$. Introduzcamos dos funciones desconocidas $F_1(r)$ y $F_2(r)$ relacionadas con las anteriores por

$$\begin{aligned} r g(r) &= \left(\frac{E+m}{m} \right)^{1/2} e^{-i p r} [F_1(r) + F_2(r)] \\ r f(r) &= i \left(\frac{E-m}{m} \right)^{1/2} e^{-i p r} [F_1(r) - F_2(r)] \end{aligned} \quad p \equiv \sqrt{E^2 - m^2} \quad (1)$$

De (3.3) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d F_1(r)}{dr} &= \left\{ 2ip + \frac{i Z e^2 E}{r p} \right\} F_1(r) - \left\{ \frac{\kappa}{r} - \frac{i m Z e^2}{r p} \right\} F_2(r) \\ \frac{d F_2(r)}{dr} &= - \frac{i Z e^2 E}{r p} F_2(r) + \left\{ - \frac{\kappa}{r} - \frac{i m Z e^2}{r p} \right\} F_1(r) \end{aligned} \quad (2)$$

Introducamos $\rho \equiv 2ipr$ y $F_i(r) \equiv \tilde{F}_i(\rho)$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{d \tilde{F}_1(\rho)}{d \rho} &= \left\{ 1 + \frac{i Z e^2 E}{p \rho} \right\} \tilde{F}_1(\rho) - \left\{ \frac{\kappa}{\rho} - \frac{i m Z e^2}{p \rho} \right\} \tilde{F}_2(\rho) \\ \frac{d \tilde{F}_2(\rho)}{d \rho} &= - \left\{ \frac{\kappa}{\rho} + \frac{i m Z e^2}{p \rho} \right\} \tilde{F}_1(\rho) - \frac{i Z e^2 E}{p \rho} \tilde{F}_2(\rho) \end{aligned} \quad (3)$$

Las soluciones de este sistema para ρ pequeños ($\rho \rightarrow 0$) son

$$\tilde{F}_1(\rho) \sim a_1 \rho^\gamma, \quad \tilde{F}_2(\rho) \sim a_2 \rho^\gamma, \quad \gamma = \pm (\kappa^2 - Z^2 e^4)^{1/2} \quad (4)$$

Como existen las condiciones de contorno

$$r f(r) \rightarrow 0, \quad r g(r) \rightarrow 0 \quad r \rightarrow 0$$

debemos tomar

$$\gamma = (\kappa^2 - Z^2 e^4)^{1/2} \quad (5)$$

Hagamos ahora el cambio

$$G_i(\rho) = \rho^\gamma \tilde{F}_i(\rho) \quad i=1,2 \quad (6)$$

por lo cual

$$\begin{aligned} \frac{d G_1(\rho)}{d \rho} &= \left\{ 1 + \frac{i Z e^2 E}{p \rho} - \frac{\gamma}{\rho} \right\} G_1(\rho) - \left(\frac{\kappa}{\rho} - \frac{i m Z e^2}{p \rho} \right) G_2(\rho) \\ \frac{d G_2(\rho)}{d \rho} &= - \left\{ \frac{\kappa}{\rho} + \frac{i m Z e^2}{p \rho} \right\} G_1(\rho) - \left(\frac{i Z e^2 E}{p \rho} + \frac{\gamma}{\rho} \right) G_2(\rho) \end{aligned} \quad (7)$$

De aquí es fácil deducir que $G_2(p)$ satisface la ecuación

$$p \frac{d^2 G_2(p)}{dp^2} + [2\gamma + 1 - p] \frac{dG_2(p)}{dp} - \left[\gamma + i \frac{Ze^2 E}{p} \right] G_2(p) = 0 \quad (1)$$

La solución de esta ecuación que es finita en el origen es la función hipergeométrica confluyente y por tanto

$$F_2(r) = C (2ipr)^{\gamma} F\left(\gamma + i \frac{Ze^2 E}{p}, 2\gamma + 1; 2ipr\right) \quad (2)$$

donde

$$F(a, b; z) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(b+n)} \frac{z^n}{n!} \quad (3)$$

Además

$$z \frac{d}{dz} F(a, b; z) = a [F(a+1, b; z) - F(a, b; z)] \quad (4)$$

Entonces de (2), (4) y (6''-2) se encuentra que

$$F_1(r) = -C \frac{\gamma + i \frac{Ze^2 E}{p}}{r + i \frac{Ze^2 m}{p}} (2ipr)^{\gamma} F\left(\gamma + 1 + i \frac{Ze^2 E}{p}, 2\gamma + 1; 2ipr\right) \quad (5)$$

Podemos introducir una nueva cantidad η definida por la ecuación

$$e^{+2i\eta} \equiv - \frac{r - i \frac{Ze^2 m}{p}}{\gamma + i \frac{Ze^2 E}{p}} \quad (6)$$

y es fácil comprobar que η es real. Introduciendo una nueva constante de normalización es fácil comprobar que

$$F_1(r) = C e^{i\eta} (\gamma + i\nu) (2pr)^{\gamma} F(\gamma + 1 + i\nu, 2\gamma + 1; 2ipr) \quad (7)$$

$$F_2(p) = C e^{-i\eta} (\gamma - i\nu) (2pr)^{\gamma} F(\gamma + i\nu, 2\gamma + 1; 2ipr)$$

donde

$$\nu \equiv \frac{Ze^2 E}{p} \quad (8)$$

Como además

$$F(a, b; z) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a) \Gamma(b-a)} 2^{b-1} \int_{-1}^{+1} dx (1+x)^{a-1} (1-x)^{b-a-1} e^{\frac{x}{2}(1+x)} \quad (9)$$

entonces si $z^* = z$ y $2\text{Re } a = b-1$ se tiene

$$F(a, b; z) = e^z F^*(a+1, b; z)$$

Com lo qual

$$\begin{aligned} r g(r) &= C \left(1 + \frac{E}{m}\right)^{1/2} (2pr)^Y \cdot \left\{ e^{-i pr + i \eta} (\gamma + i\nu) F(\gamma + 1 + i\nu, 2\gamma + 1; 2ipr) + \right. \\ &\quad \left. + e^{i pr - i \eta} (\gamma - i\nu) F^*(\gamma + 1 + i\nu, 2\gamma + 1; 2ipr) \right\} \\ r f(r) &= i C \left(-1 + \frac{E}{m}\right)^{1/2} (2pr)^Y \cdot \left\{ e^{-i pr + i \eta} (\gamma + i\nu) F(\gamma + 1 + i\nu, 2\gamma + 1; 2ipr) - \right. \\ &\quad \left. - e^{i pr - i \eta} (\gamma - i\nu) F^*(\gamma + 1 + i\nu, 2\gamma + 1; 2ipr) \right\} \end{aligned} \quad (2)$$

Como C puede tomarse real entonces $rg(r)$ y $rf(r)$ son reales. Determinemos ahora el valor de C imponiendo

$$\int d^3x \overline{\Psi}_{JH}^n(\vec{r}; E') \Psi_{JH}^n(\vec{r}; E) = \delta(E - E') \quad (3)$$

o equivalentemente

$$\int_0^\infty dr r^2 [g_{E'}(r) g_E(r) - f_{E'}(r) f_E(r)] = \delta(E - E') \quad (4)$$

Como el integrando no tiende hacia cero para $r \rightarrow \infty$, podemos sustituir g y f por sus expresiones asintóticas. Como

$$F(a, b; z) \sim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} e^z z^{a-b} + e^{-i\pi a} \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)} z^{-a} \quad (5)$$

Como $\text{Re } a = \gamma + 1$ y $b = 2\gamma + 1$, entonces el primer término es el dominante y por tanto

$$F(\gamma + 1 + i\nu, 2\gamma + 1; 2ipr) \sim_{r \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(2\gamma + 1)}{(\gamma + i\nu) \Gamma(\gamma + i\nu) (2pr)^Y} e^{-\frac{\pi}{2}\nu} e^{i[2pr - \frac{\pi}{2}\gamma + \nu \ln 2pr]}$$

y entonces

$$\begin{aligned} r g(r) &\sim_{r \rightarrow \infty} 2C \left(1 + \frac{E}{m}\right)^{1/2} \frac{\Gamma(2\gamma + 1)}{\Gamma(\gamma + i\nu)} e^{-\pi\nu/2} \cos(pr + d') \\ r f(r) &\sim_{r \rightarrow \infty} -2C \left(-1 + \frac{E}{m}\right)^{1/2} \frac{\Gamma(2\gamma + 1)}{\Gamma(\gamma + i\nu)} e^{-\pi\nu/2} \sin(pr + d') \end{aligned} \quad (6)$$

$$d' \equiv \eta - \arg \Gamma(\gamma + i\nu) - \frac{\pi}{2}\gamma + \nu \ln pr$$

Entonces se deduce que

$$C = \frac{e^{\pi\nu/2}}{\sqrt{\pi p}} \frac{\Gamma(\gamma + i\nu)}{2\Gamma(2\gamma + 1)} \sqrt{\frac{E}{2}}$$

Consideremos la situación para un potencial central $V(\rho)$ arbitrario. Para los estados ligados las ecuaciones (4.1) deben ahora escribirse

$$\frac{dF_1(\rho)}{d\rho} = \left[1 + \frac{E}{2\lambda^2} V(\rho) \right] F_1(\rho) - \left[\frac{\kappa}{\rho} - \frac{m}{2\lambda^2} V(\rho) \right] F_2(\rho) \quad (4)$$

$$\frac{dF_2(\rho)}{d\rho} = - \left[\frac{\kappa}{\rho} + \frac{m}{2\lambda^2} V(\rho) \right] F_1(\rho) - \frac{E}{2\lambda^2} V(\rho) F_2(\rho)$$

Derivemos ahora la segunda ecuación respecto a ρ y usemos la primera para eliminar $dF_1(\rho)/d\rho$. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{d^2 F_2(\rho)}{d\rho^2} = & - \frac{E}{2\lambda^2} V(\rho) \frac{dF_2(\rho)}{d\rho} + \left[\frac{\kappa^2}{\rho^2} - \frac{m^2}{4\lambda^4} V^2(\rho) - \frac{E}{2\lambda^2} \frac{dV(\rho)}{d\rho} \right] F_2(\rho) + \\ & + \left\{ \frac{\frac{\kappa}{\rho^2} - \frac{m}{2\lambda^2} \frac{dV(\rho)}{d\rho}}{\frac{\kappa}{\rho} + \frac{m}{2\lambda^2} V(\rho)} - 1 - \frac{E}{2\lambda^2} V(\rho) \right\} \left[\frac{\kappa}{\rho} + \frac{m}{2\lambda^2} V(\rho) \right] F_1(\rho) \end{aligned} \quad (2)$$

Usemos ahora la segunda ecuación de (1) para eliminar $F_1(\rho)$. Se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d^2 F_2(\rho)}{d\rho^2} + \left\{ -1 + \frac{\frac{\kappa}{\rho^2} - \frac{m}{2\lambda^2} \frac{dV(\rho)}{d\rho}}{\frac{\kappa}{\rho} + \frac{m}{2\lambda^2} V(\rho)} \right\} \frac{dF_2(\rho)}{d\rho} \\ + \left\{ -\frac{\kappa^2}{\rho^2} + \frac{1}{4\lambda^2} V^2(\rho) - \frac{E}{2\lambda^2} V(\rho) + \frac{E}{2\lambda^2} \frac{dV(\rho)}{d\rho} + \frac{E}{2\lambda^2} V(\rho) \frac{\frac{\kappa}{\rho^2} - \frac{m}{2\lambda^2} \frac{dV(\rho)}{d\rho}}{\frac{\kappa}{\rho} + \frac{m}{2\lambda^2} V(\rho)} \right\} F_2(\rho) = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

que da el resultado correcto para el potencial coulombiano. Supongamos que

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho V(\rho) = 2\lambda V_0 \quad (4)$$

donde V_0 puede ser nulo. Entonces en la vecindad del origen la ecuación (3) se reduce a

$$\frac{d^2 F_2(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dF_2(\rho)}{d\rho} + \frac{V_0^2 - \kappa^2}{\rho^2} F_2(\rho) = 0$$

y en tanto $F_2(\rho) \propto \rho^\gamma$ donde $\gamma^2 = \kappa^2 - V_0^2$. Separando este comportamiento

$$F_2(\rho) \equiv \rho^\gamma G_2(\rho) \quad \gamma \equiv +(\kappa^2 - V_0^2)^{1/2} \quad (5)$$

se obtiene

$$\rho \frac{d^2 G_2(\rho)}{d\rho^2} + \left\{ 2\gamma - \rho + \rho \frac{\frac{\kappa}{\rho^2} - \frac{m}{2\lambda^2} \frac{dV(\rho)}{d\rho}}{\frac{\kappa}{\rho} + \frac{m}{2\lambda^2} V(\rho)} \right\} \frac{dG_2(\rho)}{d\rho} + \left\{ \frac{\gamma(\gamma-1)}{\rho} - \frac{\kappa^2}{\rho} - \gamma + \frac{1}{4\lambda^2} \rho V^2(\rho) - \frac{E}{2\lambda^2} \rho V(\rho) + \frac{E}{2\lambda^2} \rho \frac{dV(\rho)}{d\rho} + \left[\gamma + \frac{E}{2\lambda^2} \rho V(\rho) \right] \frac{\frac{\kappa}{\rho^2} - \frac{m}{2\lambda^2} \frac{dV(\rho)}{d\rho}}{\frac{\kappa}{\rho} + \frac{m}{2\lambda^2} V(\rho)} \right\} G_2(\rho) = 0 \quad (1)$$

que da el resultado correcto para el potencial coulombiano. Ecuación que no parece ser muy útil, excepto en el caso coulombiano. Fijémonos que es complicada de resolver incluso en el caso $V(\rho) = -V_0 \theta(R-\rho)$ en la que sabemos que la ecuación es resoluble.

Volvamos a (3.4) y hagamos

$$r f(r) \equiv F(r) \quad r g(r) \equiv G(r) \quad (2)$$

con lo cual las ecuaciones a resolver son

$$\left. \begin{aligned} \frac{dG(r)}{dr} + \frac{\kappa}{r} G(r) - [E + m - V(r)] F(r) &= 0 \\ \frac{dF(r)}{dr} - \frac{\kappa}{r} F(r) + [E - m - V(r)] G(r) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Derivando la segunda con respecto a r y usando la primera para eliminar $dG(r)/dr$

$$\frac{d^2 F(r)}{dr^2} - \frac{\kappa}{r} \frac{dF(r)}{dr} + \left\{ \frac{\kappa}{r^2} - m^2 + [E - V(r)]^2 \right\} F(r) + \left\{ -\frac{\kappa}{r} - \frac{\frac{dV(r)}{dr}}{E - m - V(r)} \right\} [E - m - V(r)] G(r) = 0 \quad (4)$$

y usando de nuevo (3)

$$\frac{d^2 F(r)}{dr^2} + \frac{\frac{dV(r)}{dr}}{[E - m - V(r)]} \frac{dF(r)}{dr} + \left\{ \frac{\kappa(1-\kappa)}{r^2} - m^2 + [E - V(r)]^2 - \frac{\kappa}{r} \frac{\frac{dV(r)}{dr}}{[E - m - V(r)]} \right\} F(r) = 0 \quad (5)$$

que puede ser resuelta sin grandes problemas para $V(r) = -V_0 \Theta(R-r)$

Planteemos el problema en general. De una forma compacta las ecuaciones (8.3) se pueden escribir

$$\frac{d F_i(r)}{dr} = M_{ij}(r) F_j(r) \quad i, j = 1, 2 \quad (1)$$

Introducimos

$$X_i(r) = A_{ij}(r) F_j(r) \quad i, j = 1, 2 \quad (2)$$

donde la matriz de elementos $A_{ij}(r)$ debe tener inversa. Sea

$$\Delta(r) \equiv A_{11}(r) A_{22}(r) - A_{12}(r) A_{21}(r) \quad (3)$$

entonces

$$F_1(r) = \frac{1}{\Delta(r)} [A_{22}(r) X_1(r) - A_{12}(r) X_2(r)], \quad F_2(r) = \frac{1}{\Delta(r)} [-A_{21}(r) X_1(r) + A_{11}(r) X_2(r)] \quad (4)$$

Veamos ahora las ecuaciones satisfechas por las X_i . Estas se pueden escribir

$$\frac{d X_i(r)}{dr} = B_{ij}(r) X_j(r) \quad i, j = 1, 2$$

$$B_{11}(r) = \frac{1}{\Delta(r)} \left\{ \left[\frac{d A_{11}(r)}{dr} + A_{11}(r) M_{11}(r) + A_{12}(r) M_{21}(r) \right] A_{22}(r) - \left[\frac{d A_{12}(r)}{dr} + A_{11}(r) M_{12}(r) + A_{12}(r) M_{22}(r) \right] A_{21}(r) \right\}$$

$$B_{12}(r) = \frac{1}{\Delta(r)} \left\{ - \left[\frac{d A_{11}(r)}{dr} + A_{11}(r) M_{11}(r) + A_{12}(r) M_{21}(r) \right] A_{12}(r) + \left[\frac{d A_{12}(r)}{dr} + A_{11}(r) M_{12}(r) + A_{12}(r) M_{22}(r) \right] A_{11}(r) \right\} \quad (5)$$

$$B_{21}(r) = \frac{1}{\Delta(r)} \left\{ \left[\frac{d A_{21}(r)}{dr} + A_{21}(r) M_{11}(r) + A_{22}(r) M_{21}(r) \right] A_{22}(r) - \left[\frac{d A_{22}(r)}{dr} + A_{21}(r) M_{12}(r) + A_{22}(r) M_{22}(r) \right] A_{21}(r) \right\}$$

$$B_{22}(r) = \frac{1}{\Delta(r)} \left\{ - \left[\frac{d A_{21}(r)}{dr} + A_{21}(r) M_{11}(r) + A_{22}(r) M_{21}(r) \right] A_{12}(r) + \left[\frac{d A_{22}(r)}{dr} + A_{21}(r) M_{12}(r) + A_{22}(r) M_{22}(r) \right] A_{11}(r) \right\}$$

Veamos ahora la ecuación para $\bar{X}_1(r)$. Derivando la primera de (3)

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{X}_1(r)}{dr^2} &= \frac{dB_{11}(r)}{dr} \bar{X}_1(r) + B_{11}(r) \frac{d\bar{X}_1(r)}{dr} + \frac{dB_{12}(r)}{dr} \bar{X}_2(r) + B_{12}(r) \frac{d\bar{X}_2(r)}{dr} \\ &= B_{11}(r) \frac{d\bar{X}_1(r)}{dr} + \left[\frac{dB_{11}(r)}{dr} + B_{12}(r) B_{21}(r) \right] \bar{X}_1(r) + \left[\frac{1}{B_{12}(r)} \frac{dB_{12}(r)}{dr} + B_{22}(r) \right] B_{12}(r) \bar{X}_2 \\ &= B_{11}(r) \frac{d\bar{X}_1(r)}{dr} + \left[\frac{dB_{11}(r)}{dr} + B_{12}(r) B_{21}(r) \right] \bar{X}_1(r) + \left[\frac{1}{B_{12}(r)} \frac{dB_{12}(r)}{dr} + B_{22}(r) \right] \left[\frac{d\bar{X}_1(r)}{dr} - B_{11}(r) \bar{X}_1(r) \right] \end{aligned}$$

de donde la ecuación derivada es

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{X}_1(r)}{dr^2} &= \left[B_{11}(r) + B_{22}(r) + \frac{1}{B_{12}(r)} \frac{dB_{12}(r)}{dr} \right] \frac{d\bar{X}_1(r)}{dr} + \\ &+ \left[B_{11}(r) B_{22}(r) - B_{12}(r) B_{21}(r) - \frac{dB_{11}(r)}{dr} + \frac{B_{11}(r)}{B_{12}(r)} \frac{dB_{12}(r)}{dr} \right] \bar{X}_1(r) = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

El problema es: Dado un $V(r)$ ¿se pueden hallar unos $A_{ij}(r)$ tales que (4) sea resoluble analíticamente? Consideremos por ejemplo el caso de un núcleo de radio R cargado uniformemente. Para $r < R$ se tiene

$$V(r) = - \frac{Z\alpha}{2R} \left(1 + \frac{r^2}{R^2} \right) \quad r \leq R \quad (2)$$

En este caso

$$\left. \begin{aligned} M_{11}(r) &= - \frac{x}{r} & M_{12}(r) &= E + m + \frac{Z\alpha}{2R} + \frac{Z\alpha}{2R^3} r^2 \\ M_{21}(r) &= -E + m - \frac{Z\alpha}{2R} - \frac{Z\alpha}{2R^3} r^2 & M_{22}(r) &= \frac{x}{r} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

En muchas ocasiones nos encontraremos en la necesidad de calcular

$$\langle \vec{p}_2, \lambda_2 | \bar{X}^\mu(0) | \vec{p}_1, \lambda_1 \rangle \quad (1)$$

donde $|\vec{p}_1, \lambda_1\rangle$ y $|\vec{p}_2, \lambda_2\rangle$ indican estados de una partícula de spin $1/2$ y de la misma paridad con masas M_1 y M_2 , respectivamente. Por otra parte $\bar{X}^\mu(x)$ indica una corriente que puede ser vectorial $V^\mu(x)$ o axial $A^\mu(x)$. Notemos que

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}_2, \lambda_2 | \bar{X}^\mu(x) | \vec{p}_1, \lambda_1 \rangle &= \langle \vec{p}_2, \lambda_2 | e^{+iP \cdot x} \bar{X}^\mu(0) e^{-iP \cdot x} | \vec{p}_1, \lambda_1 \rangle = \\ &= e^{+i q \cdot x} \langle \vec{p}_2, \lambda_2 | \bar{X}^\mu(0) | \vec{p}_1, \lambda_1 \rangle \quad q^\mu \equiv p_2^\mu - p_1^\mu \end{aligned} \quad (2)$$

Si $\Lambda \in L_+^\uparrow$ entonces $U(\Lambda) \bar{X}^\mu(0) U^{-1}(\Lambda) = \Lambda^\mu_\nu \bar{X}^\nu(0)$ y como (1) debe ser lineal en $u(\vec{p}_1, \lambda_1)$ y antilineal en $\bar{u}(\vec{p}_2, \lambda_2)$ podemos escribir

$$\langle \vec{p}_2, \lambda_2 | \bar{X}^\mu(0) | \vec{p}_1, \lambda_1 \rangle = \bar{u}(\vec{p}_2, \lambda_2) \bar{X}^\mu(p_1, p_2) u(\vec{p}_1, \lambda_1) \quad (3)$$

y por tanto

$$\bar{u}(\vec{p}_2, \lambda_2) S^{-1}(\Lambda) \bar{X}^\mu(\Lambda p_1, \Lambda p_2) S(\Lambda) u(\vec{p}_1, \lambda_1) = \Lambda^\mu_\nu \bar{u}(\vec{p}_2, \lambda_2) \bar{X}^\nu(p_1, p_2) u(\vec{p}_1, \lambda_1)$$

$$\Rightarrow S^{-1}(\Lambda) \bar{X}^\mu(\Lambda p_1, \Lambda p_2) S(\Lambda) = \Lambda^\mu_\nu \bar{X}^\nu(p_1, p_2) \quad (4)$$

Entonces

$$\bar{X}^\mu(p_1, p_2) = a^\mu I + b^\mu_\nu \gamma^\nu + c^\mu_{\nu\rho} \not{p}^{\nu\rho} + d^\mu_\nu \gamma^\nu \gamma_5 + i e^\mu \gamma_5 \quad (5)$$

donde $a^\mu, b^\mu_\nu, \dots, e^\mu$ son funciones de p_1^μ y p_2^μ únicamente. Las expresiones más generales son

$$\begin{aligned} a^\mu &= a_1 p_1^\mu + a_2 p_2^\mu \\ b^\mu_\nu &= b_1 p_1^\mu p_{1\nu} + b_2 p_1^\mu p_{2\nu} + b_3 p_2^\mu p_{1\nu} + b_4 p_2^\mu p_{2\nu} + b_5 g^\mu_\nu + b_6 \epsilon^\mu_{\nu\lambda\rho} p_1^\lambda p_2^\rho \end{aligned} \quad (6)$$

$$c^\mu_{\nu\rho} = c_1 (g^\mu_\nu p_{2\rho} - g^\mu_\rho p_{2\nu}) + c_2 (g^\mu_\nu p_{1\rho} - g^\mu_\rho p_{1\nu}) + c_3 \epsilon^\mu_{\nu\rho\lambda} p_1^\lambda + c_4 \epsilon^\mu_{\nu\rho\lambda} p_2^\lambda$$

y expresiones análogas a a^μ y b^μ_ν para e^μ y d^μ_ν , respectivamente. Tienen los coeficientes son solo funciones de $q^2 \equiv (p_2 - p_1)^2$. Entonces

$$\begin{aligned}
\Sigma^{\mu}(p_1, p_2) = & a_1 p_1^{\mu} + a_2 p_2^{\mu} + b_1 p_1^{\mu} \not{x}_1 + b_2 p_1^{\mu} \not{x}_2 + b_3 p_2^{\mu} \not{x}_1 + b_4 p_2^{\mu} \not{x}_2 + b_5 \gamma^{\mu} \\
& + b_6 \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \gamma^{\nu} p_1^{\lambda} p_2^{\rho} + i c_1 (\gamma^{\mu} \not{x}_1 - \not{x}_1 \gamma^{\mu}) + i c_2 (\gamma^{\mu} \not{x}_2 - \not{x}_2 \gamma^{\mu}) + i c_3 \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \gamma^{\nu} \gamma^{\rho} p_1^{\lambda} \\
& + i c_4 \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \gamma^{\nu} \gamma^{\rho} p_2^{\lambda} + d_1 p_1^{\mu} \gamma_5 + d_2 p_1^{\mu} \not{x}_2 \gamma_5 + d_3 p_2^{\mu} \not{x}_1 \gamma_5 + d_4 p_2^{\mu} \not{x}_2 \gamma_5 \\
& + b_5 \gamma^{\mu} \gamma_5 + b_6 \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \gamma^{\nu} \gamma_5 p_1^{\lambda} p_2^{\rho} + i e_1 p_1^{\mu} \gamma_5 + i e_2 p_2^{\mu} \gamma_5
\end{aligned} \quad (1)$$

Nos interesa el cálculo de (1.3) y debemos tener en cuenta que

$$(\not{x}_1 - M_1) u(\vec{p}_1, \lambda_1) = 0, \quad \bar{u}(\vec{p}_2, \lambda_2) (\not{x}_2 - M_2) = 0 \quad (2)$$

Entonces es inmediato comprobar que (1) es equivalente a

$$\begin{aligned}
\Sigma^{\mu}(p_1, p_2) = & [a_1 + M_1 b_1 + M_2 b_2 - 2i c_1] p_1^{\mu} + [a_2 + M_1 b_3 + M_2 b_4 + 2i c_2] p_2^{\mu} \\
& + [b_5 + 2i M_1 c_1 - 2i M_2 c_2] \gamma^{\mu} + [i e_1 - M_1 d_1 + M_2 d_2] p_1^{\mu} \gamma_5 \\
& + [i e_2 - M_1 d_3 + M_2 d_4] p_2^{\mu} \gamma_5 + b_5 \gamma^{\mu} \gamma_5 + b_6 \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \gamma^{\nu} p_1^{\lambda} p_2^{\rho} \\
& + i c_3 \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \gamma^{\nu} \gamma^{\rho} p_1^{\lambda} + i c_4 \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \gamma^{\nu} \gamma^{\rho} p_2^{\lambda} + b_6 \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \gamma^{\mu} \gamma_5 p_1^{\lambda} p_2^{\rho}
\end{aligned} \quad (3)$$

Además

$$\begin{aligned}
b_6 \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \gamma^{\nu} p_1^{\lambda} p_2^{\rho} &= -b_6 \gamma_5 [\gamma^{\mu} \gamma_{\lambda} \gamma_{\rho} - g_{\lambda}^{\mu} \gamma_{\rho} + g_{\rho}^{\mu} \gamma_{\lambda} - g_{\lambda\rho} \gamma^{\mu}] p_1^{\lambda} p_2^{\rho} \\
&= -b_6 \gamma_5 [\gamma^{\mu} \not{x}_1 \not{x}_2 - \not{x}_1 \not{x}_2 + \not{x}_2 \not{x}_1 - (p_1 \cdot p_2) \gamma^{\mu}] \\
&= i b_6 \{ [(p_1 \cdot p_2) - M_1 M_2] \gamma^{\mu} \gamma_5 + M_2 p_1^{\mu} \gamma_5 + M_1 p_2^{\mu} \gamma_5 \}
\end{aligned} \quad (4)$$

$$d_6 \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \gamma^{\nu} \gamma_5 p_1^{\lambda} p_2^{\rho} = i d_6 \{ [(p_1 \cdot p_2) - M_1 M_2] \gamma^{\mu} - M_2 p_1^{\mu} + M_1 p_2^{\mu} \} \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
i c_3 \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \gamma^{\nu} \gamma^{\rho} p_1^{\lambda} &= c_3 \gamma_5 [\gamma^{\mu} \gamma_{\lambda} - \gamma_{\lambda} \gamma^{\mu}] p_1^{\lambda} = c_3 \gamma_5 [\gamma^{\mu} \not{x}_1 - \not{x}_1 \gamma^{\mu}] = \\
&= 2 c_3 \gamma_5 [\gamma^{\mu} M_1 - p_1^{\mu}] = -2 c_3 [M_1 \gamma^{\mu} \gamma_5 + p_1^{\mu} \gamma_5]
\end{aligned} \quad (6)$$

$$i c_4 \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \gamma^{\nu} \gamma^{\rho} p_2^{\lambda} = -2 c_4 [M_2 \gamma^{\mu} \gamma_5 + p_2^{\mu} \gamma_5] \quad \leftarrow$$

Obtengamos pues

$$\mathcal{L}^\mu(p_1, p_2) = A(q^2) p_1^\mu + B(q^2) p_2^\mu + C(q^2) \gamma^\mu + D(q^2) \gamma^\mu \gamma_5 + E(q^2) p_1^\mu \gamma_5 + F(q^2) p_2^\mu \gamma_5 \quad (1)$$

donde

$$A = a_1 + M_1 b_1 + M_2 b_2 - 2i c_1 - i M_2 d_6$$

$$B = a_2 + M_1 b_3 + M_2 b_4 + 2i c_2 + i M_1 d_6$$

$$C = b_5 + 2i M_1 c_1 - 2i M_2 c_2 + i d_6 [(p_1, p_2) - M_1 M_2]$$

$$D = d_5 + i b_6 [(p_1, p_2) - M_1 M_2] - 2M_1 c_3 - 2M_2 c_4$$

$$E = i e_1 - M_1 d_1 + M_2 d_2 - i M_2 b_6 - 2c_3$$

$$F = i e_2 - M_1 d_3 + M_2 d_4 + i M_1 b_6 - 2c_4$$

$$u(-\vec{p}, -\lambda) = i \gamma^0 u(\vec{p}, \lambda) \quad (2)$$

Consideremos ahora el comportamiento de (1) bajo paridad. Se debe cumplir

$$\bar{u}(\vec{p}_2, \lambda_2) \gamma^0 V^\mu(p_1, p_2) \gamma^0 u(\vec{p}_1, \lambda_1) = (-1)^{1-\delta\mu_0} \bar{u}(\vec{p}_2, \lambda_2) V^\mu(p_1, p_2) u(\vec{p}_1, \lambda_1) \quad (3)$$

$$\bar{u}(\vec{p}_2, \lambda_2) \gamma^0 A^\mu(p_1, p_2) \gamma^0 u(\vec{p}_1, \lambda_1) = (-1)^{\delta\mu_0} \bar{u}(\vec{p}_2, \lambda_2) A^\mu(p_1, p_2) u(\vec{p}_1, \lambda_1)$$

de donde

$$\langle \vec{p}_2, \lambda_2 | V^\mu(0) | \vec{p}_1, \lambda_1 \rangle = \bar{u}(\vec{p}_2, \lambda_2) [A(q^2) p_1^\mu + B(q^2) p_2^\mu + C(q^2) \gamma^\mu] u(\vec{p}_1, \lambda_1) \quad (4)$$

$$\langle \vec{p}_2, \lambda_2 | A^\mu(0) | \vec{p}_1, \lambda_1 \rangle = \bar{u}(\vec{p}_2, \lambda_2) [A'(q^2) p_1^\mu + B'(q^2) p_2^\mu + C'(q^2) \gamma^\mu] \gamma_5 u(\vec{p}_1, \lambda_1)$$

donde $A(q^2)$, ..., $C'(q^2)$ son funciones arbitrarias, y esto es el resultado deseado, es decir que para cada tipo de corriente existen tres factores de forma arbitrarios.

Veamos otra forma útil de escribir las relaciones (4). Se tiene que

$$2p_i^\mu = \gamma^\mu \not{p}_i + \not{p}_i \gamma^\mu$$

Introducimos

$$q^\mu \equiv p_2^\mu - p_1^\mu$$

$$P^\mu \equiv p_2^\mu + p_1^\mu$$

Además

$$2P^\mu = \gamma^\mu \not{P} + \not{P} \gamma^\mu = \gamma^\mu \not{p}_1 + \gamma^\mu \not{p}_2 + \not{p}_1 \gamma^\mu + \not{p}_2 \gamma^\mu \equiv$$

$$= \pm M_1 \gamma^\mu + M_2 \gamma^\mu + \gamma^\mu \not{p}_2 + \not{p}_1 \gamma^\mu = \pm M_1 \gamma^\mu + M_2 \gamma^\mu + \frac{1}{2} \gamma^\mu (\not{P} + \not{q}) + \frac{1}{2} (\not{P} - \not{q}) \gamma^\mu$$

$$= \pm M_1 \gamma^\mu + M_2 \gamma^\mu + p^\mu + \frac{i}{2} (\gamma^\mu \not{q} - \not{q} \gamma^\mu) =$$

$$= \pm M_1 \gamma^\mu + M_2 \gamma^\mu + p^\mu - i \sigma^{\mu\nu} q_\nu$$

de donde

$$p^\mu = (\pm M_1 + M_2) \gamma^\mu - i \sigma^{\mu\nu} q_\nu \quad \pm \frac{V}{A} \quad (1)$$

De donde

$$\langle \bar{p}_2 \lambda_2 | V^\mu(0) | \bar{p}_1 \lambda_1 \rangle = \bar{u}(\bar{p}_2 \lambda_2) \left[g_V(q^2) \gamma^\mu + i \frac{g_M(q^2)}{2M_1} \sigma^{\mu\nu} q_\nu + \frac{g_S(q^2)}{2M_1} q^\mu \right] u(\bar{p}_1 \lambda_1) \quad (2)$$

$$\langle \bar{p}_2 \lambda_2 | A^\mu(0) | \bar{p}_1 \lambda_1 \rangle = \bar{u}(\bar{p}_2 \lambda_2) \left[-g_A(q^2) \gamma^\mu \gamma_5 - \frac{g_P(q^2)}{2M_1} \not{q} \gamma_5 + i \frac{g_T(q^2)}{2M_1} \sigma^{\mu\nu} q_\nu \gamma_5 \right] u(\bar{p}_1 \lambda_1)$$

donde

$$g_V(q^2) = C + \frac{1}{2} (M_1 + M_2) (A + B), \quad g_A(q^2) = -C' + \frac{1}{2} (M_1 - M_2) (A' + B')$$

$$g_M(q^2) = -M_1 (A + B), \quad g_T(q^2) = -M_1 (A' + B') \quad (3)$$

$$g_S(q^2) = -M_1 (A - B), \quad g_P(q^2) = +M_1 (A' - B')$$

Las cantidades $g_V, g_M, g_S, g_A, g_P, g_T$ se denominan, respectivamente, factores de forma vectorial, magnético, escalar, axial, pseudoescalar y tensorial.

Consideremos ahora lo que sucede si suponemos que la inversión temporal es una simetría de la teoría. Se tiene que

$$\langle \bar{p}_2 \lambda_2 | U_T^{-1} \bar{X}^\mu(0) U_T | \bar{p}_1 \lambda_1 \rangle = (-1)^{1+\delta_{\mu 0}} \langle \bar{p}_2 \lambda_2 | \bar{X}^\mu(0) | \bar{p}_1 \lambda_1 \rangle \Rightarrow$$

$$\langle T p_2, \lambda_2 | \bar{X}^\mu(0) | T p_1, \lambda_1 \rangle^* = (-1)^{1+\delta_{\mu 0}} \langle \bar{p}_2 \lambda_2 | \bar{X}^\mu(0) | \bar{p}_1 \lambda_1 \rangle \Rightarrow$$

$$[\bar{u}(T \bar{p}_2, \lambda_2) \bar{X}^\mu(T p_1, T p_2) u(T \bar{p}_1, \lambda_1)]^* = (-1)^{1+\delta_{\mu 0}} \bar{u}(\bar{p}_2 \lambda_2) \bar{X}^\mu(p_1, p_2) u(\bar{p}_1 \lambda_1)$$

Entonces obtenemos

$$\bar{u}^*(T \bar{p}_2, \lambda_2) \left[g_V^*(q^2) \gamma^\mu^* - i \frac{g_M^*(q^2)}{2M_1} \sigma^{\mu\nu} T q_\nu + \frac{g_S^*(q^2)}{2M_1} T q^\mu \right] u^*(T p_1, \lambda_1) =$$

$$= (-1)^{1+\delta_{\mu 0}} \bar{u}(p_2 \lambda_2) \left[g_V(q^2) \gamma^\mu + i \frac{g_M(q^2)}{2M_1} \sigma^{\mu\nu} q_\nu + \frac{g_S(q^2)}{2M_1} q^\mu \right] u(p_1, \lambda_1)$$

Entonces salvo fases

$$u^*(T_p, \lambda) = \bar{u}(p, \lambda) \quad , \quad \bar{u}(T_p, \lambda)^* = \bar{u}(p, \lambda) \gamma^0 \bar{u}^\dagger \gamma^0^* \quad (1)$$

y en tanto salvo una fase global

$$\begin{aligned} \bar{u}(\vec{p}_2, \lambda_2) \bar{u} \left[g_V^*(q^2) \gamma^\mu^* - i \frac{g_M^*(q^2)}{2M_1} \sigma^{\mu\nu} \gamma^\mu^* q_\nu + \frac{g_S^*(q^2)}{2M_1} \gamma^\mu^* \right] u(\vec{p}_1, \lambda_1) = \\ = (-1)^{1+\delta_{\mu 0}} \bar{u}(\vec{p}_2, \lambda_2) \left[g_V(q^2) \gamma^\mu + i \frac{g_M(q^2)}{2M_1} \sigma^{\mu\nu} q_\nu + \frac{g_S(q^2)}{2M_1} \gamma^\mu \right] u(\vec{p}_1, \lambda_1) \end{aligned} \quad (2)$$

y una ecuación análoga para la parte axial. De aquí

$$g_A(q^2) = g_V^*(q^2) \quad (3)$$

es decir, salvo fase global, los factores de forma son reales.

VI-E- MAJORANA FIELDS

De acuerdo con (VI-4.3) la ley de transformación de los spinores bajo las transformaciones de Poincaré propias es

$$x \longrightarrow x' = \Lambda x + a$$

(1)

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x') = S(\Lambda) \psi(x)$$

y por tanto

$$\psi^*(x) \longrightarrow \psi'^*(x') = S^*(\Lambda) \psi^*(x)$$

(2)

Intentemos hallar una representación de las matrices γ^μ tal que $S(\Lambda) = S^*(\Lambda)$. Como $S(\Lambda) = 1 - \frac{i}{4} \sigma^{\mu\nu} \delta\omega_{\mu\nu}$ para una transformación infinitesimal, la condición deseada es que $\sigma^{\mu\nu *} = -\sigma^{\mu\nu}$ y esto es cierto en la representación de Majorana en la que $\gamma^\mu{}^* = -\gamma^\mu$. Entonces es consistente con la covarianza Lorentz identificar $\psi(x)$ y $\psi^*(x) \equiv (\epsilon \bar{\psi}^T(x))$. Los spinores de Majorana son aquellos para los que se hace esta identificación:

$$\psi(x) = \psi^*(x) = [\epsilon \bar{\psi}^T(x)]$$

(3)

Para los spinores de Majorana el desarrollo del campo en operadores creación y aniquilación es $[\psi^*(\vec{p}, \lambda) = i\lambda u(\vec{p}, \lambda)]$

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2E(\vec{p})} \sum_{\lambda} [u(\vec{p}, \lambda) a(\vec{p}, \lambda) e^{-i\vec{p} \cdot x} + u^*(\vec{p}, \lambda) a^\dagger(\vec{p}, \lambda) e^{+i\vec{p} \cdot x}]$$

(4)

donde

$$u(\vec{p}, \lambda) = \left[\frac{E(\vec{p}) + m}{2} \right]^{1/2} \begin{bmatrix} \left[I + \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E(\vec{p}) + m} \right] \alpha(\hat{p}, \lambda) \\ \left[\sigma_2 - \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E(\vec{p}) + m} \right] \alpha(\hat{p}, \lambda) \end{bmatrix}$$

(5)

donde $\alpha(\hat{p}, \lambda)$ viene dado en (VI-11.7) *

Teniendo en cuenta las propiedades dadas en (V.12) es fácil darse cuenta

que

43/001

* De aqui es fácil probar que si $\{a(\vec{p}, \lambda), a^\dagger(\vec{p}', \lambda')\} = (2\pi)^3 2E(p) \delta_{\lambda\lambda'} \delta(\vec{p} - \vec{p}')$

$$\Rightarrow \{\psi_\alpha(x), \psi_\beta(y)\} = i [S(x-y) \gamma^0]_{\alpha\beta}$$

Igualmente $\langle 0 | T(\psi_\alpha(x) \psi_\beta(y)) | 0 \rangle = i [S_F(x-y; m) \gamma^0]_{\alpha\beta}$

Em particular $\delta(x^0 - y^0) \{\psi_\alpha(x), \psi_\beta(y)\} = \delta^4(x-y) \delta_{\alpha\beta}$

$$[\gamma^\mu \epsilon]^T = \gamma^\mu \epsilon, \quad [\sigma^{\mu\nu} \epsilon]^T = \sigma^{\mu\nu} \epsilon$$

(1)

$$[\epsilon]^T = -\epsilon, \quad [\gamma_5 \epsilon]^T = -\gamma_5 \epsilon, \quad [\gamma^\mu \gamma_5 \epsilon]^T = -\gamma^\mu \gamma_5 \epsilon$$

que son todas hermiticas.

Consideremos ahora dos spinores de Majorana que anticommuten $\psi_1(x)$ y $\psi_2(x)$, entonces es inmediato probar que

$$\bar{\psi}_2(x) \psi_1(x) = -\bar{\psi}_1(x) [\epsilon]^T \epsilon \psi_2(x) \quad (2)$$

y usando (1) y teniendo en cuenta que $\epsilon\epsilon = I$ se obtiene

$$\bar{\psi}_2(x) \psi_1(x) = \bar{\psi}_1(x) \psi_2(x), \quad \bar{\psi}_2(x) \gamma^\mu \psi_1(x) = -\bar{\psi}_1(x) \gamma^\mu \psi_2(x)$$

$$\bar{\psi}_2(x) \sigma^{\mu\nu} \psi_1(x) = -\bar{\psi}_1(x) \sigma^{\mu\nu} \psi_2(x), \quad \bar{\psi}_2(x) \sigma^{\mu\nu} \gamma_5 \psi_1(x) = +\bar{\psi}_1(x) \sigma^{\mu\nu} \gamma_5 \psi_2(x) \quad (3)$$

$$\bar{\psi}_2(x) \gamma^\mu \gamma_5 \psi_1(x) = \bar{\psi}_1(x) \gamma^\mu \gamma_5 \psi_2(x), \quad \bar{\psi}_2(x) \gamma_5 \psi_1(x) = \bar{\psi}_1(x) \gamma_5 \psi_2(x)$$

de donde para spinores de Majorana

$$\bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) = 0, \quad \bar{\psi}(x) \sigma^{\mu\nu} \psi(x) = 0 \quad (4)$$

Consideremos ahora las identidades de Fierz (VI-B-2.1) en las que tomamos $\psi_1 = \psi_3 = \psi_4 \equiv \theta$, $\psi_2 = \psi$ entonces teniendo en cuenta (4)

$$[\bar{\theta}\theta][\bar{\theta}\psi] = -\frac{1}{4} \{ [\bar{\theta}\psi][\bar{\theta}\theta] - [\bar{\theta}\gamma^\mu \gamma_5 \psi][\bar{\theta}\gamma_\mu \gamma_5 \theta] + [\bar{\theta}\gamma_5 \psi][\bar{\theta}\gamma_5 \theta] \}$$

$$0 = -\frac{1}{4} \{ 4[\bar{\theta}\psi][\bar{\theta}\theta] - 2[\bar{\theta}\gamma^\mu \gamma_5 \psi][\bar{\theta}\gamma_\mu \gamma_5 \theta] - 4[\bar{\theta}\gamma_5 \psi][\bar{\theta}\gamma_5 \theta] \}$$

$$0 = -\frac{1}{4} \{ 6[\bar{\theta}\psi][\bar{\theta}\theta] + 6[\bar{\theta}\gamma_5 \psi][\bar{\theta}\gamma_5 \theta] \}$$

$$-[\bar{\theta}\gamma^\mu \gamma_5 \theta][\bar{\theta}\gamma_\mu \gamma_5 \psi] = -\frac{1}{4} \{ 4[\bar{\theta}\psi][\bar{\theta}\theta] + 2[\bar{\theta}\gamma^\mu \gamma_5 \psi][\bar{\theta}\gamma_\mu \gamma_5 \theta] - 4[\bar{\theta}\gamma_5 \psi][\bar{\theta}\gamma_5 \theta] \}$$

$$[\bar{\theta}\gamma_5 \theta][\bar{\theta}\gamma_5 \psi] = -\frac{1}{4} \{ [\bar{\theta}\psi][\bar{\theta}\theta] + [\bar{\theta}\gamma^\mu \gamma_5 \psi][\bar{\theta}\gamma_\mu \gamma_5 \theta] + [\bar{\theta}\gamma_5 \psi][\bar{\theta}\gamma_5 \theta] \}$$

de donde los únicos bilineales en θ no nulos son

$$[\bar{\theta} \theta] [\bar{\theta} \psi] = \frac{1}{4} [\bar{\theta} \gamma^\mu \gamma_5 \theta] [\bar{\theta} \gamma_\mu \gamma_5 \psi] = - [\bar{\theta} \gamma_5 \theta] [\bar{\theta} \gamma_5 \psi] \quad (1)$$

Veamos ahora las reglas de conmutación:

$$\begin{aligned} \{\psi_\alpha(x), \psi_\beta(x')\} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2E} \sum_\lambda \left\{ u_\alpha(\vec{p}, \lambda) u_\beta^*(\vec{p}, \lambda) e^{-i p \cdot (x-x')} + u_\beta(\vec{p}, \lambda) u_\alpha^*(\vec{p}, \lambda) e^{+i p \cdot (x-x')} \right\} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2E} \left\{ [(\not{p} + m) \gamma^0]_{\alpha\beta} e^{-i p \cdot (x-x')} + [(\not{p} + m) \gamma^0]_{\beta\alpha} e^{+i p \cdot (x-x')} \right\} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2E} \left\{ [(\not{p} + m) \gamma^0]_{\alpha\beta} e^{-i p \cdot (x-x')} + [(\not{p} - m) \gamma^0]_{\alpha\beta} e^{+i p \cdot (x-x')} \right\} = \\ &= [(i \not{p} + m) \gamma^0]_{\alpha\beta} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2E} [e^{-i p \cdot (x-x')} - e^{+i p \cdot (x-x')}] \end{aligned}$$

de donde

$$\{\psi(x), \psi(x')\} = i S(x-x'; m) \gamma^0 \quad (2)$$

que es el resultado esperado

Notas que la densidad Lagrangiana para este campo es

$$L(x) = \frac{i}{2} \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) - \frac{m}{2} \bar{\psi}(x) \psi(x) \quad (3)$$

donde el $1/2$ es debido a que ahora $\bar{\psi}^T(x) = -\gamma^0 \psi(x)$

También se encuentra

$$\langle 0 | T(\psi_\alpha(x) \psi_\beta(y)) | 0 \rangle = i [S_F(x-y; m) \gamma^0]_{\alpha\beta} \quad (4)$$

43/001

Algunas otras relaciones útiles son

$$(\bar{\theta} \gamma^{\mu} \gamma_5 \theta) (\bar{\theta} \gamma_5 \theta) = 0$$

$$(\bar{\theta} \gamma^{\mu} \gamma_5 \theta) (\bar{\theta} \theta) = 0$$

$$(\bar{\theta} \gamma^{\mu} \gamma_5 \theta) (\bar{\theta} \gamma^{\nu} \gamma_5 \theta) = (\bar{\theta} \theta) (\bar{\theta} \theta) g^{\mu\nu}$$

SupercamposA. SALAM y J. STRATHDEE Nuel. Phys. B76, 477 (1974)A. SALAM y J. STRATHDEE Phys. Rev. D11, 1521 (1975)

Los supercampos se hallan definidos en un espacio de 8 dimensiones cuyos puntos vienen representados por el par (x^μ, θ_α) , donde x^μ representa las coordenadas espacio-tiempo ordinarias y θ_α son las cuatro componentes de un spinor de Majorana. Las variables θ_α difieren radicalmente de las coordenadas usuales en el hecho de que anticommutan.

$$\{\theta_\alpha, \theta_\beta\} = 0 \quad (1)$$

Esto tiene la consecuencia importante de cualquier función $f(\theta)$ debe ser un polinomio. Esto puede entenderse teniendo en cuenta que los monomios $\theta_\alpha, \dots, \theta_{\alpha_m}$ deben ser antisimétricos y por tanto deben anularse si $m > 4$. Es evidente que $f(\theta)$ queda totalmente especificada por 16 elementos: los coeficientes de su desarrollo en potencias de θ :

$$\begin{aligned} \Phi(x, \theta) = & \bar{\phi}(x) + \bar{\phi}^\alpha(x) \theta_\alpha + \frac{1}{2} \bar{\phi}^{[\alpha\beta]}(x) \theta_\alpha \theta_\beta + \frac{1}{6} \bar{\phi}^{[\alpha\beta\gamma]}(x) \theta_\alpha \theta_\beta \theta_\gamma + \\ & + \frac{1}{24} \bar{\phi}^{[\alpha\beta\gamma\delta]}(x) \theta_\alpha \theta_\beta \theta_\gamma \theta_\delta \end{aligned} \quad (2)$$

La acción del grupo de Poincaré sobre el espacio de las x y θ viene dado

$$\begin{aligned} x^\mu & \longrightarrow \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu \\ \theta_\alpha & \longrightarrow S_{\alpha\beta}(\Lambda) \theta_\beta \end{aligned} \quad (3)$$

donde $S(\Lambda)$ indica la representación spinorial de Dirac de la transformación homogénea de Lorentz Λ . Para transformaciones infinitesimales

$$\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \delta\omega^\mu_\nu, \quad S(\Lambda) = I - \frac{i}{4} \sigma^{\mu\nu} \delta\omega_{\mu\nu} \quad (4)$$

Para la transformación de paridad

$$\theta \longrightarrow i\gamma^0 \theta$$

(1)

donde la i es esencial pues de lo contrario no podríamos mantener la identificación $\theta = \theta^*$, típica de los espinores de Majorana.

La acción de una transformación de supergauge en el espacio de las x y θ está definida por

$$x^\mu \longrightarrow x^\mu + \frac{1}{2} i \bar{\epsilon} \gamma^\mu \theta$$

$$\theta_\alpha \longrightarrow \theta_\alpha + \epsilon_\alpha$$

(2)

donde el parámetro ϵ debe, por supuesto, ser un spinor de Majorana cuyos componentes anticommuten. Las propiedades de grupo de las transformaciones (4.3) y (2) se verifican de forma inmediata. Sin embargo, debemos hacer notar el carácter formal de nuestra construcción. Por ejemplo, la transformación espacio-temporal $i\bar{\epsilon}\gamma^\mu\theta/2$ no es un conjunto de cuatro números reales tales como los usualmente x^μ . Estos números son nulos $(\bar{\epsilon}\gamma^\mu\theta)^2 = 0$.

Un supercampo escalar se define como aquel que se transforma como

$$\Phi'(x', \theta') = \Phi(x, \theta)$$

(3)

Como hemos hecho notar antes, cualquier función local de θ debe ser un polinomio. Entonces teniendo en cuenta (2.4) y (3.4) el desarrollo de un supercampo escalar es

$$\Phi(x, \theta) = A(x) + \bar{\theta} \psi(x) + \frac{1}{4} \bar{\theta} \theta F(x) + \frac{i}{4} \bar{\theta} \gamma_5 \theta G(x) +$$

$$+ \frac{1}{4} \bar{\theta} \gamma^\mu \gamma_5 \theta A_\mu(x) + \frac{1}{4} [\bar{\theta} \theta] \bar{\theta} \chi(x) + \frac{1}{32} [\bar{\theta} \theta]^2 D(x)$$

(4)

donde los coeficientes $A(x)$, $F(x)$, $G(x)$, $A_\mu(x)$, $D(x)$ son campos de Bose ordinarios y $\psi(x)$ y $\chi(x)$ son campos de Fermi. El comportamiento de estas componentes bajo la acción del grupo de Poincaré es clara: $A(x)$, $F(x)$ y $D(x)$ son escalares, $G(x)$ es un pseudoescalar, $A_\mu(x)$ es un vector axial y $\psi(x)$ y $\chi(x)$ son espinores de Dirac. En general todas estas componentes son complejas. Sin embargo es posible imponer la condición de realidad en el supercampo

$$\Phi(x, \theta)^* = \Phi(x, \theta) \quad (1)$$

donde la operación $*$ debe entenderse que cambia el orden de todas las factores que anticomutan. Como

$$\begin{aligned} [\bar{\theta} A \psi(x)]^* &= [\theta_\alpha (\gamma^0 A)_{\alpha\beta} \psi_\beta(x)]^* = \psi_\beta^*(x) (\gamma^0 A)_{\alpha\beta}^* \theta_\alpha = \\ &= -\theta_\alpha (\gamma^0 A)_{\alpha\beta}^* \psi_\beta^*(x) = -\bar{\theta} \gamma^0 \gamma^0{}^* A^* \psi^*(x) = \bar{\theta} A^* \psi^*(x) \end{aligned} \quad (2)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \Phi^*(x, \theta) &= A^*(x) + \bar{\theta} \psi^*(x) + \frac{i}{4} \bar{\theta} \theta F^*(x) + \frac{i}{4} \bar{\theta} \gamma_5 \theta G^*(x) + \\ &+ \frac{i}{4} \bar{\theta} \gamma^\mu \gamma_5 \theta A_\mu^*(x) + \frac{i}{4} [\bar{\theta} \theta] \bar{\theta} \chi^*(x) + \frac{1}{32} [\bar{\theta} \theta]^2 D^*(x) \end{aligned} \quad (3)$$

Entonces la comparación de (5.4) y (3) vemos que la condición (1) implica que el supercampo escalar real tiene componentes de Bose que son reales y componentes de Fermi que son spinores de Majorana.

Consideremos ahora el comportamiento de los distintos componentes del supercampo escalar bajo las transformaciones de supergauge infinitesimales (5.2). En efecto

$$\begin{aligned} \delta \Phi(x, \theta) &\equiv \Phi(x', \theta') - \Phi(x, \theta) = \Phi(x^\mu + \frac{i}{2} \bar{\epsilon} \gamma^\mu \theta, \theta_\alpha + \epsilon_\alpha) - \Phi(x, \theta) = \\ &= \bar{\epsilon}_\alpha \frac{\partial \Phi(x, \theta)}{\partial \bar{\theta}_\alpha} + \frac{i}{2} \bar{\epsilon} \gamma^\mu \theta \frac{\partial \Phi(x, \theta)}{\partial x^\mu} \end{aligned} \quad (4)$$

En ocasiones es útil introducir la derivada covariante (ver más adelante)

$$D_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_\alpha} + \frac{i}{2} (\gamma^\mu \theta)_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (5)$$

Sustituyendo en (4) la expresión (5.4) obtenemos

$$\begin{aligned} \delta A(x) + \bar{\theta} \delta \psi(x) + \frac{i}{4} [\bar{\theta} \theta] \delta F(x) + \frac{i}{4} [\bar{\theta} \gamma_5 \theta] \delta G(x) + \frac{i}{4} [\bar{\theta} \gamma^\mu \gamma_5 \theta] \delta A_\mu(x) \\ + \frac{i}{4} [\bar{\theta} \theta] \bar{\theta} \delta \chi(x) + \frac{1}{32} [\bar{\theta} \theta]^2 \delta D(x) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{i}{2} \bar{\epsilon} \gamma^\mu \theta \partial_\mu A(x) + \bar{\epsilon} \psi(x) + \frac{i}{2} [\bar{\epsilon} \gamma^\mu \theta] [\bar{\theta} \partial_\mu \psi(x)] + \frac{1}{2} [\bar{\epsilon} \theta] F(x) \\
&+ \frac{i}{8} [\bar{\epsilon} \gamma^\mu \theta] [\bar{\theta} \theta] \partial_\mu F(x) + \frac{i}{2} [\bar{\epsilon} \gamma_5 \theta] G(x) - \frac{1}{8} [\bar{\epsilon} \gamma^\mu \theta] [\bar{\theta} \gamma_5 \theta] \partial_\mu G(x) \\
&+ \frac{1}{2} [\bar{\epsilon} \gamma^\mu \gamma_5 \theta] A_\mu(x) + \frac{i}{8} [\bar{\epsilon} \gamma^\mu \theta] [\bar{\theta} \gamma^\nu \gamma_5 \theta] \partial_\mu A_\nu(x) + \frac{1}{2} [\bar{\epsilon} \theta] \bar{\theta} \chi(x) \\
&+ \frac{1}{4} [\bar{\theta} \theta] \bar{\epsilon} \chi(x) + \frac{i}{8} [\bar{\epsilon} \gamma^\mu \theta] [\bar{\theta} \theta] [\bar{\theta} \partial_\mu \chi(x)] + \frac{1}{8} [\bar{\epsilon} \theta] [\bar{\theta} \theta] D(x) \quad (4)
\end{aligned}$$

donde hemos tenido en cuenta que el término $\partial_\mu D(x)$ al contener cinco θ debe ser nulo. Usando las propiedades de la representación de Majorana, las identidades de Fierz y (2.4) y (3.1) obtenemos para los distintos términos, en orden creciente de potencias de θ :

i) $\bar{\epsilon} \psi(x)$

ii) $\frac{i}{2} \bar{\epsilon} \gamma^\mu \theta \partial_\mu A(x) = -\frac{i}{2} \bar{\theta} \gamma^\mu \epsilon \partial_\mu A(x)$

iii) $\frac{1}{2} \bar{\epsilon} \theta F(x) = \frac{1}{2} \bar{\theta} \epsilon F(x)$

iv) $\frac{i}{2} \bar{\epsilon} \gamma_5 \theta G(x) = \frac{i}{2} \bar{\theta} \gamma_5 \epsilon G(x)$

v) $\frac{1}{2} \bar{\epsilon} \gamma^\mu \gamma_5 \theta A_\mu(x) = \frac{1}{2} \bar{\theta} \gamma^\mu \gamma_5 \epsilon A_\mu(x)$

vi) $\frac{i}{2} \bar{\epsilon} \gamma^\mu \theta \bar{\theta} \partial_\mu \psi(x) = -\frac{i}{8} \left\{ \bar{\epsilon} \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) \bar{\theta} \theta - \bar{\epsilon} \gamma_5 \gamma_\lambda \gamma_\mu \partial^\lambda \psi(x) \bar{\theta} \gamma^\mu \gamma_5 \theta \right. \\ \left. - \bar{\epsilon} \gamma_5 \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) \bar{\theta} \gamma_5 \theta \right\}$

vii) $\frac{1}{2} \bar{\epsilon} \theta \bar{\theta} \chi(x) = -\frac{1}{8} \left\{ \bar{\epsilon} \chi(x) \bar{\theta} \theta - \bar{\epsilon} \gamma_\mu \gamma_5 \chi(x) \bar{\theta} \gamma^\mu \gamma_5 \theta + \bar{\epsilon} \gamma_5 \chi(x) \bar{\theta} \gamma_5 \theta \right\}$

viii) $\frac{i}{8} \bar{\epsilon} \gamma^\mu \theta \bar{\theta} \theta \partial_\mu F(x) = -\frac{i}{8} \bar{\theta} \gamma^\mu \epsilon \bar{\theta} \theta \partial_\mu F(x)$

ix) $-\frac{1}{8} \bar{\epsilon} \gamma^\mu \theta \bar{\theta} \gamma_5 \theta \partial_\mu G(x) = \frac{1}{8} \bar{\theta} \gamma^\mu \epsilon \bar{\theta} \gamma_5 \theta \partial_\mu G(x) = \frac{1}{8} \bar{\theta} \gamma^\mu \gamma_5 \epsilon \bar{\theta} \theta \partial_\mu G(x)$

x) $\frac{1}{4} \bar{\theta} \theta \bar{\epsilon} \chi(x)$

$$\begin{aligned}
 xii) \quad \frac{i}{8} \bar{\epsilon} \gamma^\mu \theta \bar{\theta} \gamma^\nu \gamma_5 \theta \partial_\mu A_\nu(x) &= - \frac{i}{8} \bar{\theta} \gamma^\mu \epsilon \bar{\theta} \gamma^\nu \gamma_5 \theta \partial_\mu A_\nu(x) = \\
 &= \frac{i}{32} \left\{ \bar{\theta} \theta \bar{\theta} \gamma^\nu \gamma_5 \gamma^\mu \epsilon - \bar{\theta} \gamma^\lambda \gamma_5 \theta \bar{\theta} \gamma^\nu \gamma_5 \gamma_\lambda \gamma_5 \gamma^\mu \epsilon + \bar{\theta} \gamma_5 \theta \bar{\theta} \gamma^\nu \gamma_5 \gamma_5 \gamma^\mu \epsilon \right\} \partial_\mu A_\nu(x) = \\
 &= \frac{i}{32} \left\{ \bar{\theta} \theta \bar{\theta} \gamma^\nu \gamma_5 \gamma^\mu \epsilon \partial_\mu A_\nu(x) + 2 \bar{\theta} \gamma^\mu \epsilon \bar{\theta} \gamma^\nu \gamma_5 \theta \partial_\mu A_\nu(x) + \right. \\
 &\quad \left. + 4 \bar{\theta} \theta \bar{\theta} \gamma^\nu \gamma_5 \gamma^\mu \epsilon \partial_\mu A_\nu(x) + \bar{\theta} \theta \bar{\theta} \gamma^\nu \gamma_5 \gamma^\mu \epsilon \partial_\mu A_\nu(x) \right\} \Rightarrow \\
 \frac{i}{8} \bar{\epsilon} \gamma^\mu \theta \bar{\theta} \gamma^\nu \gamma_5 \theta \partial_\mu A_\nu(x) &= \frac{i}{8} \bar{\theta} \theta \bar{\theta} \gamma^\nu \gamma_5 \gamma^\mu \epsilon \partial_\mu A_\nu(x)
 \end{aligned}$$

$$xi) \quad \frac{1}{8} \bar{\epsilon} \theta \bar{\theta} \theta D(x) = \frac{1}{8} \bar{\theta} \epsilon \bar{\theta} \theta D(x)$$

$$\begin{aligned}
 xccc) \quad \frac{i}{8} \bar{\epsilon} \gamma^\mu \theta \bar{\theta} \theta \partial_\mu \chi(x) &= \frac{i}{8} \bar{\theta} \theta \bar{\epsilon} \gamma^\mu \theta \bar{\theta} \partial_\mu \chi(x) = \\
 &= - \frac{i}{32} \bar{\theta} \theta \left\{ \bar{\epsilon} \gamma^\mu \partial_\mu \chi(x) \bar{\theta} \theta - \bar{\epsilon} \gamma^\mu \gamma^\lambda \gamma_5 \partial_\mu \chi(x) \bar{\theta} \gamma_\lambda \gamma_5 \theta + \bar{\epsilon} \gamma^\mu \gamma_5 \partial_\mu \chi \bar{\theta} \gamma_5 \theta \right\} \\
 &= - \frac{i}{32} (\bar{\theta} \theta)^2 \bar{\epsilon} \gamma^\mu \partial_\mu \chi(x)
 \end{aligned}$$

Prosto que $\bar{\theta} \theta \bar{\theta} \gamma_5 \theta = \bar{\theta} \theta \bar{\theta} \gamma^\mu \gamma_5 \theta \equiv 0$.

Entonces

$$\delta A(x) = \bar{\epsilon} \psi(x)$$

$$\delta \psi(x) = \frac{1}{2} \left\{ F(x) + i \gamma_5 G(x) + \gamma^\mu \gamma_5 A_\mu(x) - i \gamma^\mu \partial_\mu A(x) \right\} \epsilon$$

$$\delta F(x) = \frac{1}{2} \bar{\epsilon} \chi(x) - \frac{i}{2} \bar{\epsilon} \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x)$$

$$\delta G(x) = \frac{i}{2} \bar{\epsilon} \gamma_5 \chi(x) + \frac{1}{2} \bar{\epsilon} \gamma_5 \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) \quad (14)$$

$$\delta A_\mu(x) = \frac{1}{2} \bar{\epsilon} \gamma_\mu \gamma_5 \chi(x) + \frac{i}{2} \bar{\epsilon} \gamma_\lambda \gamma_\mu \gamma_5 \partial^\lambda \psi(x)$$

$$\delta \chi(x) = \frac{1}{2} \left\{ D(x) - i \gamma^\mu \partial_\mu F(x) + \gamma^\mu \gamma_5 \partial_\mu G(x) + i \gamma^\nu \gamma_5 \gamma^\mu \partial_\mu A_\nu(x) \right\} \epsilon$$

$$\delta D(x) = -i \bar{\epsilon} \gamma^\mu \partial_\mu \chi(x)$$

que son las leyes de transformación de los campos bajo la acción de la transformación de supergauge.

Ley de multiplicación de supercampos

Sean $\Phi_1(x, \theta)$ y $\Phi_2(y, \theta)$ dos supercampos escalares y queremos calcular $\Phi_1(x, \theta) \Phi_2(y, \theta)$. Recordemos que

$$\psi^c(x) \equiv \theta \bar{\psi}^T(x) = \psi^*(x), \quad \bar{\psi}^c(x) = \psi^T(x) \gamma^0$$

Para realizar la multiplicación nos son necesarios los siguientes resultados

$$\begin{aligned} (\bar{\theta} \psi_1(x)) (\bar{\theta} \psi_2(x)) &= -\frac{1}{4} (\bar{\theta} \theta) (\bar{\psi}_1^c(x) \psi_2(x)) + \frac{1}{4} (\bar{\theta} \gamma^\mu \gamma_5 \theta) (\bar{\psi}_1^c(x) \gamma_\mu \gamma_5 \psi_2(x)) \\ &\quad - \frac{1}{4} (\bar{\theta} \gamma_5 \theta) (\bar{\psi}_1^c(x) \gamma_5 \psi_2(x)) \end{aligned}$$

$$(\bar{\theta} \psi_1(x)) (\bar{\theta} \gamma_5 \theta) = -(\bar{\theta} \theta) (\bar{\theta} \gamma_5 \psi_1(x))$$

$$(\bar{\theta} \psi_1(x)) (\bar{\theta} \gamma^\mu \gamma_5 \theta) = -(\bar{\theta} \theta) (\bar{\theta} \gamma^\mu \gamma_5 \psi_1(x))$$

$$(\bar{\theta} \theta) (\bar{\theta} \gamma_5 \theta) = 0$$

$$(\bar{\theta} \theta) (\bar{\theta} \gamma^\mu \gamma_5 \theta) = 0$$

$$(\bar{\theta} \gamma_5 \theta) (\bar{\theta} \gamma_5 \theta) = -(\bar{\theta} \theta) (\bar{\theta} \theta)$$

$$(\bar{\theta} \gamma_5 \theta) (\bar{\theta} \gamma^\mu \gamma_5 \theta) = 0$$

$$(\bar{\theta} \gamma^\mu \gamma_5 \theta) (\bar{\theta} \gamma^\nu \gamma_5 \theta) = g^{\mu\nu} (\bar{\theta} \theta) (\bar{\theta} \theta)$$

Entonces

$$\Phi_1(x, \theta) \Phi_2(y, \theta) = A_1(x) A_2(y) + \bar{\theta} [A_1(x) \psi_2(y) + \psi_1(x) A_2(y)]$$

$$+ \frac{1}{4} (\bar{\theta} \theta) [A_1(x) F_2(y) - \bar{\psi}_1^c(x) \psi_2(y) + F_1(x) A_2(y)]$$

$$+ \frac{i}{4} (\bar{\theta} \gamma_5 \theta) [A_1(x) G_2(y) + i \bar{\psi}_1^c(x) \gamma_5 \psi_2(y) + G_1(x) A_2(y)] +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4} (\bar{\theta} \gamma^\mu \gamma_5 \theta) [A_1(x) A_{2\mu}(y) + \bar{\psi}_1^c(x) \gamma_\mu \gamma_5 \psi_2(x) + A_{1\mu}(x) A_2(y)] \\
& + \frac{1}{4} (\bar{\theta} \theta) \bar{\theta} [A_1(x) \chi_2(y) + \psi_1(x) F_2(y) - i \gamma_5 \psi_1(x) G_2(y) - \gamma^\mu \gamma_5 \psi_1(x) A_{2\mu}(y) \\
& \quad + \chi_1(x) A_2(y) + F_1(x) \psi_2(y) - i G_1(x) \gamma_5 \psi_2(y) - A_{1\mu}(x) \gamma^\mu \gamma_5 \psi_2(x)] \\
& + \frac{1}{32} (\bar{\theta} \theta)^2 [A_1(x) D_2(y) + 2 F_1(x) F_2(y) + 2 G_1(x) G_2(y) + 2 A_{1\mu}(x) A_{2\mu}(y) \\
& \quad + D_1(x) A_2(y) - 2 \bar{\psi}_1^c(x) \chi_2(y) - 2 \bar{\chi}_1^c(x) \psi_2(y)] \quad (1)
\end{aligned}$$

que es la fórmula deseada

De la misma forma en que hemos definido un supercampo escalar, añadiendo índices podemos definir un supercampo vectorial $\Phi_\mu(x, \theta)$, un supercampo spinorial $\Phi_\alpha(x, \theta)$, etc. En general las leyes de transformación bajo Poincaré y bajo las transformaciones de supersimetría son

$$(U(a, \Lambda) \Phi)(x, \theta) = D(\Lambda) \Phi(\Lambda^{-1}(x-a), S^{-1}(\Lambda)\theta)$$

$$(U(\epsilon) \Phi)(x, \theta) = \Phi(x + \frac{i}{2} \bar{\theta} \gamma^\mu \epsilon, \theta + \epsilon)$$

(1)

Las primeras son las convencionales salvo que θ debe transformarse de acuerdo con el hecho de que se trata de un spinor de Majorana.

Veamos ahora como introducir los generadores y como calcular las reglas de conmutación de los mismos. Recordemos que para las transformaciones de Poincaré

$$U(a_2, \Lambda_2) U(a_1, \Lambda_1) = U(a_2 + \Lambda_2 a_1, \Lambda_2 \Lambda_1)$$

(2)

y consideremos las transformaciones infinitesimales

$$a_\mu^k \equiv \delta a_\mu^k, \quad \Lambda_\mu^{\nu k} = g_\mu^\nu + \delta \omega_\mu^{\nu k} \quad k=1, 2$$

(3)

para las que

$$U(a, \Lambda) = 1 + i P^\mu \delta a_\mu - \frac{i}{2} M^{\mu\nu} \delta \omega_{\mu\nu}$$

(4)

Por otro lado

$$U(-a_2, \Lambda_2^{-1}) U(-a_1, \Lambda_1^{-1}) U(a_2, \Lambda_2) U(a_1, \Lambda_1) =$$

$$= U(-a_2 - \Lambda_2^{-1} a_1 + \Lambda_2^{-1} \Lambda_1^{-1} a_2 + \Lambda_2^{-1} \Lambda_1^{-1} \Lambda_2 a_1, \Lambda_2^{-1} \Lambda_1^{-1} \Lambda_2 \Lambda_1)$$

(5)

Guardando todos los términos de orden cero, orden uno y los cruzados de orden dos

$$(\Lambda_2^{-1} \Lambda_1^{-1} \Lambda_2 \Lambda_1)^\mu_\nu = g^\mu_\nu - \delta \omega_1^{\mu\rho} \delta \omega_2^\rho_\nu + \delta \omega_2^{\mu\rho} \delta \omega_1^\rho_\nu$$

$$(-a_2 - \Lambda_2^{-1} a_1 + \Lambda_2^{-1} \Lambda_1^{-1} a_2 + \Lambda_2^{-1} \Lambda_1^{-1} \Lambda_2 a_1)^\mu = -\delta \omega_1^{\mu\nu} \delta a_2^\nu + \delta \omega_2^{\mu\nu} \delta a_1^\nu$$

(6)

Indicando en A el primer miembro de (9.5)

$$A \equiv [I - i P^\mu \delta a_{2\mu} + \frac{i}{2} M^{\mu\nu} \delta \omega_{2\mu\nu}] [I - i P^\sigma \delta a_{1\sigma} + \frac{i}{2} M^{\sigma\tau} \delta \omega_{1\sigma\tau}]$$

$$[I + i P^\tau \delta a_{2\tau} - \frac{i}{2} M^{\tau\phi} \delta \omega_{2\tau\phi}] [I + i P^\kappa \delta a_{1\kappa} - \frac{i}{2} M^{\kappa\lambda} \delta \omega_{1\kappa\lambda}] =$$

$$= I + [P^\mu, P^\nu] \delta a_{1\mu} \delta a_{2\nu} + \frac{1}{2} [M^{\nu\sigma}, P^\mu] \delta a_{1\mu} \delta \omega_{2\nu\sigma}$$

$$- \frac{1}{2} [M^{\nu\sigma}, P^\mu] \delta a_{2\mu} \delta \omega_{1\nu\sigma} + \frac{1}{4} [M^{\mu\nu}, M^{\sigma\tau}] \delta \omega_{1\mu\nu} \delta \omega_{2\sigma\tau} \quad (1)$$

Si indicamos en A' el segundo miembro de (9.5)

$$A' \equiv I - i P^\nu \delta a_2^\mu \delta \omega_{1\nu\mu} + i P^\nu \delta a_1^\mu \delta \omega_{2\nu\mu} +$$

$$+ \frac{i}{2} M^{\mu\nu} \delta \omega_{1\mu\sigma} \delta \omega_2^{\sigma\nu} - \frac{i}{2} M^{\mu\nu} \delta \omega_{2\mu\sigma} \delta \omega_1^{\sigma\nu} =$$

$$= I + i P^\nu \delta a_1^\mu \delta \omega_{2\nu\mu} - i P^\nu \delta a_2^\mu \delta \omega_{1\nu\mu} + i M^{\mu\nu} \delta \omega_{1\mu\sigma} \delta \omega_2^{\sigma\nu} \quad (2)$$

Iguando (1) y (2)

$$[P^\mu, P^\nu] = 0$$

$$[M^{\lambda\sigma}, P^\mu] = -i (g^{\lambda\mu} P^\sigma - g^{\sigma\mu} P^\lambda) \quad (3)$$

$$[M^{\lambda\sigma}, M^{\mu\nu}] = -i (g^{\lambda\mu} M^{\sigma\nu} + g^{\sigma\nu} M^{\lambda\mu} - g^{\sigma\mu} M^{\lambda\nu} - g^{\lambda\nu} M^{\sigma\mu})$$

que en las reglas de conmutación de ondas

Para continuar introduciremos la notación $U(a, \Lambda, \epsilon)$ para indicar la transformación más general del grupo considerado. De (5.2) y (4.3) se encuentra

$$x^\mu \xrightarrow{(a, \Lambda, \epsilon)} \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu + \frac{i}{2} \bar{\epsilon} \Lambda^\mu_\nu \gamma^\nu \theta$$

$$\theta \longrightarrow S(\Lambda) [\theta + \epsilon]$$

$$\bar{\theta} \longrightarrow [\bar{\theta} + \bar{\epsilon}] S^{-1}(\Lambda)$$

(4)

Entonces la aplicación sucesiva de dos transformaciones da

$$x^\mu \xrightarrow{(a_1, \Lambda_1, \epsilon_1)} x'^\mu = \Lambda_1^\mu{}_\nu x^\nu + a_1^\mu + \frac{i}{2} \Lambda_1^\mu{}_\nu \bar{\epsilon}_1 \gamma^\nu \theta$$

$$\theta \longrightarrow \theta' = S(\Lambda_1) [\theta + \epsilon_1]$$

$$\bar{\theta} \longrightarrow \bar{\theta}' = [\bar{\theta} + \bar{\epsilon}_1] S^{-1}(\Lambda_1)$$

$$x'^\mu \xrightarrow{(a_2, \Lambda_2, \epsilon_2)} x''^\mu = \Lambda_2^\mu{}_\nu x'^\nu + a_2^\mu + \frac{i}{2} \Lambda_2^\mu{}_\nu \bar{\epsilon}_2 \gamma^\nu \theta'$$

$$\theta' \longrightarrow \theta'' = S(\Lambda_2) [\theta' + \epsilon_2]$$

$$\bar{\theta}' \longrightarrow \bar{\theta}'' = [\bar{\theta}' + \bar{\epsilon}_2] S^{-1}(\Lambda_2)$$

de donde

$$x''^\mu = (\Lambda_2 \Lambda_1)^\mu{}_\nu x^\nu + \Lambda_2^\mu{}_\nu a_1^\nu + \frac{i}{2} (\Lambda_2 \Lambda_1)^\mu{}_\nu \bar{\epsilon}_1 \gamma^\nu \theta + a_2^\mu + \frac{i}{2} \bar{\epsilon}_2 \Lambda_2^\mu{}_\nu \gamma^\nu S(\Lambda_1) (\theta + \epsilon_1)$$

$$\theta'' = S(\Lambda_2) S(\Lambda_1) [\theta + \epsilon_1] + S(\Lambda_2) \epsilon_2$$

y usando (VI-1-4)

$$x''^\mu = (\Lambda_2 \Lambda_1)^\mu{}_\nu x^\nu + \Lambda_2^\mu{}_\nu a_1^\nu + a_2^\mu + \frac{i}{2} (\Lambda_2 \Lambda_1)^\mu{}_\nu \bar{\epsilon}_2 S(\Lambda_1) \gamma^\nu \epsilon_1 + \frac{i}{2} (\Lambda_2 \Lambda_1)^\mu{}_\nu [\bar{\epsilon}_1 + \bar{\epsilon}_2 S(\Lambda_1)] \gamma^\nu \theta \quad (1)$$

$$\theta'' = S(\Lambda_2 \Lambda_1) [\theta + \epsilon_1 + S^{-1}(\Lambda_1) \epsilon_2]$$

de donde los operadores que implementan la transformación deben cumplir (localmente)

$$\begin{aligned} U(a_2^\mu, \Lambda_2, \epsilon_2) U(a_1^\mu, \Lambda_1, \epsilon_1) &= \\ &= U\left((\Lambda_2 a_1 + a_2)^\mu + \frac{i}{2} (\Lambda_2 \Lambda_1)^\mu{}_\nu \bar{\epsilon}_2 S(\Lambda_1) \gamma^\nu \epsilon_1, \Lambda_2 \Lambda_1, \epsilon_1 + S^{-1}(\Lambda_1) \epsilon_2\right) \end{aligned} \quad (2)$$

que es el resultado deseado. En particular

$$U(0, I, \epsilon_2) U(0, I, \epsilon_1) = U\left(+\frac{i}{2} \bar{\epsilon}_2 \gamma^\mu \epsilon_1, I, \epsilon_1 + \epsilon_2\right) \quad (3)$$

Para transformaciones infinitesimales el operador que implementa la transformación general es en lugar de (9.4) el

$$U(a, \Lambda, \epsilon) = 1 + i P^\mu \delta a_\mu - \frac{i}{2} M^{\mu\nu} \delta \omega_{\mu\nu} + i \bar{S} \epsilon \quad (11)$$

donde S_α , el generador de la nueva transformación, se comporta también como un spinor de Majorana y por tanto

$$\bar{S} \cdot \epsilon = \bar{\epsilon} \cdot S \quad (12)$$

Veamos las reglas de conmutación de este generador. Usando (11.2)

$$\begin{aligned} U(0, I, -\delta\epsilon_2) U(0, I, -\delta\epsilon_1) U(0, I, \delta\epsilon_2) U(0, I, \delta\epsilon_1) = \\ = U(i \delta\bar{\epsilon}_2 \gamma^\mu \delta\epsilon_1, I, 0) \end{aligned} \quad (13)$$

lo cual equivale a

$$I - (\bar{S} \delta\epsilon_2) (\bar{S} \delta\epsilon_1) + (\bar{S} \delta\epsilon_1) (\bar{S} \delta\epsilon_2) = I - P^\mu \delta\bar{\epsilon}_2 \gamma_\mu \delta\epsilon_1$$

es decir

$$[(\bar{S} \delta\epsilon_2), (\bar{S} \delta\epsilon_1)] = P^\mu \delta\bar{\epsilon}_2 \gamma_\mu \delta\epsilon_1 \quad (14)$$

de donde

$$\{S_\alpha, S_\beta\} = + (\gamma^\mu \gamma^0)_{\alpha\beta} P_\mu \quad (15)$$

Comidaremos ahora la ley de conmutación de S_α con P^μ . Para ello usamos

$$\begin{aligned} U(-\delta a, I, 0) U(0, I, -\delta\epsilon) U(\delta a, I, 0) U(0, I, \delta\epsilon) = \\ = U(0, I, 0) \end{aligned}$$

de donde

$$(\bar{S} \delta\epsilon) (P^\mu \delta a_\mu) - (P^\mu \delta a_\mu) (\bar{S} \delta\epsilon) = 0$$

es decir

$$[S_\alpha, P^\mu] = 0 \quad (16)$$

Estudiemos finalmente el conmutador de S_α con $M^{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} U(0, I, -\delta\epsilon) U(0, g^{\mu\nu} - \delta\omega^{\mu\nu}, 0) U(0, I, \delta\epsilon) U(0, g^{\mu\nu} + \delta\omega^{\mu\nu}, 0) = \\ = U(0, I, \frac{i}{4} \sigma^{\mu\nu} \delta\omega_{\mu\nu} \delta\epsilon) \end{aligned} \quad (1)$$

de donde

$$\begin{aligned} (\bar{S} \delta\epsilon) M^{\mu\nu} \delta\omega_{\mu\nu} - M^{\mu\nu} \delta\omega_{\mu\nu} (\bar{S} \delta\epsilon) &= -\frac{1}{2} \bar{S} \sigma^{\mu\nu} \delta\omega_{\mu\nu} \delta\epsilon \\ \Rightarrow (\bar{S} \bar{\epsilon} S) M^{\mu\nu} \delta\omega_{\mu\nu} - M^{\mu\nu} \delta\omega_{\mu\nu} (\bar{S} \bar{\epsilon} S) &= \frac{1}{2} \delta\bar{\epsilon} \sigma^{\mu\nu} \delta\omega_{\mu\nu} S \end{aligned}$$

y por tanto

$$[S_\alpha, M^{\mu\nu}] = \frac{1}{2} (\sigma^{\mu\nu} S)_\alpha \quad (2)$$

Resumiendo

$$U(A, \Lambda, \epsilon) = I + i P^\mu \delta a_\mu - \frac{i}{2} M^{\mu\nu} \delta\omega_{\mu\nu} + i \bar{S} \epsilon \quad (3)$$

$$[P^\mu, P^\nu] = 0$$

$$[M^{\lambda\beta}, P^\mu] = -i (g^{\lambda\mu} P^\beta - g^{\beta\mu} P^\lambda)$$

$$[M^{\lambda\beta}, M^{\mu\nu}] = -i (g^{\lambda\mu} M^{\beta\nu} + g^{\beta\nu} M^{\lambda\mu} - g^{\beta\mu} M^{\lambda\nu} - g^{\lambda\nu} M^{\beta\mu})$$

$$\{S_\alpha, S_\beta\} = + (\gamma^\mu \gamma^0)_{\alpha\beta} P_\mu \quad (4)$$

$$[S_\alpha, P^\mu] = 0$$

$$[S_\alpha, M^{\mu\nu}] = \frac{1}{2} (\sigma^{\mu\nu} S)_\alpha$$

A causa del carácter spinorial de S_α esta algebra contiene tanto conmutadores como anticonmutadores y se denomina una "graded Lie algebra". *

43/001

$$* \text{ De } \{S_\alpha, S_\beta\} = (\gamma^\mu \gamma^\nu)_{\alpha\beta} P_\mu \Rightarrow H = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^4 S_\alpha^2 \quad (5)$$

Since H is the sum of squares of hermitian operators, the energy of any state is positive or zero. A state can have zero energy only if it is annihilated by each of the S_α , since in $H|0\rangle = 0$, then $0 = \langle 0|H|0\rangle = \frac{1}{2} \sum \langle 0|S_\alpha^2|0\rangle = \frac{1}{2} \sum \|S_\alpha|0\rangle\|^2$, which is possible only if $S_\alpha|0\rangle = 0$. If, conversely, a state is annihilated by the S_α , then its energy is zero because $S_\alpha|0\rangle$ implies $H|0\rangle = \frac{1}{2} \sum S_\alpha^2|0\rangle = 0$.

If there exists a supersymmetrically invariant state - that is, a state annihilated by the S_α , then it is automatically the true vacuum state, since it has zero energy and any state that is not invariant under supersymmetry has positive energy. Thus, if a supersymmetry state exists, it is the ground state and supersymmetry is not spontaneously broken. Only if there does not exist a state invariant under supersymmetry is supersymmetry spontaneously broken. In this case the ground state energy is positive. So, a necessary and sufficient condition for supersymmetry to be spontaneously broken is

$$\langle 0|H|0\rangle > 0 \quad (6)$$

Indiquemos por $J_\alpha^\mu(x)$ la corriente supersimétrica conservada $\partial_\mu J_\alpha^\mu(x) = 0$ que genera las cargas $Q_\alpha = \int d^3x J_\alpha^0(x)$. Entonces de (4) se deduce inmediatamente para el tensor energía-momento

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4} (\gamma^\mu \gamma^\nu)_{\beta\alpha} \{S_\alpha, J_\beta^\nu(x)\} \quad (7)$$

La densidad de energía del vacío E se define como

$$E \equiv \langle 0|T^{\mu\nu}|0\rangle = \frac{1}{4} (\gamma^\mu \gamma^\nu)_{\beta\alpha} \langle 0|\{S_\alpha, J_\beta^\nu(x)\}|0\rangle \quad (8)$$

y un valor no nulo de esta expresión significa que la supersimetría es rota espontáneamente.

¿Por qué no hay constante cosmológica?

$$\text{Además } \langle 0|\{S_\alpha, J_\beta^\nu(0)\}|0\rangle = \int d^4x \partial_\mu \langle 0|T(J_\alpha^\mu(x), J_\beta^\nu(0))|0\rangle \quad (9)$$

De (8) resulta que el miembro de la derecha es proporcional a E . Si y solo si la supersimetría es espontáneamente rota E es no nula y el miembro de la derecha de (9) debe ser distinto de cero. Siendo la integral de una divergencia total solo puede ser no-nula debido a un término de superficie. Esto es solo posible si $\langle 0|T(J_\alpha^\mu(x), J_\beta^\nu(0))|0\rangle$ es no nulo para $|\vec{x}| \rightarrow 0$ como $1/|\vec{x}|^3$. El término citado intermedio cuya contribución debería caer lentamente hacia un estado de una partícula conteniendo un único fermión de masa nula y spin $1/2$, el cual es el llamado fermión de Goldstone.

Pasemos ahora a considerar la construcción de representaciones irreducibles de esta álgebra [A. SALAM y J. STRATHDEE *Nucl. Phys.* B78, 477 (1974)]. La construcción de las representaciones empieza con la observación que las transformaciones de supergauge deben dejar invariante la variedad de los estados con cuadrimomento fijo ya que S_α y P^μ conmutan. En tal variedad el conmutador $\{S_\alpha, S_\beta\}$ se reduce a un conjunto de números y vemos que los operadores generan un álgebra de Clifford.

Empecemos considerando el caso de masa $M \neq 0$. Entonces podemos ir al sistema de referencia en el que $P^\mu \equiv (M, 0, 0, 0)$. En este caso el álgebra "pequeña" (es decir la formada por aquellos generadores que deja invariante la variedad de estados con cuadrimomento fijo) es generada por los operadores momento angular $\vec{J}$ ($J^1 \equiv M^{23}$, $J^2 \equiv M^{31}$, $J^3 \equiv M^{12}$) y los S_α . Teniendo en cuenta (13.4) $[\sigma^i] = \epsilon_{ijk} \Sigma^k$

$$\{S_\alpha, S_\beta\} = M \delta_{\alpha\beta}, \quad [J^i, S_\alpha] = -\frac{1}{2} (\Sigma^i)_{\alpha\beta} S_\beta \quad (1)$$

Consideremos los operadores ($i=1,2,3$)

$$T^i \equiv J^i + \frac{1}{4M} \bar{S} \gamma^i \gamma_5 S = J^i + \frac{1}{4M} S^T \gamma^0 \gamma^i \gamma_5 S = J^i - \frac{1}{4M} S^T \Sigma^i S \quad (2)$$

Se obtiene

$$\begin{aligned} [J^i, S^T \Sigma^j S] &= (\Sigma^j)_{\alpha\beta} [J^i, S_\alpha S_\beta] = -\frac{1}{2} (\Sigma^j)_{\alpha\beta} \{S_\alpha (\Sigma^i)_{\beta\gamma} S_\gamma + (\Sigma^i)_{\alpha\gamma} S_\gamma S_\beta\} \\ &= -\frac{1}{2} \{S^T \Sigma^j \Sigma^i S + S^T \Sigma^i \Sigma^j S\} = \frac{1}{2} S^T [\Sigma^i, \Sigma^j] S \Rightarrow \end{aligned}$$

$$[J^i, S^T \Sigma^j S] = i \epsilon_{ijk} S^T \Sigma^k S \quad (3)$$

donde hemos usado que

$$\Sigma^{iT} = -\Sigma^i, \quad [\Sigma^i, \Sigma^j] = 2i \epsilon_{ijk} \Sigma^k \quad (4)$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}
[S^T \Sigma^i S, S^T \Sigma^j S] &= (\Sigma^i)_{\alpha\beta} (\Sigma^j)_{\gamma\delta} [S_\alpha S_\beta, S_\gamma S_\delta] = \\
&= (\Sigma^i)_{\alpha\beta} (\Sigma^j)_{\gamma\delta} \{S_\alpha \{S_\beta, S_\gamma\} S_\delta - S_\gamma \{S_\alpha, S_\delta\} S_\beta - \{S_\alpha, S_\gamma\} S_\beta S_\delta + S_\gamma S_\alpha \{S_\beta, S_\delta\}\} \\
&= M \{ S^T \Sigma^i \Sigma^j S - S^T \Sigma^j \Sigma^i S - S^T \Sigma^{i^T} \Sigma^j S + S^T \Sigma^j \Sigma^{i^T} S \} \\
&= 2M \delta^{ij} S^T S \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$[S^T \Sigma^i S, S^T \Sigma^j S] = 4M i \epsilon_{ijk} S^T \Sigma^k S \quad (1)$$

Usando estos resultados se obtiene inmediatamente

$$[T^i, T^j] = i \epsilon_{ijk} T^k \quad (2)$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}
[T^i, S_\alpha] &= [J^i, S_\alpha] - \frac{1}{4M} [S^T \Sigma^i S, S_\alpha] = -\frac{1}{2} (\Sigma^i)_{\alpha\beta} S_\beta - \\
&- \frac{1}{4M} (\Sigma^i)_{\beta\gamma} [S_\beta S_\gamma, S_\alpha] = \\
&= -\frac{1}{2} (\Sigma^i)_{\alpha\beta} S_\beta - \frac{1}{4M} (\Sigma^i)_{\beta\gamma} [S_\beta \{S_\gamma, S_\alpha\} - \{S_\beta, S_\alpha\} S_\gamma] \\
&= -\frac{1}{2} (\Sigma^i)_{\alpha\beta} S_\beta - \frac{1}{4} (\Sigma^i)_{\beta\alpha} S_\beta + \frac{1}{4} (\Sigma^i)_{\alpha\gamma} S_\gamma = 0 \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$[T^i, S_\alpha] = 0 \quad (3)$$

De acuerdo con (2) y (3) vemos que $\vec{T}$ que conmuta con los elementos del álgebra de Clifford satisface las relaciones de conmutación de $SU(2)$, y que se reduce a $\vec{J}$ en las teorías normales. El singlete $\vec{T}^2$ es un operador de Casimir y sus valores propios $T(T+1)$ sirven para caracterizar las representaciones irreducibles.

Introducamos ahora los operadores q_i ($i=1,2$)

$$q_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{2M}} [S_1 - i S_4] \quad q_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{2M}} [S_2 + i S_3] \quad (4)$$

Usando (4.1) es fácil ver que

$$\{q_i, q_j\} = \{q_i^+, q_j^+\} = 0 \quad \{q_i, q_j^+\} = \delta_{ij} \quad (5)$$

que considerados como operadores creación y aniquilación pueden usarse de la forma usual para establecer un espacio de Fock cuadrado-dimensional con métrica positiva. Es fácil ver que si q indicamos

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

entonces

$$\vec{T} = \vec{J} - \frac{1}{2} q^\dagger \vec{\sigma} q \quad (2)$$

donde los $\vec{\sigma}$ son las matrices de Pauli usuales.

Elijamos un conjunto de $2T+1$ vectores $|M; TT_3\rangle$, $-T \leq T_3 \leq T$ para representar los estados de una partícula en reposo de masa M y spin T . Consideremos que estos estados forman el "recio a Clifford", es decir

$$q_i^\dagger |M; TT_3\rangle = 0 \quad (3)$$

Definamos los vectores ortonormales

$$|M; TT_3; m_1 m_2\rangle = q_1^{m_1} q_2^{m_2} |M; TT_3\rangle \quad (4)$$

donde el par (m_1, m_2) puede tomar únicamente los valores $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ y $(1,1)$. como se sigue de (4.5.2). Estos $4(2T+1)$ estados forman una representación irreducible de la algebra pequeña. Evidentemente si solo consideramos el grupo de Poincare esta representación se podrá reducir. En efecto, de (2) se deduce que

$$J^3 = T^3 + \frac{1}{2} [q_1^\dagger q_1 - q_2^\dagger q_2] \quad (5)$$

de donde

$$J^3 |M; TT_3; 00\rangle = T^3 |M; TT_3; 00\rangle$$

$$J^3 |M; TT_3; 10\rangle = (T^3 - 1/2) |M; TT_3; 10\rangle$$

$$J^3 |M; TT_3; 01\rangle = (T^3 + 1/2) |M; TT_3; 01\rangle$$

$$J^3 |M; TT_3; 11\rangle = T^3 |M; TT_3; 11\rangle \quad (6)$$

y por tanto los estados $(0,0)$ y $(1,1)$ corresponden a spin T , mientras que los $(1,0)$ y $(0,1)$ a combinaciones de $(T-1/2)$ y $(T+1/2)$.

Consideremos finalmente la paridad de estos estados. Bajo la operación de paridad $\theta \rightarrow i\gamma^0 \theta$ y esto implica que

$$q_j \rightarrow i q_j \quad j=1,2 \quad (1)$$

Entonces el contenido (spin) paridad del supermultiplete es

$$(T-1/2)^\eta, (T)^\eta, (T)^\eta, (T+1/2)^\eta \quad (2)$$

donde η toma los valores $\pm i$ (para T entero) y ± 1 (para T semi-entero).

Las representaciones mas bajas son

$$\begin{aligned} T=0 \quad \eta=+i &: 0^-, 0^+, 1/2^i \\ \eta=-i &: 0^+, 0^-, 1/2^{-i} \\ T=1/2 \quad \eta=+1 &: 0^+, 1/2^i, 1/2^{-i}, 1^+ \\ \eta=-1 &: 0^-, 1/2^{-i}, 1/2^i, 1^- \\ T=1 \quad \eta=+i &: 1/2^i, 1^-, 1^+, 3/2^i \\ \eta=-i &: 1/2^{-i}, 1^+, 1^-, 3/2^{-i} \end{aligned} \quad (3)$$

Los vectores base de la representación del grupo completo se obtienen, de la forma usual, aplicando boosts a los estados del sistema en reposo (16.4)

Consideremos ahora el caso $H=0$. Entonces podemos ir a un sistema de referencia en el que $P^\mu \equiv E(1, 0, 1, 0)$ y en el que la algebra pequeña son J^2 y los S_α los cuales anticommutan todos entre si excepto

$$\{S_1, S_1\} = \{S_2, S_2\} = 2E \quad (4)$$

Introduciendo

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{1}{\sqrt{2E}} [S_1 - i S_2] \quad , \quad Q_1^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2E}} [S_1 + i S_2] \\ Q_2 &= \frac{1}{\sqrt{2E}} [S_3 - i S_4] \quad , \quad Q_2^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2E}} [S_3 + i S_4] \end{aligned} \quad (5)$$

vemos que todos sus anticommutadores son nulos excepto

$$\{Q_i, Q_i^+\} = 1$$

(1)

Notemos además que

$$[J^2, Q_1] = -\frac{1}{2} Q_1$$

(2)

El vector de Clifford $|\lambda\rangle$ es un estado de helicidad λ bien determinado y

$$Q_i^+ |\lambda\rangle = 0$$

$$i = 1, 2.$$

(1)

Los únicos estados físicos (de norma positiva) son $|\lambda\rangle$ y $Q_1 |\lambda\rangle$, que como consecuencia de (2) tienen helicidad λ y $(\lambda + 1/2)$. Notar que los estados $Q_2 |\lambda\rangle$ y $Q_1 Q_2 |\lambda\rangle$ tienen norma nula. Vemos por tanto que si la paridad es incluida la representación de la pequeña álgebra contiene cuatro estados de helicidad $\pm \lambda$ y $\pm (\lambda + 1/2)$.

Antes de terminar tengamos en cuenta que al actuar S_α sobre estados de dos partículas hay un punto sutil que debe aclararse. Supongamos $S_\alpha = S_\alpha^{(1)} + S_\alpha^{(2)}$ donde

$$\{S_\alpha^{(1)}, S_\beta^{(1)}\} = (\gamma^\mu \gamma^0)_{\alpha\beta} P_\mu^{(1)}, \quad \{S_\alpha^{(2)}, S_\beta^{(2)}\} = (\gamma^\mu \gamma^0)_{\alpha\beta} P_\mu^{(2)}$$

(2)

Entonces para que

$$\{S_\alpha^{(1)} + S_\alpha^{(2)}, S_\beta^{(1)} + S_\beta^{(2)}\} = (\gamma^\mu \gamma^0)_{\alpha\beta} (P_\mu^{(1)} + P_\mu^{(2)})$$

(3)

es esencial que $S_\alpha^{(1)}$ y $S_\beta^{(2)}$ anticomuten.

Multiplet structure in supersymmetric theories (massless particles)

Let us denote by N the number of supersymmetry generators Q^i ($Q^{i\dagger}$). $Q^{i\dagger}$ acts as helicity lowering operators on fixed one-particle states of given momentum and helicity. The structure of a multiplet is

$$\lambda_{\max}, \lambda_{\max} - \frac{1}{2}, \lambda_{\max} - 1, \dots, \lambda_{\max} - \frac{N}{2}$$

and its PCT conjugates, if needed. The multiplicity of states with helicity $\lambda_{\max} - \frac{k}{2}$ is $\binom{N}{k}$. A given multiplet contains therefore 2^N states (bosons and fermions in equal number) and their own antiparticles.

$$|\lambda_{\max}| \geq \frac{N}{4} \quad \left(\frac{N+1}{4} \text{ if } N \text{ is odd} \right)$$

Renormalizable interactions with elementary fields with $\lambda_{\max} \leq 1$ exists only up to $N=4$ supersymmetry generators. If one includes gravity with a highest state with $\lambda_{\max} = 2$ then $N \leq 8$.

$$N=1 \quad \lambda_{\max}, \lambda_{\max} - \frac{1}{2} \quad \lambda_{\max} = \frac{1}{2}, 1$$

$$N=2 \quad \lambda_{\max}, \lambda_{\max} - \frac{1}{2}, \lambda_{\max} - 1 \quad \lambda_{\max} = \frac{1}{2}, 1,$$

$$N=3 \quad \lambda_{\max}, \dots, \lambda_{\max} - \frac{3}{2} \quad \lambda_{\max} = 1$$

$$N=4 \quad \lambda_{\max}, \dots, \lambda_{\max} - 2 \quad \lambda_{\max} = 1$$

Then the massless representations of N -extended supersymmetry with helicities $\lambda_{\max} \leq 1$ are

$\lambda \backslash N$	0	$\frac{1}{2}$	1
1	2	1	1
2	4	2	1
3	3+3	3+1	1
4	6	4	1

The table gives the number of fields. Obviously a field with $\lambda \neq 0$ contains $\pm \lambda$.

En el estudio de las supersimetrías juega un papel importante el operador diferencial

$$D_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_\alpha} - \frac{i}{2} (\gamma^\mu \theta)_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (1)$$

que llamaremos la derivada covariante. Como vamos a ver inmediatamente este operador es covariante en el sentido que se transforma como un spinor de Dirac bajo transformaciones de Lorentz y es un invariante con respecto a las transformaciones de supergauge. En efecto

$$i) \text{ Transformaciones de supergauge (5.2)} \quad x'^\mu = x^\mu + \frac{1}{2} i \bar{\epsilon} \gamma^\mu \theta, \quad \theta' = \theta + \epsilon$$

$$\begin{aligned} D_\alpha &= \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_\alpha} - \frac{i}{2} (\gamma^\mu \theta)_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \\ &= \frac{\partial \bar{\theta}'_\beta}{\partial \bar{\theta}_\alpha} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}'_\beta} + \frac{\partial x'^\mu}{\partial \bar{\theta}_\alpha} \frac{\partial}{\partial x'^\mu} - \frac{i}{2} (\gamma^\mu \theta)_\alpha \frac{\partial \bar{\theta}'_\beta}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}'_\beta} - \frac{i}{2} (\gamma^\mu \theta)_\alpha \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\nu} = \\ &= \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}'_\alpha} - \frac{i}{2} (\gamma^\mu \epsilon)_\alpha \frac{\partial}{\partial x'^\mu} - \frac{i}{2} (\gamma^\mu \theta)_\alpha \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \\ &= \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}'_\alpha} - \frac{i}{2} (\gamma^\mu \theta')_\alpha \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = D'_\alpha \end{aligned} \quad (2)$$

$$ii) \text{ Transformaciones de Poincaré (4.3)} \quad x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu, \quad \theta' = S(\Lambda) \theta$$

$$\begin{aligned} D_\alpha &= S^{-1}(\Lambda)_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}'_\beta} + \frac{i}{2} (\gamma^\mu \theta)_\alpha \Lambda^\nu_\mu \frac{\partial}{\partial x'^\nu} = \\ &= S^{-1}(\Lambda)_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}'_\beta} - \frac{i}{2} (\Lambda^\mu_\nu \gamma^\nu S^{-1}(\Lambda) \theta')_\alpha \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \\ &= S^{-1}(\Lambda)_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}'_\beta} - \frac{i}{2} (S^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu \theta')_\alpha \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = S^{-1}(\Lambda)_{\alpha\beta} D'_\beta \end{aligned} \quad (3)$$

que son los resultados deseados.

La derivada covariante tiene las propiedades normales de un operador diferencial con dos excepciones importantes. En primer lugar, cuando se aplica al producto de dos supercampos

$$D_\alpha (\Phi_1 \Phi_2) = (D_\alpha \Phi_1) \Phi_2 \pm \Phi_1 (D_\alpha \Phi_2) \quad (4)$$

donde el signo $+$ ($-$) se aplica cuando Φ , es un supercampo bosónico (fermiónico), es decir cuando $d\bar{\theta}$ conmuta (anticommuta) con Φ . En segundo lugar, la derivada covariante ni conmuta ni anticommuta la relación de conmutación es

$$\{D_\alpha, D_\beta\} = (\gamma^\mu \gamma^0)_{\alpha\beta} P_\mu, \quad P_\mu \equiv i\partial_\mu \quad (1)$$

En efecto

$$\begin{aligned} \{D_\alpha, D_\beta\} &= \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_\alpha} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_\beta} - \frac{i}{2} \frac{\partial (\gamma^\mu \theta)_\beta}{\partial \bar{\theta}_\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{i}{2} (\gamma^\mu \theta)_\beta \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{i}{2} (\gamma^\mu \theta)_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_\beta} \\ &+ \frac{i}{2} (\gamma^\mu \theta)_\alpha (\gamma^\mu \theta)_\beta \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_\beta} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_\alpha} - \frac{i}{2} \frac{\partial (\gamma^\mu \theta)_\alpha}{\partial \bar{\theta}_\beta} \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{i}{2} (\gamma^\mu \theta)_\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_\beta} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \\ &- \frac{i}{2} (\gamma^\mu \theta)_\beta \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_\alpha} - \frac{i}{2} (\gamma^\mu \theta)_\beta (\gamma^\mu \theta)_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \\ &= -\frac{i}{2} \left\{ \frac{\partial (\gamma^\mu \theta)_\beta}{\partial \bar{\theta}_\alpha} + \frac{\partial (\gamma^\mu \theta)_\alpha}{\partial \bar{\theta}_\beta} \right\} \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{i}{2} \left\{ \frac{\partial (\gamma^\mu \gamma^0 \bar{\theta})_\beta}{\partial \bar{\theta}_\alpha} + \frac{\partial (\gamma^\mu \gamma^0 \bar{\theta})_\alpha}{\partial \bar{\theta}_\beta} \right\} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \\ &= \frac{i}{2} \left\{ (\gamma^\mu \gamma^0)_{\beta\alpha} + (\gamma^\mu \gamma^0)_{\alpha\beta} \right\} \frac{\partial}{\partial x^\mu} = i (\gamma^\mu \gamma^0)_{\beta\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \end{aligned}$$

donde hemos tenido en cuenta que $(\gamma^\mu \gamma^0)_{\beta\alpha} = (\gamma^{0T} \gamma^{\mu T})_{\alpha\beta} = (\gamma^\mu \gamma^0)_{\alpha\beta}$

En realidad D_α no es más que un spinor de Majorana y de la misma forma que a partir de θ introducimos $\bar{\theta} = \theta^T \gamma^0$, es decir $\bar{\theta}_\alpha = -(\gamma^0)_{\alpha\beta} \theta_\beta$ definimos también

$$\bar{D}_\beta \equiv -(\gamma^0)_{\alpha\beta} D_\alpha \quad (2)$$

Es fácil comprobar que

$$D_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_\alpha} - \frac{1}{2} (\not{x} \theta)_\alpha, \quad \bar{D}_\alpha \equiv -\frac{\partial}{\partial \theta_\alpha} + \frac{1}{2} (\bar{\theta} \not{x})_\alpha$$

$$\{D_\alpha, D_\beta\} = (\not{x} \gamma^0)_{\alpha\beta}, \quad \{\bar{D}_\alpha, \bar{D}_\beta\} = -(\gamma^0 \not{x})_{\alpha\beta} \quad (3)$$

$$\{D_\alpha, \bar{D}_\beta\} = (\not{x})_{\alpha\beta}$$

Evidentemente los D_α generan una algebra de Clifford que es isomorfa a la

generado por S_α (12.5)

Teniendo en cuenta las relaciones anteriores es evidente que sólo se pueden constituir 16 operadores independientes a partir de la producción de las D_α . Usaremos el conjunto

$$I, D_\alpha, \bar{D}D, i\bar{D}\gamma_5 D, \bar{D}\gamma^\mu\gamma_5 D, (\bar{D}D)D_\alpha, (\bar{D}D)^2 \quad (1)$$

Un producto de cualquier número de D puede reducirse a una combinación lineal de estos.

Vamos a dar algunas formas útiles para llevar a cabo tal reducción. Teniendo en cuenta lo anterior y las propiedades de las matrices γ en la representación de Majorana se obtiene

$$\begin{aligned} D_\alpha D_\beta &= \frac{1}{2} (\not{X}\gamma^0)_{\alpha\beta} - \frac{1}{4} (\gamma^0)_{\alpha\beta} (\bar{D}D) + \frac{1}{4} (i\gamma_5\gamma^0)_{\alpha\beta} (i\bar{D}\gamma_5 D) \\ &\quad + \frac{1}{4} (\gamma_\mu\gamma_5\gamma^0)_{\alpha\beta} (\bar{D}\gamma^\mu\gamma_5 D) \end{aligned} \quad (2)$$

Usando (20.2)

$$\begin{aligned} \bar{D}_\alpha D_\beta &= \frac{1}{2} (\not{X})_{\beta\alpha} + \frac{1}{4} (I)_{\beta\alpha} (\bar{D}D) + \frac{1}{4} (i\gamma_5)_{\beta\alpha} (i\bar{D}\gamma_5 D) \\ &\quad - \frac{1}{4} (\gamma_\mu\gamma_5)_{\beta\alpha} (\bar{D}\gamma^\mu\gamma_5 D) \end{aligned} \quad (3)$$

Continuando con $(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}$ y con $(\sigma^{\mu\nu})_{\alpha\beta}$

$$\bar{D}\gamma^\mu D = 2P^\mu, \quad \bar{D}\sigma^{\mu\nu} D = 0 \quad (4)$$

Productos de tres D están comprendidos en las fórmulas siguientes

$$D_\alpha (\bar{D}D) = (\bar{D}D) D_\alpha + (2\not{X}D)_\alpha \quad (5)$$

$$D_\alpha [i\bar{D}\gamma_5 D] = -(\bar{D}D) (i\gamma_5 D)_\alpha + (2i\not{X}\gamma_5 D)_\alpha \quad (6)$$

$$D_\alpha (\bar{D} \gamma^\mu \gamma_5 D) = - (\bar{D} D) (\gamma^\mu \gamma_5 D)_\alpha + 2 P^\mu (\gamma_5 D)_\alpha \quad (1)$$

$$(\bar{D} i \gamma_5 D) D_\alpha = - (\bar{D} D) (i \gamma_5 D)_\alpha \quad (2)$$

$$(\bar{D} \gamma^\mu \gamma_5 D) D_\alpha = - (\bar{D} D) (\gamma^\mu \gamma_5 D)_\alpha + (2 P_\lambda \sigma^{\lambda\mu} i \gamma_5 D)_\alpha \quad (3)$$

Demostremos por ejemplo (2.5) : De (10.3)

$$D_\alpha \bar{D}_\beta + \bar{D}_\beta D_\alpha = (\not{E})_{\alpha\beta} \Rightarrow D_\alpha (\bar{D} D) + \bar{D}_\beta D_\alpha D_\beta = (\not{E} D)_\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D_\alpha (\bar{D} D) + \bar{D}_\beta [(\not{E} \gamma^0)_{\alpha\beta} - D_\beta D_\alpha] = (\not{E} D)_\alpha \Rightarrow D_\alpha (\bar{D} D) - (\bar{D} D) D_\alpha = (\not{E} D)_\alpha + \bar{D}_\beta (\not{E} \gamma^0)_{\alpha\beta}$$

y como $-\bar{D}_\beta (\not{E} \gamma^0)_{\alpha\beta} = + (\gamma^0)_{\beta\lambda} D_\lambda (\not{E} \gamma^0)_{\alpha\beta} = + (\not{E} D)_\alpha$ la fórmula queda demostrada.

Las producciones de 4 D pueden algunas veces reducirse con la ayuda de las fórmulas (2.5) (2.6) y (1), (2) y (3). Ejemplo

$$\begin{aligned} (i \bar{D} \gamma_5 D)^2 &= - (\bar{D} \gamma_5 D) (\bar{D} \gamma_5 D) = - (\bar{D} \gamma_5 D) D_\alpha (\gamma^0 \gamma_5 D)_\alpha = + (\bar{D} D) (\gamma_5 D)_\alpha (\gamma^0 \gamma_5 D)_\alpha \\ &= (\bar{D} D) D_\alpha (\gamma^0 D)_\alpha = (\bar{D} D) (\bar{D} D) \end{aligned}$$

Cualquier combinación de cuatro D puede reducirse mediante la ayuda de (2.2) y de la tabla siguiente

$$(\bar{D} D) (i \bar{D} \gamma_5 D) = + 2 i P_\mu (\bar{D} \gamma^\mu \gamma_5 D)$$

$$(\bar{D} D) (\bar{D} \gamma^\mu \gamma_5 D) = - 2 i P^\mu (i \bar{D} \gamma_5 D)$$

$$(\bar{D} D) (i \bar{D} \gamma_5 D) = - 2 i P_\mu (\bar{D} \gamma^\mu \gamma_5 D)$$

$$(i \bar{D} \gamma_5 D) (i \bar{D} \gamma_5 D) = (\bar{D} D) (\bar{D} D)$$

$$(i \bar{D} \gamma_5 D) (\bar{D} \gamma^\mu \gamma_5 D) = 2 i P^\mu (\bar{D} D)$$

$$(\bar{D} \gamma^\mu \gamma_5 D) (\bar{D} D) = 2 i P^\mu (i \bar{D} \gamma_5 D)$$

$$(\bar{D} \gamma^\mu \gamma_5 D) (i \bar{D} \gamma_5 D) = - 2 i P^\mu (\bar{D} D)$$

$$(\bar{D} \gamma^\mu \gamma_5 D) (\bar{D} \gamma^\nu \gamma_5 D) = g^{\mu\nu} (\bar{D} D) (\bar{D} D) - 2 i P_\lambda \epsilon^{\lambda\mu\nu\delta} (\bar{D} \gamma_\delta \gamma_5 D) - 4 (g^{\mu\nu} P^2 - P^\mu P^\nu)$$

Los productos de uno o más D se reducen mediante la ayuda de los resultados anteriores y de la fórmula fundamental

$$(\bar{D} D) (\bar{D} D) D_\alpha = - (\bar{D} D) (2 \not{D})_\alpha \quad (1)$$

Son importantes las identidades

$$[(I \pm \gamma_5) D]_\alpha [\bar{D} (I \pm \gamma_5)] = 0 \quad (2)$$

Procedamos a calcular las derivadas covariantes del supercampo escalar $\Phi(x, \theta)$

$$D_\alpha A(x) = - \frac{i}{2} (\gamma^\mu \theta)_\alpha \partial_\mu A(x)$$

$$\begin{aligned} D_\alpha \bar{\theta} \psi(x) &= \psi_\alpha(x) - \frac{i}{2} (\gamma^\mu \theta)_\alpha \bar{\theta} \partial_\mu \psi(x) = \psi_\alpha(x) + \frac{i}{8} [\bar{\theta} \theta] [\gamma^\mu \partial_\mu \psi(x)]_\alpha \\ &+ \frac{i}{8} [\bar{\theta} \not{\epsilon} \gamma^\nu \gamma_5 \theta] [\not{\epsilon} \gamma^\mu \gamma_\nu \gamma_5 \partial_\mu \psi(x)]_\alpha + \frac{i}{8} [\bar{\theta} \gamma_5 \theta] [\gamma^\mu \gamma_5 \partial_\mu \psi(x)]_\alpha \end{aligned}$$

$$D_\alpha \frac{i}{4} \bar{\theta} \theta F(x) = \frac{1}{2} \theta_\alpha F(x) - \frac{i}{8} (\bar{\theta} \theta) (\gamma^\mu \theta)_\alpha \partial_\mu F(x)$$

$$\begin{aligned} D_\alpha \frac{i}{4} \bar{\theta} \gamma_5 \theta G(x) &= + \frac{i}{2} (\gamma_5 \theta)_\alpha G(x) + \frac{1}{8} (\bar{\theta} \gamma_5 \theta) (\gamma^\mu \theta)_\alpha \partial_\mu G(x) \\ &= \frac{i}{2} (\gamma_5 \theta)_\alpha G(x) - \frac{1}{8} (\bar{\theta} \theta) (\gamma^\mu \gamma_5 \theta)_\alpha \partial_\mu G(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_\alpha \frac{1}{4} \bar{\theta} \gamma^\mu \gamma_5 \theta A_\mu(x) &= \frac{1}{2} (\gamma^\mu \gamma_5 \theta)_\alpha A_\mu(x) - \frac{i}{8} (\gamma^\nu \theta)_\alpha (\bar{\theta} \gamma^\mu \gamma_5 \theta) \partial_\nu A_\mu(x) \\ &= \frac{1}{2} (\gamma^\mu \gamma_5 \theta)_\alpha A_\mu(x) + \frac{i}{8} (\bar{\theta} \theta) (\gamma^\nu \gamma^\mu \gamma_5 \theta)_\alpha \partial_\nu A_\mu(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_\alpha \frac{1}{4} (\bar{\theta} \theta) \bar{\theta} \chi &= + \frac{1}{4} (\bar{\theta} \theta) \chi_\alpha + \frac{1}{2} \theta_\alpha (\bar{\theta} \chi) - \frac{i}{8} (\bar{\theta} \theta) (\gamma^\mu \theta)_\alpha \bar{\theta} \partial_\mu \chi(x) \\ &= \frac{1}{8} (\bar{\theta} \theta) \chi_\alpha(x) - \frac{1}{8} (\bar{\theta} \not{\epsilon} \gamma^\mu \gamma_5 \theta) (\not{\epsilon} \gamma_\mu \gamma_5 \chi(x))_\alpha - \frac{1}{8} (\bar{\theta} \gamma_5 \theta) (\gamma_5 \chi(x))_\alpha + \frac{i}{32} (\bar{\theta} \theta)^2 \gamma^\mu \partial_\mu \chi(x) \end{aligned}$$

$$D_\alpha \frac{1}{32} [\bar{\theta} \theta]^2 D(x) = + \frac{1}{8} (\bar{\theta} \theta) \theta_\alpha D(x)$$

de donde

$$\begin{aligned}
 D_\alpha \bar{\Phi}(x, \theta) = & \psi_\alpha(x) + \frac{1}{2} \left[-i (\gamma^\mu \theta)_\alpha \partial_\mu A(x) + \theta_\alpha F(x) + i (\gamma_5 \theta)_\alpha G(x) \right. \\
 & + (\gamma^\mu \gamma_5 \theta)_\alpha A_\mu(x) \left. \right] + \frac{1}{4} (\bar{\theta} \theta) \left[\frac{i}{2} (\gamma^\mu \partial_\mu \psi(x))_\alpha + \frac{1}{2} \chi_\alpha(x) \right] + \\
 & + \frac{i}{4} (\bar{\theta} \gamma_5 \theta) \left[\frac{1}{2} (\gamma^\mu \gamma_5 \partial_\mu \psi(x))_\alpha + \frac{i}{2} (\gamma_5 \chi(x))_\alpha \right] \\
 & + \frac{1}{4} (\bar{\theta} \gamma^\mu \gamma_5 \theta) \left[-\frac{i}{2} (\gamma^\mu \gamma_\nu \gamma_5 \partial_\mu \psi(x))_\alpha + \frac{1}{2} (\gamma_\nu \gamma_5 \chi(x))_\alpha \right] + \\
 & + \frac{1}{4} (\bar{\theta} \theta) \left[-\frac{i}{2} (\gamma^\mu \theta)_\alpha \partial_\mu F(x) - \frac{1}{2} (\gamma^\mu \gamma_5 \theta)_\alpha \partial_\mu G(x) + \frac{i}{2} (\gamma^\nu \gamma^\mu \gamma_5 \theta)_\alpha \partial_\nu A_\mu(x) \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} \theta_\alpha D(x) \right] + \frac{1}{32} (\bar{\theta} \theta)^2 i (\gamma^\mu \partial_\mu \chi(x))_\alpha
 \end{aligned} \tag{1}$$

De forma análoga vamos a calcular el efecto de $-\frac{1}{2} \bar{D}(1+\gamma_5)D$ sobre $\bar{\Phi}(x, \theta)$. Se tiene

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2} \bar{D}(1+\gamma_5)D A(x) &= \frac{i}{4} \bar{D}_\beta (1+\gamma_5)_{\beta\alpha} \gamma_{\alpha\lambda}^\mu \theta_\lambda \partial_\mu A(x) = \frac{i}{4} \frac{i}{2} [\bar{\theta} \gamma^\nu (1+\gamma_5) \gamma^\mu \theta] \partial_\nu \partial_\mu A(x) \\
 &= -\frac{1}{8} [\bar{\theta} (1-\gamma_5) \theta] \partial^\mu \partial_\mu A(x) \\
 -\frac{1}{2} \bar{D}(1+\gamma_5)D \bar{\theta} \psi(x) &= -\frac{1}{2} \bar{D}_\beta (1+\gamma_5)_{\beta\alpha} \psi_\alpha(x) + \frac{i}{4} \bar{D}_\beta (1+\gamma_5)_{\beta\alpha} (\gamma^\mu \theta)_\alpha \theta_\beta \gamma_\beta^\sigma \partial_\mu \psi_\sigma(x) \\
 &= -\frac{i}{4} \bar{\theta} \gamma^\mu (1+\gamma_5) \partial_\mu \psi(x) - \frac{i}{4} \bar{\theta} (1-\gamma_5) \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) - \frac{1}{8} (\bar{\theta} \gamma^\nu (1+\gamma_5) \gamma^\mu \theta) (\bar{\theta} \partial_\nu \partial_\mu \psi(x)) = \\
 &= -\frac{i}{2} \bar{\theta} (1-\gamma_5) \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) - \frac{1}{8} (\bar{\theta} (1-\gamma_5) \theta) (\bar{\theta} \partial^\mu \partial_\mu \psi(x)) = \\
 &= -\frac{i}{2} \bar{\theta} (1-\gamma_5) \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) - \frac{1}{8} (\bar{\theta} \theta) \bar{\theta} (1+\gamma_5) \partial^\mu \partial_\mu \psi(x) \\
 -\frac{1}{2} \bar{D}(1+\gamma_5)D \frac{1}{4} \bar{\theta} \theta F(x) &= -\frac{1}{2} \bar{D}_\beta (1+\gamma_5)_{\beta\alpha} \theta_\alpha F(x) + \frac{i}{16} \bar{D}_\beta (1+\gamma_5)_{\beta\alpha} (\gamma^\mu)_{\alpha\lambda} \theta_\lambda \theta_\beta \gamma_\beta^\sigma \partial_\mu F(x) = \\
 &= F(x) - \frac{i}{8} (\bar{\theta} \gamma^\mu (1+\gamma_5) \theta) \partial_\mu F(x) - \frac{i}{8} (\bar{\theta} \gamma^\mu (1+\gamma_5) \theta) \partial_\mu F(x) - \\
 &= -\frac{1}{32} \bar{\theta} \gamma^\nu (1+\gamma_5) \gamma^\mu \theta \bar{\theta} \theta \partial_\mu \partial_\nu F(x) = \\
 &= F(x) - \frac{i}{4} (\bar{\theta} \gamma^\mu \gamma_5 \theta) \partial_\mu F(x) - \frac{1}{32} (\bar{\theta} \theta)^2 \partial^\mu \partial_\mu F(x)
 \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2} \bar{D} (1+\gamma_5) D \frac{i}{4} \bar{\theta} \gamma_5 \theta G(x) = i G(x) + \frac{1}{8} \bar{\theta} \gamma^\mu (1+\gamma_5) \theta \partial_\mu G(x) + \frac{1}{8} \bar{\theta} \gamma^\mu (1+\gamma_5) \theta \partial_\mu G(x)$$

$$-\frac{i}{32} \bar{\theta} \gamma^\nu (1+\gamma_5) \gamma^\mu \theta \bar{\theta} \gamma_5 \theta \partial_\nu \partial_\mu G(x) = i G(x) + \frac{1}{4} \bar{\theta} \gamma^\mu \gamma_5 \theta \partial_\mu G(x) -$$

$$-\frac{i}{32} \bar{\theta} (1-\gamma_5) \theta \bar{\theta} \gamma_5 \theta \partial^\mu \partial_\mu G(x) = i G(x) + \frac{1}{4} \bar{\theta} \gamma^\mu \gamma_5 \theta \partial_\mu G(x)$$

$$-\frac{i}{32} (\bar{\theta} \theta)^2 \partial_\mu \partial^\mu G(x)$$

$$-\frac{1}{2} \bar{D} (1+\gamma_5) D \frac{1}{4} \bar{\theta} \gamma^\mu \gamma_5 \theta A_\mu(x) = -\frac{i}{8} (\bar{\theta} \gamma^\nu (1+\gamma_5) \gamma^\mu \gamma_5 \theta) \partial_\nu A_\mu(x)$$

$$-\frac{i}{8} \bar{\theta} (1+\gamma_5) \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma_5 \theta \partial_\nu A_\mu(x) + \frac{i}{4} (\bar{\theta} \theta) \partial^\mu A_\mu(x) +$$

$$+\frac{1}{32} (\bar{\theta} \theta) (\bar{\theta} \gamma^\rho (1+\gamma_5) \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma_5 \theta) \partial_\rho \partial_\nu A_\mu(x) = -\frac{i}{4} \bar{\theta} \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma_5 \theta \partial_\nu A_\mu(x)$$

$$+\frac{i}{4} (\bar{\theta} \theta) \partial^\mu A_\mu(x) + \frac{1}{32} (\bar{\theta} \theta) (\bar{\theta} \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\mu (1+\gamma_5) \theta) \partial_\rho \partial_\nu A_\mu(x)$$

$$= \frac{i}{4} \bar{\theta} (1-\gamma_5) \theta \partial^\mu A_\mu(x) + \frac{1}{32} (\bar{\theta} \theta) \bar{\theta} \gamma^\mu (1+\gamma_5) \theta \partial^\nu \partial_\nu A_\mu(x) =$$

$$= \frac{i}{4} \bar{\theta} (1-\gamma_5) \theta \partial^\mu A_\mu(x)$$

$$-\frac{1}{2} \bar{D} (1+\gamma_5) D \frac{1}{4} (\bar{\theta} \theta) \bar{\theta} \chi(x) = -\frac{1}{4} \bar{\theta} (1+\gamma_5) \chi(x) - \frac{i}{16} (\bar{\theta} \theta) (\bar{\theta} \gamma^\mu (1+\gamma_5) \theta) \partial_\mu \chi(x) + (\bar{\theta} \chi)$$

$$-\frac{1}{4} \bar{\theta} (1+\gamma_5) \chi - \frac{i}{8} (\bar{\theta} \gamma^\mu (1+\gamma_5) \theta) (\bar{\theta} \partial_\mu \chi(x)) + \frac{i}{8} (\bar{\theta} \gamma^\mu (1-\gamma_5) \theta) (\bar{\theta} \partial_\mu \chi)$$

$$-\frac{i}{16} (\bar{\theta} \theta) (\bar{\theta} \gamma^\mu (1+\gamma_5) \theta) \partial_\mu \chi(x) - \frac{1}{32} (\bar{\theta} \gamma^\nu (1+\gamma_5) \gamma^\mu \theta) (\bar{\theta} \theta) (\bar{\theta} \partial_\mu \partial_\nu \chi(x)) =$$

$$= \frac{1}{2} \bar{\theta} (1-\gamma_5) \chi(x) - \frac{i}{4} (\bar{\theta} \gamma^\mu \gamma_5 \theta) (\bar{\theta} \partial_\mu \chi(x)) - \frac{i}{8} (\bar{\theta} \theta) (\bar{\theta} \gamma^\mu (1+\gamma_5) \theta) \partial_\mu \chi(x)$$

$$= \frac{1}{2} \bar{\theta} (1-\gamma_5) \chi(x) + \frac{i}{4} (\bar{\theta} \gamma^\mu \gamma_5 \theta) \partial_\mu \chi(x) (\bar{\theta} \theta) - \frac{i}{8} (\bar{\theta} \theta) (\bar{\theta} \gamma^\mu (1+\gamma_5) \theta) \partial_\mu \chi(x)$$

$$= \frac{1}{2} \bar{\theta} (1-\gamma_5) \chi(x) + \frac{i}{8} (\bar{\theta} \theta) (\bar{\theta} \gamma^\mu (1-\gamma_5) \theta) \partial_\mu \chi(x)$$

$$-\frac{1}{2} \bar{D} (1+\gamma_5) D \frac{1}{32} (\bar{\theta} \theta)^2 D(x) = \frac{1}{8} \bar{\theta} (1-\gamma_5) \theta D(x) - \frac{i}{32} \bar{\theta} \gamma^\mu (1+\gamma_5) \theta \bar{\theta} \theta D(x) = \frac{1}{8} \bar{\theta} (1-\gamma_5) \theta D(x)$$

De donde

$$\begin{aligned}
 -\bar{\Theta} \frac{1}{2} (1 \pm \gamma_5) D \Phi(x, \theta) &= F(x) \pm i G(x) + \bar{\Theta} \frac{1}{2} (1 \mp \gamma_5) [\chi(x) - i \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x)] \\
 &+ \frac{1}{4} \bar{\Theta} \frac{1}{2} (1 \mp \gamma_5) \theta [D(x) - \partial^\mu \partial_\mu A(x) \pm 2i \partial^\mu A_\mu(x)] + \\
 &+ \frac{1}{4} \bar{\Theta} \gamma^\mu \gamma_5 \theta [\mp i \partial_\mu] [F(x) \pm i G(x)] \\
 &+ \frac{1}{4} \bar{\Theta} \theta \bar{\Theta} \frac{1}{2} (1 \pm \gamma_5) [-i \gamma^\mu \partial_\mu] [+ \chi(x) - i \gamma^\nu \partial_\nu \psi(x)] \\
 &+ \frac{1}{32} (\bar{\Theta} \theta)^2 [-\partial_\mu \partial^\mu] [F(x) \pm i G(x)] \quad (1)
 \end{aligned}$$

En el sentido que vamos a probar el supercampo escalar $\Phi(x, \theta)$ es reducible. Una reducción puede llevarse a cabo imponiendo la condición

$$\left[\frac{1}{2} (1 + \lambda \gamma_5) D \right]_\alpha \Phi(x, \theta) \equiv D_{L\alpha} \Phi(x, \theta) = 0 \quad \lambda = \pm 1 \quad (2)$$

Ecuaciones que son manifiestamente covariantes si excluimos las reflexiones espaciales. Veamos cual es la solución más general de (2). La expresión más general posible para un supercampo escalar ha sido dada en (5.4). Teniendo en cuenta (24.1) y exigiendo que multiplicada por $(1 + \lambda \gamma_5)_{\beta\alpha}$ de un resultado idénticamente nulo obtenemos

$$(1 + \lambda \gamma_5) \psi(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma_5 \psi(x) = -\lambda \psi(x)$$

$$-i(1 + \lambda \gamma_5) \gamma^\mu \partial_\mu A(x) + (1 + \lambda \gamma_5) F(x) + i(1 + \lambda \gamma_5) \gamma_5 G(x) + (1 + \lambda \gamma_5) \gamma^\mu \gamma_5 A_\mu(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -(1 + \lambda \gamma_5) \gamma^\mu [i \partial_\mu A(x) + \lambda A_\mu(x)] + (1 + \lambda \gamma_5) [F(x) + i \lambda G(x)] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G(x) = i \lambda F(x), \quad A_\mu(x) = -i \lambda \partial_\mu A(x)$$

$$i(1 + \lambda \gamma_5) \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) + (1 + \lambda \gamma_5) \chi(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad (1 + \lambda \gamma_5) \chi(x) = -2i \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x)$$

$$-i(1 + \lambda \gamma_5) \gamma^\mu \gamma_0 \gamma_5 \partial_\mu \psi(x) + (1 + \lambda \gamma_5) \gamma_0 \gamma_5 \chi(x) = 0 \Rightarrow (1 + \lambda \gamma_5) \chi(x) = 0 \Rightarrow \gamma_5 \chi(x) = -\lambda \chi(x)$$

$$\Rightarrow \chi(x) = -i \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x)$$

$$-i(1+\lambda\gamma_5)\cancel{\gamma^\mu}\partial_\mu F - (1+\lambda\gamma_5)\cancel{\gamma^\mu}\gamma_5\partial_\mu G(x) + \cancel{E}(1+\lambda\gamma_5)\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma_5\partial_\nu A_\mu(x) + (1+\lambda\gamma_5)D(x) = 0 \Rightarrow$$

$$i\lambda(1+\lambda\gamma_5)\gamma^\nu\gamma^\mu\partial_\nu A_\mu(x) + (1+\lambda\gamma_5)D(x) = 0 \Rightarrow D(x) = -i\lambda\partial^\mu A_\mu(x) \Rightarrow D(x) = -\partial^\mu\partial_\mu A(x)$$

$$(1+\lambda\gamma_5)\gamma^\mu\partial_\mu\chi(x) = 0 \quad o.k.$$

Entonces la solución más general de las ecuaciones (26.2) es

$$\begin{aligned} \Phi_\lambda(x, \theta) = & A_\lambda(x) + \bar{\theta}\psi_\lambda(x) + \frac{1}{4}\bar{\theta}(1-\lambda\gamma_5)\theta F_\lambda(x) - \frac{i}{4}\lambda\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta\partial_\mu A_\lambda(x) \\ & - \frac{i}{4}\bar{\theta}\theta\bar{\theta}\gamma^\mu\partial_\mu\psi_\lambda(x) - \frac{1}{32}(\bar{\theta}\theta)^2\partial^\mu\partial_\mu A_\lambda(x) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\gamma_5\psi_\lambda(x) = -\lambda\psi_\lambda(x) \quad \lambda = \pm 1$$

Es decir que la solución más general depende solo de ocho componentes independientes reales, mientras que el supercampo escalar más general tenía 16 componentes reales y su expansión válida (6.1).

Una forma alternativa de escribir este resultado es tener en cuenta que

$$\begin{aligned} \exp\left[-\frac{i}{4}\lambda\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta\partial_\mu\right] &= 1 - \frac{i}{4}\lambda\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta\partial_\mu - \frac{1}{32}\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta\bar{\theta}\gamma^\nu\gamma_5\theta\partial_\mu\partial_\nu = \\ &= 1 - \frac{i}{4}\lambda\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta\partial_\mu - \frac{1}{32}(\bar{\theta}\theta)^2\partial^\mu\partial_\mu \end{aligned} \quad (2)$$

y además las propiedades de las productos de θ así como

$$(\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta)(\bar{\theta}\partial_\mu\psi_\lambda) = \lambda(\bar{\theta}\theta)(\bar{\theta}\gamma^\mu\partial_\mu\psi_\lambda) \quad (3)$$

obtenemos

$$\Phi_\lambda(x, \theta) = \exp\left\{-\frac{i}{4}\lambda\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta\partial_\mu\right\} \left[A_\lambda(x) + \bar{\theta}\psi_\lambda(x) + \frac{1}{2}\bar{\theta}\frac{1}{2}(1-\lambda\gamma_5)\theta F_\lambda(x)\right] \quad (4)$$

Teniendo en cuenta las propiedades de transformación (8.1) es evidente que las propiedades de transformación de Φ_λ componentes de los campos que son introducidos son

$$\delta A_\lambda(x) = \bar{E} \psi_\lambda(x)$$

$$\delta \psi_\lambda(x) = \frac{1}{2} (1 - \lambda \gamma_5) [F_\lambda(x) - i \gamma^\mu \partial_\mu A_\lambda(x)] E \quad (1)$$

$$\delta F_\lambda(x) = -i \bar{E} \gamma^\mu \partial_\mu \psi_\lambda(x)$$

Notar que como $\Phi_\lambda(x, \theta)$ se define mediante una ecuación diferencial lineal los supercampos quiéales son cerrados en relación a la multiplicación, es decir

$$\Phi_{1\lambda}(x, \theta) \Phi_{2\lambda}(x, \theta) = \Phi_{3\lambda}(x, \theta) \quad \lambda = \pm 1 \quad (2)$$

En el contrario $\Phi_{1\lambda}(x, \theta) \Phi_{2, -\lambda}(x, \theta)$ es en general un supercampo

Es posible, aunque no necesario, hacer la identificación

$$\Phi_+^*(x, \theta) = \Phi_-(x, \theta) \quad (3)$$

lo cual implica.

$$A_-(x) = A_+^*(x), \quad \psi_+^*(x) = \psi_-(x), \quad F_+^*(x) = F_-(x) \quad (4)$$

es decir dos campos de Bose reales y un spinor de Majorana.

Teniendo en cuenta (2) y la ley de multiplicación (6".1) obtenemos para

$$A_\lambda(x) = [A_\lambda(x)]^2, \quad \psi_\lambda(x) = 2 A_\lambda(x) \psi_\lambda(x)$$

$$F_\lambda(x) = 2 A_\lambda(x) F_\lambda(x) - \bar{\psi}_\lambda^c(x) \psi_\lambda(x)$$

y para $[\Phi_\lambda(x, \theta)]^m$

$$A_\lambda(x) = [A_\lambda(x)]^m, \quad \psi_\lambda(x) = m [A_\lambda(x)]^{m-1} \psi_\lambda(x)$$

$$F_\lambda(x) = m [A_\lambda(x)]^{m-1} F_\lambda(x) - \frac{m(m-1)}{2} [A_\lambda(x)]^{m-2} \bar{\psi}_\lambda^c(x) \psi_\lambda(x) \quad (5)$$

Veamos algunas otras propiedades de

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_\lambda(x, \theta) = & A_\lambda(x) + \bar{\theta} \psi_\lambda(x) + \frac{1}{4} \bar{\theta} (1 - \lambda \gamma_5) \theta F_\lambda(x) - \frac{i}{4} \lambda \bar{\theta} \gamma^\mu \gamma_5 \theta \partial_\mu A_\lambda(x) \\ & - \frac{i}{4} (\bar{\theta} \theta) \bar{\theta} \gamma^\mu \partial_\mu \psi_\lambda(x) - \frac{1}{32} (\bar{\theta} \theta)^2 \partial_\mu \partial^\mu A_\lambda(x) \quad \lambda = \pm 1 \end{aligned} \quad (1)$$

donde

$$\gamma_5 \psi_\lambda(x) = -\lambda \psi_\lambda(x) \quad (2)$$

que se obtiene del supercampo mas general con

$$G_\lambda(x) \equiv i\lambda F_\lambda(x), \quad A_{\lambda\mu}(x) \equiv -i\lambda \partial_\mu A_\lambda(x)$$

$$\chi_\lambda(x) \equiv -i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_\lambda(x), \quad D_\lambda(x) \equiv -\partial^\mu \partial_\mu A_\lambda(x) \quad (3)$$

De (24.1)

$$\begin{aligned} D\bar{\Phi}_\lambda(x, \theta) = & \psi_\lambda(x) + \frac{1}{2} \left[(1 - \lambda \gamma_5) \theta F_\lambda(x) - i(1 - \lambda \gamma_5) \gamma^\mu \theta \partial_\mu A_\lambda(x) \right] \\ & + \frac{\lambda}{4} (\bar{\theta} \gamma_\nu \gamma_5 \theta) \sigma^{\mu\nu} \partial_\mu \psi_\lambda(x) + \frac{1}{4} (\bar{\theta} \theta) \left[-\frac{i}{2} (1 - \lambda \gamma_5) \gamma^\mu \theta \partial_\mu F_\lambda(x) \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} (1 - \lambda \gamma_5) \theta \partial^\mu \partial_\mu A_\lambda(x) \right] + \frac{1}{32} (\bar{\theta} \theta)^2 \partial_\mu \partial^\mu \psi_\lambda(x) \end{aligned}$$

como $\frac{1}{2} (1 - \lambda \gamma_5) \psi_\lambda(x) = \psi_\lambda(x)$

$$\begin{aligned} D\bar{\Phi}_\lambda(x, \theta) = & \frac{1}{2} (1 - \lambda \gamma_5) \left\{ \psi_\lambda(x) + [\theta F_\lambda(x) - i\gamma^\mu \theta \partial_\mu A_\lambda(x) \right. \\ & + \frac{\lambda}{4} (\bar{\theta} \gamma_\nu \gamma_5 \theta) \sigma^{\mu\nu} \partial_\mu \psi_\lambda(x) + \frac{1}{4} (\bar{\theta} \theta) [-i\gamma^\mu \theta \partial_\mu F_\lambda(x) \\ & \left. - \theta \partial^\mu \partial_\mu A_\lambda(x)] + \frac{1}{32} (\bar{\theta} \theta)^2 \partial_\mu \partial^\mu \psi_\lambda(x) \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

Por otra parte de (26.1) se obtiene

$$\begin{aligned}
& + \bar{D} \frac{1}{2} (1 - \lambda \gamma_5) D \Phi_\lambda(x, \theta) = + (\bar{D} D) \Phi_\lambda(x, \theta) = -2 F_\lambda(x) + 2 i \bar{\theta} \gamma^\mu \partial_\mu \psi_\lambda(x) \\
& + \bar{\theta} \frac{1}{2} (1 + \lambda \gamma_5) \theta \partial^\mu \partial_\mu A_\lambda(x) - \frac{i \lambda}{2} \bar{\theta} \gamma^\mu \gamma_5 \theta \partial_\mu F_\lambda(x) \\
& + \frac{1}{2} \bar{\theta} \theta \bar{\theta} \partial^\mu \partial_\mu \psi_\lambda(x) + \frac{1}{16} (\bar{\theta} \theta)^2 \partial_\mu \partial^\mu F_\lambda(x) \quad (4)
\end{aligned}$$

Es decir

$$\begin{aligned}
(\bar{D} D) \Phi_\lambda(x, \theta) = 2 \left\{ -F_\lambda(x) + \bar{\theta} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi_\lambda(x) + \right. \\
+ \frac{1}{4} \bar{\theta} (1 + \lambda \gamma_5) \theta \partial^\mu \partial_\mu A_\lambda(x) - \frac{i}{4} (-\lambda) \bar{\theta} \gamma^\mu \gamma_5 \theta \partial_\mu [-F_\lambda(x)] \\
\left. - \frac{i}{4} (\bar{\theta} \theta) \bar{\theta} \gamma^\mu \partial_\mu [i \gamma^\nu \partial_\nu \psi_\lambda(x)] - \frac{1}{32} (\bar{\theta} \theta)^2 \partial_\mu \partial^\mu [-F_\lambda(x)] \right\} \quad (2)
\end{aligned}$$

y por tanto

$$(\bar{D} D) \Phi_\lambda(x, \theta) = 2 \Phi'_{-\lambda}(x, \theta)$$

$$A'_{-\lambda}(x) \equiv -F_\lambda(x), \quad \psi'_{-\lambda}(x) \equiv i \gamma^\mu \partial_\mu \psi_\lambda(x) \quad (3)$$

$$F'_{-\lambda}(x) = \partial^\mu \partial_\mu A_\lambda(x)$$

Queremos ahora considerar el modelo de Wess - Zumino [J. WESS y B. ZUMINO
Nuel. Phys. B70, 39 (1974)]

Empecemos considerando una forma intuitiva de introducir el modelo. Consideremos un campo de spin $1/2$ de Majorana $\psi(x)$ y dos campos escalares de spin cero y paridades opuestas: $A(x)$ (escalar) y $B(x)$ (pseudoescalar). La densidad Lagrangiana para campos libres sin masa es

$$L(x) = \frac{1}{2} \partial^\mu A(x) \partial_\mu A(x) + \frac{1}{2} \partial^\mu B(x) \partial_\mu B(x) + \frac{i}{2} \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) \quad (1)$$

¿Es posible construir una corriente spinorial conservada? La pregunta tiene interés pues entonces las cargas asociadas serían spinores que nos relacionarían ambos campos. La contestación es afirmativa pues cumplen esta condición corrientes tales como

$$J^\mu(x) \equiv (\gamma^\nu \partial_\nu A(x)) \gamma^\mu \psi(x) \quad (2)$$

$$\tilde{J}^\mu(x) \equiv (\gamma^\nu \partial_\nu B(x)) \gamma^\mu \gamma_5 \psi(x)$$

En efecto

$$\begin{aligned} \partial_\mu J^\mu(x) &= \gamma^\nu \gamma^\mu \partial_\mu \partial_\nu A(x) \psi(x) + \gamma^\nu \partial_\nu A(x) \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) \\ &= \partial^\mu \partial_\mu A(x) \psi(x) + \gamma^\nu \partial_\nu A(x) \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_\mu \tilde{J}^\mu(x) &= \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma_5 \partial_\mu \partial_\nu B(x) \psi(x) + \gamma^\nu \partial_\nu B(x) \gamma_5 \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) \\ &= \partial^\mu \partial_\mu B(x) \gamma_5 \psi(x) + \gamma^\nu \partial_\nu B(x) \gamma_5 \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

gracias a las ecuaciones del movimiento. Es también que podemos construir corrientes más complicadas de tipo tensorial, etc. *

¿Qué sucede al introducir las interacciones? Consideremos una Lagrangiana de interacción renormalizable de la forma

$$L_I(x) = -g \bar{\psi}(x) [A(x) + i\lambda \gamma_5 B(x)] \psi(x) - V(A, B) \quad (4)$$

- * De la misma forma en que vemos que es posible, mediante una elección adecuada de la interacción, lograr que una combinación de J^{μ} y $\tilde{J}^{\mu}$ sea conservada en presencia de interacciones, es totalmente imposible lograr algo parecido si se quiere de corrientes tales como

$$J_{\mu\nu\alpha} = [\partial_{\sigma} A(x) \gamma^{\sigma} \gamma_{\mu} p_{\nu} \psi(x)]_{\alpha}$$

que son conservadas en ausencia de interacciones. Esta imposibilidad es una consecuencia del Teorema de Coleman-Mandula [S. COLEMAN y J. MANDULA Phys. Rev. 159, 1251 (1957)]. Este Teorema, basado únicamente en la teoría de la matriz S , afirma que en una teoría con amplitudes de scattering no nulas las únicas cantidades conservadas que se transforman como tensores bajo el grupo de Lorentz son:

- i) Los generadores de este grupo P_{μ} y $M_{\mu\nu}$
- ii) Números cuánticos invariantes Lorentz tales como la carga eléctrica, el número bariónico, etc.

La idea básica de la demostración es que la conservación de P_{μ} y $M_{\mu\nu}$ deja solo el ángulo de colisión descomulgado en una colisión de dos cuerpos. Leyes de conservación adicionales de tensores determinarían el ángulo de scattering, permitiendo solo un conjunto discreto de ángulos posibles. Puesto que la amplitud de colisión es siempre una función analítica del ángulo se debería anular para todos los ángulos.

¿Por qué una corriente del tipo $J_{\alpha}^{\mu}(x)$ puede conservarse y no $J_{\alpha}^{\mu\nu}(x)$ de hecho antes?

Consideremos las cargas asociadas

$$\hat{Q}_{\alpha} \equiv \int d^3x J^0(x) \quad \hat{Q}_{\alpha}^{\nu} \equiv \int d^3x J_{\alpha}^{\mu\nu}(x)$$

las cuales serían conservadas si las corrientes lo son. Construyamos en cada caso los anti-conmutadores de estas cargas. Como $\hat{Q}_{\alpha}$ es un spinor tiene spin $1/2$; $\{\hat{Q}_{\alpha}, \hat{Q}_{\beta}\}$ puede ser tanto ser un vector de spin 1. El Teorema de Coleman-Mandula permite la conservación de un vector P_{μ} . Para $\hat{Q}_{\alpha}^{\nu}$ es un vector-spinor y tiene componentes de spin hasta $3/2$. Su anti-conmutador tiene spins hasta 3. Como $\{\hat{Q}_{\alpha}^{\nu}, \hat{Q}_{\beta}^{\mu}\}$ es conservado si lo es $\hat{Q}_{\alpha}^{\nu}$ y como el Teorema de Coleman-Mandula no permite la conservación de un operador de spin 3 en una teoría en interacción, entonces $\hat{Q}_{\alpha}^{\nu}$ no puede conservarse en una teoría en interacción.

Sabemos que el álgebra de los S_{α} es $\{S_{\alpha}, S_{\beta}\} = (\gamma^{\mu}\gamma^{\nu})_{\alpha\beta} P_{\mu}$, el miembro de la derecha contiene uno a los operadores permitidos (P_{μ}). Nos podemos preguntar si es posible generalizar el álgebra a

donde $V(A, B)$ es un polinomio a lo sumo cuadrático para tener una teoría renormalizable. Las ecuaciones del movimiento son ahora

$$i \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) = + 2g [A(x) + i\lambda \gamma_5 B(x)] \psi(x)$$

$$\partial_\mu \partial^\mu A(x) = -g \bar{\psi}(x) \psi(x) - \frac{\partial V(A, B)}{\partial A} \quad (1)$$

$$\partial_\mu \partial^\mu B(x) = -i\lambda g \bar{\psi}(x) \gamma_5 \psi(x) - \frac{\partial V(A, B)}{\partial B}$$

Consideremos ahora la corriente spinorial $J^\mu(x)$. Al usar las ecuaciones del movimiento obtenemos para su divergencia un término $-g (\bar{\psi}(x) \psi(x)) \psi(x)$ del cual es difícil deshacerse. Notemos sin embargo que al usar $J^\mu(x)$ obtenemos también un término $-i\lambda g (\bar{\psi}(x) \gamma_5 \psi(x)) \gamma_5 \psi(x) \stackrel{?}{=} +i\lambda g (\bar{\psi}(x) \psi(x)) \psi(x)$, con lo cual una combinación lineal adecuada de ellas puede eliminar este término tan molesto. Consideremos entonces la corriente spinorial

$$J^\mu(x) = \gamma^\nu \left[\partial_\nu A(x) + \frac{c}{\lambda} \gamma_5 \partial_\nu B(x) \right] \gamma^\mu \psi(x) + [F(A, B) + i\gamma_5 G(A, B)] \bar{\psi}(x) \quad (2)$$

Calculamos ahora su divergencia

$$\begin{aligned} \partial_\mu J^\mu(x) &= \left[\partial^\mu \partial_\mu A(x) - \frac{c}{\lambda} \partial^\mu \partial_\mu B(x) \gamma_5 \right] \psi(x) \\ &+ \gamma^\nu \left[\partial_\nu A(x) + \frac{c}{\lambda} \gamma_5 \partial_\nu B(x) \right] \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) + \\ &+ \left\{ \frac{\partial F(A, B)}{\partial A} \partial_\mu A(x) + \frac{\partial F(A, B)}{\partial B} \partial_\mu B(x) + i\gamma_5 \frac{\partial G(A, B)}{\partial A} \partial_\mu A(x) \right. \\ &\left. + i\gamma_5 \frac{\partial G(A, B)}{\partial B} \partial_\mu B(x) \right\} \gamma^\mu \psi(x) + [F(A, B) + i\gamma_5 G(A, B)] \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) \end{aligned}$$

y usando las ecuaciones del movimiento

43/001

$$\{Q_\alpha, \bar{\psi}_\beta\} = (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} p_\mu + a (\sigma^{\mu\nu})_{\alpha\beta} M_{\mu\nu} + c \delta_{\alpha\beta} S + \dots$$

donde los operadores del miembro a la derecha son los permitidos en el Teorema de Coleman-Mandula. de la referencia [HAGG, SOHNUS and LOPUSZANSKI Nucl. Phys.

B88, 257 (1979)] que el término $M_{\mu\nu}$ no puede aparecer pues no satisface la identidad de Jacobi. Otros términos pueden aparecer pero conducen a modelos demasiado restringidos para describir la física.

$$\begin{aligned}
\partial_\mu J^\mu(x) = & - \frac{\partial V(A,B)}{\partial A} \psi + \frac{i}{\lambda} \frac{\partial V(A,B)}{\partial B} \gamma_5 \psi \\
& - 2ig \gamma^\mu [\partial_\mu A + \frac{i}{\lambda} \gamma_5 \partial_\mu B] [A + i\lambda \gamma_5 B] \psi + \\
& + \left\{ \frac{\partial F(A,B)}{\partial A} \partial_\mu A + \frac{\partial F(A,B)}{\partial B} \partial_\mu B + \frac{\partial G(A,B)}{\partial A} i\gamma_5 \partial_\mu A + \frac{\partial G(A,B)}{\partial B} i\gamma_5 \partial_\mu B \right\} \gamma^\mu \psi \\
& - i2g [F(A,B) + i\gamma_5 G(A,B)] [A + i\lambda \gamma_5 B] \psi
\end{aligned}$$

Al imponer que esta ecuación sea idénticamente nula se obtiene

$$- \frac{\partial V(A,B)}{\partial A} - 2g i [A F(A,B) - \lambda B G(A,B)] = 0$$

$$+ \frac{i}{\lambda} \frac{\partial V(A,B)}{\partial B} + 2g [\lambda B F(A,B) + A G(A,B)] = 0$$

$$\frac{\partial F(A,B)}{\partial A} \partial_\mu A + \frac{\partial F(A,B)}{\partial B} \partial_\mu B - 2ig [A \partial_\mu A - B \partial_\mu B] = 0$$

$$+ \frac{\partial G(A,B)}{\partial A} \partial_\mu A + \frac{\partial G(A,B)}{\partial B} \partial_\mu B + 2ig [\lambda B \partial_\mu A + \frac{1}{\lambda} A \partial_\mu B] = 0$$

de donde la solución única es

$$F(A,B) = ig [A^2(x) - B^2(x)] \quad , \quad G(A,B) = -2ig A(x) B(x)$$

$$\lambda = 1 \quad , \quad V(A,B) = \frac{1}{2} g^2 [A^2(x) + B^2(x)]^2 \quad (1)$$

Es decir el Lagrangiano de Wess - Zumino es

$$L(x) = \frac{1}{2} \partial^\mu A(x) \partial_\mu A(x) + \frac{1}{2} \partial^\mu B(x) \partial_\mu B(x) + \frac{i}{2} \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x)$$

$$- g \bar{\psi}(x) [A(x) + i\gamma_5 B(x)] \psi(x) - \frac{1}{2} g^2 [A^2(x) + B^2(x)]^2 \quad (2)$$

de donde las ecuaciones del movimiento son

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) = 2g [A(x) + i\gamma_5 B(x)] \psi(x) \quad (3)$$

$$\partial^\mu \partial_\mu A(x) = -g \bar{\psi}(x) \psi(x) - 2g^2 [A^2(x) + B^2(x)] A(x) \quad (1)$$

$$\partial^\mu \partial_\mu B(x) = -ig \bar{\psi}(x) \gamma_5 \psi(x) - 2g^2 [A^2(x) + B^2(x)] B(x) \quad (2)$$

Finalmente la corriente spinorial conservada es

$$J^\mu(x) = \gamma^\nu [\partial_\nu A(x) + ig \gamma_5 \partial_\nu B(x)] \gamma^\mu \psi(x) + \\ + ig [A^2(x) - B^2(x) - 2ig \gamma_5 A(x) B(x)] \gamma^\mu \psi(x) \quad (3)$$

que cumple $J^{\mu*}(x) = J^\mu(x)$. Las cargas asociadas a (3) junto con los operadores P^μ y $M^{\mu\nu}$ deducidos de $L(x)$ son una realización de (13.4).

Veamos ahora como usar la notación de supercampos para obtener el Lagrangiano de Wess-Zumino para multipletes escalares. El supercampo adecuado es $\Phi_\lambda(x, \theta)$ y además imponemos la condición $\Phi_\lambda^*(x, \theta) = \Phi_{-\lambda}(x, \theta)$. Notemos que la densidad Lagrangiana $L(\Phi_+, \Phi_-)$ debe transformarse como un supercampo escalar. Para que las ecuaciones del movimiento sean supercovariantes, la integral de la acción debe ser invariante

$$\delta \int d^4x L(\Phi_+, \Phi_-) = \int d^4x \bar{\epsilon} \left[\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} + \frac{i}{2} (\gamma^\mu \theta) \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right] L(\Phi_+, \Phi_-) = \\ = \bar{\epsilon} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} \int d^4x L(\Phi_+, \Phi_-) + \text{Términos de Superf.} = 0 \quad (4)$$

Por tanto la acción será invariante (salvo términos de superficie sin interés) si es independiente de θ . Esto significa que cada término que dependa de θ debe ser de la forma de una medida divergencia. Notar que esto siempre puede lograrse aplicando el operador D_α un número suficiente de veces: dos en el caso de un supercampo quiral y cuatro en un supercampo cualquiera. Que no son necesarias más de cuatro es evidente de (8.1) pues $\delta D(x)$ es una medida divergencia.

Consideremos la densidad Lagrangiana

$$L = \frac{1}{8} (\bar{D} D)^2 \Phi_-(x, \theta) \Phi_+(x, \theta) - \frac{1}{2} (\bar{D} D) [V(\Phi_+) + V(\Phi_-)] \quad (1)$$

donde V es un polinomio. Esta densidad es covariante (salvo divergencias) bajo las transformaciones de supersimetría. Tenemos además que

$$(\bar{D} D) \Phi_- \Phi_+ = \Phi_- (\bar{D} D) \Phi_+ + \Phi_+ (\bar{D} D) \Phi_- + (\bar{D} \Phi_-) (D \Phi_+) + (\bar{D} \Phi_+) (D \Phi_-)$$

Teniendo en cuenta (28'.2) se ve que los dos últimos términos son idénticamente cero y en tanto

$$L = \frac{1}{2} (\bar{D} D) \left\{ \frac{1}{4} \Phi_- (\bar{D} D) \Phi_+ + \frac{1}{4} \Phi_+ (\bar{D} D) \Phi_- - V(\Phi_+) - V(\Phi_-) \right\} \quad (2)$$

Pasemos a calcular esta cantidad cuya parte de interés para nosotros es la que se obtiene al hacer $\theta=0$. De acuerdo con las ideas generales $\Phi_\lambda(x, \theta)$ es un supercampo quiral con campos

$$A_\lambda(x), \quad \psi_\lambda(x), \quad F_\lambda(x)$$

De lo dicho (18".3) $(\bar{D} D) \Phi_\lambda$ es un supercampo $\Phi'_{-\lambda}$ con

$$A'_{-\lambda}(x) = -2F_\lambda(x), \quad \psi'_{-\lambda}(x) = 2i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_\lambda(x), \quad F'_{-\lambda}(x) = 2\partial^\mu \partial_\mu A_\lambda(x)$$

y en tanto $\Phi_{-\lambda}(x, \theta) (\bar{D} D) \Phi_\lambda(x, \theta)$ es un supercampo $\Phi''_{-\lambda}(x, \theta)$ con componentes

$$A''_{-\lambda}(x) = -2A_{-\lambda}(x) F_\lambda(x), \quad \psi''_{-\lambda}(x) = A_{-\lambda}(x) 2i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_\lambda(x) - 2F_\lambda(x) \psi_{-\lambda}(x)$$

$$F''_{-\lambda}(x) = 2A_{-\lambda}(x) \partial^\mu \partial_\mu A_\lambda(x) - 2i\bar{\psi}_{-\lambda}^c(x) \gamma^\mu \partial_\mu \psi_\lambda(x) - 2F_{-\lambda}(x) F_\lambda(x)$$

y entonces la parte de interés de L es para la parte libre

$$L_0(x) = \frac{1}{2} (-2) \left\{ \frac{1}{4} [2A_+ \partial^\mu \partial_\mu A_- - 2i\bar{\psi}_+^c \gamma^\mu \partial_\mu \psi_- - 2F_+ F_-] \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4} [2A_- \partial^\mu \partial_\mu A_+ - 2i\bar{\psi}_-^c \gamma^\mu \partial_\mu \psi_+ - 2F_- F_+] \right\} =$$

$$L_0(x) = -\frac{1}{2} A_+ \partial^\mu \partial_\mu A_- - \frac{1}{2} A_- \partial^\mu \partial_\mu A_+ + F_+ F_- + \frac{i}{2} \bar{\psi}_+ \gamma^\mu \partial_\mu \psi_- + \frac{i}{2} \bar{\psi}_- \gamma^\mu \partial_\mu \psi_+$$

Integrando por partes y teniendo en cuenta que

$$\psi_+ = \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \psi \quad \psi_- = \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \psi$$

$$\Rightarrow \frac{i}{2} \bar{\psi}_+ \gamma^\mu \partial_\mu \psi_- = \frac{i}{4} \psi^\dagger (1 - \gamma_5) \gamma^0 \gamma^\mu \partial_\mu \psi$$

$$\frac{i}{2} \bar{\psi}_- \gamma^\mu \partial_\mu \psi_+ = \frac{i}{4} \psi^\dagger (1 + \gamma_5) \gamma^0 \gamma^\mu \partial_\mu \psi$$

se obtiene para la parte del Lagrangiano libre

$$L_0(x) = \partial_\mu A_+(x) \partial^\mu A_-(x) + F_+(x) F_-(x) + \frac{i}{2} \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) \quad (1)$$

Consideremos ahora la parte de la interacción que proviene de

$$L = \frac{1}{2} (\bar{\Phi} D) \begin{bmatrix} -V(\Phi_+) & -V(\Phi_-) \end{bmatrix} \quad (2)$$

Consideremos que $V(\Phi_\lambda) = \sum c_m \Phi_\lambda^m$ y consideremos un caso de los monomios. $V_m = \Phi_\lambda^m$

De acuerdo con lo dicho antes este es otro supercampo quiral con componentes dadas en (28.5)

En particular para la parte $F_\lambda(x)$ de Φ_λ^m podemos escribir

$$\frac{dV(A_\lambda)}{dA_\lambda} F_\lambda(x) = \frac{1}{2} \frac{d^2 V(A_\lambda)}{dA_\lambda^2} \bar{\psi}_\lambda^c(x) \psi_\lambda(x) =$$

$$= \frac{dV(A_+)}{dA_+} F_+(x) = \frac{1}{2} \frac{d^2 V(A_+)}{dA_+^2} \bar{\psi}(x) \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \psi(x)$$

Con lo cual el Lagrangiano total es (teniendo en cuenta (28.3))

$$L(x) = \partial_\mu A_+(x) \partial^\mu A_-(x) + F_+(x) F_-(x) + \frac{i}{2} \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x)$$

$$+ \left[\frac{dV(A_+)}{dA_+} F_+(x) + \frac{dV(A_-)}{dA_-} F_-(x) \right] = \quad (3)$$

$$- \frac{1}{2} \left[\frac{d^2 V(A_+)}{dA_+^2} \bar{\psi}(x) \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \psi(x) + \frac{d^2 V(A_-)}{dA_-^2} \bar{\psi}(x) \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \psi(x) \right]$$

Las ecuaciones del movimiento son

$$i \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) = \frac{d^2 V(A_+)}{dA_+^2} \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \psi(x) + \frac{d^2 V(A_-)}{dA_-^2} \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \psi(x)$$

$$\partial^\mu \partial_\mu A_\pm(x) = \frac{d^2 V(A_\mp)}{dA_\mp^2} F_\mp(x) - \frac{1}{2} \frac{d^3 V(A_\mp)}{dA_\mp^3} \bar{\psi}(x) \frac{1}{2} (1 \pm \gamma_5) \psi(x) \quad (1)$$

$$F_\pm(x) = - \frac{dV(A_\mp)}{dA_\mp}$$

Estas son las ecuaciones mas generales para un Lagrangiano supersimilico que cumple las condiciones

i) Contenga solo campo de spin 0 y 1/2

ii) Los terminos cineticos son de la forma convencional: lineales para spin 1/2 y cuadraticos para spin cero.

Podemos ahora imponer

iii) Que el Lagrangiano sea renormalizable

Esto implica que

$$\frac{d^3 V(A_\mp)}{dA_\mp^3} = 2\sqrt{2} g \quad (2)$$

Por lo cual

$$V(A_\pm) = \frac{\sqrt{2}}{3} g A_\pm^3(x) + \frac{m}{2} A_\pm^2(x) + \lambda A_\pm(x) \quad (3)$$

Introduciendo

$$A_\pm(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [A(x) \mp i B(x)] \quad , \quad A^\dagger(x) = A(x) \quad , \quad B^\dagger(x) = B(x) \quad (4)$$

y teniendo en cuenta que

$$F_\pm(x) = - \sqrt{2} g A_\mp^2 \mp m A_\mp(x) + \lambda \quad (5)$$

Las ecuaciones del movimiento son

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) = 2g [A(x) + iB(x)\gamma_5] \psi(x)$$

$$\begin{aligned} (\partial^\mu \partial_\mu + m^2) A(x) &= -g \bar{\psi}(x) \psi(x) - 2g^2 [A^2(x) + B^2(x)] A(x) \\ &\quad - mg [3A^2(x) + B^2(x)] - \sqrt{2}\lambda [2gA(x) + m] \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} (\partial^\mu \partial_\mu + m^2) B(x) &= -ig \bar{\psi}(x) \gamma_5 \psi(x) - 2g^2 [A^2(x) + B^2(x)] B(x) \\ &\quad - mg 2A(x)B(x) + 2\sqrt{2}\lambda g B(x) \end{aligned}$$

que provienen del Lagrangiano (35.2)

$$\begin{aligned} L(x) &= \frac{1}{2} \partial_\mu A(x) \partial^\mu A(x) - \frac{1}{2} m^2 A^2(x) + \frac{1}{2} \partial_\mu B(x) \partial^\mu B(x) - \frac{1}{2} m^2 B^2(x) \\ &\quad + \frac{i}{2} \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) - \frac{1}{2} m \bar{\psi}(x) \psi(x) - \frac{1}{2} g^2 [A^2(x) + B^2(x)]^2 \\ &\quad - mg [A^2(x) + B^2(x)] A(x) - g \bar{\psi}(x) [A(x) + i\gamma_5 B(x)] \psi(x) \\ &\quad - \sqrt{2}\lambda g [A^2(x) - B^2(x)] - \sqrt{2}\lambda m A(x) - \lambda^2 \end{aligned} \quad (2)$$

El Lagrangiano de Wess-Zumino es el anterior con el parámetro de escala $\lambda = 0$

Bajo una transformación de supersgauge (28.1)

$$\delta A(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\epsilon} \psi(x)$$

$$\delta B(x) = -\frac{i}{\sqrt{2}} \bar{\epsilon} \gamma_5 \psi(x) \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \delta \psi(x) &= \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2}} g [A(x) - i\gamma_5 B(x)]^2 - \frac{m}{\sqrt{2}} [A(x) - i\gamma_5 B(x)] - \lambda \right. \\ &\quad \left. - \frac{i}{\sqrt{2}} \gamma^\mu \partial_\mu [A(x) - i\gamma_5 B(x)] \right\} \epsilon \end{aligned}$$

Antes de continuar queremos hacer algunos comentarios sobre las simetrías de $L(x)$. En primer lugar como $[P_\mu, S_\alpha] = 0$ vemos que una consecuencia inmediata de esta simetría es que las distintas partículas que están en un mismo supermultiplete (que quedan conectadas por S_α) tienen la misma masa.

Consideremos ahora la transformación global

$$[A(x) + i B(x)] \longrightarrow e^{i\phi} [A(x) + i B(x)] \quad (1)$$

$$\psi(x) \longrightarrow e^{-\frac{i}{2} \gamma_5 \phi} \psi$$

de donde

$$A(x) \longrightarrow A(x) \cos \phi - B(x) \sin \phi$$

$$B(x) \longrightarrow A(x) \sin \phi + B(x) \cos \phi \quad (2)$$

$$\psi(x) \longrightarrow \left[\cos \frac{\phi}{2} - i \gamma_5 \sin \frac{\phi}{2} \right] \psi(x)$$

Entonces

$$L(x) \longrightarrow L(x) + \delta L(x)$$

$$\delta L(x) = \frac{1}{2} m \bar{\psi}(x) \left[(1 - \cos \phi) + i \gamma_5 \sin \phi \right] \psi(x)$$

$$+ m g [A^2(x) + B^2(x)] \left[(1 - \cos \phi) A(x) + \sin \phi B(x) \right]$$

$$+ \sqrt{2} \lambda g \left[(A^2(x) - B^2(x)) (1 - \cos 2\phi) + 2A(x)B(x) \sin 2\phi \right]$$

$$+ \sqrt{2} \lambda m \left[A(x) (1 - \cos \phi) + B(x) \sin \phi \right] \quad (3)$$

Es decir que si $m = \lambda = 0$ la transformación (2) sería una simetría exacta.

Consideremos ahora la transformación

$$A(x) \longrightarrow A(x) + \delta, \quad m \longrightarrow m - 2g\delta, \quad \lambda \longrightarrow \lambda + \frac{m\delta}{\sqrt{2}} + \frac{g\delta^2}{\sqrt{2}} \quad (4)$$

Entonces se comprueba fácilmente que

$$L(A + \delta, m - 2g\delta, \lambda - \frac{m\delta}{\sqrt{2}} + \frac{g\delta^2}{\sqrt{2}}) = L(A, m, \lambda) \quad (1)$$

donde δ es un parámetro real arbitrario y las cantidades que no figuran explícitamente no cambian bajo esta transformación. Esta identidad, la probaremos más adelante, se llama identidad de scaling.

A primera vista el Lagrangiano de Weiss-Zumino (26.2) es uno describiendo la interacción de un campo spinorial y dos campos escalares mediante acoplamiento de tipo Yukawa y autoacoplos de los campos escalares de tipo ϕ^4 en el que se han impuesto algunas condiciones sobre las masas y las constantes de acoplamiento. Sin embargo es mucho más que esto. El punto esencial, es que como estas condiciones son dictadas por el grupo de simetría subyacente, se espera que estas correlaciones no sean válidas solo en la aproximación árbol sino también después de la renormalización. En particular deberíamos renormalizar la teoría sin introducir ni nuevas masas ni constantes de acoplamiento. En particular ya que todas las masas son iguales pues

$$[P^\mu, S_\alpha] = 0 \quad (2)$$

y la interacción mantiene esa igualdad, esperamos que

$$Z_{M_A} = Z_{M_B} = Z_{M_\psi} \quad (3)$$

y que

$$Z_A = Z_B = Z_\psi \quad (4)$$

Similarmemente, dadas (3) y (4), la igualdad (1) que correlaciona la escala de A y m , conduce a esperar que haya relaciones muy fuertes entre (3) y (4). Entonces, si la supersimetría debe ser mantida después de la renormalización esperamos fuertes condiciones sobre las constantes de renormalización

Weiss y Zumino [J. WEISS y B. ZUMINO Phys. Lett. 59B, 52 (1975)] han llevado a cabo cálculos en la aproximación de un loop para comprobar si estas condiciones son satisfechas. Ellos han encontrado los siguientes resultados:

- i) Hay una sola renormalización másica y es logarítmicamente divergente
- ii) Hay una sola renormalización de la función de ondas y es igual a la de la masa
- iii) La renormalización de los vértices de Yukawa es finita.

Para obtener un modelo más realista sería deseable introducir una masa distinta para fermiones y bosones y hacerlo de forma de que no se pierdan las propiedades "buenas" de la supersimetría. La forma obvia de hacerlo es mediante ruptura espontánea de la simetría, sin embargo se sabe que esto no es posible en el lagrangiano de Wess-Zumino [J. ILLIOPOULOS y B. ZUMINO *Nucl. Phys.* 76B, 310 (1974)] [A. SALAM y J. STRATHDEE *Phys. Lett.* 59B, 465 (1974)] y mismo a la continuación que esto es debido a que el lagrangiano considerado ya está espontáneamente roto.

Comenzemos (36.21):

$$\begin{aligned}
 L(x) = & \frac{1}{2} \partial_\mu A(x) \partial^\mu A(x) - \frac{1}{2} m^2 A^2(x) - \frac{1}{2} \partial_\mu B(x) \partial^\mu B(x) - \frac{1}{2} m^2 B^2(x) + \frac{i}{2} \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) \\
 & - \frac{1}{2} m \bar{\psi}(x) \psi(x) - \frac{1}{2} g^2 [A^2(x) + B^2(x)]^2 - m g [A^2(x) + B^2(x)] A(x) - \\
 & - g \bar{\psi}(x) [A(x) + i \gamma_5 B(x)] \psi(x) - \sqrt{2} \lambda g [A^2(x) - B^2(x)] - \sqrt{2} \lambda m A(x) - \lambda^2
 \end{aligned} \quad (1)$$

que se puede escribir

$$\begin{aligned}
 L(x) = & \frac{1}{2} \partial_\mu A(x) \partial^\mu A(x) - \frac{1}{2} \partial_\mu B(x) \partial^\mu B(x) + \frac{i}{2} \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) - \frac{1}{2} m \bar{\psi}(x) \psi(x) \\
 & - g \bar{\psi}(x) [A(x) + i \gamma_5 B(x)] \psi(x) - \frac{g^2}{2} [A^2(x) + B^2(x)] \left[\left(A(x) + \frac{m}{g} \right)^2 + B^2(x) \right] \\
 & - \sqrt{2} \lambda g \left[\left(A(x) + \frac{m}{2g} \right)^2 - B^2 \right] + \sqrt{2} \lambda g \left(\frac{m^2}{4g^2} + \frac{\lambda}{\sqrt{2}g} \right)
 \end{aligned} \quad (2)$$

Aún más

$$\begin{aligned}
 L(x) = & \frac{1}{2} \partial_\mu A(x) \partial^\mu A(x) - \frac{1}{2} \partial_\mu B(x) \partial^\mu B(x) + \frac{i}{2} \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) - \frac{1}{2} m \bar{\psi}(x) \psi(x) \\
 & - g \bar{\psi}(x) [A(x) + i \gamma_5 B(x)] \psi(x) - \frac{g^2}{2} \left\{ \left[A(x) + \frac{m+M}{2g} \right]^2 + B^2(x) \right\} \left\{ \left[A(x) + \frac{m-M}{2g} \right]^2 + B^2(x) \right\}
 \end{aligned}$$

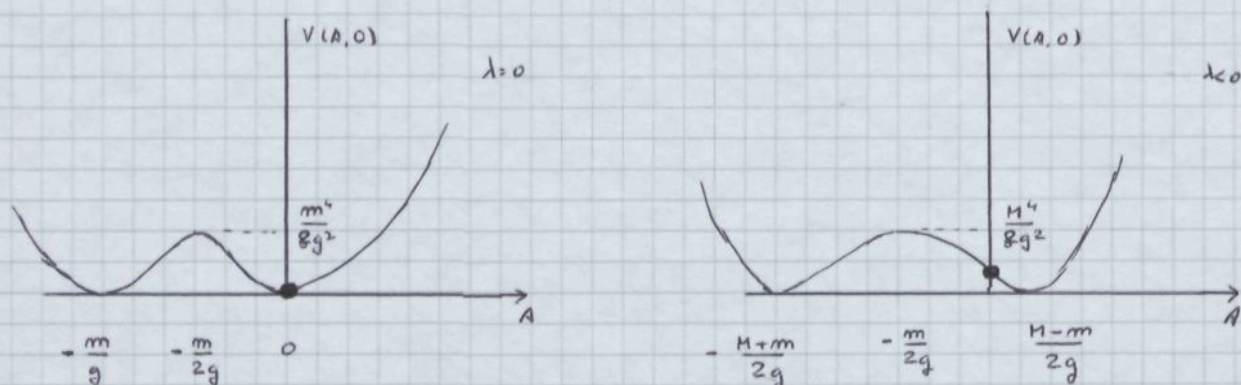
donde

$$M^2 = m^2 - 4\sqrt{2} \lambda g \quad (1)$$

donde supondremos $\lambda < 0$. El potencial es pues

$$V(A, B) = \frac{g^2}{2} \left\{ \left[A(x) + \frac{m+M}{2g} \right]^2 + B^2(x) \right\} \left\{ \left[A(x) + \frac{m-M}{2g} \right]^2 + B^2(x) \right\} \quad (2)$$

La forma de este potencial es



y para $\langle A \rangle = \langle B \rangle = 0$ estamos en los puntos $\bullet$. En el caso $\lambda \neq 0$ podemos hacer

$$A(x) = \tilde{A}(x) + \frac{M-m}{2g} \quad B(x) = \tilde{B}(x)$$

y obtenemos

$$\begin{aligned} L(x) = & \frac{1}{2} \partial^\mu \tilde{A}(x) \partial_\mu \tilde{A}(x) - \frac{1}{2} \partial^\mu \tilde{B}(x) \partial_\mu \tilde{B}(x) + \frac{i}{2} \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) - \frac{1}{2} M \bar{\psi}(x) \psi(x) \\ & - g \bar{\psi}(x) [\tilde{A}(x) + i \gamma_5 \tilde{B}(x)] \psi(x) - \\ & - \frac{g^2}{2} \left\{ \left[\tilde{A}(x) + \frac{M}{g} \right]^2 + \tilde{B}^2(x) \right\} \left\{ \tilde{A}^2(x) + \tilde{B}^2(x) \right\} \end{aligned} \quad (1)$$

Es decir que el Lagrangiano de Weinberg-Zumino con $\lambda \neq 0$ es equivalente a uno de Weinberg-Zumino con $\lambda = 0$ y $M^2 = m^2 - 4\sqrt{2} \lambda g$.

Consideremos el modelo de Wess-Zumino con $\lambda = 0$. Entonces la densidad Lagrangiana es

$$\begin{aligned}
 L(x) = & \frac{1}{2} \partial^\mu A(x) \partial_\mu A(x) - \frac{1}{2} m^2 A^2(x) + \frac{1}{2} \partial^\mu B(x) \partial_\mu B(x) - \frac{1}{2} m^2 B^2(x) \\
 & + \frac{i}{2} \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) - \frac{1}{2} m \bar{\psi}(x) \psi(x) - \frac{1}{2} g^2 [A^2(x) + B^2(x)]^2 \\
 & - m g [A^2(x) + B^2(x)] A(x) - g \bar{\psi}(x) [A(x) + i \gamma_5 B(x)] \psi(x)
 \end{aligned} \quad (1)$$

Esta densidad Lagrangiana se puede escribir como la suma de varios términos cada uno de los cuales es invariante bajo las transformaciones de supersimetría. Un término invariante viene dado por (34.1) y es

$$\begin{aligned}
 L_0(x) = & \frac{1}{2} \partial^\mu A(x) \partial_\mu A(x) + \frac{1}{2} m^2 A^2(x) + \frac{1}{2} \partial^\mu B(x) \partial_\mu B(x) + \frac{1}{2} m^2 B^2(x) \\
 & + \frac{i}{2} \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) + \frac{1}{2} g^2 [A^2(x) + B^2(x)]^2 + m g [A^2(x) + B^2(x)] A(x)
 \end{aligned} \quad (2)$$

Por otra parte cada uno de los términos del polinomio que determina $V(\Phi_A)$ usado en (34.2) nos da un término supersimétrico y así obtenemos

$$L_m(x) = -m^2 A^2(x) - m^2 B^2(x) - m g [A^2(x) + B^2(x)] A(x) - \frac{1}{2} m \bar{\psi}(x) \psi(x) \quad (3)$$

$$L_g(x) = -g^2 [A^2(x) + B^2(x)]^2 + m g [A^2(x) + B^2(x)] A(x) - g \bar{\psi}(x) [A(x) + i \gamma_5 B(x)] \psi(x) \quad (4)$$

Notar que el que proviene del último no interesa pues simplemente

$$L_\lambda(x) = -\sqrt{2} \lambda g [A^2(x) - B^2(x)] - \sqrt{2} \lambda m A(x) - \lambda^2 \quad (5)$$

que es la parte que puede ser eliminada. Entonces es evidente que

$$L(x) = L_0(x) + L_m(x) + L_g(x) \quad (6)$$

J. WESS y B. ZUMINO [Phys. Letters 49B, 52 (1974)] y J. ILIOPOULOS y B. ZUMINO [Nuc. Phys. B76, 310 (1974)] encuentran conveniente introducir además de los campos $A(x)$ y

$B(x)$ los campos auxiliares $F(x)$ y $G(x)$ definidos como

$$F_{\pm}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [F(x) \pm i G(x)] \quad (1)$$

De (35.5)

$$F(x) = -m A(x) - g [A^2(x) - B^2(x)] \quad (2)$$

$$G(x) = -m B(x) - 2g A(x) B(x)$$

Entonces los distintos términos que componen el Lagrangiano son

$$L_0(x) = \frac{1}{2} \partial^\mu A(x) \partial_\mu A(x) + \frac{1}{2} \partial^\mu B(x) \partial_\mu B(x) + \frac{i}{2} \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) \\ + \frac{1}{2} F^2(x) + \frac{1}{2} G^2(x) \quad (3)$$

$$L_m(x) = m \left[F(x) A(x) + G(x) B(x) - \frac{1}{2} \bar{\psi}(x) \psi(x) \right] \quad (4)$$

$$L_g(x) = g \left\{ F(x) A^2(x) - F(x) B^2(x) + 2G(x) A(x) B(x) - \bar{\psi}(x) [A(x) + i\gamma_5 B(x)] \psi(x) \right\} \quad (5)$$

Entonces las ecuaciones del movimiento son

$$[i\gamma^\mu \partial_\mu - m] \psi(x) = 2g [A(x) + i\gamma_5 B(x)] \psi(x)$$

$$\partial^\mu \partial_\mu A(x) = -g \bar{\psi}(x) \psi(x) + m F(x) + 2g F(x) A(x) + 2g G(x) B(x)$$

(6)

$$\partial^\mu \partial_\mu B(x) = -ig \bar{\psi}(x) \gamma_5 \psi(x) + m G(x) - 2g F(x) B(x) + 2g G(x) A(x)$$

$$F(x) = -m A(x) - g [A^2(x) - B^2(x)]$$

$$G(x) = -m B(x) - 2g A(x) B(x)$$

De (28.1) las leyes de transformación de los espinores son

$$\delta A(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\epsilon} \psi(x)$$

$$\delta B(x) = -\frac{i}{\sqrt{2}} \bar{\epsilon} \gamma_5 \psi(x)$$

$$\delta \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ F(x) - i \gamma_5 G(x) - i \gamma^\mu \partial_\mu A(x) + \gamma_5 \gamma^\mu \partial_\mu B(x) \right\} \epsilon \quad (1)$$

$$\delta F(x) = -\frac{i}{\sqrt{2}} \bar{\epsilon} \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x)$$

$$\delta G(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\epsilon} \gamma_5 \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x)$$

Eliminando F y G se obtienen de nuevo (36.3).

Por otra parte es fácil comprobar que la corriente conservada es

$$J^\mu(x) = \gamma^\nu [\partial_\nu A(x) + i \gamma_5 \partial_\nu B(x)] \gamma^\mu \psi(x) + \\ + i g \gamma^\mu [A(x) + i \gamma_5 B(x)]^2 \psi(x) + i m \gamma^\mu [A(x) + i B(x)] \psi(x) \quad (2)$$

La densidad Lagrangiana (42.1) es claramente renormalizable en el sentido usual. Si uno se olvida de momento de las transformaciones de supersimetría el Lagrangiano más general para $A(x)$, $B(x)$ y $\psi(x)$, que sea renormalizable, tendrá tres parámetros de masa y siete constantes de acoplamiento si queremos conservación de paridad. La invariancia de supergauge se manifiesta imponiendo relaciones entre estas cantidades de forma que se acabe con dos parámetros independientes m y g . Queremos ver que es posible renormalizar la teoría y mantener aún la invariancia bajo las transformaciones de supergauge, en otras palabras la eliminación de las divergencias no nos forzará a introducir más parámetros que los ya existentes en el Lagrangiano original.

Procedamos ahora a calcular en la aproximación de un loop los distintos vertices y autoenergías que aparecen en (42.1). Siguiendo el método de Weiss-Zumino vamos a trabajar con los campos auxiliares F y G .