

XV - IDENTIDADES DE WARD (O.E.D.) II

Recordemos que en $L(x)$ aun cuando no hayamos escrito subíndices todos los campos se hallan en la representación de Heisenberg. Cuando se realiza un cálculo en teoría de perturbaciones los campos que aparecen se dan en la representación de interacción y les añadiremos un índice I . La relación entre ambas representaciones es

$$A^I(x) = e^{iH_0 t} A(0, \vec{x}) e^{-iH_0 t} \quad (1)$$

Para cualquier t , por ejemplo $t=0$, un campo $A(0, \vec{x})$ puede ser desarrollado en los operadores creación y aniquilación usuales pero $\exp(\pm i\vec{k}\cdot\vec{x}) \rightarrow \exp(\mp i\vec{k}\cdot\vec{x})$. El efecto de la transformación (1) en tales campos es $\exp(\mp i\vec{k}\cdot\vec{x}) \rightarrow \exp(\pm i\vec{k}\cdot\vec{x})$ y por tanto los $A^I(x)$ tienen la misma expresión que los campos libres y les indicaremos $A^I(x) \equiv A^{(0)}(x)$.

Recordemos que todo el contenido dinámico de la teoría viene dado en términos de las funciones de Green. Estas son valores esperados en el vacío de productos T de los operadores campo $A_\mu(x)$, $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \langle \underline{0} | T (\xi(x_1) \xi(x_2) \dots \xi(x_n)) | \underline{0} \rangle \quad (2)$$

donde $\xi(x) = A_\mu(x)$, $\psi(x)$ o $\bar{\psi}(x)$ son campos en la representación de Heisenberg y $|\underline{0}\rangle$ es el estado de energía más baja del Hamiltoniano

$$H |\underline{0}\rangle = 0 \quad (3)$$

donde H es el Hamiltoniano total en la representación de Heisenberg y donde la escala de energía se ha fijado de forma que el estado fundamental tenga energía nula. Las funciones de Green son covariantes. El producto ordenado T rompe rotas la covariancia, pero también un ordenado en los operadores campo no es covariante. Puede comprobarse usando teoría de perturbaciones la covariancia de las funciones de Green.

La evaluación de las funciones de Green en teoría de perturbaciones viene definida a través del teorema de Gell-Mann - Low

$$G(x_1, x_2, \dots, x_N) = \frac{\langle 0 | T \left(e^{i \int d^4x L_{int}^I(x)} \xi^{(0)}(x_1) \xi^{(0)}(x_2) \dots \xi^{(0)}(x_N) \right) | 0 \rangle}{\langle 0 | T \left(e^{i \int d^4x L_{int}^I(x)} \right) | 0 \rangle} \quad (1)$$

donde $|0\rangle$ es el vacío definido por

$$a(\vec{p}, \lambda) |0\rangle = b(\vec{p}, \lambda) |0\rangle = \bar{a}(\vec{k}, \sigma) |0\rangle = 0 \quad (2)$$

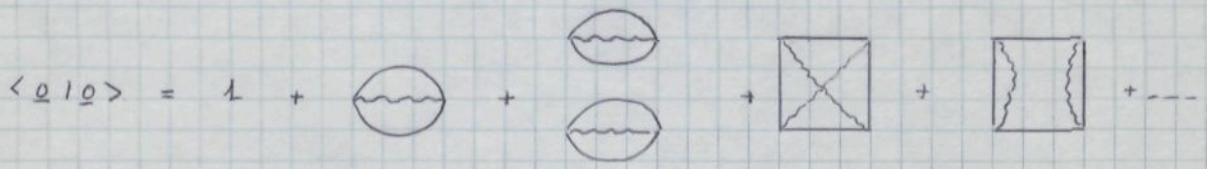
La hipótesis adiabática (si la constante de acoplamiento varía lentamente como función del tiempo el estado fundamental del Hamiltoniano inicial evoluciona al estado fundamental del final) relaciona $|0\rangle$ y $|\underline{0}\rangle$

$$|\underline{0}\rangle = T e^{i \int_{-\infty}^0 d^4x L_{int}^I(x)} |0\rangle \quad (3)$$

$$\langle \underline{0} | = \frac{1}{\langle 0 | S | 0 \rangle} \langle 0 | T e^{i \int_0^{\infty} d^4x L_{int}^I(x)}$$

De hecho $\langle \underline{0} | = \langle 0 | T e^{-i \int_{-\infty}^0 d^4x L_{int}^I(x)}$

con lo cual $\langle \underline{0} | \underline{0} \rangle = 1$. Esto es equivalente a una renormalización del vacío cuando $\langle 0 | 0 \rangle = 1$ y



Esto es por lo que el denominador de (1) cancela los diagramas de vacío del numerador y basta considerar los diagramas conectados.

Es evidente que los elementos de la matriz S pueden obtenerse como transformadas de Fourier de (1) y pasar después a la capa masónica, ya que esto es equivalente a sustituir los campos por operadores creación y aniquilación sobre la capa masónica y $u, \bar{u}, v, \bar{v}, e^{\mu}, e^{\mu*}$.

Las identidades entre las funciones de Green consecuencia de la invariancia de gauge local se llaman identidades de Ward-Takahashi. Hay un método muy útil para derivarlas usando las transformaciones de Becchi-Rouet-Stora [BECCHI, ROUET, STORA]
 Consideremos en lugar del lagrangiano de la Q.E.D $L(x)$ dado en (3.2)

$$\tilde{L}(x) = L(x) + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) - \frac{1}{2} a \lambda^2 \phi(x) \phi(x) \quad (1)$$

donde $\phi(x)$ es un campo escalar real. Veamos que (1) es invariante bajo las transformaciones

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &\longrightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \omega \partial_\mu \phi(x) \\ \psi(x) &\longrightarrow \psi'(x) = e^{+i e \omega \phi(x)} \psi(x) \\ \phi(x) &\longrightarrow \phi'(x) = \phi(x) + \frac{\omega}{a} \partial_\mu A^\mu(x) \end{aligned} \quad (2)$$

con la condición

$$(\square + a \lambda^2) \phi(x) = 0 \quad (3)$$

que es precisamente la ecuación del movimiento del campo escalar. Se tiene

$$\begin{aligned} \tilde{L}(x) &\longrightarrow \tilde{L}'(x) = \tilde{L}(x) - e \omega \bar{\psi}(x) \cancel{\gamma^\mu \psi(x)} \partial_\mu \phi(x) - \frac{1}{2} \lambda^2 [2\omega A_\mu(x) \partial^\mu \phi(x) \\ &- \omega^2 (\partial_\mu \phi(x)) (\partial^\mu \phi(x))] + \frac{1}{2a} [2\omega (\partial_\mu A^\mu(x)) \square \phi(x) - \omega^2 (\square \phi(x))^2] + \\ &+ e \omega \bar{\psi}(x) \cancel{\gamma^\mu \psi(x)} \partial_\mu \phi(x) + \frac{\omega}{a} (\partial_\mu \phi(x)) (\partial^\mu \partial^\lambda A_\lambda(x)) + \frac{\omega^2}{2a^2} [\partial_\mu \partial_\nu A^\nu(x)] [\partial^\mu \partial^\lambda A_\lambda(x)] \\ &- \omega \lambda^2 \phi(x) \partial_\mu A^\mu(x) - \frac{\lambda^2 \omega^2}{2a} [\partial_\mu A^\mu(x)]^2 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{L}'(x) &= \tilde{L}(x) - \lambda^2 \omega \partial_\mu [(A^\mu(x) - \frac{\omega}{2} \partial^\mu \phi(x)) \phi(x)] + \frac{\omega}{a} \partial_\mu [\phi(x) \partial^\mu (\partial^\lambda A_\lambda(x))] + \\ &+ \frac{\omega^2}{2a^2} \partial_\mu [(\partial_\lambda A^\lambda(x)) \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu(x))] + \frac{\omega}{a} [\square \phi(x) + a \lambda^2 \phi(x)] [\partial^\mu A_\mu(x) - \frac{\omega}{2} \square \phi(x)] \\ &- \frac{\omega}{a} \phi(x) [\square (\partial_\mu A^\mu(x)) + a \lambda^2 (\partial_\mu A^\mu(x))] - \frac{\omega^2}{2a^2} \partial_\lambda A^\lambda(x) [\square (\partial_\mu A^\mu(x)) + a \lambda^2 (\partial_\mu A^\mu(x))] \quad (4) \end{aligned}$$

Tomando en cuenta (3) y (XIV-7.2)

$$\begin{aligned} \tilde{L}'(x) &= \tilde{L}(x) + \partial_\mu \left\{ -\lambda^2 \omega \phi(x) [A^\mu(x) - \frac{\omega}{2} \partial^\mu \phi(x)] + \frac{\omega}{a} \phi(x) \partial^\mu [\partial^\lambda A_\lambda(x)] \right. \\ &\left. + \frac{\omega^2}{2a^2} [\partial_\lambda A^\lambda(x)] [\partial^\mu \partial^\nu A_\nu(x)] \right\} \quad (5) \end{aligned}$$

Como $\tilde{L}'(x)$ y $\tilde{L}(x)$ difieren solo en una cuadratura exacta las transformaciones (2) son de simetría. Estas transformaciones definen un grupo de Lie uniparamétrico. Fueron introducidas por primera vez en el marco de las teorías no-abelianas de gauge y se llaman transformaciones de BRS.

Como $\phi(x)$ no está acoplado a los otros campos en $\tilde{L}(x)$ permanecerá siempre como un campo libre en todos los ordenes de teoría de perturbaciones. Por tanto, toda la dinámica del sector $\phi(x)$ viene dada por el propagador libre

$$\begin{aligned} \underline{\phi(x) \phi(y)} &= \langle \underline{0} | T(\phi(x) \phi(y)) | \underline{0} \rangle = \langle \underline{0} | T(\phi^{(0)}(x) \phi^{(0)}(y)) | \underline{0} \rangle = \\ &= \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{-ik \cdot (x-y)} \frac{1}{k^2 - a\lambda^2 + i\epsilon} \end{aligned} \quad (1)$$

Más aún, cualquier función de Green con un número impar de campos $\phi(x)$ se anula; en particular

$$\langle \underline{0} | T(\psi(y_1) \dots \psi(y_N) \bar{\psi}(x_1) \dots \bar{\psi}(x_N) A_{\mu_1}(z_1) \dots A_{\mu_N}(z_N) \phi(x)) | \underline{0} \rangle = 0 \quad (2)$$

Examinemos las consecuencias de la invariancia de las funciones de Green bajo las transformaciones BRS en algunos casos especiales.

i) $\langle \underline{0} | T(A_\mu(x) \phi(y)) | \underline{0} \rangle = 0$

Bajo las transformaciones de BRS

$$\begin{aligned} \langle \underline{0} | T(A_\mu(x) \phi(y)) | \underline{0} \rangle &= \langle \underline{0} | T(A'_\mu(x) \phi'(y)) | \underline{0} \rangle = \\ &= \langle \underline{0} | T\left\{ [A_\mu(x) - \omega \partial_\mu \phi(x)] [\phi(y) + \frac{\omega}{a} \partial_\nu A^\nu(y)] \right\} | \underline{0} \rangle \end{aligned}$$

entonces, en primer orden en ω , obtenemos la identidad

$$\frac{1}{a} \langle \underline{0} | T(A_\mu(x) \partial_\nu A^\nu(y)) | \underline{0} \rangle = \langle \underline{0} | T(\partial_\mu \phi(x) \phi(y)) | \underline{0} \rangle \quad (3)$$

ii) $\langle \underline{0} | T(\psi(y) \bar{\psi}(x) \phi(z)) | \underline{0} \rangle = 0$

$$\begin{aligned} \langle \underline{0} | T(\psi(y) \bar{\psi}(x) \phi(z)) | \underline{0} \rangle &= \langle \underline{0} | T(\psi'(y) \bar{\psi}'(x) \phi'(z)) | \underline{0} \rangle = \\ &= \langle \underline{0} | T\left\{ [\psi(y) + i\epsilon \omega \phi(y) \psi(y)] [\bar{\psi}(x) - i\epsilon \omega \phi(x) \bar{\psi}(x)] [\phi(z) + \frac{\omega}{a} \partial_\mu A^\mu(z)] \right\} | \underline{0} \rangle \end{aligned}$$

y en primer orden en ω

$$\begin{aligned} i\epsilon \left\{ \langle \underline{0} | T(\phi(y) \psi(y) \bar{\psi}(x) \phi(z)) | \underline{0} \rangle - \langle \underline{0} | T(\psi(y) \phi(x) \bar{\psi}(x) \phi(z)) | \underline{0} \rangle \right\} = \\ = -\frac{1}{a} \langle \underline{0} | T(\psi(y) \bar{\psi}(x) \partial_\mu A^\mu(z)) | \underline{0} \rangle \end{aligned} \quad (4)$$

que son ejemplos de las llamadas identidades de Ward-Takahashi.

Veamos ahora las implicaciones de estas identidades en términos de los propagadores completos del fermión, del fotón y de la función vertice fermión - fermión - fotón. Definimos estas cantidades como

$$iS(p) \equiv \int d^4x e^{ip \cdot x} \langle 0 | T (\psi(x) \bar{\psi}(0)) | 0 \rangle$$

$$iD_{\mu\nu}(q) \equiv \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle 0 | T (A_\mu(x) A_\nu(0)) | 0 \rangle \tag{1}$$

$$V_\mu(p, p+q) \equiv \int d^4x d^4y e^{i(p \cdot x + q \cdot y)} \langle 0 | T (\psi(x) \bar{\psi}(0) A_\mu(y)) | 0 \rangle$$

La transformada de Fourier de la identidad (4.3) es

$$\int d^4x e^{iq \cdot x} \int d^4y e^{-iq' \cdot y} \left\{ \frac{1}{a} \langle 0 | T (A_\mu(x) \partial_\nu A^\nu(y)) | 0 \rangle - \langle 0 | T (\partial_\mu \phi(x) \phi(y)) | 0 \rangle \right\} = 0$$

Notemos que

$$\partial_\mu^x T (A^\mu(x) A^\nu(y)) = T (\partial_\mu A^\mu(x) A^\nu(y)) + \delta(x^0 - y^0) [A^0(x), A^\nu(y)]$$

y una fórmula analoga en el segundo término. El último término de esta igualdad es nulo debido a las reglas de conmutación a tiempos iguales y usando este hecho e integrando por partes

$$\int d^4x e^{iq \cdot x} \int d^4y e^{-iq' \cdot y} \left\{ \frac{i}{a} q'^\nu \langle 0 | T (A_\mu(x) A_\nu(y)) | 0 \rangle + i q'_\mu \langle 0 | T (\phi(x) \phi(y)) | 0 \rangle \right\} = 0$$

Usando invariancia traslacional

$$A(x-y) = e^{-iP \cdot y} A(x) e^{+iP \cdot y} \tag{2}$$

$$\int d^4y e^{-i(q'-q) \cdot y} \int d^4x e^{iq \cdot (x-y)} \left\{ \frac{i}{a} q'^\nu \langle 0 | T (A_\mu(x-y) A_\nu(0)) | 0 \rangle + i q'_\mu \langle 0 | T (\phi(x-y) \phi(0)) | 0 \rangle \right\} = 0$$

$$\Rightarrow \int d^4y e^{-i(q'-q) \cdot y} \left\{ -\frac{1}{a} q'^\nu D_{\mu\nu}(q) - g_\mu \frac{1}{q^2 - a\lambda^2 + i\epsilon} \right\} = 0$$

$$\Rightarrow q^\nu D_{\mu\nu}(q) = -a q_\mu \frac{1}{q^2 - a\lambda^2 + i\epsilon}$$

esto es

$$q^\nu D_{\mu\nu}(q) = q^\nu D_{\mu\nu}^{(0)}(q) \tag{1}$$

Esta identidad nos dice que orden por orden en teoría de perturbaciones la parte no transversal del propagador del fotón es igual a la del propagador libre

Realicemos un cálculo análogo a partir de (4.4)

$$-\frac{1}{a} \langle \underline{0} | T(\psi(x) \bar{\psi}(0) \partial_\mu A^\mu(y)) | \underline{0} \rangle =$$

$$= i\epsilon \langle \underline{0} | T(\phi(x) \psi(x) \bar{\psi}(0) \phi(y)) | \underline{0} \rangle - i\epsilon \langle \underline{0} | T(\psi(x) \phi(0) \bar{\psi}(0) \phi(y)) | \underline{0} \rangle$$

$$-\frac{1}{a} \int d^4x e^{ip \cdot x} \int d^4y e^{iq \cdot y} \langle \underline{0} | T(\psi(x) \bar{\psi}(0) \partial^\mu A_\mu(y)) | \underline{0} \rangle =$$

$$= i\epsilon \int d^4x e^{ip \cdot x} \int d^4y e^{iq \cdot y} \{ \langle \underline{0} | T(\phi(x) \phi(y)) | \underline{0} \rangle \langle \underline{0} | T(\psi(x) \bar{\psi}(0)) | \underline{0} \rangle -$$

$$- \langle \underline{0} | T(\phi(0) \phi(y)) | \underline{0} \rangle \langle \underline{0} | T(\psi(x) \bar{\psi}(0)) | \underline{0} \rangle \}$$

$$\frac{i}{a} q^\mu V_\mu(p, p+q) = i\epsilon \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{1}{k^2 - a\lambda^2 + i\epsilon} \cdot \int d^4y e^{i(q+k) \cdot y}$$

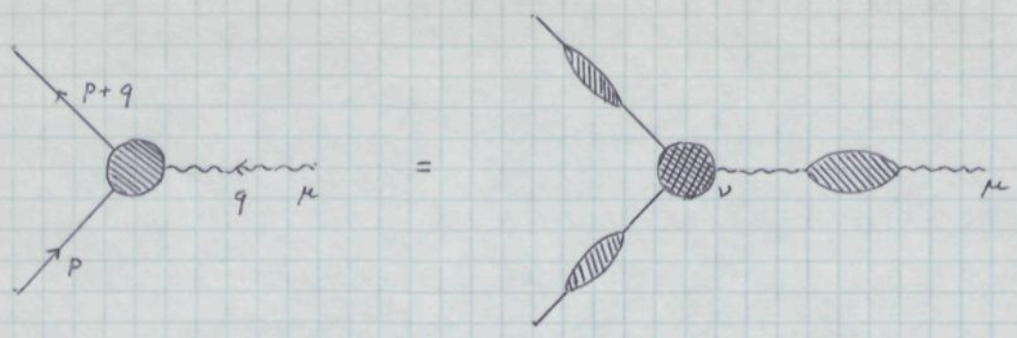
$$\{ \int d^4x e^{i(p-k) \cdot x} \langle \underline{0} | T(\psi(x) \bar{\psi}(0)) | \underline{0} \rangle - \int d^4x e^{ip \cdot x} \langle \underline{0} | T(\psi(x) \bar{\psi}(0)) | \underline{0} \rangle \}$$

$$= -\frac{e}{(2\pi)^4} \frac{(2\pi)^4}{q^2 - a\lambda^2 + i\epsilon} \{ \int d^4x [e^{i(p+q) \cdot x} - e^{ip \cdot x}] \langle \underline{0} | T(\psi(x) \bar{\psi}(0)) | \underline{0} \rangle \Rightarrow$$

$$\frac{1}{a} q^\mu V_\mu(p, p+q) = i\epsilon \frac{1}{q^2 - a\lambda^2 + i\epsilon} [iS(\not{p} + \not{q}) - iS(\not{p})] \tag{2}$$

Es conveniente escribir el vértice completo $V_\mu(p, p+q)$ en términos de un vértice $\Gamma_\mu(p, p+q)$ con los propagadores correspondientes externos amputados

$$V_\mu(p, p+q) \equiv -i\epsilon iS(\not{p} + \not{q}) \Gamma^\mu(p, p+q) iS(\not{p}) iD_{\nu\mu}(q) \tag{3}$$



La cantidad $\Gamma^\mu(p, p+q)$ se llama función vértice propia. De (6.2) y (6.3)

$$q_\mu \Gamma^\mu(p, p+q) = S^{-1}(\not{p} + \not{q}) - S^{-1}(\not{p}) \tag{1}$$

Esta fue obtenida por primera vez por Takahashi. El límite $q \rightarrow 0$ de esta relación habría sido obtenida previamente por Ward. Por esta razón (1) es conocido con el nombre de identidad de Ward-Takahashi.

En $\Gamma^\mu(p, p+q)$ podemos separar el término de acoplamiento puntual y escribir

$$\Gamma^\mu(p, p+q) \equiv \gamma^\mu + \Lambda^\mu(p, p+q) \tag{2}$$

Diferenciando (1)

$$\Gamma^\mu(p, p+q) = \frac{\partial}{\partial q_\mu} S^{-1}(\not{p} + \not{q}) - q_\alpha \frac{\partial}{\partial q_\mu} \Gamma^\alpha(p, p+q) \tag{3}$$

y en el límite $q \rightarrow 0$

$$\Gamma^\mu(p, p) = \left. \frac{\partial S^{-1}(\not{p} + \not{q})}{\partial q_\mu} \right|_{q=0} \tag{4}$$

que es la igualdad obtenida inicialmente por Ward

La forma más general de $S(\not{p})$ puede escribirse

$$iS(\not{p}) = iS^{(0)}(\not{p}) + iS^{(0)}(\not{p}) [-i\Sigma(\not{p})] iS^{(0)}(\not{p}) + \dots \tag{5}$$



donde $\Sigma(\not{p})$ es la energía irreducible del electrón. Podemos sumar esta serie

$$iS(\not{x}) = iS^{(0)}(\not{x}) \frac{1}{1 + i\Sigma(\not{x}) iS^{(0)}(\not{x})} = \left\{ \frac{1}{iS^{(0)}(\not{x})} + i\Sigma(\not{x}) \right\}^{-1} \Rightarrow$$

$$iS(\not{x}) = \frac{i}{\not{x} - m - \Sigma(\not{x}) + i\epsilon}$$

(1)

$$iS^{-1}(\not{x}) = i [\not{x} - m - \Sigma(\not{x}) + i\epsilon]$$

Notar que $\Sigma(\not{x})$ se obtiene de $S^{-1}(\not{x})$ separando la contribución de orden más bajo

Se puede escribir

$$\Sigma(\not{x}) \equiv \Sigma_1(p^2) + (\not{x} - m) \Sigma_2(p^2)$$

(2)

Se tiene que (7.4) equivale a

$$\Lambda^\mu(p, p) = - \left. \frac{\partial \Sigma(\not{x} + \not{q})}{\partial q_\mu} \right|_{q=0}$$

(3)

Por otra parte la descomposición más general de $\Lambda^\mu(p, p)$ en amplitudes invariantes (factores de forma) es

$$\Lambda^\mu(p, p) = \gamma^\mu \Lambda_1(p^2) + p^\mu \Lambda_2(p^2) + \gamma^\mu \not{p} \Lambda_3(p^2) + p^\mu \not{p} \Lambda_4(p^2)$$

(4)

Insertando (2) y (4) en (3) se obtiene

$$\Lambda_1(p^2) = -\Sigma_2(p^2)$$

$$\Lambda_2(p^2) = -2 \frac{\partial}{\partial p^2} [\Sigma_1(p^2) - m \Sigma_2(p^2)]$$

(5)

$$\Lambda_3(p^2) = 0$$

$$\Lambda_4(p^2) = -2 \frac{\partial}{\partial p^2} \Sigma_2(p^2)$$

esto es, como en la autoenergía, la función restante fuera de la capa más rica a transferencia de momento nula queda completamente determinada por invariancia gauge local. Las ecuaciones (5) son típicas de las ecuaciones dinámicas impuestas por invariancia gauge local.

Como en el caso del fermión podemos escribir para el fotón

$$i D_{\mu\nu}(q) = i D_{\mu\nu}^{(0)}(q) + i D_{\mu\rho}^{(0)}(q) [i \Pi^{\rho\lambda}(q)] i D_{\lambda\nu}^{(0)}(q) + \dots \quad (1)$$



donde $\Pi^{\mu\nu}(q)$ es la autoenergía propia del fotón. Notemos que

$$i q^\mu D_{\mu\nu}(q) = i q^\mu D_{\mu\nu}^{(0)}(q) + i q^\mu D_{\mu\rho}^{(0)}(q) [i \Pi^{\rho\lambda}(q)] i D_{\lambda\nu}^{(0)}(q) + \dots$$

y usando (6.1)

$$i q^\mu D_{\mu\rho}^{(0)}(q) [i \Pi^{\rho\lambda}(q)] i D_{\lambda\nu}^{(0)}(q) + \dots = 0 \quad (2)$$

de donde

$$i a \frac{q_\rho}{q^2 - a\lambda^2 + i\epsilon} [i \Pi^{\rho\lambda}(q)] \{ i D_{\lambda\nu}^{(0)}(q) + i D_{\lambda\sigma}^{(0)}(q) [i \Pi^{\sigma\omega}(q)] i D_{\omega\nu}^{(0)}(q) + \dots \} = 0$$

$$\Rightarrow i a \frac{1}{q^2 - a\lambda^2 + i\epsilon} [i q_\rho \Pi^{\rho\omega}(q)] i D_{\omega\nu}(q) = 0$$

Por tanto

$$q_\mu \Pi^{\mu\nu}(q) = \Pi^{\mu\nu}(q) q_\nu = 0 \quad (3)$$

Esto implica que (1) puede escribirse como

$$i D_{\mu\nu}(q) = i D_{\mu\nu}^{(0)}(q) + \frac{-i}{q^2 - \lambda^2 + i\epsilon} i \Pi_{\mu\nu}(q) \frac{-i}{q^2 - \lambda^2 + i\epsilon} + \dots$$

$$\Rightarrow i D_{\mu\nu}(q) = i D_{\mu\nu}^{(0)}(q) + \frac{-i}{q^2 - \lambda^2 + i\epsilon} i \Pi_{\mu\nu}(q) i D^{\omega\nu}(q)$$

$$\Rightarrow [(q^2 - \lambda^2) g_{\mu\nu} - \Pi_{\mu\nu}(q)] D^{\mu\nu}(q) = (q^2 - \lambda^2) D_{\mu\nu}^{(0)}(q) \quad (4)$$

Debido a (3) podemos escribir

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = (q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}) \Pi(q^2) \quad (5)$$

y de (6.1)

$$D_{\mu\nu}(q) = D_{\mu\nu}^{(0)}(q) + (q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}) D(q^2) \quad (6)$$

y usando (4)

$$D(q^2) = -\Pi(q^2) [q^2 - \lambda^2 + i\epsilon]^{-1} [q^2 - \lambda^2 + q^2 \Pi(q^2) + i\epsilon]^{-1} \quad (1)$$

Notemos de todo esto que

$$S^{-1}(p) = \not{p} - m - \Sigma(p) \quad (2)$$

$$D_{\mu\nu}^{-1}(q) = -(q^2 - \lambda^2) g_{\mu\nu} + (1 - \frac{1}{a}) q_\mu q_\nu + (q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}) \Pi(q^2)$$

Algunas veces se definen los propagadores transversales y longitudinales al fotón como

$$D_{\mu\nu}(q) = [g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}] D_T(q^2) + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} D_L(q^2)$$

$$D_L(q^2) = - \frac{a}{q^2 - a\lambda^2 + i\epsilon} \quad (3)$$

$$D_T(q^2) = -q^2 D(q^2) - \frac{1}{q^2 - \lambda^2 + i\epsilon} = - \frac{1}{q^2 - \lambda^2 + q^2 \Pi(q^2) + i\epsilon}$$

XV-A - REGULARIZACIÓN

Las reglas de Feynman dadas antes permiten calcular cualquier diagrama de tipo árbol, es decir sin loops. Tan pronto como aplicamos estas reglas a diagramas con loops encontramos divergencias debidas debido al comportamiento de los altos momentos de las amplitudes virtuales que hace el procedimiento perturbativo, al menos de la forma definida hasta ahora inútil. Las divergencias asociadas con el comportamiento debido a momentos elevados son llamadas ultravioletas y aquellas debidas a momentos muy bajos son llamadas infrarrojas.

Las divergencias infrarrojas quedan regularizadas por el término de masa del fotón λ . De momento no nos preocuparemos de ellas. Las divergencias ultravioletas suelen regularizarse por dos procedimientos distintos

i) Regularización dimensional.

Ha sido discutida antes en el Cap. XII. Recordemos

$$[\psi(x)] = M^{\frac{1}{2}(D-1)} = M^{\frac{3}{2} + \epsilon}, \quad [A_\mu(x)] = M^{\frac{D}{2} - 1} = M^{1 + \epsilon} \quad (1)$$

$$[e] = M^{2 - \frac{D}{2}} = M^{-\epsilon}$$

ii) Regularización Pauli-Villars

Para diagramas con loops de propagadores fotónicos, el método consiste, suponiendo $a=1$, en reemplazar el propagador del fotón por uno regularizado que contiene masas auxiliares M_i

$$\frac{1}{q^2 - \lambda^2 + i\epsilon} \longrightarrow \sum_i C_i \frac{1}{q^2 - M_i^2 + i\epsilon} \quad (2)$$

$$C_1 \equiv 1, \quad M_1 \equiv \lambda$$

Los coeficientes C_i y las masas auxiliares M_i se eligen de forma tal que se cancelen las divergencias usadas por la integración

$$\sum_i c_i \frac{1}{q^2 - M_i^2 + i\epsilon} = \sum_i c_i \frac{1}{q^2} \frac{1}{1 - M_i^2/q^2} =$$

$$= \sum_i c_i \frac{1}{q^2} \left[1 + \frac{M_i^2}{q^2} + \left(\frac{M_i^2}{q^2}\right)^2 + \dots \right] \quad (1)$$

Si queremos eliminar la divergencia de orden más elevado elegiremos

$$\sum_i c_i = 0 \quad (2)$$

La cancelación de las divergencias del orden siguiente se logra exigiendo además

$$\sum_i c_i M_i^2 = 0 \quad (3)$$

etc. Al final del cálculo se deben hacer tender las masas auxiliares hacia más infinito (notemos que todas las c_i quedan determinadas en función de las masas) y las integrales regularizadas son funciones de las masas auxiliares que juegan el papel de cutoff ultravioleta

i) Divergencia Logarítmica

$$\sum_{i=1}^2 c_i = 0 \Rightarrow$$

$$c_1 = 1, \quad c_2 = -1 \quad (4)$$

$$M_1 = \lambda, \quad M_2$$

ii) Divergencia Lineal

$$\sum_{i=1}^3 c_i = 0 \quad \sum_{i=1}^3 c_i M_i^2 = 0$$

$$c_1 = 1, \quad c_2 = -\frac{\lambda^2 - M_3^2}{M_2^2 - M_3^2}, \quad c_3 = -\frac{\lambda^2 - M_2^2}{M_3^2 - M_2^2} \quad (5)$$

$$M_1 = \lambda, \quad M_2, \quad M_3$$

Quedará claro más adelante que en los loops en los que se aplica el esquema de regularización tienen al lo sumo un propagador fotónico. Además si usamos un gauge $a \neq 1$ debemos reemplazar $\lambda \rightarrow M_i$ en todos los lugares del propagador

Consideremos ahora diagramas de loops fermiónicos; la regularización debe aplicarse al producto combinado de los propagadores para preservar

la invariancia gauge.

$$\text{Tr} \left\{ \frac{1}{\not{p}_1 - m} \gamma_{\mu_1} \frac{1}{\not{p}_2 - m} \gamma_{\mu_2} \dots \frac{1}{\not{p}_R - m} \gamma_{\mu_R} \right\} \longrightarrow \quad (1)$$

$$\sum_i c_i \text{Tr} \left\{ \frac{1}{\not{p}_1 - M_i} \gamma_{\mu_1} \frac{1}{\not{p}_2 - M_i} \gamma_{\mu_2} \dots \frac{1}{\not{p}_R - M_i} \gamma_{\mu_R} \right\}$$

Como antes $c_1 = 1$ y $M_1 = m$. Si se desean cancelar las divergencias de orden más alto se impone

$$\sum_i c_i = 0 \quad (2)$$

y para cancelar las de los dos órdenes más elevados

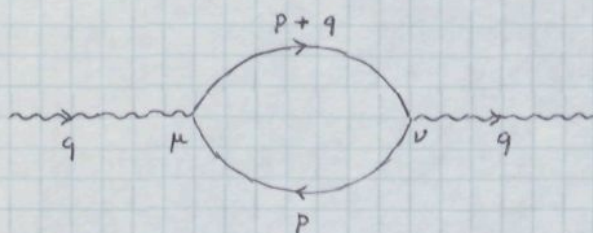
$$\sum_i c_i = 0, \quad \sum_i M_i^2 c_i = 0 \quad (3)$$

Nota que son las mismas condiciones de antes y no $\sum M_i c_i = 0$ que podría esperarse de manera naïve. Esto es debido al teorema de Furry.

Desde el punto de vista lagrangiano vemos que la regularización de Pauli-Villars consiste en introducir campos gauge auxiliares y campos fermiónicos con acoplamientos invariantes gauge. No hay términos de la forma $\bar{\psi}_i(x) \gamma^\mu \psi_j(x) A_\mu(x)$ para $i \neq j$, y esta es la razón por la que el método preserva invariancia gauge local.

XVI.- POLARIZACIÓN DEL VACÍO EN Q.E.D. (III)

Vamos a calcular $\Pi_{\mu\nu}(q)$ en segundo orden de teoría de perturbaciones. El único diagrama que contribuye es



y la correspondiente amplitud de Feynman es

$$i\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(q) = -e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{\not{k} - m + i\epsilon} \gamma_\nu \frac{1}{\not{k} + \not{q} - m + i\epsilon} \right\} \quad (1)$$

que es cuadráticamente divergente y necesita una prescripción de regularización

i) Pauli-Villars

$$i\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(q) = -e^2 \sum_{i=1}^3 c_i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr} [\gamma_\mu (\not{p} + M_i) \gamma_\nu (\not{p} + \not{q} + M_i)]}{[p^2 - M_i^2 + i\epsilon][p^2 + 2p \cdot q + q^2 - M_i^2 + i\epsilon]} \quad (2)$$

donde

$$c_1 = 1, \quad M_1 = m, \quad \sum_{i=1}^3 c_i = 0, \quad \sum_{i=1}^3 M_i^2 c_i = 0 \quad (3)$$

Entonces

$$\begin{aligned} i\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(q) &= -e^2 \sum_{i=1}^3 c_i \int_0^1 dx \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} 4 \frac{2p_\mu p_\nu + p_\mu q_\nu + p_\nu q_\mu + (M_i^2 - p^2 - p \cdot q) g_{\mu\nu}}{[p^2 - M_i^2 + 2p \cdot q x + q^2 x + i\epsilon]^2} \\ &= -4e^2 \sum_{i=1}^3 c_i \int_0^1 dx \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{2p_\mu p_\nu + p_\mu q_\nu + p_\nu q_\mu + (M_i^2 - p^2 - p \cdot q) g_{\mu\nu}}{[(p + qx)^2 - M_i^2 + q^2 x(1-x) + i\epsilon]^2} \end{aligned}$$

Podemos ahora desplazar el origen de integración $p + qx \rightarrow p$. El numerador cambia

$$\begin{aligned} &2p_\mu p_\nu + p_\mu q_\nu + p_\nu q_\mu + (M_i^2 - p^2 - p \cdot q) g_{\mu\nu} \longrightarrow \\ &= 2(p_\mu - x q_\mu)(p_\nu - x q_\nu) + (p_\mu - x q_\mu) q_\nu + (p_\nu - x q_\nu) q_\mu + [M_i^2 - p^2 + q^2 x(1-x) + (p \cdot q)(2x-1)] g_{\mu\nu} \\ &\rightarrow \frac{1}{2} p^2 g_{\mu\nu} + 2x^2 q_\mu q_\nu - 2x q_\mu q_\nu + [M_i^2 - p^2 + q^2 x(1-x)] g_{\mu\nu} \end{aligned}$$

De donde

$$i\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(q) = -4e^2 \sum_i c_i \int_0^1 dx \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{-2x(1-x)q_\mu q_\nu + [M_i^2 - \frac{1}{2}p^2 + q^2 x(1-x)]g_{\mu\nu}}{[p^2 - M_i^2 + q^2 x(1-x) + i\epsilon]^2}$$

que puede escribirse como

$$i\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(q) = +8e^2(q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}) \sum_i c_i \int_0^1 dx x(1-x) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{[p^2 - M_i^2 + q^2 x(1-x) + i\epsilon]^2} \\ - 2e^2 g_{\mu\nu} \sum_i c_i \int_0^1 dx \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{2M_i^2 - p^2 - 2q^2 x(1-x)}{[p^2 - M_i^2 + q^2 x(1-x) + i\epsilon]^2} \quad (1)$$

Debido a invariancia gauge la última integral debe ser nula. En efecto introduzcamos $A_i \equiv M_i^2 - q^2 x(1-x)$ entonces

$$I \equiv + \sum_i c_i \int d^4 p \frac{2M_i^2 - p^2 - 2q^2 x(1-x)}{[p^2 - A_i + i\epsilon]^2} = \\ = - \sum_i c_i \int d^4 p \left\{ \frac{1}{[p^2 - A_i + i\epsilon]} - \frac{A_i}{[p^2 - A_i + i\epsilon]^2} \right\} = \\ = -i\pi^2 \sum_i c_i \int_0^\infty d\tau \tau \left\{ -\frac{1}{\tau + A_i} - \frac{A_i}{(\tau + A_i)^2} \right\} = \\ = -i\pi^2 \sum_i c_i \int_0^\infty d\tau \left\{ -1 + \frac{A_i^2}{(\tau + A_i)^2} \right\} = -i\pi^2 \sum_i c_i \int_0^\infty d\tau \frac{A_i^2}{(\tau + A_i)^2} = \\ = -i\pi^2 \sum_i c_i A_i = -i\pi^2 \sum_i c_i [M_i^2 - q^2 x(1-x)] = 0 \quad \text{Q.E.D.}$$

Entonces

$$i\Pi^{(2)}(q^2) = 8e^2 \sum_i c_i \int_0^1 dx x(1-x) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{[p^2 - M_i^2 + q^2 x(1-x) + i\epsilon]^2} \quad (2)$$

Llevemos a cabo la última integral

$$I = \sum_i c_i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{[p^2 - A_i + i\epsilon]^2} = \frac{i}{16\pi^2} \sum_i c_i \int_0^\infty d\tau \frac{\tau}{(\tau + A_i)^2} = \\ = \frac{i}{16\pi^2} \sum_i c_i \int_0^\infty d\tau \left\{ \frac{1}{\tau + A_i} - \frac{A_i}{(\tau + A_i)^2} \right\} = \frac{i}{16\pi^2} \sum_i c_i \left\{ \ln(\tau + A_i) + \frac{A_i}{\tau + A_i} \right\}_0^\infty = \\ = \frac{i}{16\pi^2} \sum_i c_i \left\{ -\ln A_i - 1 \right\} = -\frac{i}{16\pi^2} \sum_i c_i \ln A_i$$

Se obtiene en tanto

$$i\Pi^{(2)}(q^2) = -\frac{2i\alpha}{\pi} \sum_i c_i \int_0^1 dx x(1-x) \ln [M_i^2 - q^2 x(1-x)] \quad (3)$$

Tomemos ahora

$$c_1 = 1, c_2 = -1 - \epsilon, c_3 = \epsilon, M_1 = m, M_2 = \frac{m}{\sqrt{\epsilon}} \equiv \Lambda, M_3 = \frac{m}{\epsilon} \tag{1}$$

y de aquí en el límite $\epsilon \rightarrow 0$ y con Λ jugando el papel de cutoff ultravioleta

$$\Pi^{(2)}(q^2) = - \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \ln \frac{m^2 - q^2 x(1-x)}{\Lambda^2 - q^2 x(1-x)} \tag{2}$$

Es fácil comprobar que esta función es real para $q^2 < 4m^2$. La parte imaginaria para otros valores de q^2 se obtienen con $m^2 \rightarrow m^2 - i\epsilon$. Para finalizar el cálculo debemos realizar la integral

$$I \equiv \int_0^1 dx x(1-x) \ln \left[x^2 - x + \frac{m^2}{q^2} \right] = \int_0^1 dx x(1-x) \left\{ \ln(x-x_+) + \ln(x-x_-) \right\} \equiv I_+ + I_-$$

$$x_{\pm} = \frac{1}{2} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} \right] \equiv \frac{1}{2} (1 \pm b), \quad x_+ + x_- = 1, \quad x_+ x_- = \frac{m^2}{q^2}$$

$$\begin{aligned} I_+ &= \int_0^1 dx x(1-x) \ln(x-x_+) = \int_{-x_+}^{x_-} dy (y+x_+)(-y+x_-) \ln y = \\ &= - \int_{-x_+}^{x_-} dy y^2 \ln y + (x_- - x_+) \int_{-x_+}^{x_-} dy y \ln y + x_+ x_- \int_{-x_+}^{x_-} dy \ln y = \\ &= - \left\{ \frac{1}{3} x_-^3 \ln x_- - \frac{1}{9} x_-^3 + \frac{1}{3} x_+^3 \ln(-x_+) - \frac{1}{9} x_+^3 \right\} + (x_- - x_+) \left\{ \frac{1}{2} x_-^2 \ln x_- - \frac{1}{4} x_-^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} x_+^2 \ln(-x_+) + \frac{1}{4} x_+^2 \right\} + x_+ x_- \left\{ x_- \ln x_- - x_- + x_+ \ln(-x_+) - x_+ \right\} = \\ &= \frac{1}{6} \left\{ x_-^2 (1+2x_+) \ln x_- + x_+^2 (1+2x_-) \ln(-x_+) - 2x_+ x_- - \frac{5}{6} \right\} \end{aligned} \tag{3}$$

De donde

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{6} \left\{ x_-^2 (1+2x_+) \ln x_- + x_+^2 (1+2x_-) \ln(-x_+) + x_+^2 (1+2x_-) \ln x_+ + x_-^2 (1+2x_+) \ln(-x_-) - 4x_+ x_- - \frac{5}{3} \right\} \\ &= \frac{1}{6} \left\{ x_-^2 (1+2x_+) \ln(-x_-^2) + x_+^2 (1+2x_-) \ln(-x_+^2) - 4x_+ x_- - \frac{5}{3} \right\} \\ &= \frac{1}{6} \left\{ \frac{1}{4} (2-3b+b^2) \ln(-x_-^2) + \frac{1}{4} (2+3b-b^2) \ln(-x_+^2) - (1-b^2) - \frac{5}{3} \right\} = \\ &= \frac{1}{6} \left\{ \frac{1}{2} \ln(x_+ x_-)^2 + \frac{1}{4} b(3-b^2) \ln \left(\frac{x_+}{x_-} \right)^2 - (1-b^2) - \frac{5}{3} \right\} \\ &= \frac{1}{6} \left\{ \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1-b^2}{4} \right)^2 + \frac{1}{4} b(3-b^2) \ln \left(\frac{1+b}{1-b} \right)^2 - (1-b^2) - \frac{5}{3} \right\} = \\ &= \frac{1}{6} \left\{ \ln \frac{m^2}{q^2} + \left(1 + \frac{2m^2}{q^2} \right) \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} \ln \frac{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} + 1}{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} - 1} - \frac{4m^2}{q^2} - \frac{5}{3} \right\} \end{aligned} \tag{4}$$

donde se ha tenido en cuenta que la función debe ser real para $q^2 < 4m^2$. Entonces el resultado deseado en la regularización de Pauli-Villars es

$$\Pi_{P.V.}^{(2)}(q^2) = -\frac{\alpha}{3\pi} \left\{ -\ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + \left(1 + \frac{2m^2}{q^2}\right) \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} \ln \frac{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} + 1}{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} - 1} - \frac{4m^2}{q^2} - \frac{5}{3} \right\} \quad (1)$$

(i) Dimensional

$$i\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(q) = -4e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{2p_\mu p_\nu + p_\mu q_\nu + p_\nu q_\mu + g_{\mu\nu}(m^2 - p^2 - p \cdot q)}{[(p+qx)^2 - m^2 + q^2 x(1-x) + i\epsilon]^2} \quad (2)$$

Cambiando el origen de integración $p+qx \rightarrow p$ el numerador equivale a

$$2p_\mu p_\nu + p_\mu q_\nu + p_\nu q_\mu + g_{\mu\nu}(m^2 - p^2 - p \cdot q) \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{2}{D} p^2 g_{\mu\nu} + 2x(1-x) q_\mu q_\nu + [m^2 - p^2 + q^2 x(1-x)] g_{\mu\nu} =$$

de donde

$$i\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(q) = (q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}) 8e^2 \int_0^1 dx x(1-x) \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{[p^2 - m^2 + q^2 x(1-x) + i\epsilon]^2} \\ + g_{\mu\nu} (-2e^2) \int_0^1 dx x(1-x) \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{\left(\frac{4}{D} - 2\right) p^2 + 2m^2 - 2q^2 x(1-x)}{[p^2 - m^2 + q^2 x(1-x) + i\epsilon]^2}$$

Invariancia gauge nos dice que la última integral debe ser nula. En efecto

$$I = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{\left(\frac{4}{D} - 2\right) p^2 + 2m^2 - 2q^2 x(1-x)}{[p^2 - m^2 + q^2 x(1-x) + i\epsilon]^2} = \\ = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \left\{ \frac{4}{D} \frac{p^2}{[p^2 - m^2 + q^2 x(1-x) + i\epsilon]^2} - 2 \frac{1}{[p^2 - m^2 + q^2 x(1-x) + i\epsilon]} \right\} = \\ = -i \frac{1}{(2\pi)^D} [m^2 - q^2 x(1-x)]^{\frac{D}{2}-1} \frac{\Gamma(1-D/2)}{\Gamma(D/2)} \left\{ \frac{4}{D} \Gamma(1+D/2) - 2 \Gamma(D/2) \right\} = 0 \quad \text{Q.E.D.}$$

Por tanto

$$i\Pi^{(2)}(q^2) = 8e^2 \int_0^1 dx x(1-x) \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{[p^2 - m^2 + q^2 x(1-x) + i\epsilon]^2} \quad (3)$$

de donde

$$\Pi^{(2)}(q^2) = \frac{e^2}{2\pi^2} \frac{1}{(4\pi)^\epsilon} \Gamma(-\epsilon) \int_0^1 dx x(1-x) [m^2 - q^2 x(1-x)]^{-\epsilon} \quad (4)$$

De aquí

$$\Pi^{(2)}(q^2) = -\frac{\alpha v^{2\epsilon}}{3\pi} \left\{ \frac{1}{\epsilon} - \ln 4\pi + \gamma - \ln \mu^2 + 6 \int_0^1 dx x(1-x) \ln [m^2 - q^2 x(1-x)] \right\} \quad (1)$$

y por tanto en la regularización dimensional

$$\Pi_D^{(2)}(q^2) = -\frac{\alpha v^{2\epsilon}}{3\pi} \left[\frac{1}{\epsilon} - \ln 4\pi + \gamma + \ln \frac{m^2}{v^2} + \left(1 + \frac{2m^2}{q^2}\right) \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} \ln \frac{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} + 1}{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} - 1} - \frac{4m^2}{q^2} - \frac{5}{3} \right] \quad (2)$$

Este resultado coincide con $\Pi_{PV}^{(2)}(q^2)$ si:

$$-\ln \frac{\Lambda^2}{m^2} \longleftrightarrow \frac{1}{\epsilon} - \ln 4\pi + \gamma + \ln \frac{m^2}{v^2} \quad (3)$$

Consideremos ahora algunos límites de interés

i) $m \rightarrow 0$

Entonces

$$\Pi_{PV}^{(2)}(q^2) \longrightarrow \frac{\alpha}{3\pi} \left[\ln \frac{\Lambda^2}{-q^2} + \frac{5}{3} \right] \quad (5)$$

$$\Pi_D^{(2)}(q^2) \longrightarrow \frac{\alpha v^{2\epsilon}}{3\pi} \left[-\frac{1}{\epsilon} + \ln 4\pi - \gamma + \ln \frac{v^2}{-q^2} \right]$$

y exactamente los mismos límites son obtenidos para $q^2 \rightarrow \infty$. El hecho de que el límite $m \rightarrow 0$ sea finito es una consecuencia del teorema de Kimoshita: funciones de Green regularizadas en todas las patas externas fuera de la capa másica tienen un límite no singular para $m \rightarrow 0$.

ii) $q^2 = 0$

Entonces

$$\Pi_{PV}^{(2)}(q^2 = 0) = \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} \quad (5)$$

$$\Pi_D^{(2)}(q^2 = 0) = \frac{\alpha v^{2\epsilon}}{3\pi} \left[-\frac{1}{\epsilon} + \ln 4\pi - \gamma - \ln \frac{m^2}{v^2} \right]$$

que como veremos seguidamente hace en la base de la renormalización

$$c) q^2 = 4m^2$$

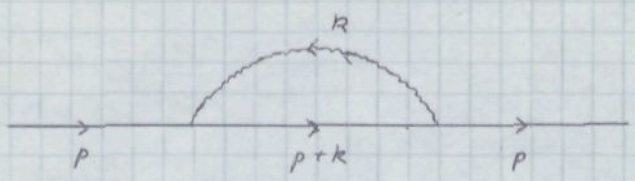
Entwickelung

$$\Pi_{PV}^{(2)}(q^2 = 4m^2) = \frac{\alpha}{3\pi} \left[\ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + \frac{8}{3} \right] \quad (1)$$

$$\Pi_D^{(2)}(q^2 = 4m^2) = \frac{\alpha v^{2\epsilon}}{3\pi} \left[-\frac{1}{\epsilon} + \ln 4\pi - \gamma - \ln \frac{m^2}{v^2} + \frac{8}{3} \right]$$

XVII.- AUTOENERGÍA DEL ELECTRON EN Q.E.D. (IV)

Vamos a calcular la autoenergía del electrón en segundo orden de teoría de perturbaciones. El único diagrama es



y la correspondiente amplitud es

$$-i \Sigma^{(2)}(p) = -e^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma^\mu \frac{g^{\mu\nu} - (1-\alpha) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 - \alpha \lambda_c^2 + i\epsilon}}{k^2 - \lambda_c^2 + i\epsilon} \frac{1}{\not{p} + \not{k} - m + i\epsilon} \gamma^\nu \quad (1)$$

que es literalmente divergente y requiere un procedimiento de regularización

i) Pauli-Villars

$$-i \Sigma^{(2)}(p) = -e^2 \sum_i c_i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k^2 - \alpha \lambda_c^2) [-2\not{p} - 2\not{k} + 4m] - (1-\alpha) [(2p \cdot k + k^2)\not{k} - k^2 \not{p} + m k^2]}{[k^2 - \lambda_c^2 + i\epsilon] [k^2 - \alpha \lambda_c^2 + i\epsilon] [(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon]}$$

y con las técnicas standard

$$-i \Sigma^{(2)}(p) = -2e^2 \sum_i c_i \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k^2 - \alpha \lambda_c^2) (-2\not{p} - 2\not{k} + 4m) - (1-\alpha) [(2p \cdot k + k^2)\not{k} - k^2 \not{p} + m k^2]}{[k^2 + 2p \cdot kx + p^2x - m^2x - \alpha \lambda_c^2 y - \lambda_c^2 (1-x-y) + i\epsilon]^3}$$

$$= -2e^2 \sum_i c_i \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k^2 + x^2 p^2 - \alpha \lambda_c^2) (4m - 2(1-x)\not{p}) + k^2 x \not{p} - (1-\alpha) [p^2 x^2 (2-x)\not{p} + \frac{k^2}{2} (1-3x)\not{p} - (p-m)]}{[k^2 + (p^2 - m^2)x - p^2 x^2 - \alpha \lambda_c^2 y - \lambda_c^2 (1-x-y) + i\epsilon]^3} \quad (k^2 + p^2 x^2)$$

y por tanto

$$-i \Sigma_1^{(2)}(p^2) = -2me^2 \sum_i c_i \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^2 [2 + 3x + \frac{1-\alpha}{2} (3x-1)] + (p^2 x^2 - \alpha \lambda_c^2) 2(1+x) - (1-\alpha) p^2 x^2 (2-x)}{[k^2 + (p^2 - m^2)x - p^2 x^2 - \alpha \lambda_c^2 y - \lambda_c^2 (1-x-y) + i\epsilon]^3} \quad (2)$$

$$-i \Sigma_2^{(2)}(p^2) = -2e^2 \sum_i c_i \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^2 [-2 + 3x + \frac{1-\alpha}{2} (3x+1)] - (p^2 x^2 - \alpha \lambda_c^2) 2(1-x) - (1-\alpha) p^2 x^2 (1-x)}{[k^2 + (p^2 - m^2)x - p^2 x^2 - \alpha \lambda_c^2 y - \lambda_c^2 (1-x-y) + i\epsilon]^3}$$

Introduzcamos

$$A_1 \equiv 2 + 3x + \frac{1}{2} (1-\alpha) (3x-1) \quad B_{1c} \equiv (p^2 x^2 - \alpha \lambda_c^2) 2(1+x) - (1-\alpha) p^2 x^2 (2-x)$$

$$A_2 \equiv -2 + 3x + \frac{1}{2} (1-\alpha) (3x+1) \quad B_{2c} \equiv - (p^2 x^2 - \alpha \lambda_c^2) 2(1-x) - (1-\alpha) p^2 x^2 (1-x)$$

$$a_c^2 \equiv - (p^2 - m^2) x + p^2 x^2 + \alpha \lambda_c^2 y + \lambda_c^2 (1-x-y)$$

de donde

$$-i \sum_1^{(2)} (p^2) = -2me^2 \sum_i c_i \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{A_1 k^2 + B_{1i}}{(k^2 - a_i^2 + i\epsilon)^3}$$

$$-i \sum_2^{(2)} (p^2) = -2e^2 \sum_i c_i \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{A_2 k^2 + B_{2i}}{(k^2 - a_i^2 + i\epsilon)^3}$$

donde

$$c_1 = 1, \quad c_2 = -1, \quad \lambda_1 = \lambda, \quad \lambda_2 = 1 \quad (1)$$

Calculamos

$$\begin{aligned} I_j &= \sum_i c_i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{A_j k^2 + B_{ji}}{(k^2 - a_i^2 + i\epsilon)^3} = \frac{i}{16\pi^2} \sum_i c_i \int_0^\infty dz \frac{A_j z^2 - B_{ji} z}{[z^2 - a_i^2 + i\epsilon]^3} = \\ &= \frac{i}{16\pi^2} \sum_i c_i \int_0^\infty dz \left[A_j \left\{ \frac{1}{(z+a_i^2)} - \frac{2a_i^2}{(z+a_i^2)^2} + \frac{a_i^4}{(z+a_i^2)^3} \right\} - B_{ji} \left\{ \frac{1}{(z+a_i^2)^2} - \frac{a_i^2}{(z+a_i^2)^3} \right\} \right] = \\ &= \frac{i}{16\pi^2} \sum_i c_i \left\{ \int_0^\infty dz \frac{A_j}{(z+a_i^2)} + \left[2a_i^2 A_j \frac{1}{z+a_i^2} - \frac{a_i^4 A_j}{2(z+a_i^2)^2} + \frac{B_{ji}}{(z+a_i^2)} - \frac{B_{ji} a_i^2}{2(z+a_i^2)^2} \right] \int_0^\infty dz \right\} = \\ &= \frac{i}{16\pi^2} \sum_i c_i \left\{ \int_0^\infty dz \frac{A_j}{(z+a_i^2)} - 2A_j + \frac{1}{2} A_j - \frac{1}{a_i^2} B_{ji} + \frac{1}{2a_i^2} B_{ji} \right\} = \\ &= \frac{i}{16\pi^2} \sum_i c_i \left\{ \int_0^\infty dz \frac{A_j}{z+a_i^2} - \frac{1}{2a_i^2} B_{ji} \right\} = \\ &= \frac{i}{16\pi^2} \left\{ - \sum_i c_i \frac{B_{ji}}{2a_i^2} + A_j \int_0^\infty dz \left[\frac{1}{z+a_1^2} - \frac{1}{z+a_2^2} \right] \right\} = \\ &= \frac{i}{16\pi^2} \left\{ - \sum_i c_i \frac{B_{ji}}{2a_i^2} + A_j (a_2^2 - a_1^2) \int_0^\infty dz \frac{1}{(z+a_1^2)(z+a_2^2)} \right\} = \\ &= \frac{i}{16\pi^2} \left\{ A_j \ln \frac{a_2^2}{a_1^2} - \frac{B_{j1}}{2a_1^2} + \frac{B_{j2}}{2a_2^2} \right\} \end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \sum_1^{(2)} (p^2) &= \frac{m\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left\{ A_1 \ln \frac{a_2^2}{a_1^2} - \frac{B_{11}}{2a_1^2} + \frac{B_{12}}{2a_2^2} \right\} \\ \sum_2^{(2)} (p^2) &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left\{ A_2 \ln \frac{a_2^2}{a_1^2} - \frac{B_{21}}{2a_1^2} + \frac{B_{22}}{2a_2^2} \right\} \end{aligned} \quad (2)$$

Para calcular estas integrales definiremos

$$S \equiv p^2 x^2 - (p^2 - m^2)x, \quad b_i^2 \equiv S + \lambda_i^2 (1-x), \quad c_i^2 \equiv S + a \lambda_i^2 (1-x) \quad (3)$$

$$\Rightarrow a_i^2(y) = \lambda_i^2 (a-1)y + b_i^2, \quad a_i^2(0) = b_i^2, \quad a_i^2(1-x) = c_i^2$$

Neusistemes

$$I_1 \equiv \int_0^{1-x} ay \ln a_c^2(y) = \left\{ \frac{1}{\lambda_c^2(a-1)} a_c^2(y) \ln a_c^2(y) - y \right\}_0^{1-x} =$$

$$= \frac{1}{\lambda_c^2(a-1)} [c_c^2 \ln c_c^2 - b_c^2 \ln b_c^2] - (1-x) \quad (1)$$

$$I_2 \equiv \int_0^{1-x} ay \frac{1}{a_c^2(y)} = \left\{ \frac{1}{\lambda_c^2(a-1)} \ln a_c^2(y) \right\}_0^{1-x} = \frac{1}{\lambda_c^2(a-1)} [\ln c_c^2 - \ln b_c^2]$$

De donde

$$\sum_c^{(2)} (p^2) = \frac{\alpha}{4\pi} m^{2-i} [I_c^{(2)} + I_c^{(1)}]$$

$$I_c^{(2)} = \frac{1}{\lambda_2^2(a-1)} \int_0^1 dx \left\{ [2A_{i2}c_2^2 + B_{i2}] \ln c_2^2 - [2A_{i2}b_2^2 + B_{i2}] \ln b_2^2 \right\} \quad (2)$$

$$I_c^{(1)} = -\frac{1}{\lambda_1^2(a-1)} \int_0^1 dx \left\{ [2A_{i1}c_1^2 + B_{i1}] \ln c_1^2 - [2A_{i1}b_1^2 + B_{i1}] \ln b_1^2 \right\}$$

Todas estas integrales son del tipo

$$I^{(m)} \equiv \int_0^1 dx x^m \ln [x^2 - (\alpha+\beta)x + \beta] \quad (3)$$

$$\alpha \equiv 1 - \frac{m^2}{p^2}, \quad \beta \equiv \beta_1 \equiv a \frac{\lambda^2}{p^2}, \quad \tilde{\beta}_1 \equiv \frac{\lambda^2}{p^2}, \quad \beta_2 \equiv a \frac{\Lambda^2}{p^2}, \quad \tilde{\beta}_2 \equiv \frac{\Lambda^2}{p^2}$$

$$x^2 - (\alpha+\beta)x + \beta = 0 = (x-x_+)(x-x_-) \quad x_+ + x_- = \alpha + \beta \quad x_+ x_- = \beta$$

$$x_{\pm} = \frac{1}{2} \left[\alpha + \beta \pm \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\beta} \right]$$

Entonces

$$I_c^{(m)} \equiv \int_0^1 dx x^m \ln(x-x_c) = \frac{1}{m+1} \left\{ \ln(1-x_c) + x_c^{m+1} \ln \frac{x_c}{x_c-1} - \frac{1}{m+1} - \frac{1}{m} x_c - \frac{1}{m-1} x_c^2 - \dots - x_c^m \right\} \quad (4)$$

Estamos interesados en las partes divergentes y finitas de I_c y \tilde{I}_c cuando $\lambda^2 \rightarrow 0$ y $\Lambda^2 \rightarrow \infty$

$$I_1^{(j)} = \frac{(-1)^j}{\lambda_j^2(a-1)} \int_0^1 dx \left[\left\{ [3+12x+a(3-4x)]x^2 p^2 - [3+9x+a(1-3x)]x(p^2-m^2) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + a\lambda_j^2 [1+4x-9x^2+a(1-4x+3x^2)] \right\} \ln [S+a\lambda_j^2(1-x)] - \left\{ [3+12x+a(3-4x)]x^2 p^2 \right. \right.$$

$$\left. \left. - [3+9x+a(1-3x)]x(p^2-m^2) + \lambda_j^2 [3+6x-9x^2-a(1+6x-3x^2)] \right\} \ln [S+\lambda_j^2(1-x)] \right]$$

$$I_2^{(j)} = \frac{(-1)^j}{\lambda_j^2 (a-1)} \int_0^1 dx \left[\left\{ [-6 + 12x - 4ax] x^2 p^2 + [3 - 9x + a(1+3x)] \right\} x (p^2 - m^2) - \right.$$

$$\left. - a \lambda_j^2 [1 - 10x + 9x^2 + a(1+2x-3x^2)] \right\} \ln [S + a \lambda_j^2 (1-x)] - \left\{ [-6 + 12x - 4ax] x^2 p^2 \right.$$

$$\left. + [3 - 9x + a(1+3x)] x (p^2 - m^2) - \lambda_j^2 [3 - 12x + 9x^2 - a(1-4x+3x^2)] \right\} \ln [S + \lambda_j^2 (1-x)]]$$

Consideremos en primer lugar $j=2$, es decir $\lambda_j^2 = \Lambda^2$; en este caso

$$x_+ = \beta_2 - (1-\alpha) - \frac{(1-\alpha)}{\beta_2} + \dots, \quad x_- = 1 + \frac{1-\alpha}{\beta_2} + \dots$$

Notemos que para x_i grandes $I_i^{(m)}$ puede escribirse como

$$I_i^{(m)} = \frac{1}{m+1} \left\{ \ln(1-x_i) + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{m+j} \frac{1}{x_i^{j-1}} \right\} \rightarrow \frac{1}{m+1} \ln(-x_i)$$

de donde

$$I_+^{(m)} = \frac{1}{m+1} \ln(-\beta_2) + \dots, \quad I_-^{(m)} = \frac{1}{m+1} \left\{ \ln(-1) - \frac{1}{m+1} - \frac{1}{m} - \frac{1}{m-1} - \dots - \frac{1}{2} - 1 \right\}$$

$$\Rightarrow I^{(m)} = \frac{1}{m+1} \left\{ \ln(\beta_2) - \frac{1}{m+1} - \frac{1}{m} - \frac{1}{m-1} - \dots - \frac{1}{2} - 1 \right\}$$

$$\Rightarrow I^{(0)} = \ln \beta_2 - 1, \quad I^{(1)} = \frac{1}{2} \ln \beta_2 - \frac{3}{4}, \quad I^{(2)} = \frac{1}{3} \ln \beta_2 - \frac{11}{18}$$

Así obtenemos

$$I_+^{(2)} = 3 \ln \Lambda^2 + \frac{1}{6} a - 2$$

(4)

$$I_2^{(2)} = -a \ln \Lambda^2 - a \ln a + \frac{2}{3} a - \frac{1}{2}$$

Consideremos ahora el caso $j=1$, es decir $\lambda_j^2 = \lambda^2$. En este caso ($\beta_1 = \beta$)

$$x_+ = \alpha - \frac{1-\alpha}{\alpha} \beta - \frac{1-\alpha}{\alpha^3} \beta^2 + \dots, \quad x_- = \frac{1}{\alpha} \beta + \frac{1-\alpha}{\alpha^3} \beta^2 + \dots$$

Entonces

$$I_+^{(m)} = \frac{1}{m+1} \left\{ \ln(1-\alpha) + \frac{1}{\alpha} \beta - \alpha^{m+1} \ln\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) - \alpha^{m-1} \beta + (m+1) \alpha^{m-1} (1-\alpha) \beta \ln\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{m+1} - \frac{1}{m} \alpha + \frac{1}{m} \frac{1-\alpha}{\alpha} \beta - \frac{1}{m-1} \alpha^2 + \frac{2}{m-1} (1-\alpha) \beta - \frac{1}{m-2} \alpha^3 + \frac{3}{m-2} \alpha (1-\alpha) \beta + \dots \right\}$$

$$I_-^{(m)} = \frac{1}{m+1} \left\{ -\frac{1}{\alpha} \beta + \frac{1}{\alpha^{m+1}} \beta^{m+1} \ln(-\beta) - \frac{1}{\alpha^{m+1}} \beta^{m+1} \ln \alpha - \frac{1}{m+1} - \frac{1}{m} \frac{1}{\alpha} \beta - \dots \right\}$$

Introduzcamos

$$R_m \equiv \int_0^1 \alpha x x^m \ln \{ [x^2 - (\alpha + \beta)x + \beta] p^2 \} = \frac{1}{m+1} \ln p^2 + I^{(m)}$$

$$R_m \equiv F_m(\alpha) + \beta G_m(\alpha) + H_m(\alpha, \ln \beta)$$

$$F_0 = \ln p^2 - \alpha \ln \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) + \ln(1-\alpha) - 2$$

$$G_0 = \frac{1}{\alpha} (1-\alpha) \ln \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) - \frac{1}{\alpha} \ln \alpha - \frac{1}{\alpha}, \quad H_0 = \frac{1}{\alpha} \beta \ln(1-\beta)$$

$$F_1 = \frac{1}{2} \left[\ln p^2 - \alpha^2 \ln \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) + \ln(1-\alpha) - 1 - \alpha \right]$$

$$G_1 = \frac{1}{2} \left[2(1-\alpha) \ln \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) - 2 \right], \quad H_1 = 0$$

$$F_2 = \frac{1}{3} \left[\ln p^2 - \alpha^3 \ln \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) + \ln(1-\alpha) - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \alpha - \alpha^2 \right]$$

$$G_2 = \frac{1}{3} \left[3\alpha(1-\alpha) \ln \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) + \frac{3}{2} - 3\alpha \right], \quad H_2 = 0$$

$$F_3 = \frac{1}{4} \left[\ln p^2 - \alpha^4 \ln \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) + \ln(1-\alpha) - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \alpha - \frac{1}{2} \alpha^2 - \alpha^3 \right]$$

$$G_3 = \frac{1}{4} \left[4\alpha^2(1-\alpha) \ln \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) + \frac{2}{3} + 2\alpha - 4\alpha^2 \right], \quad H_3 = 0$$

También necesitamos las integrales con $\beta = a\lambda^2/p^2 \rightarrow \tilde{\beta} = \lambda^2/p^2$ que indicaremos con \tilde{r}

$$R_m - \tilde{R}_m = (\beta - \tilde{\beta}) G_m + H_m - \tilde{H}_m = - (1-a) \tilde{\beta} G_m + H_m - \tilde{H}_m \equiv \Delta_m$$

Entonces se obtiene

$$I_1^{(1)} = \frac{1}{\tilde{\beta}(1-a)} \left\{ 3\Delta_2 + 12\Delta_3 + a(3\Delta_2 - 4\Delta_3) - \alpha [3\Delta_1 + 9\Delta_2 + a(\Delta_1 - 3\Delta_2)] + \right. \\ \left. + \beta [F_0 + 4F_1 - 9F_2 + a(F_0 - 4F_1 + 3F_2)] - \tilde{\beta} [3F_0 + 6F_1 - 9F_2 - a(F_0 + 6F_1 - 3F_2)] \right\}$$

$$I_2^{(1)} = \frac{1}{\tilde{\beta}(1-a)} \left\{ -6\Delta_2 + 12\Delta_3 - 4a\Delta_3 + \alpha [3\Delta_1 - 9\Delta_2 + a(\Delta_1 + 3\Delta_2)] \right. \\ \left. - \beta [F_0 - 10F_1 + 9F_2 + a(F_0 + 2F_1 - 3F_2)] + \tilde{\beta} [3F_0 - 12F_1 + 9F_2 - a(F_0 + 4F_1 + 3F_2)] \right\}$$

De donde

$$I_1^{(1)} = -3G_2 - 12G_3 - a(3G_2 - 4G_3) + \alpha [3G_1 + 9G_2 + a(G_1 - 3G_2)] + \\ + \frac{1}{1-a} \left[(-3F_0 - 6F_1 + 9F_2) + a(2F_0 + 10F_1 - 12F_2) + a^2(F_0 - 4F_1 + 3F_2) \right]$$

$$I_2^{(1)} = +6G_2 - 12G_3 + 4aG_3 - \alpha [3G_1 - 9G_2 + a(G_1 + 3G_2)] + \\ + \frac{1}{1-a} \left[(3F_0 - 12F_1 + 9F_2) + a(-2F_0 + 14F_1 - 12F_2) + a^2(-F_0 - 2F_1 + 3F_2) \right]$$

Por tanto

$$I_1^{(1)} = -3G_2 - 12G_3 + 3\alpha G_1 + 9\alpha G_2 + a(-3G_2 + 4G_3 + \alpha G_1 - 3\alpha G_2) - 3F_0 - 6F_1 + 9F_2 + a(-F_0 + 4F_1 - 3F_2)$$

$$I_2^{(1)} = 6G_2 - 12G_3 - 3\alpha G_1 + 9\alpha G_2 + a(4G_3 - \alpha G_1 - 3\alpha G_2) + 3F_0 - 12F_1 + 9F_2 + a(F_0 + 2F_1 - 3F_2)$$

es decir

$$I_1^{(1)} = -3G_2 - 12G_3 + 3\alpha G_1 + 9\alpha G_2 - 3F_0 - 6F_1 + 9F_2 + a[-3G_2 + 4G_3 + \alpha G_1 - 3\alpha G_2 - F_0 + 4F_1 - 3F_2] \equiv P_1^{(1)} + P_1^{(2)}a$$

$$I_2^{(1)} = 6G_2 - 12G_3 - 3\alpha G_1 + 9\alpha G_2 + 3F_0 - 12F_1 + 9F_2 + a[4G_3 - \alpha G_1 - 3\alpha G_2 + F_0 + 2F_1 - 3F_2] \equiv P_2^{(1)} + P_2^{(2)}a$$

Se obtiene

$$P_1^{(1)} = -3 \ln p^2 + 3\alpha \ln \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) - 3 \ln(1-\alpha) + \frac{7}{2}$$

$$P_1^{(2)} = -\alpha(1-\alpha) \ln \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) - \frac{1}{\alpha} + \alpha$$

$$P_2^{(1)} = -1$$

$$P_2^{(2)} = \ln p^2 - \alpha(2-\alpha) \ln \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) + \ln(1-\alpha) - \frac{5}{3} + \alpha$$

Recordar que $\alpha = 1 - m^2/p^2$, $p^2(1-\alpha) = m^2$, $\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^{-1} = 1 - p^2/m^2$. Entonces

$$P_1^{(1)} = -3 \ln m^2 - 3 \left(1 - \frac{m^2}{p^2}\right) \ln \left(1 - \frac{p^2}{m^2}\right) + \frac{7}{2}$$

$$P_1^{(2)} = \frac{m^2}{p^2} \left(1 - \frac{m^2}{p^2}\right) \ln \left(1 - \frac{p^2}{m^2}\right) + \frac{5}{6} - \frac{m^2}{p^2}$$

$$P_2^{(1)} = -1$$

$$P_2^{(2)} = \ln m^2 + \left(1 - \frac{m^2}{p^2}\right) \ln \left(1 - \frac{p^2}{m^2}\right) - \frac{2}{3} - \frac{m^2}{p^2}$$

Entonces

$$\sum_1^{(2)}(p^2) = \frac{\alpha}{4\pi} m \left\{ 3 \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} - \left(3 - a \frac{m^2}{p^2}\right) \left(1 - \frac{m^2}{p^2}\right) \ln \left(1 - \frac{p^2}{m^2}\right) + \frac{3+2a}{2} - a \frac{m^2}{p^2} \right\}$$

$$\sum_2^{(2)}(p^2) = \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ -a \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + a \left(1 - \frac{m^4}{p^4}\right) \ln \left(1 - \frac{p^2}{m^2}\right) - \frac{3}{2} - a \ln a - a \frac{m^2}{p^2} \right\}$$

que es el resultado deseado

Para calcular las cantidades normalizadas necesitamos

$$A \equiv \Sigma_1 (m^2) \quad , \quad B \equiv 2m \Sigma_1' (m^2) + \Sigma_2 (m^3) \quad (1)$$

De los resultados obtenidos

$$A \equiv \Sigma_1 (m^2) = \frac{\alpha}{4\pi} m \left\{ 3 \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + \frac{3}{2} \right\} \quad (2)$$

$$\Sigma_2 (m^3) = \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ -a \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} - \frac{3}{2} - a \ln a - a \right\}$$

pero necesitamos también

$$2m \Sigma_1^{(2)'} (m^2) = \frac{\alpha m^2}{2\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left\{ 2A_1 \frac{1}{a_2^2} x(x-1) - 2A_1 \frac{1}{a_1^2} x(x-1) - \frac{1}{a_1^2} [3x^3 + a(2x^2 - x^3)] + \frac{1}{a_2^2} [3x^2 + a(2x^2 - x^3)] + \frac{B_{11}}{a_1^4} x(x-1) - \frac{B_{12}}{a_2^4} x(x-1) \right\} \Big|_{p^2 = m^2}$$

$$\Rightarrow 2m \Sigma_1^{(2)'} (m^2) = \frac{\alpha m^2}{2\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left\{ [(-3x - 6x^2 + 12x^3) + a(-x + 6x^2 - 4x^3)] \left(\frac{1}{a_2^2} - \frac{1}{a_1^2} \right) + x(1-x) \left[\frac{B_{12}}{a_2^4} - \frac{B_{11}}{a_1^4} \right] \right\}$$

donde

$$a_i^2 \equiv \lambda_i^2 (a-1) + m^2 x^2 - \lambda_i^2 x + \lambda_i^2 \quad , \quad B_{1i} \equiv -2(1+x) a \lambda_i^2 + m^2 x^2 [3x + a(2-x)]$$

Se tiene

$$\int_0^{1-x} dy \frac{1}{a_i^2} = \frac{1}{\lambda_i^2 (a-1)} \ln \frac{m^2 x^2 + \lambda_i^2 a (1-x)}{m^2 x^2 + \lambda_i^2 (1-x)}$$

$$\int_0^{1-x} dy \frac{1}{a_i^4} = - \frac{1}{\lambda_i^2 (a-1)} \left\{ \frac{1}{m^2 x^2 + \lambda_i^2 a (1-x)} - \frac{1}{m^2 x^2 + \lambda_i^2 (1-x)} \right\}$$

Si

$$T_i \equiv x^2 - \beta_i x + \beta_i \quad , \quad \tilde{T}_i \equiv x^2 - \tilde{\beta}_i x + \tilde{\beta}_i \quad , \quad \beta_i \equiv a \frac{\lambda_i^2}{m^2} \quad , \quad \tilde{\beta}_i \equiv \frac{\lambda_i^2}{m^2}$$

obtenemos

$$2m \Sigma_1^{(2)'} (m^2) = \frac{\alpha}{2\pi} (I_1 + I_2)$$

$$I_1 = + \frac{1}{\tilde{\beta}_1 (1-a)} \int_0^1 dx \left\{ [(-3x - 6x^2 + 12x^3) + a(-x + 6x^2 - 4x^3)] \ln \frac{T_1}{\tilde{T}_1} - x(1-x) \frac{B_{11}}{m^2} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{\tilde{T}_1} \right) \right\}$$

$$I_2 = - \frac{1}{\tilde{\beta}_2 (1-a)} \int_0^1 dx \left\{ [(-3x - 6x^2 + 12x^3) + a(-x + 6x^2 - 4x^3)] \ln \frac{T_2}{\tilde{T}_2} - x(1-x) \frac{B_{12}}{m^2} \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{\tilde{T}_2} \right) \right\}$$

Debemos calcular

$$I^{(m)} \equiv \int_0^1 dx x^m \ln [x^2 - \beta x + \beta] \quad , \quad J^{(m)} \equiv \int_0^1 dx x^m \frac{(1-x)}{x^2 - \beta x + \beta} = \frac{d I^{(m)}}{d \beta}$$

$$x^2 - \beta x + \beta \equiv (x - x_+) (x - x_-) \quad , \quad x_+ + x_- = \beta \quad , \quad x_+ \cdot x_- = \beta$$

$$x_{\pm} = \frac{1}{2} [\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\beta}]$$

Como antes

$$I^{(m)} = \frac{1}{m+1} \left\{ x_+^{m+1} \ln \frac{x_+}{x_+ - 1} + x_-^{m+1} \ln \frac{x_-}{x_- - 1} - \frac{2}{m+1} - \frac{1}{m} (x_+ + x_-) - \frac{1}{m-1} (x_+^2 + x_-^2) \dots - (x_+^m + x_-^m) \right\}$$

Si $\beta = 2 \Rightarrow \beta \rightarrow \infty$

$$x_+ = \beta - 1 - \frac{1}{\beta} + \dots$$

$$x_- = 1 + \frac{1}{\beta} + \dots$$

entonces

$$I^{(m)} = \frac{1}{m+1} \left\{ \ln \beta - \frac{1}{m+1} - \frac{1}{m} \dots - \frac{1}{2} - 1 \right\} \quad , \quad J^{(m)} = 0$$

$$\Rightarrow I_2 = 0$$

Si $\beta = 1$, $\beta \rightarrow 0$

$$x_+ = c \beta^{1/2} + \frac{1}{2} \beta - \frac{c}{8} \beta^{3/2} - \frac{c}{128} \beta^{5/2} + \dots \quad , \quad x_- = -c \beta^{1/2} + \frac{1}{2} \beta + \frac{c}{8} \beta^{3/2} + \frac{c}{128} \beta^{5/2} + \dots$$

$$x_+^2 = -\beta + c \beta^{3/2} + \frac{1}{2} \beta^2 + \dots \quad , \quad x_-^2 = -\beta - c \beta^{3/2} + \frac{1}{2} \beta^2 + \dots$$

$$x_+^3 = -c \beta^{3/2} - \frac{3}{2} \beta^2 + \dots \quad , \quad x_-^3 = +c \beta^{3/2} - \frac{3}{2} \beta^2 + \dots$$

$$x_+^4 = \beta^2 + \dots \quad , \quad x_-^4 = \beta^2 + \dots$$

$$\frac{x_+}{x_+ - 1} = -c \beta^{1/2} \left(1 + \frac{c}{2} \beta^{1/2} - \frac{1}{8} \beta + \dots \right) \quad , \quad \frac{x_-}{x_- - 1} = c \beta^{1/2} \left(1 - \frac{c}{2} \beta^{1/2} - \frac{1}{8} \beta + \dots \right)$$

$$\ln \frac{x_+}{x_+ - 1} = \ln (-c \beta^{1/2}) + \frac{c}{2} \beta^{1/2} + o(\beta^{3/2}) \quad , \quad \ln \frac{x_-}{x_- - 1} = \ln (c \beta^{1/2}) - \frac{c}{2} \beta^{1/2} + o(\beta^{3/2})$$

De donde

$$I^{(1)} = \frac{1}{2} \left\{ -\beta \ln \beta + \frac{1}{2} \beta^2 \ln \beta - 1 - \beta + \pi \beta^{3/2} - \beta^2 + \dots \right\}$$

$$I^{(2)} = \frac{1}{3} \left\{ -\frac{3}{2} \beta^2 \ln \beta - \frac{2}{3} + \frac{3}{2} \beta + \pi \beta^{3/2} + o(\beta^2) + \dots \right\}$$

$$I^{(3)} = \frac{1}{4} \left\{ \beta^2 \ln \beta - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \beta + \frac{5}{2} \beta^2 + \dots \right\}$$

$$I^{(4)} = \frac{1}{5} \left\{ -\frac{2}{5} + \frac{5}{12} \beta - \frac{5}{6} \beta^2 + \dots \right\}$$

Entonces al orden deseado

$$I^{(1)} = \frac{1}{2} \left\{ -\beta \ln \beta - 1 - \beta \right\} \quad J^{(1)} = \frac{1}{2} \left\{ -\ln \beta + \beta \ln \beta - 2 + \frac{3}{2} \pi \beta^{1/2} - \frac{3}{2} \beta \right\}$$

$$I^{(2)} = \frac{1}{3} \left\{ -\frac{2}{3} + \frac{3}{2} \beta \right\} \quad J^{(2)} = \frac{1}{3} \left\{ -3\beta \ln \beta + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \beta + \frac{3}{2} \pi \beta^{1/2} \right\}$$

$$I^{(3)} = \frac{1}{4} \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \beta \right\} \quad J^{(3)} = \frac{1}{4} \left\{ 2\beta \ln \beta + \frac{2}{3} + 6\beta \right\}$$

$$I^{(4)} = \frac{1}{5} \left\{ -\frac{2}{5} + \frac{5}{12} \beta \right\} \quad J^{(4)} = \frac{1}{5} \left\{ \frac{5}{12} - \frac{5}{3} \beta \right\}$$

de donde

$$I_4 = \frac{1}{\beta(1-a)} \left\{ -3I^{(1)} - 6I^{(2)} + 12I^{(3)} + a(-I^{(1)} + 6I^{(2)} - 4I^{(3)}) + 3\tilde{I}^{(1)} + 6\tilde{I}^{(2)} - 12\tilde{I}^{(3)} \right.$$

$$\left. - a(-\tilde{I}^{(1)} + 6\tilde{I}^{(2)} - 4\tilde{I}^{(3)}) - 3J^{(4)} + \beta(2J^{(1)} + 2J^{(2)}) - a(2J^{(2)} - J^{(4)}) + 3\tilde{J}^{(4)} \right.$$

$$\left. - \beta(2\tilde{J}^{(1)} + 2\tilde{J}^{(2)}) + a(2\tilde{J}^{(3)} - \tilde{J}^{(4)}) \right\}$$

$$I_4 = -\frac{3}{2} \ln \tilde{\beta} + \frac{3a \ln a}{2(1-a)} - \frac{3}{2} + 3 - 2 - \frac{1}{2} a \ln \tilde{\beta} + \frac{a^2 \ln a}{2(1-a)} - \frac{1}{2} a - 3a$$

$$+ \frac{2}{3} a - 1 - \frac{a \ln a}{1-a} + a \ln \tilde{\beta} + 3a - \frac{a^2 \ln a}{1-a} + \frac{1}{3} a$$

$$I_4 = \frac{a-3}{2} \ln \frac{\lambda^2}{m^2} + \frac{a}{2} \ln a + \frac{a-3}{2}$$

de donde

$$2m \sum_1^{(2)'} (m^2) = \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ (a-3) \ln \frac{\lambda^2}{m^2} + a \ln a - 3 + a \right\}$$

Se obtiene en tanto para las cantidades A y B dadas en (7.1) y en segundo orden de teoría de perturbaciones

$$A^{(2)} = \frac{\alpha}{4\pi} m \left\{ 3 \ln \frac{\lambda^2}{m^2} + \frac{3}{2} \right\}$$

(1)

$$B^{(2)} = \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ -a \ln \frac{\lambda^2}{m^2} - \frac{9}{2} + (a-3) \ln \frac{\lambda^2}{m^2} \right\}$$

que son todos los resultados necesarios para llevar a cabo de renormalización, usando la regularización u ho hecho en el método de Pauli-Villars. Notar que $\sum_i^{(2)}(p_i)$ es val para $p^2 < m^2$ y para otros valores de p^2 se debe tener en cuenta que $m^2 \rightarrow m^2 - i\epsilon$

ii) Pauli-Villars ($a=1$)

En este caso la integración sobre la variable y es trivial y obtenemos

$$\Sigma_1^{(2)}(p^2) = \frac{m\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx (1-x) \left\{ (2+3x) \ln \frac{(m^2-p^2)x + p^2x^2 + \Lambda^2(1-x)}{(m^2-p^2)x + p^2x^2 + \Lambda^2(1-x)} + \right. \\ \left. + (1+x) \frac{\lambda^2 - p^2x^2}{(m^2-p^2)x + p^2x^2 + \Lambda^2(1-x)} - (1+x) \frac{\Lambda^2 - p^2x^2}{(m^2-p^2)x + p^2x^2 + \Lambda^2(1-x)} \right\}$$

$$\Sigma_2^{(2)}(p^2) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx (1-x) \left\{ (-2+3x) \ln \frac{(m^2-p^2)x + p^2x^2 + \Lambda^2(1-x)}{(m^2-p^2)x + p^2x^2 + \Lambda^2(1-x)} - \right. \\ \left. - (1-x) \frac{\lambda^2 - p^2x^2}{(m^2-p^2)x + p^2x^2 + \Lambda^2(1-x)} + (1-x) \frac{\Lambda^2 - p^2x^2}{(m^2-p^2)x + p^2x^2 + \Lambda^2(1-x)} \right\}$$

Tomando los límites $\lambda^2 \rightarrow 0$ y $\Lambda^2 \rightarrow \infty$ y guardando sólo las partes divergentes y finitas

$$\Sigma_1^{(2)}(p^2) = \frac{m\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx (1-x) \left\{ (2+3x) \left[\ln \frac{\Lambda^2}{p^2} + \ln(1-x) - \ln x - \ln \left(x-1 + \frac{m^2}{p^2} \right) \right] - \right. \\ \left. - (1+x) \frac{x p^2}{m^2 - p^2 + p^2x} - \frac{1+x}{1-x} \right\}$$

$$\Sigma_2^{(2)}(p^2) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx (1-x) \left\{ (-2+3x) \left[\ln \frac{\Lambda^2}{p^2} + \ln(1-x) - \ln x - \ln \left(x-1 + \frac{m^2}{p^2} \right) \right] + \right. \\ \left. + (1-x) \frac{x p^2}{m^2 - p^2 + p^2x} + 1 \right\}$$

o equivalentemente

$$\Sigma_1^{(2)}(p^2) = \frac{m\alpha}{2\pi} \left\{ \frac{3}{2} \ln \frac{\Lambda^2}{p^2} - \frac{3}{2} + \int_0^1 dx \left\{ (-2+4x) \ln x - x(5-3x) \ln \left(-x + \frac{m^2}{p^2} \right) - x(2-x)(1-x) \frac{p^2}{m^2 - p^2x} \right\} \right\}$$

$$\Sigma_2^{(2)}(p^2) = \frac{\alpha}{2\pi} \left\{ -\frac{1}{2} \ln \frac{\Lambda^2}{p^2} + \frac{1}{2} + \int_0^1 dx \left\{ (2-4x) \ln x - x(1-3x) \ln \left(-x + \frac{m^2}{p^2} \right) + x^2(1-x) \frac{p^2}{m^2 - p^2x} \right\} \right\}$$

las integrales necesarias son

$$I_1 = \int_0^1 dx \ln x = -1$$

$$I_2 = \int_0^1 dx x \ln x = -\frac{1}{4}$$

$$I_3 = \int_0^1 dx x \ln \left(-x + \frac{m^2}{p^2} \right) = \frac{1}{2} \ln \frac{m^2}{p^2} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{m^4}{p^4} \right) \ln \left(1 - \frac{p^2}{m^2} \right) - \frac{m^2}{2p^2} - \frac{1}{4}$$

$$I_4 = \int_0^1 dx x^2 \ln \left(-x + \frac{m^2}{p^2} \right) = \frac{1}{3} \ln \frac{m^2}{p^2} + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{m^6}{p^6} \right) \ln \left(1 - \frac{p^2}{m^2} \right) - \frac{m^4}{3p^4} - \frac{m^2}{6p^2} - \frac{1}{9}$$

$$I_5 = \int_0^1 dx \frac{x}{\frac{m^2}{p^2} - x} = -\frac{m^2}{p^2} \ln\left(1 - \frac{p^2}{m^2}\right) - 1$$

$$I_6 = \int_0^1 dx \frac{x^2}{\frac{m^2}{p^2} - x} = -\frac{m^4}{p^4} \ln\left(1 - \frac{p^2}{m^2}\right) - \frac{1}{2} - \frac{m^2}{p^2}$$

$$I_7 = \int_0^1 dx \frac{x^3}{\frac{m^2}{p^2} - x} = -\frac{m^6}{p^6} \ln\left(1 - \frac{p^2}{m^2}\right) - \frac{1}{3} - \frac{m^2}{2p^2} - \frac{m^4}{p^4}$$

y por tanto para $a=1$

$$\Sigma_1^{(2)}(p^2) = \frac{\alpha m}{4\pi} \left\{ 3 \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} - \left(3 - \frac{m^2}{p^2}\right) \left(1 - \frac{m^2}{p^2}\right) \ln\left(1 - \frac{p^2}{m^2}\right) + \frac{5}{2} - \frac{m^2}{p^2} \right\}$$

$$\Sigma_2^{(2)}(p^2) = \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ -\ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + \left(1 - \frac{m^4}{p^4}\right) \ln\left(1 - \frac{p^2}{m^2}\right) - \frac{3}{2} - \frac{m^2}{p^2} \right\}$$

que es el resultado deseado

iii) Dimensional ($a=1$)

La autoenergía del electrón es ahora

$$-i \Sigma^{(2)}(p) = -e^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\gamma^\mu [\not{k} + \not{p} + m] \gamma_\mu}{[k^2 - \lambda^2 + i\epsilon] [(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon]}$$

$$= -e^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{-(D-2)(\not{k} + \not{p}) + Dm}{[k^2 - \lambda^2 + i\epsilon] [(k+p)^2 - m^2 + i\epsilon]}$$

$$= -e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{-(D-2)(\not{k} + \not{p}) + Dm}{[(k+px)^2 - \lambda^2(1-x) + (p^2 - m^2)x + p^2 x^2 + i\epsilon]^2}$$

$$= -e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{-(D-2)(1-x)\not{p} + Dm}{[k^2 - \lambda^2(1-x) + (p^2 - m^2)x - p^2 x^2 + i\epsilon]^2}$$

De donde

$$-i \Sigma_1^{(2)}(p^2) = -m e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{-(D-2)(1-x) + D}{[k^2 - \lambda^2(1-x) + (p^2 - m^2)x - p^2 x^2 + i\epsilon]^2}$$

$$-i \Sigma_2^{(2)}(p^2) = -e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{-(D-2)(1-x)}{[k^2 - \lambda^2(1-x) + (p^2 - m^2)x - p^2 x^2 + i\epsilon]^2}$$

y por tanto

$$\Sigma_1^{(2)}(p^2) = m \frac{\alpha v^{2\epsilon}}{4\pi} \frac{1}{(4\pi p^2)^\epsilon} \Gamma(1-\epsilon) \int_0^1 dx [2 + 2(1+\epsilon)x] [\lambda^2(1-x) - (p^2 - m^2)x + p^2 x^2]^\epsilon$$

(1)

$$\Sigma_2^{(2)}(p^2) = \frac{\alpha v^{2\epsilon}}{4\pi} \frac{1}{(4\pi v^2)^\epsilon} \Gamma(1-\epsilon) \int_0^1 dx [-2(1+\epsilon)(1-x)] [\lambda^2(1-x) - (p^2 - m^2)x + p^2 x^2]^\epsilon$$

y en tanto

$$\Sigma_1^{(2)}(p^2) = m \frac{\alpha v^{2\epsilon}}{4\pi} \int_0^1 dx \left\{ -2(1+x) \left[\frac{1}{\epsilon} - \ln 4\pi + \gamma - \ln v^2 \right] - 2x - 2(1+x) \ln [\lambda^2(1-x) - (p^2 - m^2)x + p^2 x^2] \right\}$$

$$\Sigma_2^{(2)}(p^2) = \frac{\alpha v^{2\epsilon}}{4\pi} \int_0^1 dx \left\{ 2(1-x) \left[\frac{1}{\epsilon} - \ln 4\pi + \gamma - \ln v^2 \right] + 2(1-x) + 2(1-x) \ln [\lambda^2(1-x) - (p^2 - m^2)x + p^2 x^2] \right\}$$

y guardando solo los términos divergentes y finitos cuando $\lambda^2 \rightarrow 0$ o $v \rightarrow 0$

$$\Sigma_1^{(2)}(p^2) = m \frac{\alpha v^{2\epsilon}}{4\pi} \int_0^1 dx \left\{ -2(1+x) \left[\frac{1}{\epsilon} - \ln 4\pi + \gamma - \ln v^2 \right] - 2x - 2(1+x) \ln [m^2 x - p^2 x(1-x)] \right\}$$

$$\Sigma_2^{(2)}(p^2) = \frac{\alpha v^{2\epsilon}}{4\pi} \int_0^1 dx \left\{ 2(1-x) \left[\frac{1}{\epsilon} - \ln 4\pi + \gamma - \ln v^2 \right] + 2(1-x) + 2(1-x) \ln [m^2 x - p^2 x(1-x)] \right\}$$

es decir

$$\Sigma_1^{(2)}(p^2) = m \frac{\alpha v^{2\epsilon}}{4\pi} \left\{ -3 \left[\frac{1}{\epsilon} - \ln 4\pi + \gamma - \ln v^2 \right] - 1 - \int_0^1 dx [2(1+x) \ln x + 2(2-x) \ln [m^2 - p^2 x]] \right\}$$

$$\Sigma_2^{(2)}(p^2) = \frac{\alpha v^{2\epsilon}}{4\pi} \left\{ \frac{1}{\epsilon} - \ln 4\pi + \gamma - \ln v^2 + 1 + \int_0^1 dx [2(1-x) \ln x + 2x \ln [m^2 - p^2 x]] \right\}$$

y de aquí

$$\Sigma_1^{(2)}(p^2) = m \frac{\alpha v^{2\epsilon}}{4\pi} \left\{ -\frac{3}{\epsilon} + 3 \ln 4\pi - 3\gamma - 3 \ln \frac{m^2}{v^2} + 5 - \frac{m^2}{p^2} - \left(3 - \frac{m^2}{p^2}\right) \left(1 - \frac{m^2}{p^2}\right) \ln \left(1 - \frac{p^2}{m^2}\right) \right\}$$

(2)

$$\Sigma_2^{(2)}(p^2) = \frac{\alpha v^{2\epsilon}}{4\pi} \left\{ \frac{1}{\epsilon} - \ln 4\pi + \gamma + \ln \frac{m^2}{v^2} - 1 - \frac{m^2}{p^2} + \left(1 - \frac{m^2}{p^2}\right) \ln \left(1 - \frac{p^2}{m^2}\right) \right\}$$

que es la expresión deseada

Notemos que

$$A^{(2)} = \frac{\alpha v^{2\epsilon}}{4\pi} m \left\{ -\frac{3}{\epsilon} + 3 \ln 4\pi - 3\gamma - 3 \ln \frac{m^2}{v^2} + 4 \right\}$$

(3)

$$B^{(2)} = \frac{\alpha v^{2\epsilon}}{4\pi} \left\{ \frac{1}{\epsilon} - \ln 4\pi + \gamma + \ln \frac{m^2}{v^2} - 2 + 4m^2 \int_0^1 dx \frac{x(1-x^2)}{m^2 x^2 + \lambda^2(1-x)} \right\}$$

Ahora bien

$$\begin{aligned}
 I &\equiv \int_0^1 dx \frac{m^2 x (1-x^2)}{m^2 x^2 + \lambda^2 (1-x)} = m^2 \int_0^1 dx \frac{x}{m^2 x^2 + \lambda^2 (1-x)} - \int_0^1 dx x \left[1 - \frac{\lambda^2 (1-x)}{m^2 x^2 + \lambda^2 (1-x)} \right] = \\
 &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_0^1 dx \frac{2m^2 x - \lambda^2}{m^2 x^2 + \lambda^2 (1-x)} + \frac{1}{2} \int_0^1 dx \frac{\lambda^2}{m^2 x^2 + \lambda^2 (1-x)} = \\
 &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln [m^2 x^2 + \lambda^2 (1-x)] \Big|_0^1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln \frac{m^2}{\lambda^2}
 \end{aligned}$$

y también

$$A^{(2)} = m \frac{\alpha v^{2\epsilon}}{4\pi} \left\{ -\frac{3}{\epsilon} + 3 \ln 4\pi - 3\gamma - 3 \ln \frac{m^2}{v^2} + 4 \right\}$$

$$B^{(2)} = \frac{\alpha v^{2\epsilon}}{4\pi} \left\{ \frac{1}{\epsilon} - \ln 4\pi + \gamma + \ln \frac{m^2}{v^2} - 4 + 2 \ln \frac{m^2}{\lambda^2} \right\}$$

que son las cantidades que necesitamos para la renormalización.

XVIII.- RENORMALIZACIÓN EN Q.E.D. (I)

Recordemos que el Lagrangiano de la Q.E.D es

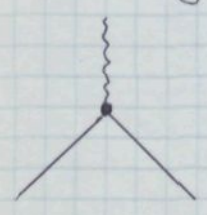
$$L(x) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) + \frac{i}{2} \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi(x) - m \bar{\psi}(x) \psi(x) + \frac{1}{2} \lambda^2 A^\mu(x) A_\mu(x) - \frac{1}{2a} [\partial_\mu A^\mu(x)]^2 - e \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) A_\mu(x) \quad (1)$$

En los capítulos anteriores hemos visto como deducir reglas de Feynman y como dar sentido a las integrales divergentes que aparecen mediante el proceso de regularización, bien sea la regularización dimensional bien sea la de Pauli-Villars. A partir de ahora adoptaremos la regularización dimensional. Nos falta ahora un esquema de renormalización es decir una lista de prescripciones para eliminar todos los infinitos de la teoría que aparecen debido a su comportamiento ultravioleta. Para ello empezaremos añadiendo contra términos al Lagrangiano

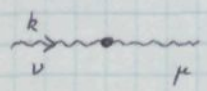
$$L(x) \longrightarrow L_T(x) = L(x) + L_C(x)$$

$$L_C(x) \equiv C_3 \frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) - C_2 \frac{i}{2} \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi(x) + C_4 m \bar{\psi}(x) \psi(x) - C_5 \frac{1}{2} \lambda^2 A_\mu(x) A^\mu(x) + C_6 \frac{1}{2a} [\partial_\mu A^\mu(x)]^2 + C_1 e \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) A_\mu(x) \quad (2)$$

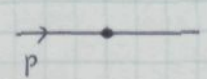
El papel de las C_i es el de cancelar los infinitos ultravioleta que aparecen en la teoría, y se expresan como una serie de potencias en ϵ^{2m} con $m \geq 1$, con lo cual $L_C(x)$ puede tratarse como parte de la interacción con las siguientes reglas de Feynman



$$+ e C_1 \gamma^\mu$$



$$C_3 [g_{\mu\nu} k^2 - k_\mu k_\nu] - C_5 \lambda^2 g_{\mu\nu} + C_6 \frac{1}{a} k_\mu k_\nu \quad (3)$$



$$- C_2 \not{x} + C_4 m$$

El hecho de que la Q.E.D. sea una teoría renormalizable se traduce en el hecho de que es posible elegir unas C_i de la forma

$$C_i = \sum_{m=1}^{\infty} e^{2m} C_i^{(2m)} \quad (1)$$

de forma que todos los infinitos ultravioletas de la teoría queden cancelados.

Podemos ahora introducir

$$Z_i = 1 - C_i \quad (2)$$

con lo cual el Lagrangiano total se puede escribir

$$L_T(x) = - \frac{Z_3}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) + Z_2 \frac{i}{2} \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi(x) - Z_4 m \bar{\psi}(x) \psi(x) + \\ + Z_5 \frac{1}{2} \lambda^2 A^\mu(x) A_\mu(x) - Z_6 \frac{1}{2a} [\partial_\mu A^\mu(x)]^2 - Z_1 e \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) A_\mu(x) \quad (3)$$

donde recordemos

$$[m] = M, \quad [\psi] = M^{3/2 + \epsilon}, \quad [A^\mu] = M^{1 + \epsilon}, \quad [\lambda] = M, \quad [e] = M^{-\epsilon}$$

Definamos ahora los parámetros y campos

$$m_0 = Z_2^{-1} Z_4 m, \quad \lambda_0 = Z_3^{-1/2} Z_5^{1/2} \lambda, \quad a_0 = Z_3 Z_6^{-1} a \quad (4)$$

$$A_0^\mu(x) = Z_3^{1/2} A^\mu(x), \quad \psi_0(x) = Z_2^{1/2} \psi(x), \quad e_0 = Z_1 Z_2^{-1} Z_3^{-1/2} e$$

con lo cual el Lagrangiano renormalizado es

$$L_T(x) = F_0^{\mu\nu}(x) F_{0,\mu\nu}(x) + \frac{i}{2} \bar{\psi}_0(x) \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi_0(x) - m_0 \bar{\psi}_0(x) \psi_0(x) + \\ + \frac{1}{2} \lambda_0^2 A_0^\mu(x) A_{0\mu}(x) - \frac{1}{2a_0} [\partial_\mu A_0^\mu(x)]^2 - e_0 \bar{\psi}_0(x) \gamma^\mu \psi_0(x) A_{0\mu}(x) \quad (5)$$

que tiene la misma forma que el Lagrangiano de partida pero todos los parámetros y campos son renormalizados.

Al fijar un esquema de renormalización debemos dar un método para

calcular las Z_i . Más adelante discutiremos distintos esquemas de renormalización pero de momento nos limitaremos al esquema λ o también llamado de renormalización sobre la capa más rica. De (4) y (XV-5.1) se obtiene para el propagador del electrón

$$S_R(\not{x}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \{ Z_2^{-1} S_0(\not{x}) \} \quad (1)$$

donde $S_0(\not{x})$ es función de ϵ y de las cantidades desnudas y es divergente para $\epsilon \rightarrow 0$, mientras que $S_R(\not{x})$ no depende de ϵ y es función únicamente de las cantidades renormalizadas. Usando (XV-8.1) la expresión anterior se puede escribir en segundo orden

$$[\not{x} - m - \Sigma_R^{(2)}(\not{x})] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \{ Z_2 [\not{x} - m_0 - \Sigma_0^{(2)}(\not{x})] \} \quad (2)$$

La cantidad $\Sigma_0^{(2)}(\not{x})$ que es la que se calcula a partir de (1.1) y que presenta divergencias puede desarrollarse en serie de Taylor alrededor del punto $\not{x} = m$

$$\Sigma_0^{(2)}(\not{x}) = \Sigma_0^{(2)}(m) + \left. \frac{\partial \Sigma_0^{(2)}(\not{x})}{\partial \not{x}} \right|_{\not{x}=m} (\not{x} - m) + \Sigma_{0f}^{(2)}(\not{x}) (\not{x} - m)^2 \quad (3)$$

En el esquema de renormalización sobre la capa más rica exigimos que

$$\begin{aligned} \not{x} - m_0 - \Sigma_0^{(2)}(m) - \left. \frac{\partial \Sigma_0^{(2)}(\not{x})}{\partial \not{x}} \right|_{\not{x}=m} (\not{x} - m) - \Sigma_{0f}^{(2)}(\not{x}) (\not{x} - m)^2 = \\ = Z_2^{-1} [\not{x} - m + \Sigma_{fR}(\not{x}) (\not{x} - m)^2] \end{aligned} \quad (4)$$

con lo cual el propagador renormalizado tiene un polo en la masa física de la partícula m . La ecuación anterior se puede escribir

$$\begin{aligned} \left[1 - \left. \frac{\partial \Sigma_0^{(2)}(\not{x})}{\partial \not{x}} \right|_{\not{x}=m} \right] \not{x} - \left[1 + \frac{1}{m} \Sigma_0^{(2)}(m) - \left. \frac{\partial \Sigma_0^{(2)}(\not{x})}{\partial \not{x}} \right|_{\not{x}=m} \right] m_0 - \\ - \Sigma_{0f}^{(2)}(\not{x}) (\not{x} - m)^2 = Z_2^{-1} [\not{x} - m - \Sigma_{fR}(\not{x}) (\not{x} - m)^2] \end{aligned} \quad (5)$$

de donde

$$\left[1 - \frac{\partial \Sigma_0^{(2)}(\not{p})}{\partial \not{p}} \Big|_{\not{p}=m} \right] \not{p} = \left[1 + \frac{1}{m} \Sigma_0^{(2)}(m) - \frac{\partial \Sigma_0^{(2)}(\not{p})}{\partial \not{p}} \Big|_{\not{p}=m} \right] m_0 -$$

$$- \Sigma_f(\not{p}) (\not{p} - m)^2 = Z_2^{-1} \not{p} - Z_4^{-1} m_0 - Z_2^{-1} \Sigma_{fR}(\not{p}) (\not{p} - m)^2 \tag{1}$$

Entonces si ambos propagadores tienen el mismo residuo en $\not{p} = m_R$

$$Z_2^{-1} = 1 - \frac{\partial \Sigma_0^{(2)}(\not{p})}{\partial \not{p}} \Big|_{\not{p}=m} \tag{2}$$

$$Z_4^{-1} = 1 + \frac{1}{m} \Sigma_0^{(2)}(m) - \frac{\partial \Sigma_0^{(2)}(\not{p})}{\partial \not{p}} \Big|_{\not{p}=m_R} \tag{3}$$

y

$$\Sigma_{of}(\not{p}) = \Sigma_{fR}(\not{p}) \tag{4}$$

Notemos adem\u00e1s que

$$\begin{aligned} m &= m_0 \frac{Z_2}{Z_4} = \frac{m_0}{\left[1 - \frac{\partial \Sigma_0^{(2)}(\not{p})}{\partial \not{p}} \Big|_{\not{p}=m} \right]} \left[1 + \frac{1}{m_R} \Sigma_0^{(2)}(m) - \frac{\partial \Sigma_0^{(2)}(\not{p})}{\partial \not{p}} \Big|_{\not{p}=m} \right] = \\ &= m_0 + \frac{1}{1 - \frac{\partial \Sigma(\not{p})}{\partial \not{p}} \Big|_{\not{p}=m}} [m_0 - m + \Sigma(m)] \end{aligned}$$

y finalmente

$$m = m_0 + \Sigma(m) \tag{5}$$

Consideremos ahora el propagador del fot\u00f3n. De acuerdo con (XV-5.4)

$$D_{\mu\nu}(q) = Z_3 D_{R\mu\nu}(q) \tag{6}$$

$$\Rightarrow D_{\mu\nu}^{-1}(q) = Z_3^{-1} D_{R\mu\nu}^{-1}(q)$$

De (XV-10.2)

$$\begin{aligned} &[q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}] + \lambda_0^2 g_{\mu\nu} - \frac{1}{a_0} q_\mu q_\nu + [q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}] \Pi_0^{(2)}(q^2) = \\ &= Z_3^{-1} \left\{ [q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}] + \lambda_0^2 g_{\mu\nu} - \frac{1}{a} q_\mu q_\nu + [q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}] \Pi_R^{(2)}(q^2) \right\} \tag{7} \end{aligned}$$

y desarrollando $\Pi^{(1)}(q^2)$ alrededor de λ_0^2 obtenemos

$$\begin{aligned} & [q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}] [1 + \Pi^{(1)}(\lambda^2)] + \lambda_0^2 g_{\mu\nu} + \frac{1}{a_0} q_\mu q_\nu + [q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}] (q^2 - \lambda^2) \Pi_{of}^{(1)}(q^2) \\ & = Z_3^{-1} \{ [q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}] + \lambda^2 g_{\mu\nu} - \frac{1}{a_0} q_\mu q_\nu + [q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}] \Pi_{Rf}^{(1)}(q^2) (q^2 - \lambda^2) \} \quad (1) \end{aligned}$$

que se cumple si elegimos

$$Z_3^{-1} = 1 + \Pi_0^{(1)}(\lambda_0^2)$$

$$\lambda^2 = Z_3^{-1} \lambda_0^2 \quad (2)$$

$$a = Z_3 a_0$$

$$\Pi_{of}(q^2) = \Pi_{Rf}(q^2)$$

Entonces

$$Z_3^{-1} = 1 + \Pi_0(\lambda_0^2) \quad (3)$$

$$Z_5 = Z_6 = 1 \quad (4)$$

Notemos que

$$\lambda^2 = \lambda_0^2 \frac{1}{1 + \Pi_0^{(1)}(\lambda^2)} = \lambda_0^2 + \frac{1}{1 + \Pi_0^{(1)}(\lambda^2)} [\lambda_0^2 - \lambda^2 - \lambda_0^2 \Pi_0^{(1)}(\lambda^2)]$$

$$\Rightarrow \lambda^2 = \lambda_0^2 - \lambda_0^2 \Pi_0^{(1)}(\lambda^2) \quad (5)$$

Consideremos finalmente la función vertice. De (XV-5.1)

$$V_{0\mu}(p, p+q) = Z_2 Z_3^{1/2} V_{R\mu}(p, p+q) \quad (6)$$

y de (XV-6.3)

$$e_0 S(\not{p} + \not{q}) \Gamma_0^\nu(p, p+q) S(\not{p}) D_{\nu\mu}(q) =$$

$$Z_2 Z_3^{1/2} e_0 S(\not{p} + \not{q}) \Gamma^\nu(p, p+q) S(\not{p}) D_{\nu\mu}(q) \quad (2)$$

y en tanto

$$\Gamma^\mu(p, p+q) = Z_1^{-1} \Gamma_R^\mu(p, p+q)$$

Exigiendo que la igualdad a Ward-Takahashi (XV-7.4) sea también cierta para las funciones renormalizadas

$$Z_2 = Z_1$$

Resumiendo, las expresiones exactas para las constantes de renormalización son

$$Z_1^{-1} = Z_2^{-1} = 1 - \left. \frac{\partial \Sigma(\not{p})}{\partial \not{p}} \right|_{\not{p} = m_R} \quad (2)$$

$$Z_3^{-1} = 1 + \Pi(\lambda_R^2) \quad (3)$$

$$Z_4^{-1} = 1 + \frac{1}{m} \Sigma(m_R) - \frac{m_R}{m} \left. \frac{\partial \Sigma(\not{p})}{\partial \not{p}} \right|_{\not{p} = m_R} \quad (4)$$

$$Z_5 = Z_6 = 1 \quad (5)$$

Consideremos lo que sucede en segundo orden de teoría de perturbaciones. De (XVI-5.2) se deduce que en el orden deseado

$$\begin{aligned} \Pi^{(2)}(\lambda_R^2) = & -\frac{\alpha}{3\pi} \left[\frac{1}{\epsilon} - \ln 4\pi + \gamma + \ln \frac{m_R^2}{\nu^2} + \right. \\ & \left. + \left(1 + \frac{2m_R^2}{\lambda_R^2} \right) \sqrt{1 - \frac{4m_R^2}{\lambda_R^2}} \ln \frac{\sqrt{1 - \frac{4m_R^2}{\lambda_R^2}} + 1}{\sqrt{1 - \frac{4m_R^2}{\lambda_R^2}} - 1} - \frac{4m_R^2}{\lambda_R^2} - \frac{5}{3} \right] \end{aligned}$$

y como $\lambda_R^2 \downarrow 0$ se tiene

$$\Pi^{(2)}(\lambda^2) = -\frac{\alpha}{3\pi} \left[\frac{1}{\epsilon} - \ln 4\pi + \gamma + \ln \frac{m_R^2}{\nu^2} \right]$$

y en tanto si tomamos como escala $\nu = m_R$ lo cual haremos a partir de ahora

$$Z_3^{(2)} = 1 - \frac{\alpha}{3\pi} \left[-\frac{1}{\epsilon} + \ln 4\pi - \gamma \right] \quad (6)$$

y

$$\Pi_R^{(2)}(q^2) = Z_3^{(2)} \Pi^{(2)}(q^2) = \Pi^{(2)}(q^2) - \Pi^{(2)}(\lambda_R^2) \Rightarrow$$

$$\Pi_R^{(2)}(q^2) = -\frac{\alpha}{3\pi} \left\{ \left(1 + \frac{2m^2}{q^2}\right) \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} \ln \frac{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} + 1}{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} - 1} - \frac{4m^2}{q^2} - \frac{5}{3} \right\} \quad (1)$$

y en particular

$$\lim_{m_R \rightarrow 0} \Pi_R^{(2)}(q^2) = \lim_{m_R \rightarrow 0} \frac{\alpha}{3\pi} \left[\ln \frac{m_R^2}{-q^2} + \frac{5}{3} \right]$$

$$\Pi_R^{(2)}(q^2=0) = 0 \quad (2)$$

$$\Pi_R^{(2)}(q^2=4m^2) = \frac{8\alpha}{9\pi}$$

Consideremos ahora la autoenergía del electrón. Trabajaremos con la regularización de Pauli-Villars pues solo en este caso hemos obtenido las expresiones de $\Sigma_1(p)$ y $\Sigma_2(p)$ en cualquier gauge. Sabemos

$$Z_1^{-1} = Z_2^{-1} = 1 - 2m_1 \frac{\partial \Sigma_1^{(2)}(p^2)}{\partial p^2} \Big|_{p^2=m_1^2} - \Sigma_2^{(2)}(m_1^2) = 1 - B^{(2)}(m_1^2)$$

$$Z_4^{-1} = 1 + \frac{1}{m_1} \Sigma_1^{(2)}(m_1^2) - 2m_1 \frac{\partial \Sigma_1^{(2)}(p^2)}{\partial p^2} \Big|_{p^2=m_1^2} - \Sigma_2^{(2)}(m_1^2) = 1 + \frac{A^{(2)}(m_1^2)}{m_1} - B^{(2)}(m_1^2)$$

y usando (XVII-9.1)

$$Z_1 = Z_2 = 1 + \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ -a_R \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} - \frac{9}{2} + (a_R - 3) \ln \frac{\lambda_R^2}{m^2} \right\} \quad (3)$$

$$Z_4 = 1 + \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ -(3 + a_R) \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} - 6 + (a_R - 3) \ln \frac{\lambda_R^2}{m^2} \right\}$$

Teniendo en cuenta los resultados y (3.2)

$$\Sigma_{1R}^{(2)}(p^2) = \Sigma_1^{(2)}(p^2) - A^{(2)}(m^2) \quad (4)$$

$$\Sigma_{2R}^{(2)}(p^2) = \Sigma_2^{(2)}(p^2) - B^{(2)}(m^2)$$

y en tanto

$$\Sigma_{1R}^{(2)}(p^2) = m \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ a \left(1 - \frac{m^2}{p^2}\right) - \left(3 - a \frac{m^2}{p^2}\right) \left(1 - \frac{m^2}{p^2}\right) \ln \left(1 - \frac{p^2}{m^2}\right) \right\}$$

$$\Sigma_{2R}^{(2)}(p^2) = \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ (3 - a) \ln \frac{\lambda^2}{m^2} + 3 - a \ln a - a \frac{m^2}{p^2} + a \left(1 - \frac{m^4}{p^4}\right) \ln \left(1 - \frac{p^2}{m^2}\right) \right\}$$

Notas que la divergencia infrarroja es evitada si se considera el gauge de 't Hooft $a_R = 3$.

Limites de interés son

i) $m = 0$

$$\frac{1}{m} \sum_{1R}^{(2)}(p^2) \longrightarrow \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ a + 3 \ln \frac{m^2}{-p^2} \right\} \quad (1)$$

$$\sum_{2R}^{(2)}(p^2) \longrightarrow \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ (3-a) \ln \frac{\lambda_R^2}{m^2} + 3 - a \ln \frac{m^2}{-p^2} \right\}$$

que son divergentes y coinciden con el límite $-p^2 \rightarrow \infty$

ii) $p^2 = m^2$

$$\frac{1}{m} \sum_{1R}^{(2)}(p^2 = m^2) = 0 \quad (2)$$

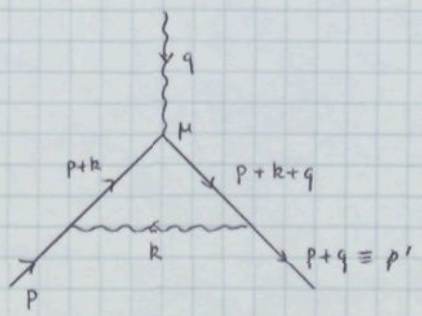
$$\sum_{2R}^{(2)}(p^2 = m^2) = \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ (3-a) \ln \frac{\lambda^2}{m^2} + (3-a) - a \ln a \right\}$$

iii) $p^2 = 0$

$$\frac{1}{m} \sum_{1R}^{(2)}(p^2 = 0) = \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ -3 + \frac{a}{2} \right\} \quad (3)$$

$$\sum_{2R}^{(2)}(p^2 = 0) = \frac{\alpha_R}{4\pi} \left\{ (3-a) \ln \frac{\lambda^2}{m^2} - a \ln a + 3 + \frac{a}{2} \right\}$$

Consideremos ahora la función vertice en este orden. El diagrama a tener en cuenta es



Empecemos considerando el caso $q^k \equiv 0$. De (XV-8.5) se obtiene

$$\Lambda_{1R}(p^2) = -\Sigma_{2R}(p^2) = \Lambda_1(p^2) - \Lambda_1(m^2) - m \Lambda_2(m^2) - m^2 \Lambda_2(m^2)$$

$$\Lambda_{2R}(p^2) = -2 \left[\Sigma_1'(p^2) - m_1 \Sigma_2'(p^2) \right] = \Lambda_2(p^2)$$

$$\Lambda_{3R}(p^2) = 0$$

(1)

$$\Lambda_{4R}(p^2) = -2 \Sigma'_2(p^2) = \Lambda_4(p^2)$$

donde hemos usado (7.4) y la expresi3n expl3cita de B. Se puede entender este resultado de la siguiente forma: Para electrones sobre la capa m3nica $p = m$ y $m \bar{u}(p) \gamma^\mu u(p) = \bar{u}(p) p^\mu u(p)$ y

$$\Lambda^\mu(p, p) \Big|_{p=m} = \gamma^\mu [\Lambda_1(m^2) + m \Lambda_2(m^2) + m^2 \Lambda_4(m^2)] \tag{2}$$

y como en esta situaci3n cinem3tica el coeficiente de γ^μ es la carga, si deseamos que esta sea a3n la carga f3sica tiene que substituirse $\Lambda_1(m^2) + m \Lambda_2(m^2) + m^2 \Lambda_4(m^2)$ que es lo que hemos hecho en (4). Esta substituci3n hace que $\Lambda_{4R}^\mu(p, p)$ sea f3nita.

¿Como proceder en el caso general $\Lambda^\mu(p, p')$? La expresi3n mas general para esta cantidad es

$$\Lambda^\mu(p, p') = \gamma^\mu \Lambda_1 + \not{p}^\mu \Lambda_2 + \gamma^\mu \not{p} \Lambda_3 + \not{p}^\mu \not{p} \Lambda_4 + q^\mu \Lambda_5 + \gamma^\mu \not{q} \Lambda_6 + q^\mu \not{p} \Lambda_7 + \not{p}^\mu \not{q} \Lambda_8 + q^\mu \not{q} \Lambda_9 + \not{p}^\mu \not{q} \not{p} \Lambda_{10} + q^\mu \not{q} \not{p} \Lambda_{11} + \gamma^\mu \not{q} \not{p} \Lambda_{12} \tag{3}$$

donde $q^\mu = p'^\mu - p^\mu$, $\not{p}^\mu = (p'^\mu + p^\mu) / 2$ y las 12 funciones $\Lambda_i = \Lambda_i(p^2, p'^2, q^2)$.

De la igualdad de Ward-Takahashi

$$\not{q} + \not{q} \Lambda_1 + \frac{1}{2} (p'^2 - p^2) \Lambda_2 + \not{q} \not{p} \Lambda_3 + \frac{1}{2} (p'^2 - p^2) \not{p} \Lambda_4 + q^2 \Lambda_5 + q^2 \Lambda_6 + q^2 \not{p} \Lambda_7 + \frac{1}{2} (p'^2 - p^2) \not{q} \Lambda_8 + q^2 \not{q} \Lambda_9 + \frac{1}{2} (p'^2 - p^2) \not{q} \not{p} \Lambda_{10} + q^2 \not{q} \not{p} \Lambda_{11} + q^2 \not{p} \Lambda_{12} = \not{p} + \not{q} - m - \Sigma_1(p'^2) - (p' + q - m) \Sigma_2(p'^2) - \not{p} + m + \Sigma_1(p^2) + (p - m) \Sigma_2(p^2)$$

de donde

$$\frac{1}{2} (p'^2 - p^2) \Lambda_2 + q^2 \Lambda_5 + q^2 \Lambda_6 = - \Sigma_1(p'^2) + m \Sigma_2(p'^2) + \Sigma_1(p^2) - m \Sigma_2(p^2)$$

$$\Lambda_1 + \frac{1}{4} (p'^2 - p^2) \Lambda_4 + \frac{1}{2} q^2 \Lambda_7 + \frac{1}{2} (p'^2 - p^2) \Lambda_8 + q^2 \Lambda_9 + \frac{1}{2} q^2 \Lambda_{12} = - \Sigma_2(p'^2) \tag{4}$$

$$-\Lambda_1 + \frac{1}{4} (p'^2 - p^2) \Lambda_4 + \frac{1}{2} q^2 \Lambda_7 - \frac{1}{2} (p'^2 - p^2) \Lambda_8 - q^2 \Lambda_9 + \frac{1}{2} q^2 \Lambda_{12} = \Sigma_2(p^2)$$

$$\Lambda_3 + \frac{1}{2} (p'^2 - p^2) \Lambda_{10} + q^2 \Lambda_{11} = 0$$

y en términos de las funciones renormalizadas

$$2\Lambda_{4R} + (p'^2 - p^2)\Lambda_{8R} + 2q^2\Lambda_{9R} = -\Sigma_{2R}(p^2) - \Sigma_{2R}(p'^2)$$

$$\frac{1}{2}(p'^2 - p^2)\Lambda_{4R} + q^2\Lambda_{7R} + q^2\Lambda_{12R} = \Sigma_{2R}(p^2) - \Sigma_{2R}(p'^2) \quad (1)$$

$$\frac{1}{2}(p'^2 - p^2)[\Lambda_{2R} + m_R\Lambda_{4R}] + q^2[\Lambda_{5R} + \Lambda_{6R} + m_R\Lambda_{7R} + m_R\Lambda_{12R}] = \Sigma_{1R}(p^2) - \Sigma_{1R}(p'^2)$$

$$\Lambda_{3R} + \frac{1}{2}(p'^2 - p^2)\Lambda_{10R} + q^2\Lambda_{11R} = 0$$

Es necesario darse cuenta que las funciones Λ_i no pueden tener polos en $q^2=0$ ya que son funciones irreducibles de una partícula o propias, en tanto los términos con un factor q^2 tienen que cancelarse entre sí, quizá con partes de los otros. Las identidades de Ward-Takahashi no implican ninguna sustitución en ellos.

Además $\Sigma_{2R}(p^2) - \Sigma_{2R}(p'^2) = Z_2(p^2) - Z_2(p'^2)$ y en tanto la única sustitución que queda es

$$[2\Lambda_{1R} + (p'^2 - p^2)\Lambda_{8R} + 2q^2\Lambda_{9R}] = -Z_2(p^2) - Z_2(p'^2) + 2\Sigma_2(m^2) + 4m_c \Sigma_1'(m^2) \quad (2)$$

y en tanto

$$\begin{aligned} \Lambda_{4R}(p^2, p'^2, q^2) &= \Lambda_4(p^2, p'^2, q^2) + 2m_c \Sigma_1'(m^2) + \Sigma_2(m^2) = \\ &= \Lambda_4(p^2, p'^2, q^2) - \Lambda_4(m^2, m^2, 0) - m_c \Lambda_2(m^2, m^2, 0) - m_c^2 \Lambda_4(m^2, m^2, 0) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\Lambda_{iR}(p^2, p'^2, q^2) = \Lambda_i(p^2, p'^2, q^2) \quad |2 > i \geq 2$$

Esto demuestra que ya para $p=p'$ habíamos obtenido las constantes de sustitución correctas.

Debemos mencionar que en los cálculos no es necesario hacer inserciones de vacío o de autoenergía en las líneas externas. Para la polarización del vacío ($\lambda=0$)



$$\lim_{q^2 \rightarrow 0} \epsilon^\nu(q) i D_{\nu\mu R}(q) \epsilon^{\mu 2} q^2 = \lim_{q^2 \rightarrow 0} \epsilon^\nu(q) \left\{ g_{\nu\mu} + (q_\nu q_\mu - q^2 g_{\nu\mu}) \frac{\Pi_R(q^2)}{q^2 [1 + \Pi_R(q^2)]} \right\} =$$

$$= \lim_{q^2 \rightarrow 0} \epsilon^\nu(q) g_{\nu\mu} \left\{ 1 - \frac{\Pi_R(q^2)}{1 + \Pi_R(q^2)} \right\} = \epsilon_\mu(q) \frac{1}{1 + \Pi_R(0)} = \epsilon_\mu(q) \quad (1)$$

Similantemente para la autoenergía del electrón



$$\lim_{p^2 \rightarrow m^2} \frac{i}{p-m} (-i) \left[\Sigma_{1R}(p^2) + (p-m) \Sigma_{2R}(p^2) \right] u(p) =$$

$$= \lim_{p^2 \rightarrow m^2} \left\{ \frac{1}{p-m} \left\{ \Sigma_{1R}(m^2) + \Sigma'_{1R}(m^2) (p^2 - m^2) \right\} + \Sigma_{2R}(m^2) \right\} u(p) =$$

$$= \left\{ 2m \Sigma'_{1R}(m^2) + \Sigma_{2R}(m^2) \right\} u(p) = \left[2m \Sigma'_{1R}(m^2) - 2m \Sigma'_{1R}(m^2) \right] u(p) = 0 \quad (2)$$

Se puede ahora entender la razón por la que el procedimiento de renormalización de la carga para la polarización del vacío da la respuesta correcta. Las identidades de Ward-Takahashi imponen en el vértice que el coeficiente de γ^μ no cambie en la dirección hacia adelante y como el electrón está sobre la hoja más externa no hay conexiones de orden más alto que provengan de las patas externas.

XIX. - ESQUEMAS DE RENORMALIZACION EN Q.E.D. (VI)

El esquema de renormalización que hemos venido considerando es el llamado renormalización sobre la copia másica o esquema λ , pues aparecen singularidades infrarrojas cuando $\lambda \rightarrow 0$. Es el esquema más fácil de interpretar desde un punto de vista físico. Repetamos los puntos esenciales.

Una forma de utilizarlo es trabajar con el Lagrangiano desnudo (XVIII-1.1), calcular las funciones de Green, calcular las Z_i y entonces usar

$$S_2^{-1}(\not{x}) = Z_2^{-1} S(\not{x}), \quad D_{\mu\nu}(\not{q}) = Z_3^{-1} D_{\mu\nu}(q), \quad \Gamma_R^\mu(p, p') = Z_1 \Gamma^\mu(p, p') \quad (1)$$

para calcular las funciones renormalizadas. Como una alternativa uno puede partir del Lagrangiano renormalizado (XVIII-2.5) y determinar las Z_i imponiendo

$$\begin{aligned} S_2^{-1}(\not{x}) \Big|_{\not{x}=m_2} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \not{x}} S_2^{-1}(\not{x}) \Big|_{\not{x}=m_2} &= 1 \\ D_{TR}^{-1}(q^2) \Big|_{q^2=\lambda_2^2} &= 0 \\ \Gamma_R^\mu(p, p') \Big|_{\substack{p^\mu=p'^\mu=m_2 \gamma^\mu \\ \not{x}=m_2}} &= \gamma^\mu \end{aligned} \quad (2)$$

(donde la última expresión puede ser sustituida por la identidad de Ward-Takahashi)

Una alternativa de (2) es

$$\begin{aligned} \Sigma_R(m_2) = 0, & \quad \frac{\partial \Sigma_R(\not{x})}{\partial \not{x}} \Big|_{\not{x}=m_2} = 0 \\ \Pi_R(\lambda_2^2) = 0, & \quad \Lambda_R^\mu(p, p') \Big|_{\substack{p^\mu=p'^\mu=m_2 \gamma^\mu \\ \not{x}=m_2}} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Recordemos que en este esquema las cantidades renormalizadas o renormeadas son

$$\Pi_R^{(2)}(q^2) = -\frac{\alpha}{3\pi} \left\{ \left(1 + \frac{2m^2}{q^2} \right) \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} \ln \frac{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} + 1}{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} - 1} - \frac{4m^2}{q^2} - \frac{5}{3} \right\} \quad (4)$$

$$\lim_{m_r \rightarrow 0} \Pi_R^{(2)}(q^2) = \lim_{m_r \rightarrow 0} \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ \ln \frac{m^2}{-q^2} + \frac{5}{3} \right\}$$

$$\lim_{\lambda_r^2 \rightarrow 0} \Pi_R^{(2)}(q^2) = 0 \quad (1)$$

$$\Pi_R^{(2)}(q^2 = 4m^2) = \frac{8\alpha}{9\pi}$$

$$\Sigma_{1R}^{(2)}(p^2) = m \cdot \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ a \left(1 - \frac{m^2}{p^2}\right) - \left(3 - a \frac{m^2}{p^2}\right) \left(1 - \frac{m^2}{p^2}\right) \ln \left(1 - \frac{p^2}{m^2}\right) \right\} \quad (2)$$

$$\Sigma_{2R}^{(2)}(p^2) = \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ (3-a) \left[\ln \frac{\lambda_r^2}{m^2} + \frac{m^2}{p^2} \right] - a \ln a_r + a_r \left(1 - \frac{m^2}{p^2}\right) \ln \left(1 - \frac{p^2}{m^2}\right) \right\}$$

c) $m = 0$

$$\frac{1}{m} \Sigma_{1R}^{(2)}(p^2) \longrightarrow \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ a + 3 \ln \frac{m^2}{-p^2} \right\} \quad (3)$$

$$\Sigma_{2R}^{(2)}(p^2) \longrightarrow \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ (3-a) \ln \frac{\lambda_r^2}{m^2} + 3 - a \ln \frac{m^2}{-p^2} \right\}$$

c')

$$\frac{1}{m} \Sigma_{1R}^{(2)}(p^2 = m^2) = 0 \quad (4)$$

$$\Sigma_{2R}^{(2)}(p^2 = m^2) = \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ (3-a) \left[\ln \frac{\lambda_r^2}{m^2} + 1 \right] - a \ln a \right\}$$

c'')

$$\frac{1}{m} \Sigma_{1R}^{(2)}(p^2 \neq 0) = \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ -3 + \frac{a}{2} \right\} \quad (5)$$

$$\Sigma_{2R}^{(2)}(p^2 = 0) = \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ (3-a) \ln \frac{\lambda_r^2}{m^2} - a \ln a + 3 + \frac{a}{2} \right\}$$

Como Q.E.D es una teoría renormalizable se obtienen resultados finitos en cualquier orden de teoría de perturbaciones. Sin embargo este esquema de renormalización no es el único. Hay otras formas de hacer la teoría finita, sin embargo los parámetros renormalizados tienen que ser interpretados a través de una nueva renormalización finita en términos de los originales. En realidad estos esquemas serán de gran utilidad en Q.C.D.

c) Renormalización Eudidea o esquema μ

En este esquema las subtracciones se hacen en un punto Eudideo $p^2 = q^2 = -\mu^2$. de Goro

$$\Sigma_R(\not{x}, \mu^2) = \Sigma_{1R}(p^2, \mu^2) + [\not{x} - m_R(\mu^2)] \Sigma_{2R}(p^2, \mu^2)$$

$$\Sigma_{1R}(p^2, \mu^2) = \Sigma_1(p^2) - \Sigma_1(-\mu^2)$$

$$\Sigma_{2R}(p^2, \mu^2) = \Sigma_2(p^2) - \Sigma_2(-\mu^2) - 2m_R(\mu^2) \Sigma_1'(-\mu^2)$$

$$\Pi_R(q^2, \mu^2) = \Pi(q^2) - \Pi(-\mu^2)$$

podiendo obtener la función beta a partir de la identidad de Ward-Takahashi. Notar que (1) puede también escribirse

$$\Sigma_R(\not{x}, \mu^2) \Big|_{\substack{\not{x} = m_R(\mu^2) \\ p^2 = -\mu^2}} = 0$$

$$\frac{\partial \Sigma_R(\not{x}, \mu^2)}{\partial \not{x}} \Big|_{\substack{\not{x} = m_R(\mu^2) \\ p^2 = -\mu^2}} = 0$$

$$\Pi_R(-\mu^2, \mu^2) = 0$$

En la segunda de estas ecuaciones después de la dife-renciación $\not{x} \not{x} = m_R^2(\mu^2)$ y $m_R \not{x} \not{x} = p^2 = -\mu^2$.

Los dos esquemas tienen relaciones en el hecho de que no queremos obtener resultados distintos para un mismo observable. En particular de (VIII-3.2)

$$[\not{x} - m - \Sigma(\not{x})] = Z_2^{-1} [\not{x} - m_R - \Sigma_R(\not{x})] = Z_{2\mu}^{-1} [\not{x} - m_R(\mu^2) - \Sigma_R(\not{x}, \mu^2)] \quad (2)$$

Desarrollando $\Sigma_R(\not{x})$ y $\Sigma_R(\not{x}, \mu^2)$ alrededor del punto $\not{x} = m_R$ se obtiene

$$m_R(\mu^2) = m(\mu^2) - \Sigma_R(m, \mu^2)$$

$$Z_{2\mu} = Z_2 \left[1 - \frac{\partial \Sigma_R(\not{x}, \mu^2)}{\partial \not{x}} \Big|_{\not{x} = m_R} \right] \quad (3)$$

$$Z_{4\mu} = Z_2 \left[1 + \frac{1}{m_R(\mu^2)} \Sigma_R(m_R, \mu^2) - \frac{m_R}{m_R(\mu^2)} \frac{\partial \Sigma_R(\not{x}, \mu^2)}{\partial \not{x}} \Big|_{\not{x} = m_R} \right]$$

Para el propagador del fotón tendremos

$$Z_3^{-1} \{ [q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}] + \lambda_R^2 g_{\mu\nu} - \frac{1}{a_R} q_\mu q_\nu + (q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}) \Pi_R(q^2) \} =$$

$$= Z_{3\mu}^{-1} \{ [q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}] + \lambda_R^2(\mu^2) g_{\mu\nu} - \frac{1}{a_R(\mu^2)} q_\mu q_\nu + (q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}) \Pi_R(q^2, \mu^2) \} \quad (1)$$

que implica

$$Z_{5\mu} = Z_{6\mu} = 1$$

$$\lambda_R^2(\mu^2) = \lambda_R^2 [1 + \Pi_R(\lambda_R^2, \mu^2)] \quad (2)$$

$$Z_{3\mu} = Z_3 [1 + \Pi_R(\lambda_R^2, \mu^2)]$$

Finalmente para el neutrino

$$Z_1^{-1} \Gamma_R^\nu(p, p') = Z_{1\mu}^{-1} \Gamma_R^\nu(p, p'; \mu^2) \quad (3)$$

y tomaremos

$$Z_{2\mu} = Z_{2\mu} \quad (4)$$

lo cual define completamente el esquema μ .

En segundo orden de teoría de perturbaciones

$$\Pi_R^{(2)}(q^2, \mu^2) = -\frac{\alpha_R(\mu^2)}{3\pi} \left\{ -\frac{4m_R}{q^2} + \left(1 + \frac{2m_R^2}{q^2}\right) \sqrt{1 - \frac{4m_R^2}{q^2}} \ln \frac{\sqrt{1 - \frac{4m_R^2}{q^2}} + 1}{\sqrt{1 - \frac{4m_R^2}{q^2}} - 1} \right. \\ \left. - \frac{4m_R^2}{\mu^2} - \left(1 - \frac{2m_R^2}{\mu^2}\right) \sqrt{1 + \frac{4m_R^2}{\mu^2}} \ln \frac{\sqrt{1 + \frac{4m_R^2}{\mu^2}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{4m_R^2}{\mu^2}} - 1} \right\}$$

$$\Sigma_{1R}^{(2)}(p^2, \mu^2) = m_R \frac{\alpha_R(\mu^2)}{4\pi} \left\{ -a_R \frac{m_R^2}{p^2} - \left(3 - a_R \frac{m_R^2}{p^2}\right) \left(1 - \frac{m_R^2}{p^2}\right) \ln \left(1 - \frac{p^2}{m_R^2}\right) - \right. \\ \left. - a_R \frac{m_R^2}{\mu^2} + \left(3 + a_R \frac{m_R^2}{p^2}\right) \left(1 + \frac{m_R^2}{p^2}\right) \ln \left(1 + \frac{\mu^2}{m_R^2}\right) \right\}$$

$$\Sigma_{2R}^{(2)}(p^2, \mu^2) = \frac{\alpha_R(\mu^2)}{4\pi} \left\{ -a_R \frac{m_R^2}{p^2} - \frac{m_R^2}{\mu^2} \left(6 + a_R + 4a_R \frac{m_R^2}{\mu^2}\right) + a_R \left(1 - \frac{m_R^2}{p^2}\right) \ln \left(1 - \frac{p^2}{m_R^2}\right) + \right. \\ \left. + \left[-a_R + (6 + 3a_R) \frac{m_R^4}{\mu^4} + 4a_R \frac{m_R^6}{\mu^6}\right] \ln \left(1 + \frac{\mu^2}{m_R^2}\right) \right\}$$

donde $m_R^2 \equiv m_R^2(\mu^2)$. Nótese que han desaparecido las divergencias infra-rojo.

Entonces los límites en casos de imbués son

i) $m_R = 0$

$$\Gamma_R^{(2)}(q^2, \mu^2) \longrightarrow - \frac{\alpha_R(\mu^2)}{3\pi} \ln \frac{-q^2}{\mu^2}$$

$$\frac{1}{m_R} \Sigma_{1R}^{(2)}(p^2, \mu^2) \longrightarrow - \frac{3\alpha_R(\mu^2)}{4\pi} \ln \frac{-p^2}{\mu^2} \quad (1)$$

$$\Sigma_{2R}^{(2)}(p^2, \mu^2) \longrightarrow + \frac{\alpha_R(\mu^2)}{4\pi} \ln \frac{-p^2}{\mu^2}$$

ii) $\mu^2 = 0$

$$\Gamma_R^{(2)}(q^2, 0) = - \frac{\alpha_R(0)}{3\pi} \left\{ - \frac{4m_R^2}{q^2} + \left(1 + \frac{2m_R^2}{q^2}\right) \sqrt{1 - \frac{4m_R^2}{q^2}} \ln \frac{\sqrt{1 - \frac{4m_R^2}{q^2}} + 1}{\sqrt{1 - \frac{4m_R^2}{q^2}} - 1} - \frac{5}{3} \right\}$$

$$\Sigma_{1R}^{(2)}(p^2, 0) = m_R \frac{\alpha_R(0)}{4\pi} \left\{ - a_R \frac{m_R^2}{p^2} - \left(3 - a_R \frac{m_R^2}{p^2}\right) \left(1 - \frac{m_R^2}{p^2}\right) \ln \left(1 - \frac{p^2}{m_R^2}\right) + 3 + \frac{1}{2} a_R \right\} \quad (2)$$

$$\Sigma_{2R}^{(2)}(p^2, 0) = \frac{\alpha_R(0)}{4\pi} \left\{ - a_R \frac{m_R^2}{p^2} + a_R \left(1 - \frac{m_R^2}{p^2}\right) \ln \left(1 - \frac{p^2}{m_R^2}\right) - \frac{1}{6} (18 + a_R) \right\}$$

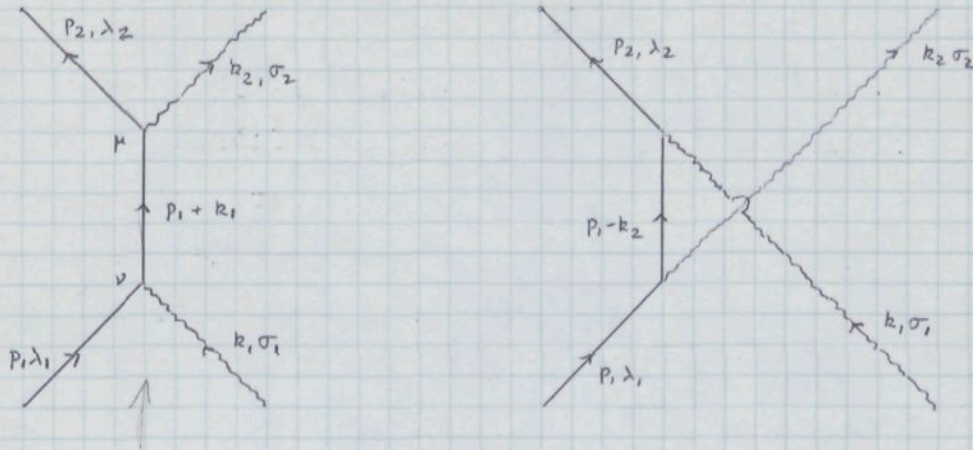
que son límites útiles en algunas ocasiones.

ii) Esquema mínimo

En este esquema se debe regularizar dimensionalmente y a continuación eliminar los polos en $1/\epsilon$. Hay un esquema llamado mínimo modificado en el que se sustituye por $1/\epsilon$ como la combinación $\frac{1}{\epsilon} - \ln 4n + \gamma$. Ambos esquemas los consideraremos con detalle en la Q.C.D.

XX.- SCATTERING ELECTRON - FOTON

Em el orden más bajo de teoría de perturbaciones los diagramas que debemos tener en cuenta son



El elemento de matriz T correspondiente es

$$T^{(2)} = e^2 \bar{u}(\vec{p}_2, \lambda_2) \left\{ \not{\epsilon}^*(\vec{k}_2, \sigma_2) \frac{\not{p}_1 + \not{k}_1 + m}{(p_1 + k_1)^2 - m^2 + i\epsilon} \not{\epsilon}(\vec{k}_1, \sigma_1) + \not{\epsilon}(\vec{k}_1, \sigma_1) \frac{\not{p}_1 - \not{k}_2 + m}{(p_1 - k_2)^2 - m^2 + i\epsilon} \not{\epsilon}^*(\vec{k}_2, \sigma_2) \right\} u(\vec{p}_1, \lambda_1) \quad (1)$$

de donde

$$T^{(2)} = e^2 \bar{u}(\vec{p}_2, \lambda_2) \left\{ \frac{1}{2(p_1 \cdot k_1)} \not{\epsilon}^*(\vec{k}_2, \sigma_2) (\not{p}_1 + \not{k}_1 + m) \not{\epsilon}(\vec{k}_1, \sigma_1) - \frac{1}{2(p_1 \cdot k_2)} \not{\epsilon}(\vec{k}_1, \sigma_1) (\not{p}_1 - \not{k}_2 + m) \not{\epsilon}^*(\vec{k}_2, \sigma_2) \right\} u(\vec{p}_1, \lambda_1) \quad (2)$$

Supongamos que no se miden polarizaciones finales y que los haces iniciales no están polarizados, entonces nos interesa

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &\equiv \frac{1}{4} \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \sum_{\sigma_1, \sigma_2} |T^{(2)}|^2 = \frac{e^4}{4} \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \sum_{\sigma_1, \sigma_2} \bar{u}(\vec{p}_2, \lambda_2) \left\{ \frac{1}{2(p_1 \cdot k_1)} \not{\epsilon}^*(\vec{k}_2, \sigma_2) (\not{p}_1 + \not{k}_1 + m) \not{\epsilon}(\vec{k}_1, \sigma_1) - \frac{1}{2(p_1 \cdot k_2)} \not{\epsilon}(\vec{k}_1, \sigma_1) (\not{p}_1 - \not{k}_2 + m) \not{\epsilon}^*(\vec{k}_2, \sigma_2) \right\} \\ &\quad \cdot \left\{ \frac{1}{2(p_1 \cdot k_1)} \not{\epsilon}(\vec{k}_1, \sigma_1) (\not{p}_1 + \not{k}_1 + m) \not{\epsilon}^*(\vec{k}_2, \sigma_2) - \frac{1}{2(p_1 \cdot k_2)} \not{\epsilon}^*(\vec{k}_2, \sigma_2) (\not{p}_1 - \not{k}_2 + m) \not{\epsilon}(\vec{k}_1, \sigma_1) \right\} u(\vec{p}_1, \lambda_1) \bar{u}(\vec{p}_1, \lambda_1) \\ &\quad + \frac{1}{2(p_1 \cdot k_1)} \not{\epsilon}^*(\vec{k}_1, \sigma_1) (\not{p}_1 + \not{k}_1 + m) \not{\epsilon}(\vec{k}_2, \sigma_2) \left\{ \frac{1}{2(p_1 \cdot k_1)} \not{\epsilon}(\vec{k}_1, \sigma_1) (\not{p}_1 + \not{k}_1 + m) \not{\epsilon}^*(\vec{k}_2, \sigma_2) - \frac{1}{2(p_1 \cdot k_2)} \not{\epsilon}^*(\vec{k}_2, \sigma_2) (\not{p}_1 - \not{k}_2 + m) \not{\epsilon}(\vec{k}_1, \sigma_1) \right\} u(\vec{p}_2, \lambda_2) \end{aligned}$$

de donde

$$\sum_{\lambda=\pm 1} \epsilon^\mu(\vec{p}, \lambda) \epsilon^{\nu\dagger}(\vec{p}, \lambda) = -g^{\mu\nu} + \frac{m^\mu p^\nu + m^\nu p^\mu}{(m \cdot p)} - \frac{p^\mu p^\nu}{(m \cdot p)^2}$$

$$m^\mu \equiv (1, \vec{0})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \frac{e^4}{16} \text{Tr} \left\{ \left[\frac{1}{(p_1 \cdot k_1)} \gamma^\mu (\not{x}_1 + \not{k}_1 + m) \gamma^\nu - \frac{1}{(p_1 \cdot k_2)} \gamma^\nu (\not{x}_1 - \not{k}_2 + m) \gamma^\mu \right] (\not{x}_1 + m) \cdot \right. \\ \left. \left[\frac{1}{(p_1 \cdot k_1)} \gamma_\nu (\not{x}_1 + \not{k}_1 + m) \gamma_\mu - \frac{1}{(p_1 \cdot k_2)} \gamma_\mu (\not{x}_1 - \not{k}_2 + m) \gamma_\nu \right] (\not{x}_2 + m) \right\} \quad (1) \end{aligned}$$

Introducamos las cantidades adimensionales

$$\omega_1 \equiv \frac{1}{m^2} (p_1 \cdot k_1) \quad \omega_2 \equiv \frac{1}{m^2} (p_1 \cdot k_2)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (p_1 \cdot k_1) &= m^2 \omega_1 & (p_1 \cdot k_2) &= m^2 \omega_2 & (p_1 \cdot p_2) &\equiv m^2 (1 + \omega_1 - \omega_2) \\ (p_2 \cdot k_1) &\equiv m^2 \omega_2 & (p_2 \cdot k_2) &= m^2 \omega_1 & (k_1 \cdot k_2) &= m^2 (\omega_1 - \omega_2) \end{aligned} \quad (2)$$

de donde

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \frac{e^4}{16 m^4} \left\{ \frac{1}{\omega_1^2} \text{Tr} \left[\gamma^\mu (\not{x}_1 + \not{k}_1 + m) \gamma^\nu (\not{x}_1 + m) \gamma_\nu (\not{x}_2 + \not{k}_2 + m) \gamma_\mu (\not{x}_2 + m) \right] + \right. \\ + \frac{1}{\omega_2^2} \text{Tr} \left[\gamma^\nu (\not{x}_1 - \not{k}_2 + m) \gamma^\mu (\not{x}_1 + m) \gamma_\mu (\not{x}_2 - \not{k}_1 + m) \gamma_\nu (\not{x}_2 + m) \right] - \\ - \frac{1}{\omega_1 \omega_2} \text{Tr} \left[\gamma^\mu (\not{x}_1 + \not{k}_1 + m) \gamma^\nu (\not{x}_1 + m) \gamma_\mu (\not{x}_2 - \not{k}_1 + m) \gamma_\nu (\not{x}_2 + m) \right] - \\ \left. - \frac{1}{\omega_1 \omega_2} \text{Tr} \left[\gamma^\nu (\not{x}_1 - \not{k}_2 + m) \gamma^\mu (\not{x}_1 + m) \gamma_\nu (\not{x}_2 + \not{k}_2 + m) \gamma_\mu (\not{x}_2 + m) \right] \right\} \end{aligned}$$

Calculemos las trazas

$$\begin{aligned} T_1 &\equiv \text{Tr} \left[\gamma^\mu (\not{x}_1 + \not{k}_1 + m) \gamma^\nu (\not{x}_1 + m) \gamma_\nu (\not{x}_2 + \not{k}_2 + m) \gamma_\mu (\not{x}_2 + m) \right] = \\ &= \text{Tr} \left[(\not{x}_1 + \not{k}_1 + m) (-2\not{x}_1 + 4m) (\not{x}_2 + \not{k}_2 + m) (-2\not{x}_2 + 4m) \right] = \\ &= 4 \text{Tr} \left[(-\not{k}_1 \not{x}_1 + 2m \not{k}_1 + m \not{x}_1 + m^2) (-\not{k}_2 \not{x}_2 + 2m \not{k}_2 + m \not{x}_2 + m^2) \right] \\ &= 16 \left[(p_1 \cdot k_1) (p_2 \cdot k_2) - (p_1 \cdot p_2) (k_1 \cdot k_2) + (p_1 \cdot k_2) (p_2 \cdot k_1) - m^2 (p_1 \cdot k_1) + 4m^2 (k_1 \cdot k_2) + 2m^2 (p_2 \cdot k_1) + \right. \\ &\quad \left. + 2m^2 (p_1 \cdot k_2) + m^2 (p_1 \cdot p_2) - m^2 (p_2 \cdot k_2) + m^4 \right] = 32 m^4 (\omega_1 \omega_2 + \omega_1 + 1) \end{aligned}$$

$$T_2 \equiv \text{Tr} \left[\gamma^\mu (\not{x}_1 - \not{k}_2 + m) \gamma^\nu (\not{x}_1 + m) \gamma_\mu (\not{x}_2 - \not{k}_1 + m) \gamma_\nu (\not{x}_2 + m) \right] = 32 m^4 (\omega_1 \omega_2 - \omega_2 + 1)$$

$$\begin{aligned} T_3 &\equiv \text{Tr} \left[\gamma^\mu (\not{x}_1 + \not{k}_1 + m) \gamma^\nu (\not{x}_1 + m) \gamma_\mu (\not{x}_2 - \not{k}_1 + m) \gamma_\nu (\not{x}_2 + m) \right] \\ &= 2 \text{Tr} \left[\gamma^\mu (\not{x}_1 + \not{k}_1 + m) \not{x}_2 (\not{x}_1 + m) \gamma_\mu (\not{x}_2 - \not{k}_1 + m) \right] + \text{Tr} \left[\gamma^\mu (\not{x}_1 + \not{k}_1 + m) \gamma^\nu (\not{x}_1 + m) \gamma_\mu \not{k}_1 (\not{x}_2 - m) \gamma_\nu \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \operatorname{Tr} [(\not{x}_1 + \not{x}_1 + m) \not{x}_2 (\not{x}_1 + m) (-2\not{x}_2 + 2\not{x}_1 + 4m)] + \operatorname{Tr} [(\not{x}_1 + \not{x}_1 + m) \gamma^\nu (\not{x}_1 + m) (-2\not{x}_\nu \not{x}_2 \not{x}_1 - 4m k_{1\nu})] = \\
&= 2 \operatorname{Tr} [(m^2 + m\not{x}_2 + \not{x}_2 \not{x}_2) (2\not{x}_1 \not{x}_2 + 2m\not{x}_2 + 2m\not{x}_1 + 2m^2)] - 2 \operatorname{Tr} [(-2\not{x}_1 \not{x}_1 + 2m^2) \not{x}_2 \not{x}_1] - \\
&- 4m \operatorname{Tr} [(\not{x}_1 + m) \not{x}_1 (\not{x}_1 + m)] = 16 [m^2 (p_1 \cdot k_2) + m^4 + m^2 (p_2 \cdot k_2) + m^2 (p_1 \cdot p_2) + m^2 (p_2 \cdot k_2) \\
&- m^2 (p_2 \cdot k_1) - 2m^2 (p_1 \cdot k_1)] = 16 m^4 (2 + \omega_1 - \omega_2)
\end{aligned}$$

$$T_4 \equiv \operatorname{Tr} [\gamma^\nu (\not{x}_1 - \not{x}_2 + m) \gamma^\mu (\not{x}_1 + m) \gamma_\nu (\not{x}_2 + \not{x}_2 + m) \gamma_\mu (\not{x}_1 + m)] = 16 m^4 (2 + \omega_1 - \omega_2)$$

de donde

$$\zeta = 2e^4 \left[\left(\frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_2} \right)^2 + 2 \left(\frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_2} \right) + \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} + \frac{\omega_1}{\omega_2} \right) \right] \quad (1)$$

La sección eficaz total es

$$\sigma = \frac{1}{16 \pi^2 m^2 \omega_1} \int \frac{d^3 p_2}{2E(p_2)} \frac{d^3 k_2}{2E(k_2)} \delta(p_1 + k_1 - p_2 - k_2) \zeta \quad (2)$$

Consideremos el electrón inicial en reposo $p_1^\mu \equiv (m, 0, 0, 0)$, entonces $k_1^\mu = m(\omega_1, 0, 0, \omega_1)$ y sea Ω el ángulo de salida del fotón

$$\sigma = \frac{m^3}{16 \pi^2 m^2 \omega_1} \int \frac{d\Omega \omega_2^2 d\omega_2}{4m\omega_2 [m^2 + (\vec{k}_1 - \vec{k}_2)^2]^{1/2}} \delta[m + m\omega_1 - m\omega_2 - \sqrt{m^2 + (\vec{k}_1 - \vec{k}_2)^2}] \zeta \quad (3)$$

$$\phi \equiv m + m\omega_1 - m\omega_2 \mp [m^2 + \omega_1^2 m^2 + \omega_2^2 m^2 - 2m^2 \omega_1 \omega_2 \cos \theta]^{1/2}$$

$$\phi = 0 \quad \Rightarrow \quad (1 + \omega_1^2 + \omega_2^2 - 2\omega_1 \omega_2 \cos \theta) = 1 + \omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1 - 2\omega_2 - 2\omega_1 \omega_2 \Rightarrow$$

$$\omega_2 = \frac{\omega_1}{1 + \omega_1 (1 - \cos \theta)} \quad (\text{Fórmula de Compton}) \quad (4)$$

$$\frac{d\phi}{d\omega_2} = -m \mp \frac{m^2 (\omega_2 - \omega_1 \cos \theta)}{[m^2 + (\vec{k}_1 - \vec{k}_2)^2]^{1/2}}$$

de donde

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2m^2} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 \left[\left(\frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_2} \right)^2 + 2 \left(\frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_2} \right) + \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} + \frac{\omega_1}{\omega_2} \right) \right] \quad (5)$$

y en términos del ángulo de salida la sección eficaz en el sistema laboratorio es

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} r_0^2 \frac{1 + \cos^2 \theta}{[1 + \omega_1 (1 - \cos \theta)]^2} \left\{ 1 + \frac{\omega_1^2 (1 - \cos \theta)^2}{(1 + \cos^2 \theta) [1 + \omega_1 (1 - \cos \theta)]} \right\} \quad \text{(Fórmula de Kram-Nishijima)}$$

$\omega_1 =$ energía del electrón entrante en unidades de m (1)

$$\cos \theta = \hat{k}_1 \cdot \hat{k}_2$$

$$r_0 \equiv \frac{\alpha}{m} = 2.817\,938\,0\,(70) \times 10^{-13} \text{ cm}, \quad r_0^2 = 0.079\,407\,74\,(39) \text{ barn.}$$

casos límite

$$i) \omega_1 \ll 1 \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} r_0^2 (1 + \cos^2 \theta) \quad \text{(Fórmula de Thomson)} \quad (2)$$

$$ii) \omega_1 \gg 1, \quad \theta \ll \frac{1}{\omega_1} \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = r_0^2 \quad (3)$$

$$iii) \omega_1 \gg 1, \quad \theta \gg \frac{1}{\omega_1} \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} r_0^2 \frac{1}{\omega_1} \frac{1}{1 - \cos \theta} \quad (4)$$

Por otra parte la sección eficaz total es

$$\sigma = \pi r_0^2 \int_{-1}^1 d\mu \frac{1 + \mu^2}{[1 + \omega_1 (1 - \mu)]^2} \left\{ 1 + \frac{\omega_1^2 (1 - \mu)^2}{(1 + \mu^2) [1 + \omega_1 (1 - \mu)]} \right\}$$

Ahora bien

$$\int_{-1}^{+1} d\mu \frac{1}{[-\omega_1 \mu + 1 + \omega_1]^2} = \frac{1}{\omega_1 [-\omega_1 \mu + 1 + \omega_1]} \Big|_{-1}^{+1} = \frac{2}{(1 + 2\omega_1)}$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} d\mu \frac{\mu^2}{[-\omega_1 \mu + 1 + \omega_1]^2} &= \left\{ \frac{\mu^2}{\omega_1 [-\omega_1 \mu + 1 + \omega_1]} + \frac{2\mu}{\omega_1^2} + \frac{2(1 + \omega_1)}{\omega_1^3} \ln [-\omega_1 \mu + 1 + \omega_1] \right\}_{-1}^{+1} = \\ &= \frac{2}{(1 + 2\omega_1)} + \frac{4}{\omega_1^2} - \frac{2(1 + \omega_1)}{\omega_1^3} \ln (1 + 2\omega_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_1^2 \int_{-1}^1 d\mu \frac{(1 - \mu)^2}{[1 + \omega_1 (1 - \mu)]^3} &= \omega_1^2 \int_2^0 dx \frac{x^2}{[\omega_1 x + 1]^3} = \omega_1^2 \left\{ -\frac{x^2}{2\omega_1 (\omega_1 x + 1)^2} - \frac{x}{\omega_1^2 (\omega_1 x + 1)} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{\omega_1^3} \ln (\omega_1 x + 1) \right\}_2^0 = -\frac{2\omega_1}{(1 + 2\omega_1)^2} - \frac{2}{(1 + 2\omega_1)} + \frac{1}{\omega_1} \ln (1 + 2\omega_1) \end{aligned}$$

de donde

$$\sigma = \frac{3}{4} \sigma_0 \left\{ \frac{1 + \omega_1}{\omega_1^3} \left[\frac{2\omega_1(1 + \omega_1)}{1 + 2\omega_1} - \ln(1 + 2\omega_1) \right] + \frac{\ln(1 + 2\omega_1)}{2\omega_1} - \frac{1 + 3\omega_1}{(1 + 2\omega_1)^2} \right\} \quad (1)$$

$$\sigma_0 = \frac{8\pi}{3} r_0^2 = 0.665 \ 244 \ 7 \ (33) \ \text{barn} \quad (\text{sección eficaz Thomson})$$

Algunos límites de interés son

$$i) \ \omega_1 \ll 1 \quad \sigma = \sigma_0 (1 - 2\omega_1 + \dots) \quad (2)$$

$$ii) \ \omega_1 \gg 1 \quad \sigma = \frac{3}{8} \sigma_0 \frac{1}{\omega_1} \left(\ln 2\omega_1 + \frac{1}{2} + \dots \right) \quad (3)$$

Notar que σ decrece rápidamente al aumentar ω_1 y en tanto el poder de penetración de los fotones duros aumenta rápidamente con la energía, a bajas energías la sección eficaz es prácticamente independiente de la energía.

Notar que después de la colisión el electrón tiene una energía

$$E_2 = m(1 + \omega_1 - \omega_2) = m + m \frac{\omega_1^2 (1 - \cos \theta)}{1 + \omega_1 (1 - \cos \theta)} \quad (4)$$

y esta varía desde $E_2 = m$ para $\theta = 0$ a un máximo $E_2 = m + m \frac{2\omega_1^2}{1 + 2\omega_1}$ a $\theta = \pi$

El ángulo de salida del electrón de retroceso es $\cos \beta = \hat{p}_2 \cdot \hat{k}_1$

$$m^2 \omega_2^2 = m \omega_1 E_2 - m \omega_1 |\vec{p}_2| \cos \beta$$

$$\Rightarrow \cos \beta = \frac{1}{\omega_1 |\vec{p}_2|} [\omega_1 E_2 - m \omega_2]$$

$$\cos \beta = \frac{m}{|\vec{p}_2|} \frac{\omega_1 (1 + \omega_1) (1 - \cos \theta)}{1 + \omega_1 (1 - \cos \theta)}$$

$$\Rightarrow \cos \beta = (1 + \omega_1) \left[\frac{1 - \cos \theta}{2 + \omega_1 (2 + \omega_1) (1 + \cos \theta)} \right]^{1/2} \quad (5)$$

que varía desde $\beta = \pi/2$ para $\theta = 0$ hasta $\beta = 0$ para $\theta = \pi$. Teniendo en cuenta (5) es fácil expresar la sección eficaz diferencial en términos del ángulo de salida del electrón de retroceso, y se obtiene así:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_e} = 4r_0^2 \frac{(1+\omega_1)^2 \cos^2 \beta}{[1+2\omega_1+\omega_1^2 \sin^2 \beta]^2} \left\{ 1 + \frac{2\omega_1^2 \cos^4 \beta}{[1+2\omega_1+\omega_1^2 \sin^2 \beta][1+\omega_1(\omega_1+2) \sin^2 \beta]} \right. \\ \left. - \frac{2(1+\omega_1)^2 \sin^2 \beta \cos^2 \beta}{[1+\omega_1(\omega_1+2) \sin^2 \beta]^2} \right\} \quad (1)$$

y en particular

$$\omega_1 \gg 1, \quad \omega_1 \beta^2 \ll 1$$

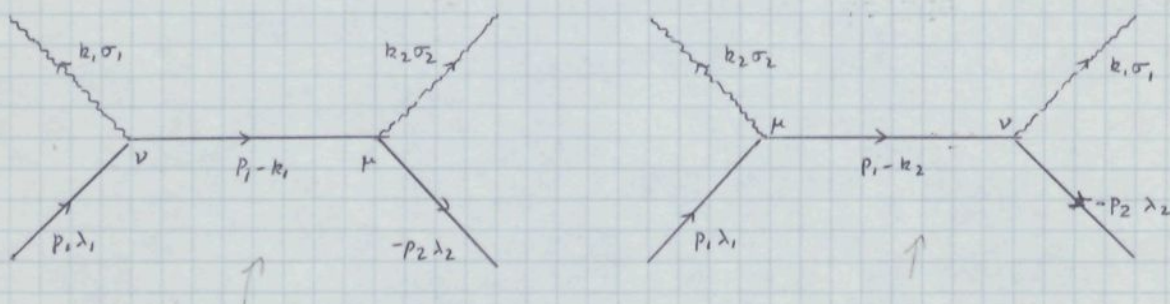
$$\frac{d\sigma}{d\Omega_e} = r_0^2 \frac{\omega_1}{1+\omega_1^2 \beta^2}$$

(2)

$$\omega_1 \gg 1, \quad \omega_1 \sin^2 \beta \gg 1$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_e} = r_0^2 \frac{4 \cos^2 \beta}{\omega_1^2 \sin^4 \beta}$$

Considérenos ahora la aniquilación e^+e^- en un par de fotones. Si la elección y el positrón son libres el proceso $e^+e^- \rightarrow \gamma$ es prohibido por las leyes de conservación de energía-momento y en tanto el proceso más importante es $e^+e^- \rightarrow 2\gamma$. Los diagramas de Feynman correspondientes son



y el elemento de matriz T correspondiente es

$$T^{(2)} = e^2 \bar{v}(\bar{p}_2, \lambda_2) \left\{ \not{\epsilon}^*(\bar{k}_2, \sigma_2) \frac{\not{p}_1 - \not{k}_1 + m}{(p_1 - k_1)^2 - m^2 + i\epsilon} \not{\epsilon}^*(\bar{k}_1, \sigma_1) + \right. \\ \left. + \not{\epsilon}^*(\bar{k}_1, \sigma_1) \frac{\not{p}_1 - \not{k}_2 + m}{(p_1 - k_2)^2 - m^2 + i\epsilon} \not{\epsilon}^*(\bar{k}_2, \sigma_2) \right\} u(\bar{p}_1, \lambda_1) \quad (3)$$

Si no estamos interesados en las polarizaciones finales y los haces iniciales están sin polarizar debemos promediar sobre polarizaciones iniciales y sumar sobre las finales es decir calcular

$$\bar{\sigma} \equiv \frac{1}{4} \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \sum_{\sigma_1, \sigma_2} |T^{(2)}|^2$$

No es necesario calcular esto pues solo un signo menos global para obtener el

resultado deseado basta hacer en el caso anterior $p_2 \rightarrow -p_2$ y $k_1 \rightarrow -k_1$ y por tanto

$$\sigma = -2e^4 \left[\left(\frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_2} \right)^2 + 2 \left(\frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_2} \right) + \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} + \frac{\omega_1}{\omega_2} \right) \right] \tag{1}$$

$$(p_1, k_1) = -m^2 \omega_1, \quad (p_1, k_2) = m^2 \omega_2$$

Consideremos ahora el sistema centro de masas

$$p_1^* = (E, \vec{q}), \quad p_2^* = (E, -\vec{q}) \quad E = \sqrt{m^2 + q^2}$$

$$k_1^* = (E, \vec{q}'), \quad k_2^* = (E, -\vec{q}') \quad |\vec{q}'| = E, \quad \cos \theta = \hat{q} \cdot \hat{q}' \tag{2}$$

$$s = 4E^2, \quad v = \frac{q}{E}, \quad 1 - v^2 = \frac{m^2}{E^2}$$

$$m^2 \omega_1 = -E(E - q \cos \theta), \quad m^2 \omega_2 = E(E + q \cos \theta) \quad q = |\vec{q}|$$

La sección eficaz en el sistema C.M. teniendo en cuenta el factor 1/2! debido a las dos partículas idénticas en el estado final es

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{4E^2} \frac{2e^4}{v} \left\{ \left(\frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_2} \right)^2 + 2 \left(\frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_2} \right) + \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} + \frac{\omega_1}{\omega_2} \right) \right\} \tag{3}$$

de donde

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{8E^2 v \omega_1^2 \omega_2^2} \left\{ (\omega_2 - \omega_1)^2 + 2\omega_1 \omega_2 (\omega_2 - \omega_1) + \omega_1 \omega_2 (\omega_1^2 + \omega_2^2) \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{m^8 \alpha^2}{8 v E^{10} (1 - v^2 \cos^2 \theta)^2} \left\{ \frac{4E^4}{m^4} - \frac{4E^6}{m^6} (1 - v^2 \cos^2 \theta) - \frac{2E^8}{m^8} (1 - v^2 \cos^2 \theta)(1 + v^2 \cos^2 \theta) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{8 v E^2 (1 - v^2 \cos^2 \theta)^2} \left\{ 4(1 - v^2)^2 - 4(1 - v^2)(1 - v^2 \cos^2 \theta) - 2(1 - v^4 \cos^4 \theta) \right\} \end{aligned}$$

y por tanto en el sistema CM

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{8} r_0^2 \frac{m^2}{v E^2} \frac{1}{(1 - v^2 \cos^2 \theta)^2} \left\{ 1 + 2v^2 \sin^2 \theta - v^4 (1 + \sin^4 \theta) \right\} \tag{4}$$

Para obtener la sección eficaz total necesitamos

$$I_m \equiv \int_{-1}^{+1} d\mu \frac{\mu^{2m}}{(v^2\mu^2 - 1)^2} \quad m=0, 1, 2$$

$$I_0 = \frac{\mu}{2(1-v^2\mu^2)} + \frac{1}{4v} \ln \left| \frac{v\mu + 1}{v\mu - 1} \right| \Big|_{-1}^{+1} = \frac{1}{1-v^2} + \frac{1}{2v} \ln \frac{1+v}{1-v}$$

$$I_1 = \frac{1}{v^2} \int_{-1}^{+1} d\mu \frac{1}{v^2\mu^2 - 1} + \frac{1}{v^2} I_0 = -\frac{1}{2v^3} \ln \left| \frac{1+v\mu}{1-v\mu} \right| \Big|_{-1}^{+1} + \frac{1}{v^2} I_0 =$$

$$= \frac{1}{v^2(1-v^2)} - \frac{1}{2v^3} \ln \frac{1+v}{1-v}$$

$$I_2 = \frac{1}{v^4} \int_{-1}^{+1} d\mu + \frac{1}{v^4} \int_{-1}^{+1} d\mu \frac{1}{v^2\mu^2 - 1} + \frac{1}{v^2} I_1 = \frac{2}{v^4} + \frac{1}{v^4(1-v^2)} - \frac{3}{2v^5} \ln \frac{1+v}{1-v}$$

de donde se obtiene para la sección eficaz total

$$\sigma = r_0^2 \frac{\pi m^2}{4v E^2} \left[\frac{3-v^4}{v} \ln \frac{1+v}{1-v} + 2(v^2-2) \right] \quad (1)$$

donde v es la velocidad del electron en el sistema C.M. y E su energía. Evidentemente como σ es invariante (1) se puede escribir en términos de cualquier cantidad invariante como S , teniendo en cuenta que

$$E^2 = \frac{S}{4} \quad v = \left[1 - \frac{4m^2}{S} \right]^{1/2} \quad (2)$$

Se tiene

$$v \ll 1 \quad \sigma = r_0^2 \frac{\pi}{2} \frac{1}{v} \quad (3)$$

$$v \uparrow 1 \quad \sigma = r_0^2 \frac{2\pi m^2}{S} \ln \frac{S}{m^2} \quad (4)$$

XXI - POSITRONIO

Se denomina positronio a un estado ligado (e^+e^-). En el límite no relativista el positronio viene descrito por una ecuación de Schrödinger análoga a la de un átomo de hidrógeno con una masa reducida $\mu = m/2$ y por tanto su energía de ligadura B y el radio de Bohr del estado fundamental, a , vienen dados por

$$B = \frac{1}{4} m \alpha^2 = 6.802\ 902\ (18)\ eV \tag{1}$$

$$a = \frac{2}{m \alpha} = 1.058\ 354\ 12\ (18)\ \text{Å}$$

En el estado fundamental la función de ondas es

$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m \alpha}{2} \right)^{3/2} e^{-m \alpha r / 2} \tag{2}$$

cuya transformada de Fourier es

$$\hat{\psi}(\vec{p}) = \frac{2^{3/2}}{\pi} \frac{a^{3/2}}{(1 + a^2 \vec{p}^2)^2} \tag{3}$$

que determina la densidad de probabilidad de que en el positronio el electrón tenga un momento \vec{p} . Notar que son de interés $|\vec{p}| \lesssim 1/a = \frac{m \alpha}{2} \ll m$, es decir que el electrón y el positrón tienen momentos muy pequeños comparados con su masa, esto es son claramente no relativistas. En esta aproximación no relativista el cuadrado momento total P^2 junto con L^2, L_3, S^2, S_3, J^2 y J_3 son constantes del movimiento y puede usarse la notación espectral típica habitual para indicar los estados de este sistema.

Si las correcciones relativistas son tenidas en cuenta se puede ver que S^2, J^2 y J_3 continúan siendo constantes del movimiento por lo que los estados del positronio se pueden dividir en estados singlete o para positronio con $S=0$ y estados triplete u orto positronio con $S=1$.

Un conjunto completo de observables útil para clasificar los niveles del positronio son P^2, J^2, J_3, U_p (operador paridad) y U_c (operador conjugación

Paridad : $U_p = (-1)^{L+1}$: El $(-1)^L$ proviene de la función de ondas
relativa y el $(-1)^1$ de la paridad intrínseca
de un sistema partícula-anti-partícula que es (-1)

Conjugación de carga : $U_c = (-1)^{L+S}$: U_c intercambia la carga de las dos partículas.

Si intercambiamos sus espines, obtenemos $(-1)^L$

El intercambio del spin $(-1)^{S+1}$

y el conjunto de las tres operaciones debe dar $(-1)^{L+S}$

las partículas fermiónicas $U_c (-1)^L (-1)^{S+1} = (-1)^{L+S} \Rightarrow U_c = (-1)^{L+S}$

$$U_{CP} = U_c U_p = (-1)^{L+S} (-1)^{L+1} \Rightarrow U_{CP} = (-1)^{S+1}$$

partícula - antipartícula). Veremos que $U_{CP} \equiv U_C U_P$ está relacionado con \vec{S}^2 .

Paridad: $U_P = (-1)^{L+1}$: El $(-1)^L$ proviene de la función de ondas relativa mientras que el $(-1)^1$ proviene de la paridad intrínseca que es opuesta para la partícula y la antipartícula.

Conjugación de carga: $U_C = (-1)^{L+S}$: U_C cambia la carga de las dos partículas.

Si a continuación cambiamos sus coordenadas espaciales obtenemos un factor $(-1)^L$ y si después cambiamos las de spin obtenemos $(-1)^{S+1}$. El producto de las tres operaciones es intercambia todas las coordenadas de las dos partículas y en un fermiónes esto equivale a multiplicar toda la función de ondas por (-1) : $U_C (-1)^L (-1)^{S+1} = (-1) \Rightarrow U_C = (-1)^{L+S}$

Evidentemente

$$(-1)^{L+S} (-1)^{L+1} = U_{CP} \Rightarrow U_{CP} = (-1)^{S+1}$$

Un estado positivo se puede considerar como una superposición de estados $|W_{2m}\rangle$ donde $m = 1, 2, 3, \dots$ indica la presencia de m pares de $U(1)$ quarks. Los estados $m > 1$ corresponden a conexiones no triviales que no seran tenidos en cuenta en nuestra análisis. En esta aproximación y suponiendo $\vec{P} = 0$

$$|W\rangle = \int d^3p \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \varphi(\vec{p}, \lambda_1; -\vec{p}, \lambda_2) a^\dagger(\vec{p}, \lambda_1) b^\dagger(-\vec{p}, \lambda_2) |0\rangle$$

donde $\varphi(\vec{p}, \lambda_1; -\vec{p}, \lambda_2)$ representa la función de ondas en la representación de momentos y helicidades. Como $U_P |0\rangle = U_C |0\rangle = U_{CP} |0\rangle = |0\rangle$ entonces:

$$U_P a^\dagger(\vec{p}, \lambda_1) U_P^{-1} = \eta_p^* a^\dagger(-\vec{p}, -\lambda_1) \quad , \quad U_P b^\dagger(-\vec{p}, \lambda_2) U_P^{-1} = -\eta_p b^\dagger(\vec{p}, -\lambda_2)$$

$$U_C a^\dagger(\vec{p}, \lambda_1) U_C^{-1} = -i\eta_c^* \lambda_1 b^\dagger(\vec{p}, \lambda_1) \quad , \quad U_C b^\dagger(-\vec{p}, \lambda_2) U_C^{-1} = i\eta_c \lambda_2 a^\dagger(-\vec{p}, \lambda_2)$$

\Rightarrow

$$U_P a^\dagger(\vec{p}, \lambda_1) b^\dagger(-\vec{p}, \lambda_2) U_P^{-1} = -a^\dagger(-\vec{p}, -\lambda_1) b^\dagger(\vec{p}, -\lambda_2)$$

$$U_C a^\dagger(\vec{p}, \lambda_1) b^\dagger(-\vec{p}, \lambda_2) U_C^{-1} = \lambda_1 \lambda_2 b^\dagger(\vec{p}, \lambda_1) a^\dagger(-\vec{p}, \lambda_2)$$

$$U_{CP} a^\dagger(\vec{p}, \lambda_1) b^\dagger(-\vec{p}, \lambda_2) U_{CP}^{-1} = -\lambda_1 \lambda_2 b^\dagger(-\vec{p}, -\lambda_1) a^\dagger(\vec{p}, -\lambda_2)$$

Veamos el efecto de estos operadores sobre la función de ondas

$$U_P |W\rangle = - \int d^3p \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \varphi(\vec{p}, \lambda_1; -\vec{p}, \lambda_2) a^\dagger(-\vec{p}, -\lambda_1) b^\dagger(\vec{p}, -\lambda_2) |0\rangle$$

$$= - \int d^3p \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \varphi(-\vec{p}, -\lambda_1; \vec{p}, -\lambda_2) a^\dagger(\vec{p}, \lambda_1) b^\dagger(-\vec{p}, \lambda_2) |0\rangle$$

y el efecto de la paridad sobre la función de ondas es

$$U_p \varphi(\vec{p}, \lambda_1; -\vec{p}, \lambda_2) = -\varphi(-\vec{p}, -\lambda_1; \vec{p}, -\lambda_2) \tag{1}$$

Similáramente

$$\begin{aligned} U_C | \omega \rangle &= - \int d^3 p \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \varphi(\vec{p}, \lambda_1; -\vec{p}, \lambda_2) \lambda_1 \lambda_2 a^\dagger(-p, \lambda_2) b^\dagger(\vec{p}, \lambda_1) | 0 \rangle = \\ &= - \int d^3 p \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \varphi(-\vec{p}, \lambda_2; \vec{p}, \lambda_1) \lambda_1 \lambda_2 a^\dagger(\vec{p}, \lambda_1) b^\dagger(-\vec{p}, \lambda_2) | 0 \rangle \end{aligned}$$

$$U_C \varphi(\vec{p}, \lambda_1; -\vec{p}, \lambda_2) = -\lambda_1 \lambda_2 \varphi(-\vec{p}, \lambda_2; \vec{p}, \lambda_1) \tag{2}$$

$$U_{CP} \varphi(\vec{p}, \lambda_1; -\vec{p}, \lambda_2) = +\lambda_1 \lambda_2 \varphi(\vec{p}, -\lambda_2; -\vec{p}, -\lambda_1) \tag{3}$$

Los autovalores propios de U_{CP} son

$$| \omega; 00 \rangle = \int d^3 p \varphi(\vec{p}) \frac{1}{\sqrt{2}} [a^\dagger(\vec{p}, +) b^\dagger(-\vec{p}, +) + a^\dagger(\vec{p}, -) b^\dagger(-\vec{p}, -)] | 0 \rangle$$

$$| \omega; 11 \rangle = \int d^3 p \varphi(\vec{p}) a^\dagger(\vec{p}, +) b^\dagger(-\vec{p}, -) | 0 \rangle$$

$$| \omega; 10 \rangle = \int d^3 p \varphi(\vec{p}) \frac{1}{\sqrt{2}} [a^\dagger(\vec{p}, +) b^\dagger(-\vec{p}, +) - a^\dagger(\vec{p}, -) b^\dagger(-\vec{p}, -)] | 0 \rangle$$

$$| \omega; 1-1 \rangle = \int d^3 p \varphi(\vec{p}) a^\dagger(\vec{p}, -) b^\dagger(-\vec{p}, +) | 0 \rangle$$

que tienen $U_{CP} = (-1)^S$ la diferencia es debida a un cambio de signo en las asignaciones de las antipartículas

$$|w; l-l\rangle = \int d^3p \varphi(\vec{p}) a^\dagger(\vec{p}-) b^\dagger(-\vec{p}+) |0\rangle$$

$$U_{CP} = +1$$

y en tanto

$$U_{CP} = (-1)^{S+L} = \begin{cases} -1 & \text{Parapositronio} \\ +1 & \text{Ortopositronio} \end{cases} \quad (1)$$

De los resultados anteriores

$$U_C = (-1)^{L+S} \quad (2)$$

De esto resulta que los niveles del positronio se pueden clasificar de la forma siguiente

	J	$U_{CP} = (-1)^{S+1}$	$U_P = (-1)^{L+1}$	U_C
¹ S	0	-1	-1	+1
¹ P	1	-1	+1	-1
¹ D	2	-1	-1	+1
⁴ F	3	-1	+1	-1

Parapositronio

	J	$U_{CP} = (-1)^{S+1}$	$U_P = (-1)^{L+1}$	U_C
³ P ₀	0	+1	+1	+1
³ S ₁ + ³ D ₁	1	+1	-1	-1
³ P ₁	1	+1	+1	+1
³ P ₂ + ³ F ₂	2	+1	+1	+1
³ D ₂	2	+1	-1	-1

Ortopositronio

Los estados fundamentales son los ¹S y (³S₁ + ³D₁) para el parapositronio y ortopositronio respectivamente

Veamos cuales son las reglas de desintegración del positronio. El electrón y el positron pueden aniquilarse dando origen a dos o mas fotones. Recordemos que al operada U_C cambia el signo del campo fotónico y en tanto si |m> indica un estado con m fotones

$$U_C |m\rangle = (-1)^m |m\rangle \quad (3)$$

Por tanto para que un estado del positronio se pueda desintegrar en n fotones se debe cumplir

$$(-1)^{L+S} = (-1)^m \quad (1)$$

Para el parapositronio en el estado fundamental (1S) se obtiene pues que se desintegra siempre en un número par de fotones siendo la más frecuente en dos fotones. Para el ortopositronio el estado fundamental es el $^3S_1 + ^3D_1$, con lo cual $(-1)^{L+S} = -1$ y se debe desintegrar siempre en un número impar de fotones, siendo tres fotones el canal dominante.

Vamos a continuación a considerar la desintegración del estado fundamental

i) Parapositronio

Indicamos por $T(\vec{p}_1, \lambda_1; \vec{p}_2, \lambda_2)$ el elemento de matriz T -invariante dado en (XX-6.3)

$$T(\vec{p}_1, \lambda_1; \vec{p}_2, \lambda_2) \equiv e^2 \bar{u}(\vec{p}_2, \lambda_2) \left\{ \not{\epsilon}^*(\vec{k}_2, \sigma_2) \frac{\not{p}_1 - \not{k}_1 + m}{(p_1 - k_1)^2 - m^2 + i\epsilon} \not{\epsilon}^*(\vec{k}_1, \sigma_1) + \right. \\ \left. + \not{\epsilon}^*(\vec{k}_1, \sigma_1) \frac{\not{p}_1 - \not{k}_2 + m}{(p_1 - k_2)^2 - m^2 + i\epsilon} \not{\epsilon}^*(\vec{k}_2, \sigma_2) \right\} u(\vec{p}_1, \lambda_1) \quad (12)$$

El elemento de matriz en el caso de desintegración del positronio es

$$M = \int d^3p \varphi(\vec{p}) \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \Lambda(\lambda_1, \lambda_2) T(\vec{p}, \lambda_1; -\vec{p}, \lambda_2) \quad (13)$$

con $\Lambda(+,+) = +\Lambda(-,-) = +1/\sqrt{2}$, $\Lambda(+,-) = \Lambda(-,+) = 0$. En buena aproximación podemos escribir

$$M = \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \Lambda(\lambda_1, \lambda_2) T(\vec{0}, \lambda_1; -\vec{0}, \lambda_2) \int d^3p \varphi(\vec{p}) \quad (14)$$

pero la integral no es más que la transformada de Fourier de la función de ondas $\varphi(\vec{p})$ en el origen, es decir

$$M = (2\pi)^{3/2} \varphi(\vec{0}) \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \Lambda(\lambda_1, \lambda_2) T(\vec{0}, \lambda_1; -\vec{0}, \lambda_2) \quad (15)$$

o equivalentemente

$$M = (2\pi)^{3/2} \varphi(\vec{0}) \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\lambda_1} T(\vec{0}, \lambda_1; -\vec{0}, \lambda_1) \quad (16)$$

En nuestro proceso

$$p_1^\mu \equiv (m, \vec{0}) \quad , \quad p_2^\mu \equiv (m, \vec{0}) \quad , \quad k_1^\mu \equiv (m, \vec{k}) \quad , \quad k_2^\mu \equiv (m, -\vec{k}) \quad |\vec{k}| = m$$

$$(p_1 - k_1)^2 - m^2 = -2m^2 \quad , \quad (p_1 - k_2)^2 - m^2 = -2m^2 \quad (1)$$

de donde

$$T(\vec{0}, \lambda_1; -\vec{0}, \lambda_2) = -\frac{e^2}{2m^2} \bar{u}(-\vec{0}, \lambda_2) \left\{ \not{\epsilon}^*(-\vec{k}, \sigma_2) (\vec{k} \cdot \vec{\gamma} + m) \not{\epsilon}^*(\vec{k}, \sigma_1) + \right. \\ \left. + \not{\epsilon}^*(\vec{k}, \sigma_1) (-\vec{k} \cdot \vec{\gamma} + m) \not{\epsilon}^*(-\vec{k}, \sigma_2) \right\} u(\vec{0}, \lambda_1) \quad (1)$$

Trabajaremos en el gauge de Coulomb que definiremos de la siguiente forma:

Sea \vec{k} la dirección del fotón y por comodidad suponemos que \vec{k} está en el plano OXY , $\vec{k} \equiv |\vec{k}| (\cos\phi, \sin\phi, 0) \equiv |\vec{k}| (q^+, q^-, 0)$. Entonces de acuerdo con lo dicho en (VII-12), $\vec{S}(1) = (0, 0, -1)$ y $\vec{S}(2) = (-q^-, q^+, 0)$ y también $\epsilon^0(k, \sigma) \equiv 0$

$$y \quad \vec{E}(\vec{k}, +) = \frac{i}{\sqrt{2}} (q^-, -q^+, -i) \quad , \quad \vec{E}(\vec{k}, -) = \frac{i}{\sqrt{2}} [q^-, -q^+, +i] \quad (2)$$

Nos serán útiles las siguientes relaciones

$$\vec{E}^*(\vec{k}, \sigma) \cdot \vec{E}(\vec{k}, \sigma') = \delta_{\sigma\sigma'} \quad (3)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{E}(\vec{k}, \sigma) = 0 \quad \sum_{\sigma} \epsilon_i(\vec{k}, \sigma) \epsilon_j^*(\vec{k}, \sigma) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{|\vec{k}|^2}$$

Además si hay varios vectores \vec{k}_i todos ellos en el plano OXY y $\vec{E}(\vec{k}_i, \sigma) \equiv \vec{E}_i(\sigma)$ entonces ($\hat{m} \equiv (0, 0, 1)$)

$$\vec{E}_\alpha(+). \vec{E}_\beta(+) = \vec{E}_\alpha(-). \vec{E}_\beta(-) = \frac{1}{2} (1 - \vec{q}_\alpha \cdot \vec{q}_\beta)$$

$$\vec{E}_\alpha(+). \vec{E}_\beta(-) = \vec{E}_\alpha(-). \vec{E}_\beta(+) = -\frac{1}{2} (1 + \vec{q}_\alpha \cdot \vec{q}_\beta)$$

$$\vec{E}_\alpha(+). \vec{q}_\beta = \vec{E}_\alpha(-). \vec{q}_\beta = -\frac{i}{\sqrt{2}} (\vec{q}_\alpha \times \vec{q}_\beta) \cdot \hat{m}$$

$$(\vec{E}_\alpha(\sigma) \cdot \vec{q}_\beta) (\vec{E}_\beta(\sigma') \cdot \vec{q}_\alpha) = \frac{1}{2} [1 - (\vec{q}_\alpha \cdot \vec{q}_\beta)^2] \quad (4)$$

$$(\vec{E}_\alpha(+) \times \vec{q}_\alpha) = i \vec{E}_\alpha(+) \quad , \quad (\vec{E}_\alpha(-) \times \vec{q}_\alpha) = -i \vec{E}_\alpha(-)$$

$$\vec{E}_\alpha(+) \times \vec{E}_\beta(+) = -\frac{i}{2} (\vec{q}_\alpha - \vec{q}_\beta) - \frac{1}{2} (\vec{q}_\alpha \times \vec{q}_\beta)$$

$$\vec{E}_\alpha(+) \times \vec{E}_\beta(-) = +\frac{i}{2} (\vec{q}_\alpha + \vec{q}_\beta) - \frac{1}{2} (\vec{q}_\alpha \times \vec{q}_\beta)$$

$$\vec{E}_\alpha(-) \times \vec{E}_\beta(+) = -\frac{i}{2} (\vec{q}_\alpha + \vec{q}_\beta) - \frac{1}{2} (\vec{q}_\alpha \times \vec{q}_\beta)$$

$$\vec{E}_\alpha(-) \times \vec{E}_\beta(-) = +\frac{i}{2} (\vec{q}_\alpha - \vec{q}_\beta) + \frac{1}{2} (\vec{q}_\alpha \times \vec{q}_\beta)$$

$$(\vec{E}_\alpha(+)) \times \vec{E}_\beta(+).(\vec{q}_\beta - \vec{q}_\alpha) = +i(1 - \vec{q}_\alpha \cdot \vec{q}_\beta)$$

(1)

$$(\vec{E}_\alpha(-)) \times \vec{E}_\beta(-).(\vec{q}_\beta - \vec{q}_\alpha) = -i(1 - \vec{q}_\alpha \cdot \vec{q}_\beta)$$

$$(\vec{E}_\alpha(+)) \times \vec{E}_\beta(-).(\vec{q}_\beta - \vec{q}_\alpha) = (\vec{E}_\alpha(-)) \times \vec{E}_\beta(+).(\vec{q}_\beta - \vec{q}_\alpha) = 0.$$

Entonces (5.1) puede escribirse

$$T(\vec{0}, \lambda_1, -\vec{0}, \lambda_2) = -\frac{e^2}{2m^2} \bar{u}(-\vec{0}, \lambda_2) \left\{ m \vec{E}^*(\vec{k}, \sigma_1) \cdot \vec{\gamma} \vec{E}^*(-\vec{k}, \sigma_2) \cdot \vec{\gamma} + m \vec{E}^*(-\vec{k}, \sigma_2) \cdot \vec{\gamma} \vec{E}^*(\vec{k}, \sigma_1) \cdot \vec{\gamma} \right. \\ \left. + \vec{E}^*(\vec{k}, \sigma_1) \cdot \vec{\gamma} \vec{E}^*(-\vec{k}, \sigma_2) \cdot \vec{\gamma} \vec{k} \cdot \vec{\gamma} - \vec{E}^*(-\vec{k}, \sigma_2) \cdot \vec{\gamma} \vec{E}^*(\vec{k}, \sigma_1) \cdot \vec{\gamma} \vec{k} \cdot \vec{\gamma} \right\} u(\vec{0}, \lambda_1)$$

$$= -\frac{e^2}{2m^2} \bar{u}(-\vec{0}, \lambda_2) \left\{ -2m \vec{E}^*(\vec{k}, \sigma_1) \cdot \vec{E}^*(-\vec{k}, \sigma_2) - 2i(\vec{E}^*(\vec{k}, \sigma_1) \times \vec{E}^*(-\vec{k}, \sigma_2)) \cdot \vec{\Sigma}(\vec{k}, \vec{\gamma}) \right\} u(\vec{0}, \lambda_1)$$

donde hemos usado

$$(\vec{A} \cdot \vec{\gamma})(\vec{B} \cdot \vec{\gamma}) = -\vec{A} \cdot \vec{B} - i(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{\Sigma} \quad (2)$$

Recondemos que $u(-\vec{p}, \lambda) = -i\gamma_5 \gamma^0 u(\vec{p}, \lambda)$ y finalmente

$$\sum_{\lambda_1} T(\vec{0}, \lambda_1, -\vec{0}, \lambda_1) = +i \frac{e^2}{2m^2} \sum_{\lambda_1} \bar{u}(\vec{0}, \lambda_1) \gamma_0 \gamma_5 \left\{ -2m \vec{E}^*(\vec{k}, \sigma_1) \cdot \vec{E}^*(-\vec{k}, \sigma_2) - \right. \\ \left. - 2i(\vec{E}^*(\vec{k}, \sigma_1) \times \vec{E}^*(-\vec{k}, \sigma_2)) \cdot \vec{\Sigma}(\vec{k}, \vec{\gamma}) \right\} u(\vec{0}, \lambda_1) = \\ = i \frac{e^2}{2m^2} \text{Tr} \left\{ \gamma_0 \gamma_5 \left[-2m \vec{E}^*(\vec{k}, \sigma_1) \cdot \vec{E}^*(-\vec{k}, \sigma_2) - 2i(\vec{E}^*(\vec{k}, \sigma_1) \times \vec{E}^*(-\vec{k}, \sigma_2)) \cdot \vec{\Sigma}(\vec{k}, \vec{\gamma}) \right] (\not{x} - m) \right\} = \\ = \frac{e^2}{m} [\vec{E}^*(\vec{k}, \sigma_1) \times \vec{E}^*(-\vec{k}, \sigma_2)] \cdot \text{Tr} [\vec{\Sigma}(\vec{k}, \vec{\gamma}) (1 - \gamma^0) \gamma_5] = -\frac{4e^2}{m} [\vec{E}^*(\vec{k}, \sigma_1) \times \vec{E}^*(-\vec{k}, \sigma_2)] \cdot \vec{k}$$

de donde

$$M = -(2\pi)^{3/2} \psi(\vec{0}) \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{4e^2}{m} [\vec{E}^*(\vec{k}, \sigma_1) \times \vec{E}^*(-\vec{k}, \sigma_2)] \cdot \vec{k} \quad (3)$$

No midiendo polarizaciones fijas

$$\sum_{\sigma_1, \sigma_2} |M|^2 = (2\pi)^3 |\psi(\vec{0})|^2 \frac{8e^4}{m^2} \sum_{\sigma_1, \sigma_2} \epsilon_{ijl} \epsilon_{i'j'l'} k_l k_{l'} \epsilon_j(\vec{k}, \sigma_1) \epsilon_{l'}(-\vec{k}, \sigma_2) \epsilon_{j'}^*(\vec{k}, \sigma_1) \epsilon_{l'}^*(-\vec{k}, \sigma_2) \\ = (2\pi)^3 |\psi(\vec{0})|^2 \frac{8e^4}{m^2} \epsilon_{ijl} \epsilon_{i'j'l'} k_l k_{l'} \left(\delta_{jj'} - \frac{k_j k_{j'}}{k^2} \right) \left(\delta_{ll'} - \frac{k_l k_{l'}}{k^2} \right) = \\ = (2\pi)^3 |\psi(\vec{0})|^2 \frac{8e^4}{m^2} \epsilon_{ijl} \epsilon_{i'j'l'} k_l k_{l'} = (2\pi)^3 |\psi(\vec{0})|^2 16e^4$$

es decir

$$\sum_{\sigma_1, \sigma_2} |M|^2 = 16 (2\pi)^4 m^3 \alpha^5 \quad (1)$$

Entonces la anchura para este proceso es *

$$\Gamma = \frac{1}{4m^2 (2\pi)^5} \frac{1}{2!} \int \frac{d^3 k_1}{2|k_1|} \frac{d^3 k_2}{2|k_2|} \delta(2m - |k_1| - |k_2|) \delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2) \sum_{\sigma_1, \sigma_2} |M|^2 \quad (2)$$

de donde

$$\Gamma = \frac{m \alpha^5}{2} \quad (3)$$

Entonces sin tener en cuenta las correcciones radiativas de tiene que la anchura del proceso $(e^+e^-)_{gs} \rightarrow 2\gamma$ es

$$\Gamma = \frac{m \alpha^5}{2} = 5.287\ 127\ (36) \times 10^{-6} \text{ eV} = [1.244\ 943\ (11) \times 10^{-10} \text{ sec}]^{-1} \quad (4)$$

Una forma mucho más directa para obtener este resultado es usar los resultados del capítulo anterior. La sección eficaz total para el proceso $e^+e^- \rightarrow 2\gamma$ es

$$\sigma = \frac{1}{2\lambda^{1/2}(s, m^2, m^2)} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{2!} \frac{1}{4} \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \sum_{\sigma_1, \sigma_2} \int \frac{d^3 k_1}{2E(k_1)} \frac{d^3 k_2}{2E(k_2)} \delta(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) |T|^2 \quad (5)$$

cuyo valor a bajas energías era $\sigma = \pi \alpha^2 / 2v m^2$, siendo $2v = \frac{1}{2m} \lambda^{1/2}(s, m^2, m^2)$ la velocidad relativa de las dos partículas. Entonces

$$\Gamma = 4 |\psi(0)|^2 \lim_{s \rightarrow 4m^2} \left[\frac{1}{2m} \lambda^{1/2}(s, m^2, m^2) \sigma \right] \quad (6)$$

donde el 4 es debido a que en el punto de aniquilación se promedia sobre cuatro estados iniciales de spin, mientras que ahora solo zero es importante y los otros tres no contribuyen debido a reglas de selección. De (6) se deduce inmediatamente (4).

46/001

* In the usual notation

$$\frac{dW(\vec{p} \rightarrow f)}{dV dt} = |\tilde{f}_1(x)|^2 |\tilde{f}_2(x)|^2 (2m)^4 \delta(p_f - p_1 - p_2) |\langle f | T | p_1, p_2 \rangle|^2$$

$$2 p_i^0 |\tilde{f}_i(x)|^2 = 2m |\tilde{f}_i(x)|^2 = \text{number of particles for method of reduction}$$

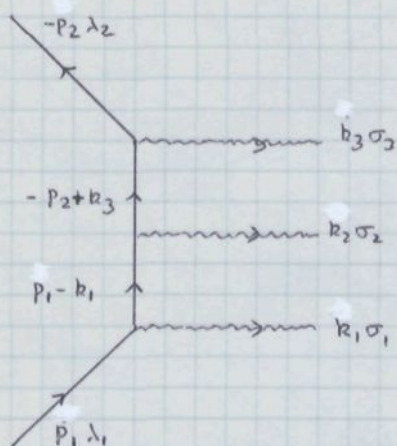
$$\frac{dW(\vec{p} \rightarrow f)}{dV dt} = |\tilde{f}_1(x)|^2 |\tilde{f}_2(x)|^2 (2m)^{-3} (2m)^4 \delta(p_f - p_1 - p_2) |M|^2$$

$$= 2m |\tilde{f}_1(x)|^2 |\tilde{f}_2(x)|^2 d\Gamma$$

$$d\Gamma = \frac{1}{4m^2 (2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta(p_f - p_1 - p_2) |M|^2$$

ii) Ortopositronio

En el ortopositronio la desintegración del estado fundamental tiene lugar en tres fotones. Los diagramas de interés son



+ más los otros cinco diagramas que se obtienen permutando los fotones salientes de todas las formas posibles.

Entonces el elemento de matriz T invariante es

$$T = e^3 \bar{v}(-\vec{0}, \lambda_2) \sum_{\alpha\beta\gamma} \not{\epsilon}_\alpha^* \frac{-\not{p}_2 + \not{k}_\alpha + m}{(-p_2 + k_\alpha)^2 - m^2} \not{\epsilon}_\beta^* \frac{\not{p}_1 - \not{k}_\gamma + m}{(p_1 - k_\gamma)^2 - m^2} \not{\epsilon}_\gamma^* u(\vec{0}, \lambda_1) \quad (1)$$

donde la suma se extiende a las seis permutaciones posibles. Como

$$(-p_2 + k_\alpha)^2 - m^2 = -2p_2 k_\alpha = -2m\omega_\alpha \quad (2)$$

$$(p_1 - k_\gamma)^2 - m^2 = -2p_1 k_\gamma = -2m\omega_\gamma$$

designando por ω_α la energía del fotón \vec{k}_α . Entonces

$$T = \frac{e^3}{4m^2} \bar{v}(-\vec{0}, \lambda_2) \left\{ \sum_{\alpha\beta\gamma} \frac{1}{\omega_\alpha \omega_\gamma} \not{\epsilon}_\alpha^* (-\not{p}_2 + \not{k}_\alpha + m) \not{\epsilon}_\beta^* (\not{p}_1 - \not{k}_\gamma + m) \not{\epsilon}_\gamma^* \right\} u(\vec{0}, \lambda_1) \quad (3)$$

Evidentemente $\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3$ son coplanares y los suponemos en el plano Oxy . Se tiene

$$\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3 = 0$$

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 2m$$

$$\Rightarrow k_\alpha \cdot k_\beta = 2m(m - \omega_\gamma) \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3 \text{ cíclicamente}$$

$$\vec{k}_\alpha \cdot \vec{k}_\beta = \omega_\alpha \omega_\beta - 2m(m - \omega_\gamma)$$

Ademas

$$\cos \theta_{\alpha\beta} = \frac{\vec{k}_\alpha \cdot \vec{k}_\beta}{\omega_\alpha \omega_\beta} = 1 + \frac{2m(\omega_\gamma - m)}{\omega_\alpha \omega_\beta} \quad (1)$$

Si

$$\vec{q}_\alpha \equiv \frac{\vec{k}_\alpha}{\omega_\alpha}$$

entonces \vec{q}_α son vectores unitarios y

$$\vec{q}_\alpha \cdot \vec{q}_\beta = 1 - \frac{2m(m - \omega_\gamma)}{\omega_\alpha \omega_\beta} \quad (2)$$

De (8.3) se obtiene

$$T = \frac{e^3}{4m^2} \bar{v}(-\vec{0}, \lambda_2) \left\{ \sum_{\alpha\beta\gamma} \frac{1}{\omega_\alpha \omega_\beta} (\not{k}_2 - \not{k}_\alpha + m) \not{\epsilon}_\alpha^* \not{\epsilon}_\beta^* \not{\epsilon}_\gamma^* (-\not{k}_1 + \not{k}_\gamma + m) \right\} u(\vec{0}, \lambda_1) \quad (3)$$

y como $\not{k}_1 \rightarrow m$ y $\not{k}_2 \rightarrow -m$ obtenemos

$$T = -\frac{e^3}{4m^2} \bar{v}(-\vec{0}, \lambda_2) \sum_{\alpha\beta\gamma} \frac{1}{\omega_\alpha \omega_\beta} \not{k}_\alpha \not{\epsilon}_\alpha^* \not{\epsilon}_\beta^* \not{\epsilon}_\gamma^* \not{k}_\gamma u(\vec{0}, \lambda_1) \quad (4)$$

Entonces

$$\begin{aligned} R(\alpha\beta\gamma) &\equiv \not{k}_\alpha \not{\epsilon}_\alpha^* \not{\epsilon}_\beta^* \not{\epsilon}_\gamma^* \not{k}_\gamma \frac{1}{\omega_\alpha \omega_\beta} = -(\gamma^0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{q}_\alpha) (\vec{\epsilon}_\alpha^* \cdot \vec{\gamma}) (\vec{\epsilon}_\beta^* \cdot \vec{\gamma}) (\vec{\epsilon}_\gamma^* \cdot \vec{\gamma}) (\gamma^0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{q}_\gamma) \doteq \\ &\doteq (1 + \vec{q}_\alpha \cdot \vec{\gamma}) (\vec{\epsilon}_\alpha^* \cdot \vec{\gamma}) (\vec{\epsilon}_\beta^* \cdot \vec{\gamma}) (\vec{\epsilon}_\gamma^* \cdot \vec{\gamma}) (1 - \vec{q}_\gamma \cdot \vec{\gamma}) \end{aligned} \quad (5)$$

donde \doteq significa que hemos tenido en cuenta que esta cantidad está entre los wadispinones. Notemos que en la representación de Dirac

$$u(\vec{0}, \lambda_1) = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} \alpha(\lambda_1) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{v}(-\vec{0}, \lambda_2) = i\sqrt{2m} (0, \alpha^+(\lambda_2))$$

De donde

$$\bar{v}(-\vec{0}, \lambda_2) A u(\vec{0}, \lambda_1) = i2m [0, \alpha^+(\lambda_2)] \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(\lambda_1) \\ 0 \end{pmatrix} = i2m \alpha^+(\lambda_2) A_{21} \alpha(\lambda_1) \quad (6)$$

Como en la representación de Dirac los $\vec{\gamma}$ son anti-diagonales debemos volver en $R(\alpha\beta\gamma)$ solo los términos con número impar de $\vec{\gamma}$. y por tanto

$$R(\alpha\beta\gamma) \equiv (\vec{E}_\alpha^* \cdot \vec{\gamma}) (\vec{E}_\beta^* \cdot \vec{\gamma}) (\vec{E}_\gamma^* \cdot \vec{\gamma}) - (\vec{q}_\alpha \cdot \vec{\gamma}) (\vec{E}_\alpha^* \cdot \vec{\gamma}) (\vec{E}_\beta^* \cdot \vec{\gamma}) (\vec{E}_\gamma^* \cdot \vec{\gamma}) (\vec{q}_\gamma \cdot \vec{\gamma}) \quad (1)$$

Se comprueba que

$$(\vec{A} \cdot \vec{\gamma}) (\vec{B} \cdot \vec{\gamma}) = - (\vec{A} \cdot \vec{B}) - i (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{\Sigma}$$

$$(\vec{A} \cdot \vec{\gamma}) (\vec{B} \cdot \vec{\gamma}) (\vec{C} \cdot \vec{\gamma}) = - (\vec{A} \cdot \vec{B}) (\vec{C} \cdot \vec{\gamma}) + (\vec{A} \cdot \vec{C}) (\vec{B} \cdot \vec{\gamma}) - (\vec{B} \cdot \vec{C}) (\vec{A} \cdot \vec{\gamma}) - i (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} \gamma_5 \gamma^0 \quad (2)$$

$$(\vec{A} \cdot \vec{\Sigma}) (\vec{B} \cdot \vec{\gamma}) (\vec{C} \cdot \vec{\Sigma}) = + (\vec{A} \cdot \vec{B}) (\vec{C} \cdot \vec{\gamma}) - (\vec{A} \cdot \vec{C}) (\vec{B} \cdot \vec{\gamma}) + (\vec{B} \cdot \vec{C}) (\vec{A} \cdot \vec{\gamma}) + i (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} \gamma_5 \gamma^0$$

Usando estas expresiones se obtiene

$$\begin{aligned} R(\alpha\beta\gamma) &= (\vec{E}_\alpha^* \cdot \vec{\gamma}) (\vec{E}_\beta^* \cdot \vec{\gamma}) (\vec{E}_\gamma^* \cdot \vec{\gamma}) - (\vec{E}_\alpha^* \times \vec{q}_\alpha) \cdot \vec{\Sigma} (\vec{E}_\beta^* \cdot \vec{\gamma}) (\vec{E}_\gamma^* \times \vec{q}_\gamma) \cdot \vec{\Sigma} = \\ &= - (\vec{E}_\alpha^* \cdot \vec{E}_\beta^*) (\vec{E}_\gamma^* \cdot \vec{\gamma}) + (\vec{E}_\alpha^* \cdot \vec{E}_\gamma^*) (\vec{E}_\beta^* \cdot \vec{\gamma}) - (\vec{E}_\beta^* \cdot \vec{E}_\gamma^*) (\vec{E}_\alpha^* \cdot \vec{\gamma}) - i (\vec{E}_\alpha^* \times \vec{E}_\beta^*) \cdot \vec{E}_\gamma^* \gamma_5 \gamma^0 \\ &\quad - (\vec{E}_\alpha^* \times \vec{q}_\alpha) \cdot \vec{E}_\beta^* [(\vec{E}_\gamma^* \times \vec{q}_\gamma) \cdot \vec{\gamma}] + [(\vec{E}_\alpha^* \times \vec{q}_\alpha) \cdot (\vec{E}_\gamma^* \times \vec{q}_\gamma)] (\vec{E}_\beta^* \cdot \vec{\gamma}) \\ &\quad - \vec{E}_\beta^* \cdot (\vec{E}_\gamma^* \times \vec{q}_\gamma) [(\vec{E}_\alpha^* \times \vec{q}_\alpha) \cdot \vec{\gamma}] + i [(\vec{E}_\alpha^* \times \vec{q}_\alpha) \times (\vec{E}_\gamma^* \times \vec{q}_\gamma)] \cdot \vec{E}_\beta^* \gamma_5 \gamma^0 \end{aligned}$$

De acuerdo con (9.6) podemos calcular la parte 2x2 en que estamos involucrados: $\vec{\gamma} \rightarrow -\vec{\sigma}$ y $\gamma_5 \gamma^0 \rightarrow -I$

$$\begin{aligned} A(\alpha\beta\gamma) &= 2im \{ (\vec{E}_\alpha^* \cdot \vec{E}_\beta^*) (\vec{E}_\gamma^* \cdot \vec{\sigma}) - (\vec{E}_\alpha^* \cdot \vec{E}_\gamma^*) (\vec{E}_\beta^* \cdot \vec{\sigma}) + (\vec{E}_\beta^* \cdot \vec{E}_\gamma^*) (\vec{E}_\alpha^* \cdot \vec{\sigma}) + i (\vec{E}_\alpha^* \times \vec{E}_\beta^*) \cdot \vec{E}_\gamma^* \\ &\quad + (\vec{E}_\alpha^* \times \vec{q}_\alpha) \cdot \vec{E}_\beta^* [(\vec{E}_\gamma^* \times \vec{q}_\gamma) \cdot \vec{\sigma}] - [(\vec{E}_\alpha^* \times \vec{q}_\alpha) \cdot (\vec{E}_\gamma^* \times \vec{q}_\gamma)] (\vec{E}_\beta^* \cdot \vec{\sigma}) \\ &\quad + \vec{E}_\beta^* \cdot (\vec{E}_\gamma^* \times \vec{q}_\gamma) [(\vec{E}_\alpha^* \times \vec{q}_\alpha) \cdot \vec{\sigma}] - i [(\vec{E}_\alpha^* \times \vec{q}_\alpha) \times (\vec{E}_\gamma^* \times \vec{q}_\gamma)] \cdot \vec{E}_\beta^* \} \quad (3) \end{aligned}$$

Recordando que debemos sumar sobre todas las permutaciones posibles

$$\begin{aligned} A(\alpha\beta\gamma) &\equiv 2im \{ (\vec{E}_\beta^* \cdot \vec{E}_\gamma^*) (\vec{E}_\alpha^* \cdot \vec{\sigma}) + (\vec{E}_\alpha^* \times \vec{q}_\alpha) \cdot \vec{E}_\beta^* [(\vec{E}_\gamma^* \times \vec{q}_\gamma) \cdot \vec{\sigma}] - \\ &\quad - [(\vec{E}_\alpha^* \times \vec{q}_\alpha) \cdot (\vec{E}_\gamma^* \times \vec{q}_\gamma)] (\vec{E}_\beta^* \cdot \vec{\sigma}) + (\vec{E}_\gamma^* \times \vec{q}_\gamma) \cdot \vec{E}_\beta^* [(\vec{E}_\alpha^* \times \vec{q}_\alpha) \cdot \vec{\sigma}] \} = \\ &= 2im \{ (\vec{E}_\beta^* \cdot \vec{E}_\gamma^*) (\vec{E}_\alpha^* \cdot \vec{\sigma}) + 2 (\vec{E}_\alpha^* \times \vec{q}_\alpha) \cdot \vec{E}_\beta^* [(\vec{E}_\gamma^* \times \vec{q}_\gamma) \cdot \vec{\sigma}] \\ &\quad - (\vec{E}_\alpha^* \cdot \vec{E}_\gamma^*) (\vec{q}_\alpha \cdot \vec{q}_\gamma) (\vec{E}_\beta^* \cdot \vec{\sigma}) + (\vec{E}_\alpha^* \cdot \vec{q}_\gamma) (\vec{E}_\gamma^* \cdot \vec{q}_\alpha) (\vec{E}_\beta^* \cdot \vec{\sigma}) \} \end{aligned}$$

y simetizando

$$\begin{aligned}
 A = 4im \{ & (1 - \bar{q}_1 \bar{q}_2) (\bar{E}_1^* \bar{E}_2^*) (\bar{E}_3^* \bar{\sigma}) + (1 - \bar{q}_1 \bar{q}_3) (\bar{E}_1^* \bar{E}_3^*) (\bar{E}_2^* \bar{\sigma}) + (1 - \bar{q}_2 \bar{q}_3) (\bar{E}_2^* \bar{E}_3^*) (\bar{E}_1^* \bar{\sigma}) \\
 & + (\bar{E}_1^* \bar{q}_2) (\bar{E}_2^* \bar{q}_1) (\bar{E}_3^* \bar{\sigma}) + (\bar{E}_1^* \bar{q}_3) (\bar{E}_3^* \bar{q}_1) (\bar{E}_2^* \bar{\sigma}) + (\bar{E}_2^* \bar{q}_3) (\bar{E}_3^* \bar{q}_2) (\bar{E}_1^* \bar{\sigma}) \\
 & + (\bar{E}_1^* \times \bar{E}_2^*) \cdot (\bar{q}_2 - \bar{q}_1) (\bar{E}_3^* \times \bar{q}_3) \cdot \bar{\sigma} + (\bar{E}_1^* \times \bar{E}_3^*) (\bar{q}_3 - \bar{q}_1) (\bar{E}_2^* \times \bar{q}_2) \cdot \bar{\sigma} + (\bar{E}_2^* \times \bar{E}_3^*) \cdot (\bar{q}_3 - \bar{q}_2) (\bar{E}_1^* \times \bar{q}_3) \cdot \bar{\sigma} \}
 \end{aligned}$$

Fijémos que si consideramos la desintegración desde el estado inicial $|\omega, \sigma\rangle$ dado en (2.4) nos dámos

$$T = - \frac{e^3}{4m^2 \sqrt{2}} \sum_{\lambda} \lambda \alpha^+(\lambda) A \alpha(\lambda)$$

Peró

$$\sum_{\lambda} \lambda \alpha^+(\lambda) \sigma_1 \alpha(\lambda) = 0, \quad \sum_{\lambda} \lambda \alpha^+(\lambda) \sigma_2 \alpha(\lambda) = 0, \quad \sum_{\lambda} \lambda \alpha^+(\lambda) \sigma_3 \alpha(\lambda) = +2$$

de donde

$$\begin{aligned}
 T = -i \frac{\sqrt{2} e^3}{m} \{ & (1 - \bar{q}_1 \bar{q}_2) (\bar{E}_1^* \bar{E}_2^*) \epsilon_3^{*3} + (1 - \bar{q}_1 \bar{q}_3) (\bar{E}_1^* \bar{E}_3^*) \epsilon_2^{*3} + (1 - \bar{q}_2 \bar{q}_3) (\bar{E}_2^* \bar{E}_3^*) \epsilon_1^{*3} \\
 & + (\bar{E}_1^* \bar{q}_2) (\bar{E}_2^* \bar{q}_1) \epsilon_3^{*3} + (\bar{E}_1^* \bar{q}_3) (\bar{E}_3^* \bar{q}_1) \epsilon_2^{*3} + (\bar{E}_2^* \bar{q}_3) (\bar{E}_3^* \bar{q}_2) \epsilon_1^{*3} + \\
 & + (\bar{E}_1^* \times \bar{E}_2^*) \cdot (\bar{q}_2 - \bar{q}_1) (\bar{E}_3^* \times \bar{q}_3)^3 + (\bar{E}_1^* \times \bar{E}_3^*) \cdot (\bar{q}_3 - \bar{q}_1) (\bar{E}_2^* \times \bar{q}_2)^3 + (\bar{E}_2^* \times \bar{E}_3^*) \cdot (\bar{q}_3 - \bar{q}_2) (\bar{E}_1^* \times \bar{q}_3)^3 \} \quad (1)
 \end{aligned}$$

Introducimos

$$x_i = (\bar{q}_j \cdot \bar{q}_k) \quad i, j, k: 1, 2, 3 \quad \text{cíclicamente} \quad (2)$$

Entonces usando (5.4) se tiene

$$\begin{aligned}
 T(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = -i \frac{\sqrt{2} e^3}{m} \{ & - \frac{1}{2\sqrt{2}} (1-x_3) (x_3 - \sigma_1 \sigma_2) \sigma_3 - \frac{1}{2\sqrt{2}} (1-x_2) (x_2 - \sigma_1 \sigma_3) \sigma_2 - \\
 & - \frac{1}{2\sqrt{2}} (1-x_1) (x_1 - \sigma_2 \sigma_3) \sigma_1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} (1-x_3^2) \sigma_3 + \frac{1}{2\sqrt{2}} (1-x_2^2) \sigma_2 + \frac{1}{2\sqrt{2}} (1-x_1^2) \sigma_1 \\
 & + \frac{1}{2\sqrt{2}} (\sigma_1 + \sigma_2) (1-x_3) + \frac{1}{2\sqrt{2}} (\sigma_1 + \sigma_3) (1-x_2) + \frac{1}{2\sqrt{2}} (\sigma_2 + \sigma_3) (1-x_1) \}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = -i \frac{e^3}{2m} \{ & [3\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3] - x_1 (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3) \\
 & - x_2 (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3) - x_3 (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2) \} \quad (3)
 \end{aligned}$$

de donde se obtiene inmediatamente

$$T(+++) = T(---) = 0$$

(1)

$$T(++-) = -T(--+) = i \frac{2e^3}{m} (1 - \vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2)$$

y los que se obtienen por permutaciones circulares. Entonces el elemento de matriz T al cuadrado sumado sobre polarizaciones fijas es

$$|T|^2 = \frac{8e^6}{m^2} \sum_{\alpha=1}^3 (1 - x_{\alpha})^2 = 32e^6 \frac{1}{(\omega_1 \omega_2 \omega_3)^2} \sum_{\alpha=1}^3 (m - \omega_{\alpha})^2 \omega_{\alpha}^2 \quad (2)$$

Este elemento de matriz corresponde a la transición $|w; 10\rangle \rightarrow 3\gamma$. De la discusión de la pag 14 se deduce al considerar la transición $|w; 11\rangle \rightarrow 3\gamma$

$$T = -\frac{e^3}{4m^2} \alpha^{+(-)} A \alpha^{(+)} \quad , \quad \alpha^{+(-)} \sigma_1 \alpha^{(+)} = 1, \quad \alpha^{+(-)} \sigma_2 \alpha^{(+)} = i, \quad \alpha^{+(-)} \sigma_3 \alpha^{(+)} = 0$$

de donde se deduce que el T correspondiente se obtiene de (1.1) haciendo la sustitución $A^3 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{A} \cdot \vec{m})$ donde $\vec{m} \equiv (1, i, 0)$ y el resultado que se obtiene es la mitad de (2). Por tanto la contribución a $|T|^2$ por modo de onda sobre otros circulares es

$$\sum_{\lambda_1 \lambda_2} \sum_{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3} |T|^2 = \frac{64e^6}{3(\omega_1 \omega_2 \omega_3)^2} \sum_{\alpha=1}^3 (m - \omega_{\alpha})^2 \omega_{\alpha}^2 \quad (3)$$

Entonces la anchura es

$$\Gamma = \frac{1}{4m^2} \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{1}{3!} \int \frac{d^3k_1}{2\omega_1} \frac{d^3k_2}{2\omega_2} \frac{d^3k_3}{2\omega_3} \delta(p_1 + p_2 - k_1 - k_2 - k_3) \frac{1}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 |\psi(\omega)|^2 \frac{64e^6}{3(\omega_1 \omega_2 \omega_3)^2} \sum_{\alpha=1}^3 (m - \omega_{\alpha})^2 \omega_{\alpha}^2$$

es decir

$$\Gamma = \frac{m \alpha^6}{36 \pi^3} I \quad (4)$$

$$I \equiv \int d^3k_1 d^3k_2 d^3k_3 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - k_1 - k_2 - k_3) \frac{1}{(\omega_1 \omega_2 \omega_3)^3} \sum_{\alpha=1}^3 (m - \omega_{\alpha})^2 \omega_{\alpha}^2$$

Debemos ahora realizar la integral de espino f\u00e1sico

$$I = \int \frac{d^3k_1}{\omega_1} \frac{d^3k_2}{\omega_2} \frac{d^3k_3}{\omega_3} \delta(2m - \omega_1 - \omega_2 - \omega_3) \delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3) F(\omega_i) \quad (5)$$

$$F(\omega_i) = (\omega_1 \omega_2 \omega_3)^{-2} \sum_{\alpha=1}^3 (m - \omega_{\alpha})^2 \omega_{\alpha}^2$$

De aquí

$$I = \int \frac{d^3 k_1 d^3 k_2}{\omega_1 \omega_2 \omega_3} F(\omega_i) \delta(2m - \omega_1 - \omega_2 - \omega_3) =$$

$$= 8\pi^2 \int d\omega_1 d\omega_2 \int_{-1}^{+1} d\mu \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_3} F(\omega_i) \delta[2m - \omega_1 - \omega_2 - \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1 \omega_2 \mu}]$$

$$\phi = 2m - \omega_1 - \omega_2 - [\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1 \omega_2 \mu]^{1/2}$$

$$\phi = 0 \Rightarrow \omega_3 = 2m - \omega_1 - \omega_2$$

$$\frac{d\phi}{d\mu} = \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_3}$$

$$I = 8\pi^2 \int d\omega_1 d\omega_2 F(\omega_1, \omega_2)$$

y teniendo en cuenta los límites de integración

$$I = 8\pi^2 \int_0^m d\omega_1 \int_{m-\omega_1}^m d\omega_2 F(\omega_1, \omega_2)$$

Teniendo en cuenta el valor de F

$$I = 8\pi^2 \left\{ \int_0^m d\omega_1 (m-\omega_1)^2 \int_{m-\omega_1}^m d\omega_2 \frac{1}{\omega_2^2 (\omega_1 + \omega_2 - 2m)^2} + \right.$$

$$\left. + \int_0^m d\omega_1 \frac{1}{\omega_1^2} \int_{m-\omega_1}^m d\omega_2 \frac{(\omega_2 - m)^2}{(\omega_1 + \omega_2 - 2m)^2} + \int_0^m d\omega_1 \frac{1}{\omega_1^2} \int_{m-\omega_1}^m d\omega_2 \frac{(\omega_1 + \omega_2 - m)^2}{\omega_2^2} \right\} \quad (4)$$

Para hacer la primera integración nosentamos

$$I_1 = \int dx \frac{(x+a)^2}{(x+a)^2} = -\frac{(x+a)^2}{(x+a)} + 2(x+a) - 2(a-x) \ln(x+a)$$

$$I_2 = \int dx \frac{1}{x^2(x+a)^2} = -\frac{1}{\alpha x(x+a)} - \frac{2}{\alpha^2(x+a)} + \frac{2}{\alpha^3} \ln \frac{x+a}{x}$$

de donde un cálculo directo da

$$I = 8\pi^2 \int_0^m d\omega_1 \frac{2}{m} \left\{ \frac{\omega_1 (m - \omega_1)}{(\omega_1 - 2m)^2} + \frac{2m (m - \omega_1)^2}{(\omega_1 - 2m)^3} \ln \frac{m - \omega_1}{m} + \frac{2m - \omega_1}{\omega_1} + \frac{2m (m - \omega_1)}{\omega_1^2} \ln \frac{m - \omega_1}{m} \right\}$$

Introduciendo $x \equiv \omega_1/m$

$$I = 16\pi^2 \int_0^1 dx \left\{ 1 + \frac{x(1-x)}{(x-2)^2} + \frac{2(1-x)^2}{(x-2)^3} \ln(1-x) + \frac{2(1-x)}{x^2} [\ln(1-x) + x] \right\}$$

Resolvámoslo

$$I_1 = \int_0^1 dx = 1$$

$$I_2 = \int_0^1 dx \frac{x(1-x)}{(x-2)^2} = -2 + 3 \ln 2$$

$$I_3 = 2 \int_0^1 dx \left\{ \frac{1}{x^2} \ln [(1-x) + x] - \frac{1}{x} \ln(1-x) - 1 \right\} = -4 + \frac{\pi^2}{3}$$

$$I_4 = 2 \int_0^1 dx \frac{(1-x)^2}{(x-2)^2} \ln(1-x) = \frac{1}{2} - 3 \ln 2 + \frac{\pi^2}{6}$$

y por lo tanto

$$I = 8\pi^2 (\pi^2 - 9) \quad (1)$$

de donde

$$\Gamma = \frac{2}{9} \frac{\pi^2 - 9}{\pi} m \alpha^6 \quad (2)$$

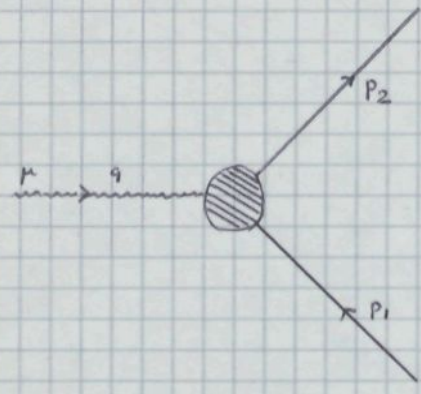
que es la anchura de desintegración del positronio a tres fotones. Noten que

$$\Gamma = 4.746\ 509\ (36) \times 10^{-9} \text{ ev} = [1.386\ 740\ (14) \times 10^{-7} \text{ sec}]^{-1} \quad (3)$$

XXII - MOMENTO MAGNÉTICO ANOMALO DEL ELECTRON

Como es bien sabido

$$\langle \bar{p}_2, \lambda_2 | J_{em}^\mu(0) | \bar{p}_1, \lambda_1 \rangle = \bar{u}(\bar{p}_2, \lambda_2) \left[F_1(q^2) \gamma^\mu + \frac{i}{2m} F_2(q^2) \sigma^{\mu\nu} q_\nu \right] u(\bar{p}_1, \lambda_1) \quad (1)$$



$$q^\mu \equiv p_2^\mu - p_1^\mu \quad (2)$$

$$P^\mu \equiv p_2^\mu + p_1^\mu$$

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (3)$$

$$J_{em}^\mu(x) \equiv \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) \quad (3)$$

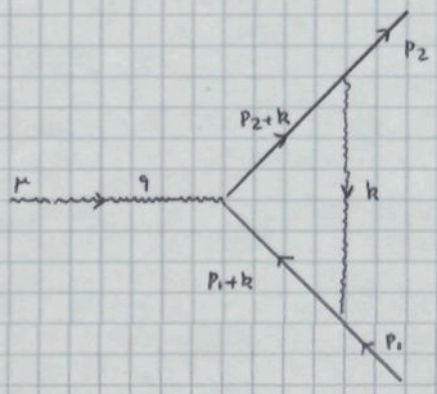
En orden cero de teoría de perturbaciones

$$\langle \bar{p}_2, \lambda_2 | J_{em}^\mu(0) | \bar{p}_1, \lambda_1 \rangle = \bar{u}(\bar{p}_2, \lambda_2) \gamma^\mu u(\bar{p}_1, \lambda_1) \quad (4)$$

c.e.

$$F_1^{(0)}(q^2) = 1, \quad F_2^{(0)}(q^2) = 0 \quad (5)$$

En segundo orden de teoría de perturbaciones la contribución viene del diagrama



y su contribución a la cantidad deseada es $\bar{u}(\bar{p}_2, \lambda_2) R^\mu u(\bar{p}_1, \lambda_1)$ donde

$$R^\mu \equiv -ie^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma^\lambda \frac{1}{\not{p}_2 + \not{k} - m + i\eta} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p}_1 + \not{k} - m + i\eta} \gamma^\rho \frac{1}{k^2 + i\eta} \left\{ g_{\lambda\rho} - (1-\alpha) \frac{k_\lambda k_\rho}{k^2 + i\eta} \right\} \quad (6)$$

$$R^{\mu} = -ie^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^{\lambda} (\not{k} + \not{p}_2 + m) \gamma^{\mu} (\not{k} + \not{p}_1 + m) \gamma^{\rho}}{[(k+p_1)^2 - m^2 + i\eta][(k+p_2)^2 - m^2 + i\eta][k^2 + i\eta]} \left\{ g_{\lambda\rho} - (1-a) \frac{k_{\lambda} k_{\rho}}{k^2 + i\eta} \right\} \quad (1)$$

Evidentemente se debe cumplir que

$$(\not{p}_2 + m) R^{\mu} (\not{p}_1 + m) = (\not{p}_2 + m) \left[F_1^{(2)}(q^2) \gamma^{\mu} + \frac{i}{2m} F_2^{(2)}(q^2) \sigma^{\mu\nu} q_{\nu} \right] (\not{p}_1 + m) \quad (2)$$

Multiplíquelo primero por P_{μ} y tomando trazas y a continuación por γ_{μ} y tomando trazas u obtiene

$$4m P^2 F_1^{(2)}(q^2) + \frac{1}{m} P^2 q^2 F_2^{(2)}(q^2) = \text{Tr} [P_{\mu} (\not{p}_2 + m) R^{\mu} (\not{p}_1 + m)] \quad (3)$$

$$[(2D-4)q^2 + 8m^2] F_1^{(2)}(q^2) + (2D-2)q^2 F_2^{(2)}(q^2) = \text{Tr} [\gamma_{\mu} (\not{p}_2 + m) R^{\mu} (\not{p}_1 + m)]$$

y la cantidad que nos interesa es ($P^2 = 4m^2 - q^2$)

$$F_2^{(2)}(q^2) = \frac{m}{(D-2)q^2[4m^2 - q^2]^2} \left\{ 2m(4m^2 - q^2) \text{Tr} [\gamma_{\mu} (\not{p}_2 + m) R^{\mu} (\not{p}_1 + m)] - [4m^2 + (D-2)q^2] \text{Tr} [P_{\mu} (\not{p}_2 + m) R^{\mu} (\not{p}_1 + m)] \right\} \quad (4)$$

Debemos calcular las trazas de los numeradores

$$N_1^{\mu} \equiv \gamma^{\lambda} (\not{k} + \not{p}_2 + m) \gamma^{\mu} (\not{k} + \not{p}_1 + m) \gamma_{\lambda} \quad (5)$$

$$N_2^{\mu} \equiv \not{k} (\not{k} + \not{p}_2 + m) \gamma^{\mu} (\not{k} + \not{p}_1 + m) \not{k}$$

Antes transformamos estas cantidades

$$N_1^{\mu} = (+2k^{\lambda} - \not{k} \gamma^{\lambda} + 2p_2^{\lambda} - \not{p}_2 \gamma^{\lambda} + m \gamma^{\lambda}) \gamma^{\mu} (2k_{\lambda} - \gamma_{\lambda} \not{k} + 2p_{1\lambda} - \gamma_{\lambda} \not{p}_1 + m \gamma_{\lambda}) \equiv$$

$$\equiv (2k^{\lambda} + 2p_2^{\lambda} - \not{k} \gamma^{\lambda}) \gamma^{\mu} (2k_{\lambda} + 2p_{1\lambda} - \gamma_{\lambda} \not{k}) =$$

$$\equiv -2\gamma^{\mu} \not{p}_2 \not{k} - 2\not{k} \not{p}_1 \gamma^{\mu} - (D-2)\not{k} \gamma^{\mu} \not{k} =$$

$$\equiv 4m k^{\mu} - 4p_2^{\mu} \not{k} - 4p_1^{\mu} \not{k} - 2(D-2)k^{\mu} \not{k} \quad (6)$$

donde hemos eliminado términos proporcionales a γ^{μ} que solo contribuyen a F_1 . Igualmente

$$N_2^\mu = [k^2 + 2(kp_2) - \cancel{k^2} + m^2] \gamma^\mu [k^2 + 2(kp_1) - \cancel{k^2} + m^2] \doteq 0 \quad (1)$$

Lo cual indica que $F_2(q^2)$ es invariante gauge. La integral a realizar es pues

$$\begin{aligned} R^\mu &\doteq -ie^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{N_1^\mu(k)}{[(k+p_1)^2 - m^2 + i\eta][k^2 + i\eta]} = \\ &= -ie^2 2 \int_0^1 dx \int_0^x dy \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{N_1^\mu(k)}{\{ (k^2 + 2kp_2)y + k^2(x-y) + (k^2 + 2kp_1)(1-x) + i\eta \}^3} \\ &= -2ie^2 \int_0^1 dx \int_0^x dy \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{N_1^\mu(k)}{\{ (k + p_1 - p_1x + p_2y)^2 - a^2 + i\eta \}^3} \end{aligned} \quad (2)$$

donde

$$a^2 \doteq m^2y^2 + m^2x^2 + m^2 - 2m^2x + 2m^2y - 2m^2xy - q^2y + q^2xy \quad (3)$$

Por tanto

$$R^\mu = -2ie^2 \int_0^1 dx \int_0^x dy \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{N_1^\mu(k - p_1 + p_1x - p_2y)}{\{ k^2 - a^2 + i\eta \}^3} \quad (4)$$

Notar que el numerador es ahora

$$\begin{aligned} N_1^\mu(k - p_1 + p_1x - p_2y) &= 4m k^\mu - 4m p_1^\mu + 4m p_1^\mu x - 4m p_2^\mu y - 4p_2^\mu \cancel{k} + 4p_2^\mu \cancel{p}_1 \\ &+ 4p_2^\mu \cancel{p}_1 x + 4p_2^\mu \cancel{p}_2 y - 4p_1^\mu \cancel{k} + 4p_1^\mu \cancel{p}_1 - 4p_1^\mu \cancel{p}_1 x + 4p_1^\mu \cancel{p}_2 y \\ &- 2(D-2)(k^\mu - p_1^\mu + p_1^\mu x - p_2^\mu y)(\cancel{k} - \cancel{p}_1 + \cancel{p}_1 x - \cancel{p}_2 y) = \\ &\doteq -4m p_1^\mu + 4m x p_1^\mu - 4m y p_2^\mu + 4m p_2^\mu - 4m x p_2^\mu + 4m y p_2^\mu + 4m p_1^\mu - 4m x p_1^\mu \\ &+ 4m y p_1^\mu - 2(D-2)k^\mu \cancel{k} - 2(D-2)m(-p_1^\mu + p_1^\mu x - p_2^\mu y)(-1+x-y) \end{aligned}$$

Since the term $k^\mu \cancel{k} \rightarrow \gamma^\mu$ we can drop it and we see that all integrals are convergent.

$$\begin{aligned} N_1^\mu &\doteq -4m p_1^\mu + 4m p_2^\mu + 8m x p_1^\mu - 4m x p_2^\mu - 4m x^2 p_1^\mu + 4m x y p_1^\mu \\ &- 4m y p_2^\mu + 4m x y p_2^\mu - 4m y^2 p_2^\mu \doteq S^\mu \end{aligned} \quad (5)$$

Por tanto

$$R = -2\pi e^2 \int_0^1 dx \int_0^x dy \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{S^k}{[k^2 - a^2 + i\eta]^3} =$$

$$R^k = -\frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{S^k}{a^2} \quad (1)$$

Como

$$\text{Tr} [\gamma_\mu (\not{p}_2 + m) S^k (\not{p}_1 + m)] = 4m (S \cdot p) \quad (2)$$

$$\text{Tr} [\not{p}_\mu (\not{p}_2 + m) S^k (\not{p}_1 + m)] = 2(4m^2 - q^2) (S \cdot p)$$

Entonces

$$F_2^{(2)}(q^2) = \frac{\alpha m}{2\pi(4m^2 - q^2)} \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{(S \cdot p)}{a^2}$$

$$a^2 = m^2 [y + (1-x)]^2 - q^2 y(1-x) \quad (3)$$

$$(S \cdot p) = 2m(4m^2 - q^2)(x-y)[(1-x) + y]$$

y por tanto

$$F_2^{(2)}(q^2) = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{(x-y)[1-x+y]}{[y+(1-x)]^2 - \frac{q^2}{m^2} y(1-x)} \quad (4)$$

Entonces

$$F_2^{(2)}(0) = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \int_0^x dy \left\{ \frac{1}{y+(1-x)} - 1 \right\} =$$

$$= \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \left\{ -x - \ln(1-x) \right\} = \frac{\alpha}{\pi} \left\{ -\frac{1}{2} + 1 \right\}$$

$$F_2^{(2)}(0) = \frac{\alpha}{2\pi} \quad (5)$$

Podemos calcular el factor de forma $F_2^{(2)}(q^2)$ a partir de (4.6) si hacemos $y+1-x=z$

$$F_2^{(2)}(q^2) = -\frac{\alpha}{\Gamma} \int_0^1 dx \int_{1-x}^1 dz \frac{z(z-1)}{z^2 - \frac{q^2}{m^2}(1-x)z + \frac{q^2}{m^2}(1-x)^2} = \left| \begin{array}{l} A = \frac{q^2}{2m^2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} \right) \\ B = \frac{q^2}{2m^2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} \right) \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{\alpha}{\Gamma} \int_0^1 dx \int_{1-x}^1 dz \frac{z(z-1)}{[z - A(1-x)][z - B(1-x)]} = -\frac{\alpha}{\Gamma} \int_0^1 dx \int_x^1 dz \frac{z(z-1)}{(z-Ax)(z-Bx)} =$$

$$= -\frac{\alpha}{\Gamma} \int_0^1 dx \int_x^1 dz \left\{ 1 + \frac{A(Ax-1)}{A-B} \frac{1}{z-Ax} - \frac{B(Bx-1)}{A-B} \frac{1}{z-Bx} \right\} =$$

$$= -\frac{\alpha}{\Gamma} \int_0^1 dx \left\{ 1-x + \frac{A(Ax-1)}{A-B} \ln \frac{1-Ax}{x(1-A)} - \frac{B(Bx-1)}{A-B} \ln \frac{1-Bx}{x(1-B)} \right\} \quad (1)$$

Como sabemos

$$I_1 = A \int_0^1 dx (Ax-1) \ln \frac{1-Ax}{x(1-A)} = A \int_0^1 dx [(Ax-1) \ln(1-Ax) - (Ax-1) \ln x - (Ax-1) \ln(1-A)]$$

$$= A \left\{ \frac{1}{A} \int_1^{1-A} dx x \ln x - A \int_0^1 dx x \ln x + \int_0^1 dx \ln x - \ln(1-A) \left(\frac{A}{2} - 1 \right) \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} (1-A)^2 \ln(1-A) - \frac{1}{4} (1-A)^2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} A^2 - A - \frac{A^2}{2} \ln(1-A) + A \ln(1-A)$$

$$= \frac{1}{2} \ln(1-A) - \frac{1}{2} A$$

y en tanto

$$F_2^{(2)}(q^2) = -\frac{\alpha}{\Gamma} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{A-B} \left(\frac{1}{2} \ln(1-A) - \frac{1}{2} A - \frac{1}{2} \ln(1-B) + \frac{1}{2} B \right) \right\} =$$

$$= \frac{\alpha}{2\Gamma(A-B)} \ln \frac{1-B}{1-A}$$

$$F_2^{(2)}(q^2) = \frac{\alpha}{\Gamma \sqrt{-\frac{q^2}{m^2} \left(1 - \frac{q^2}{4m^2} \right)}} \ln \frac{1 - \frac{q^2}{2m^2} + \sqrt{-\frac{q^2}{m^2} \left(1 - \frac{q^2}{4m^2} \right)}}{1 - \frac{q^2}{2m^2} - \sqrt{-\frac{q^2}{m^2} \left(1 - \frac{q^2}{4m^2} \right)}} \quad (2)$$

y para $q^2 \ll m^2$

$$F_2^{(2)}(q^2) = \frac{\alpha}{2\Gamma} \left\{ 1 - \frac{1}{6} \frac{q^2}{m^2} + \dots \right\} \quad (3)$$

Experimentalmente

$$\mu_{exp} = [1.001\ 159\ 652\ 209\ (31)] \frac{e\hbar}{2mc} \quad (1)$$

El valor teórico es

$$\begin{aligned} \mu &= \left[1 + \frac{\alpha}{2\pi} \right] \frac{e\hbar}{2mc} = \left[1 + \frac{1}{2\pi} \frac{1}{137.03604(11)} \right] \frac{e\hbar}{2mc} = \\ &= [1.001\ 161\ 409\ 39\ (41)] \frac{e\hbar}{2mc} \quad (2) \end{aligned}$$

La discrepancia viene explicada al calcular términos de orden superior

J. Calmels, S. Navison, H. Perrault y E. de Rafael Rev. Mod. Phys. 49, 21 (1977)

$$a_e^{(2)} = \frac{\alpha}{2\pi} = 0.001\ 161\ 409\ 39\ (41)$$

$$\begin{aligned} a_e^{(4)} &= \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \left\{ \frac{197}{144} + \frac{\pi^2}{12} + \frac{3}{4} \zeta(3) - \frac{\pi^2}{2} \ln 2 + \frac{1}{45} \left(\frac{m_e}{m_p} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + 0 \left(\left(\frac{m_e}{m_p} \right)^4 \ln \frac{m_p}{m_e} \right) \right\} = \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 (-0.328478446) = \\ &= -0.000\ 001\ 772\ 30\ (68) \end{aligned}$$

$$a_e^{(2)} + a_e^{(4)} = 0.001\ 159\ 637\ 09$$

$$a_e^{(6)} = \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^3 (1.188 \pm 0.025) = 0.000\ 000\ 014\ 89\ (31)$$

$$a_e^{(QED)} = a_e^{(2)} + a_e^{(4)} + a_e^{(6)} = 0.001\ 159\ 651\ 98\ (85)$$

La contribución de orden octavo es

$$a_e^{(8)} = 0.000\ 000\ 003\ 7\ (21)$$

XXII-A-1 - INTERPRETACIÓN DE $F_1(0)$ y $F_2(0)$

Covariancia Lorentz y la conservación de la corriente electromagnética implica que

$$\langle \vec{p}_2, \lambda_2 | J_{em}^M(0) | \vec{p}_1, \lambda_1 \rangle = \bar{u}(\vec{p}_2, \lambda_2) \left[F_1(q^2) \gamma^M + \frac{i}{2m} F_2(q^2) \sigma^{\mu\nu} q_\nu \right] u(\vec{p}_1, \lambda_1) \quad (1)$$

$$q^\mu \equiv p_2^\mu - p_1^\mu, \quad \sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

$$\langle \vec{p}_2, \lambda_2 | J_{em}^M(x) | \vec{p}_1, \lambda_1 \rangle = e^{i q \cdot x} \langle \vec{p}_2, \lambda_2 | J_{em}^M(0) | \vec{p}_1, \lambda_1 \rangle.$$

Para fijar ideas hablaremos del protón, pero el argumento es totalmente general.

I) Consideremos un estado protón

$$|\phi\rangle \equiv \sum_{\lambda} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E(\vec{p})} f(\vec{p}, \lambda) a^\dagger(\vec{p}, \lambda) |0\rangle \quad (2)$$

que supondremos normalizado

$$\langle \phi | \phi \rangle = 1 \quad (3)$$

lo cual implica

$$\sum_{\lambda} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E(\vec{p})} |f(\vec{p}, \lambda)|^2 = 1 \quad (4)$$

El operador carga es

$$Q \equiv \int d^3 x J_{em}^0(\vec{x}) \quad (5)$$

y para el protón

$$\langle \phi | Q | \phi \rangle = +1 \quad (6)$$

lo cual implica

$$\begin{aligned} 1 = \langle \phi | Q | \phi \rangle &= \int d^3 x \sum_{\lambda \lambda'} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E(p)} \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2E(p')} \langle p', \lambda' | J_{em}^0(x) | p, \lambda \rangle f^*(\vec{p}', \lambda') f(\vec{p}, \lambda) \\ &= \int d^3 x \sum_{\lambda \lambda'} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E(p)} \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2E(p')} e^{i(p' - p) \cdot x} \langle p', \lambda' | J_{em}^0(0) | p, \lambda \rangle f^*(\vec{p}', \lambda') f(\vec{p}, \lambda) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (2\pi)^3 \sum_{\lambda\lambda'} \int d^3p \frac{1}{(2\pi)^4 4E^2(\vec{p})} \langle \vec{p}\lambda' | \vec{J}_{em}^0(0) | \vec{p}\lambda \rangle f^*(\vec{p}\lambda') f(\vec{p}\lambda) = \\
&= \frac{1}{4(2\pi)^3} \sum_{\lambda\lambda'} \int d^3p \frac{1}{E^2(\vec{p})} \bar{u}(\vec{p}\lambda') F_1(0) \gamma^0 u(\vec{p}\lambda) f^*(\vec{p}\lambda') f(\vec{p}\lambda) \\
&= \frac{1}{4(2\pi)^3} \sum_{\lambda\lambda'} \int d^3p \frac{1}{E^2(\vec{p})} F_1(0) 2E(\vec{p}) \delta_{\lambda\lambda'} f^*(\vec{p}\lambda') f(\vec{p}\lambda) = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda} \int d^3p \frac{1}{2E(\vec{p})} F_1(0) |f(\vec{p}\lambda)|^2 = F_1(0)
\end{aligned}$$

y por tanto

$$F_1(0) = 1 \quad (4)$$

II) El operador momento magnético es

$$\vec{M} \equiv \frac{1}{2} \int d^3x \vec{x} \times \vec{J}_{em}(0, \vec{x}) \quad (2)$$

El momento magnético de una partícula k define como el valor esperado de (2) en un estado en el que la partícula se halle en reposo. Este estado no puede estar normalizado si la partícula está en reposo. Por tanto vamos a estudiar el límite de (2) para una sucesión de estados que converjan hacia el estado de una partícula en reposo, convenientemente elegidos. Consideremos los estados

$$|\phi_m\rangle \equiv \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E(\vec{p})} f_m(\vec{p}) a^\dagger(\vec{p}\lambda) |0\rangle, \quad m=1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

donde $f_m(\vec{p})$ son funciones continuas de \vec{p} con derivadas continuas tales que $f_m(\vec{p}) = 0$ si $|\vec{p}| \geq \frac{1}{m}$. Para que estas funciones estén normalizadas

$$\langle \phi_m | \phi_m \rangle = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E(\vec{p})} |f_m(\vec{p})|^2 = 1 \quad (5)$$

Calculamos ahora el valor esperado en este estado del momento angular

$$\begin{aligned} \langle \phi_m | J^i | \phi_m \rangle &= \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \langle \phi_m | M^{jk} | \phi_m \rangle = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \int d^3x \langle \phi_m | M^0_{jk}(\mathbf{0}, \bar{x}) | \phi_m \rangle \\ &= -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \int d^3x \langle \phi_m | \tilde{T}^0_j(\mathbf{0}, \bar{x}) x_k - \tilde{T}^0_k(\mathbf{0}, \bar{x}) x_j - \frac{1}{4} \bar{\Psi}(\mathbf{0}, \bar{x}) \gamma^0 \sigma_{jk} \Psi(\mathbf{0}, \bar{x}) \\ &\quad - \frac{1}{4} \bar{\Psi}(\mathbf{0}, \bar{x}) \sigma_{jk} \gamma^0 \Psi(\mathbf{0}, \bar{x}) | \phi_m \rangle = \\ &= -\epsilon_{ijk} \int d^3x \langle \phi_m | \tilde{T}^0_j(\mathbf{0}, \bar{x}) x_k | \phi_m \rangle + \frac{1}{4} \epsilon_{ijk} \int d^3x \langle \phi_m | \bar{\Psi}(\mathbf{0}, \bar{x}) \gamma^0 \sigma_{jk} \Psi(\mathbf{0}, \bar{x}) | \phi_m \rangle \quad (1) \end{aligned}$$

Calculamos por separado ambos términos. Consideramos el segundo término

$$\begin{aligned} S_2^i &= \frac{1}{2} \int d^3x \langle \phi_m | \bar{\Psi}(\mathbf{0}, \bar{x}) \gamma^0 \Sigma^i \Psi(\mathbf{0}, \bar{x}) | \phi_m \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \int d^3x \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2E(p')} \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E(p)} \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2E(k')} \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E(k)} f_m^*(\vec{p}') f_m(\vec{p}) \sum_{\mu\mu'} \bar{u}(\vec{k}', \mu') \gamma^0 \Sigma^i u(\vec{k}, \mu) \\ &\quad \cdot \langle 0 | a(\vec{p}', \lambda) a^\dagger(\vec{k}', \mu') a(\vec{k}, \mu) a^\dagger(\vec{p}, \lambda) | 0 \rangle e^{-i(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \bar{x}} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\vec{S}_2^i = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{f_m^*(\vec{p})}{2E(p)} u^\dagger(\vec{p}, \lambda) \frac{1}{2} \vec{\Sigma}^i u(\vec{p}, \lambda) \frac{f_m(\vec{p})}{2E(p)} \quad (2)$$

Calculamos ahora el primer término

$$\begin{aligned} S_1^i &= -\frac{i}{2} \int d^3x \epsilon_{ijk} \langle \phi_m | \bar{\Psi}(\mathbf{0}, \bar{x}) \gamma^0 \partial_j \Psi(\mathbf{0}, \bar{x}) x_k - \partial_j \bar{\Psi}(\mathbf{0}, \bar{x}) \gamma^0 \Psi(\mathbf{0}, \bar{x}) x_k | \phi_m \rangle \\ &= -\frac{i}{2} \epsilon_{ijk} \int d^3x \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2E(p')} \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E(p)} \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2E(k')} \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E(k)} f_m^*(\vec{p}') f_m(\vec{p}) \sum_{\mu\mu'} u^\dagger(\vec{p}', \mu') u(\vec{p}, \mu) \\ &\quad \cdot \langle 0 | a(\vec{p}', \lambda) a^\dagger(\vec{k}', \mu') a(\vec{k}, \mu) a^\dagger(\vec{p}, \lambda) | 0 \rangle e^{-i(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \bar{x}} x_k i(k^j + k^{j'}) = \end{aligned}$$

$$= \frac{i}{2} \epsilon_{ijk} \int d^3x \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2E(p')} \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E(p)} f_m^*(\vec{p}') f_m(\vec{p}) u^\dagger(\vec{p}', \lambda) u(\vec{p}, \lambda) (p^j + p^{j'}) \frac{\partial}{\partial p^k} (e^{-i(\vec{p}' - \vec{p}) \cdot \bar{x}})$$

$$= -\frac{i}{2} \epsilon_{ijk} \int d^3p' d^3p \delta(\vec{p} - \vec{p}') \frac{\partial}{\partial p^k} \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{f_m^*(\vec{p}')}{2E(p')} u^\dagger(\vec{p}', \lambda) u(\vec{p}, \lambda) \frac{f_m(\vec{p})}{2E(p)} (p^j + p^{j'})$$

$$= -\frac{i}{(2\pi)^3} \epsilon_{ijk} \int d^3p \frac{f_m(\vec{p})}{2E(\vec{p})} u^+(\vec{p}, \lambda) p^j \frac{\partial}{\partial p^k} \left\{ u(\vec{p}, \lambda) \frac{f_m(\vec{p})}{2E(\vec{p})} \right\}$$

de donde

$$\vec{S}_i = \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{f_m(\vec{p})}{2E(\vec{p})} u^+(\vec{p}, \lambda) \vec{L} u(\vec{p}, \lambda) \frac{f_m(\vec{p})}{2E(\vec{p})} \quad (1)$$

donde

$$L^i = -i \epsilon_{ijk} p^j \frac{\partial}{\partial p^k} \quad (2)$$

Entonces vemos claramente que \vec{S}_i es el valor esperado del momento angular orbital y que \vec{S}_z es el de spin. Nosotras queremos que para $m \rightarrow \infty$, $\vec{S}_i \rightarrow 0$. Demostremos usando que (1) se puede escribir

$$\vec{S}_i = \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{f_m^*(\vec{p})}{2E(\vec{p})} \frac{f_m(\vec{p})}{2E(\vec{p})} u^+(\vec{p}, \lambda) \vec{L} u(\vec{p}, \lambda) + \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^3p u^+(\vec{p}, \lambda) u(\vec{p}, \lambda) \frac{f_m^*(\vec{p})}{2E(\vec{p})} \vec{L} \frac{f_m(\vec{p})}{2E(\vec{p})} \quad (3)$$

Ahora bien $|u^+(\vec{p}, \lambda) \vec{L} u(\vec{p}, \lambda)|$ se comporta como $|\vec{p}|$ para pequeños valores de \vec{p} y teniendo en cuenta (2.4) el primer miembro se anula para $m \rightarrow \infty$. Entonces

$$\vec{S}_i = \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{f_m^*(\vec{p})}{2E(\vec{p})} \vec{L} \frac{f_m(\vec{p})}{2E(\vec{p})}$$

el cual se anula, como se desea, si $f_m(\vec{p}) \equiv f_m(|\vec{p}|) \equiv f_m(p)$. Esto es lo que esperamos a continuación. Calculemos el valor esperado de (2.2)

$$\vec{M}_m = \langle \phi_m | \vec{M} | \phi_m \rangle = \frac{i}{2} \int d^3x \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2E(p')} \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E(p)} f_m^*(p') f_m(p) \vec{x} \times \langle \vec{p}', \lambda | \vec{J}_{em}(0, \vec{x}) | \vec{p}, \lambda \rangle$$

$$= \frac{i}{2} \int d^3x \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2E(p')} \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E(p)} f_m^*(p') f_m(p) \vec{x} \times \langle \vec{p}', \lambda | \vec{J}_{em}(0) | \vec{p}, \lambda \rangle e^{-i(\vec{p}' - \vec{p}) \cdot \vec{x}}$$

$$= \frac{i}{2(2\pi)^4} \int d^3x d^3p' d^3p \left\{ \vec{\nabla}_{p'} e^{-i(\vec{p}' - \vec{p}) \cdot \vec{x}} \right\} \times \left\{ \langle \vec{p}', \lambda | \vec{J}_{em}(0) | \vec{p}, \lambda \rangle \frac{f_m^*(p')}{2E(p')} \frac{f_m(p)}{2E(p)} \right\} =$$

$$= -\frac{i}{2(2\pi)^3} \int d^3p' d^3p \left\{ \vec{\nabla}_{p'} \times \langle \vec{p}', \lambda | \vec{J}_{em}(0) | \vec{p}, \lambda \rangle \frac{f_m^*(p')}{2E(p')} \frac{f_m(p)}{2E(p)} \right\} \delta(\vec{p} - \vec{p}')$$

$$\vec{M}_m = - \frac{i}{2(2\pi)^3} \int d^3 p d^3 p' \delta(\vec{p} - \vec{p}') \left\{ [\vec{\nabla}_{p'} \times \langle \vec{p}' \lambda | \vec{J}_{em}(0) | \vec{p} \lambda \rangle] \frac{f_m^*(p')}{2E(p')} \frac{f_m(p)}{2E(p)} \right. \\ \left. + [\vec{\nabla}_{p'} \frac{f_m^*(p')}{2E(p')}] \times \langle \vec{p}' \lambda | \vec{J}_{em}(0) | \vec{p} \lambda \rangle \frac{f_m(\vec{p})}{2E(p)} \right\} \quad (1)$$

Consideremos la segunda de estas contribuciones

$$- \frac{i}{2(2\pi)^3} \int d^3 p \left[\vec{\nabla}_p \frac{f_m^*(p)}{2E(p)} \right] \times \langle \vec{p} \lambda | \vec{J}_{em}(0) | \vec{p} \lambda \rangle \frac{f_m(p)}{2E(p)} = \\ = + \frac{i}{2(2\pi)^3} \int d^3 p \frac{f_m(p)}{2E(p)} \bar{u}(\vec{p}, \lambda) \vec{\gamma} \cdot \mu(\vec{p}, \lambda) \times \left[\vec{\nabla} \frac{f_m^*(p)}{2E(p)} \right] = \\ = \frac{i}{2(2\pi)^3} \int d^3 p \frac{f_m(p)}{2E(p)} \alpha^+(\hat{p}, \lambda) [\vec{\sigma} \cdot (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) + (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \vec{\sigma}] \alpha(\hat{p}, \lambda) \times \left[\vec{\nabla}_p \frac{f_m^*(p)}{2E(p)} \right] = \\ = \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^3 p \frac{f_m(p)}{2E(p)} \alpha^+(\hat{p}, \lambda) \lambda \vec{\sigma} \alpha(\hat{p}, \lambda) |\vec{p}| \times \left[\vec{\nabla}_p \frac{f_m^*(p)}{2E(p)} \right] = \\ = \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^3 p \frac{f_m(p)}{2E(p)} \vec{p} \times \vec{\nabla}_p \frac{f_m^*(p)}{2E(p)} = 0 \quad (2)$$

y en tanto

$$\vec{M}_m = - \frac{i}{2(2\pi)^3} \int d^3 p d^3 p' \delta(\vec{p} - \vec{p}') \frac{f_m^*(p')}{2E(p')} \frac{f_m(p)}{2E(p)} \vec{\nabla}_{p'} \times \langle \vec{p}' \lambda | \vec{J}_{em}(0) | \vec{p} \lambda \rangle \quad (3)$$

Ahora bien indicando por u_1 y u_2 las componentes superiores e inferiores de los cuadri-spinores

$$\langle \vec{p}' \lambda | \vec{J}_{em}(0) | \vec{p} \lambda \rangle = u_1^+(\vec{p}', \lambda) \left\{ F_1(q^2) \gamma^0 \vec{\gamma} + \frac{F_2(q^2)}{2m} \vec{\gamma} q^0 + i \frac{F_2(q^2)}{2m} \gamma^0 \vec{\Sigma} \times \vec{q} \right\} u_1(\vec{p}, \lambda) = \\ = F_1(q^2) [u_1^+(\vec{p}', \lambda) \vec{\sigma} u_2(\vec{p}, \lambda) + u_2^+(\vec{p}', \lambda) \vec{\sigma} u_1(\vec{p}, \lambda)] \\ + \frac{F_2(q^2)}{2m} q^0 [u_1^+(\vec{p}', \lambda) \vec{\sigma} u_2(\vec{p}, \lambda) - u_2^+(\vec{p}', \lambda) \vec{\sigma} u_1(\vec{p}, \lambda)] \\ + i \frac{F_2(q^2)}{2m} [u_1^+(\vec{p}', \lambda) (\vec{\sigma} \times \vec{q}) u_1(\vec{p}, \lambda) - u_2^+(\vec{p}', \lambda) (\vec{\sigma} \times \vec{q}) u_2(\vec{p}, \lambda)] \quad (4)$$

Notemos que

$$\vec{\nabla}_{\vec{p}'} F_i(q^2) = \frac{dF_i(q^2)}{dq^2} 2(\vec{p} - \vec{p}') \sqrt{\frac{p^2 + m^2}{p'^2 + m^2}}$$

y al quedar multiplicadas por $d(\vec{q})$ dan contribución nula. También se tiene que

$\vec{\nabla}_{\vec{p}'} q^0 = \vec{p}' / E(\vec{p}')$ y al venir multiplicada por una cantidad que para $\vec{q} = 0$ es nula tampoco interviene. Entonces

$$\begin{aligned} \vec{M}_m = & - \frac{i}{2(2\pi)^3} \int d^3p \frac{|f_m(p)|^2}{4E^2(p)} \left\{ F_1(\omega) \left\{ [\vec{\nabla}_{\vec{p}} u_1^+(\vec{p}, \lambda)] \times \vec{\sigma} u_2(\vec{p}, \lambda) - \right. \right. \\ & + [\vec{\nabla}_{\vec{p}} u_2^+(\vec{p}, \lambda)] \times \vec{\sigma} u_1(\vec{p}, \lambda) \left. \right\} + \frac{i F_2(\omega)}{2m} \left\{ 2 u_1^+(\vec{p}, \lambda) \vec{\sigma} u_1(\vec{p}, \lambda) \right. \\ & \left. \left. - 2 u_2^+(\vec{p}, \lambda) \vec{\sigma} u_2(\vec{p}, \lambda) \right\} \right\} \end{aligned} \quad (1)$$

Ahora bien $\vec{\nabla}_{\vec{p}} u_i^+(\vec{p}, \lambda)$ da una contribución nula en el límite $m \rightarrow \infty$, más aún que en este límite

$$\begin{aligned} [\vec{\nabla}_{\vec{p}} u_2^+(\vec{p}, \lambda)] \times \vec{\sigma} u_1(\vec{p}, \lambda) & \rightarrow \frac{i}{2m} u_1^+(\vec{p}, \lambda) \vec{\sigma} \times \vec{\sigma} u_1(\vec{p}, \lambda) = \\ & = \frac{i}{m} u_1^+(\vec{p}, \lambda) \vec{\sigma} u_1(\vec{p}, \lambda) \end{aligned}$$

De donde en el límite considerado

$$\begin{aligned} \vec{M}_m & \rightarrow - \frac{i}{2(2\pi)^3} \int d^3p \frac{|f_m(p)|^2}{4E^2(p)} \left\{ F_1(\omega) \frac{i}{m} u_1^+(\vec{p}, \lambda) \vec{\sigma} u_1(\vec{p}, \lambda) \right. \\ & \left. + \frac{i F_2(\omega)}{2m} u_1^+(\vec{p}, \lambda) \vec{\sigma} u_1(\vec{p}, \lambda) \right\} = \\ & = \frac{i}{2m} [F_1(\omega) + F_2(\omega)] u_1^+(\vec{0}, \lambda) \vec{\sigma} u_1(\vec{0}, \lambda) \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{|f_m(\vec{p})|^2}{4E^2(p)} = \\ & = \frac{i}{2m} [F_1(\omega) + F_2(\omega)] u_1^+(\omega, \lambda) \frac{\vec{\sigma}}{2m} u_1(\vec{0}, \lambda) \end{aligned}$$

y por tanto

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \vec{M}_m = \frac{i}{2m} [F_1(\omega) + F_2(\omega)] u_1^+(\omega, \lambda) \frac{\vec{\sigma}}{2m} u_1(\omega, \lambda) \quad \text{Q.E.D.} \quad (2)$$

Una forma más sencilla pero menos rigurosa de proceder es la siguiente:
 La energía de interacción de una partícula cargada con un campo electromagnético externo viene dada por

$$H_1 = Q \int d^3x A^\mu(x) \langle \vec{p}' \lambda | J_{em\mu}(x) | \vec{p} \lambda \rangle \quad (1)$$

o equivalentemente

$$H_1 = Q \langle \vec{p}' \lambda | J_{em\mu}(0) | \vec{p} \lambda \rangle \int d^3x A^\mu(x) e^{i(p'-p) \cdot x} \quad (2)$$

donde un $q^\mu = p'^\mu - p^\mu$

$$\langle \vec{p}' \lambda | J_{em}^\mu(0) | \vec{p} \lambda \rangle = \bar{u}(\vec{p}' \lambda) \left[F_1(q^2) \gamma^\mu + \frac{i}{2m} F_2(q^2) \sigma^{\mu\nu} q_\nu \right] u(\vec{p} \lambda) \quad (3)$$

Tengamos en cuenta que

$$\langle \vec{p}' \lambda | J_{em}^0(0) | \vec{p} \lambda \rangle = u^\dagger(\vec{p}' \lambda) \left[F_1(q^2) + \frac{i}{2m} F_2(q^2) \vec{\gamma} \cdot \vec{q} \right] u(\vec{p} \lambda) \quad (4)$$

$$\langle \vec{p}' \lambda | \vec{J}_{em}(0) | \vec{p} \lambda \rangle = u^\dagger(\vec{p}' \lambda) \left[F_1(q^2) \vec{\gamma} + \frac{i}{2m} F_2(q^2) \vec{\gamma} q^0 + \frac{i}{2m} F_2(q^2) \vec{\sigma} \times \vec{q} \right] u(\vec{p} \lambda)$$

Los límites no relativistas de estas expresiones son respectivamente

$$\langle \vec{p}' \lambda | J_{em}^0(0) | \vec{p} \lambda \rangle = 2m \alpha^\dagger(\vec{p}', \lambda) F_1(0) \alpha(\vec{p} \lambda) \quad (5)$$

$$\langle \vec{p}' \lambda | \vec{J}_{em}(0) | \vec{p} \lambda \rangle = 2m \alpha^\dagger(\vec{p}', \lambda) \left\{ \frac{i}{2m} F_2(q^2) (\vec{\sigma} \times \vec{q}) + \frac{1}{2m} F_1(q^2) \vec{\sigma} (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \right. \\ \left. + \frac{1}{2m} F_1(q^2) (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}') \vec{\sigma} \right\} \alpha(\vec{p} \lambda) =$$

$$= 2m \alpha^\dagger(\vec{p}', \lambda) \left\{ \frac{i}{2m} F_2(q^2) [\vec{\sigma} \times (\vec{p}' - \vec{p})] + \frac{i}{2m} F_1(q^2) [\vec{\sigma} \times (\vec{p} - \vec{p}')] \right. \\ \left. + \frac{1}{2m} F_1(q^2) (\vec{p} + \vec{p}') \right\} \alpha(\vec{p} \lambda) =$$

$$= 2m \alpha^\dagger(\vec{p}', \lambda) \left\{ \frac{i}{2m} [F_1(0) + F_2(0)] [\vec{\sigma} \times (\vec{p}' - \vec{p})] + \frac{1}{2m} F_1(0) (\vec{p} + \vec{p}') \right\} \alpha(\vec{p} \lambda)$$

Consideremos un campo eléctrico constante. Entonces se puede elegir un gauge en el que $\vec{A}(\mathbf{x}) = 0$ y $A^0(0, \vec{x})$, entonces la energía de interacción es

$$H_i = 2m \int d^3x e^{i(p' - p) \cdot x} \alpha^\dagger(\vec{p}', \lambda) [Q F_1(0) A^0(0, \vec{x})] \alpha(\vec{p}, \lambda) \quad (1)$$

y por tanto $F_1(0) = 1$. En el caso de un campo magnético constante se puede elegir un gauge en el que $A^0 = 0$ y $\vec{A}(\mathbf{x}) = \vec{A}(0, \vec{x})$ y entonces

$$H_i = 2m \int d^3x e^{i(p' - p) \cdot x} \alpha^\dagger(\vec{p}', \lambda) \left[-\frac{Q}{2m} [F_1(0) + F_2(0)] (\vec{\sigma} \cdot \vec{B}(0, \vec{x})) \right. \\ \left. + \frac{Q}{2m} F_1(0) (\vec{p} + \vec{p}') \cdot \vec{A}(0, \vec{x}) \right] \alpha(\vec{p}, \lambda) \quad (2)$$

RELACIONES DE DISPERSION

Empezaremos considerando el ejemplo simple de un campo escalar neutro $\phi(x) = \phi^+(x)$, que describe partículas sin interacción de masa m . El campo, en la representación de Heisenberg, satisface la ecuación de Klein-Gordon (III.1-3)

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi(x) = 0 \tag{1}$$

y las relaciones de conmutación

$$[\phi(x), \phi(y)] = i \Delta(x-y; m^2) \tag{2}$$

La interpretación usual del campo en términos de partículas se basa en el desarrollo de Fourier de $\phi(x)$ en ondas planas (III.5-4), (III.4-2)

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{2 E(\vec{p})} [f_{\vec{p}}(x) a(\vec{p}) + f_{\vec{p}}^*(x) a^+(\vec{p})] \tag{3}$$

$$f_{\vec{p}}(x) \equiv e^{-i p \cdot x}, \quad [a(\vec{p}), a^+(\vec{p}')] = (2\pi)^3 2 E(\vec{p}) \delta(\vec{p} - \vec{p}')$$

Las ondas planas son soluciones de energía positiva:

$$i \frac{\partial}{\partial t} f_{\vec{p}}(x) = E(\vec{p}) f_{\vec{p}}(x), \quad E(\vec{p}) > 0 \tag{4}$$

de la ecuación de Klein-Gordon. Su producto escalar, conservado en el transcurso del tiempo, es (III.5-3)

$$(f_{\vec{p}}, f_{\vec{p}'}) = (2\pi)^3 2 E(\vec{p}) \delta(\vec{p} - \vec{p}') \tag{5}$$

La relación de completitud es derivable fácilmente (IV.1-2)

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{2 E(\vec{p})} f_{\vec{p}}^*(x') f_{\vec{p}}(x) = i \Delta_+(x-x'; m^2) \tag{6}$$

y además (III.5.5)

$$a(\vec{p}) = (f_{\vec{p}}, \phi), \quad a^+(\vec{p}) = - (f_{\vec{p}}^*, \phi) \tag{7}$$

Si P^μ indica el operador energía-momento se tiene que (III.9-1)

$$[\phi(x), P^\mu] = i \partial^\mu \phi(x) \quad (1)$$

$$\Rightarrow e^{i P \cdot a} \phi(x) e^{-i P \cdot a} = \phi(x+a) \quad (2)$$

El estado de vacío será definido como

$$P^\mu |0\rangle = 0 \quad (3)$$

donde hemos usado la usual notación de kets para los vectores estado en la representación de Heisenberg. Los estados de una partícula son obtenidos a partir del vacío actuando con el operador creación

$$|\vec{p}\rangle = a^\dagger(\vec{p}) |0\rangle \quad (4)$$

$$\langle \vec{p} | \vec{p}' \rangle = (2m)^3 2E(\vec{p}) \delta(\vec{p} - \vec{p}')$$

y por repetida aplicación podemos generar el espacio de Fock.

Se puede proceder de forma más general desarrollando $\phi(x)$ en un conjunto completo $\{f_\alpha(x)\}$ de soluciones de la ecuación de Klein-Gordon

$$(\square + m^2) f_\alpha(x) = 0 \quad (5)$$

de energía positiva

$$i \frac{\partial}{\partial t} f_\alpha(x) = \omega f_\alpha(x), \quad \omega > 0 \quad (6)$$

que están localizadas en el espacio. Entonces

$$\phi(x) = \sum_\alpha [f_\alpha(x) a_\alpha + f_\alpha^*(x) a_\alpha^\dagger] \quad (7)$$

$$[a_\alpha, a_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha\beta}$$

$$(f_\alpha, f_\beta) = \delta_{\alpha\beta}, \quad \sum_\alpha f_\alpha^*(x') f_\alpha(x) = i \Delta_+(x-x'; m^2)$$

$$a_\alpha = (f_\alpha, \phi), \quad a_\alpha^\dagger = - (f_\alpha^*, \phi)$$

Si somos cuidadosos podemos, sin embargo, pasar al límite de ondas planas.

En un problema general de colisiones la configuración inicial (final), en el instante $t = -\infty$ ($t = +\infty$) está formada por un cierto número de partículas que no interactúan con momento bien definido $|\alpha\rangle_{in}$ ($|\beta\rangle_{out}$). Estos sistemas de partículas sin interacción se pueden describir de acuerdo con el formalismo de las páginas anteriores. Los estados $|\alpha\rangle_{in}$ y $|\beta\rangle_{out}$ serán, en general, distintos correspondientes en la teoría ordinaria de colisiones a estados con ondas planas más ondas esféricas salientes (entrantes) para los estados "in" ("out"). Habrá operadores campo $\phi_{in}(x)$, $\phi_{out}(x)$ que tienen ambas las mismas propiedades que los campos sin interacción discutidos antes.

Puesto que $\phi_{in}(x)$ y $\phi_{out}(x)$ son soluciones de la misma ecuación y satisfacen las mismas reglas de conmutación deben estar relacionados mediante un operador unitario, usualmente llamado matriz S , tal que

$$\phi_{out}(x) = S^{-1} \phi_{in}(x) S = S^{\dagger} \phi_{in}(x) S \quad (1)$$

En consecuencia relaciones análogas vienen satisfechas por los operadores a_{in} , a_{out} y una matriz relaciona los estados entrantes y salientes

$$|\alpha\rangle_{in} = S |\alpha\rangle_{out} \quad (2)$$

Supuesta la estabilidad del vacío $S|0\rangle = |0\rangle$.

Se supone, en general, que $\phi_{in}(x)$ y $\phi_{out}(x)$ son valores límites en el pasado remoto y en el futuro remoto del campo interactuante $\phi(x)$ que tiene en cuenta las interacciones. Se escribe, en sentido débil,

$$\lim_{x^0 \rightarrow -\infty} \phi_{in}(x) = \lim_{x^0 \rightarrow -\infty} \phi(x) \quad (\text{condición asintótica}) \quad (3)$$

Si la necesidad de explicitar el Lagrangiano se tiene que

$$(\square + m^2) \phi(x) = J(x) \quad (4)$$

donde $J(x)$ es la llamada corriente de interacción. El campo interactuante $\phi(x)$ puede desarrollarse de forma análoga a (1.3) pero los operadores evolución y aniquilación serán ahora funciones del tiempo $a(\vec{p}; t)$ y $a^{\dagger}(\vec{p}, t)$ con

$$\lim_{x^0 \rightarrow -\infty} a(\vec{p}; t) = a_{out}(\vec{p}) \quad (5)$$

Como consecuencia de la condición asintótica de evolución

$$e^{+iEa} \phi(x) e^{-iEa} = \phi(x+a) \tag{1}$$

es también válida para $\phi_{in}(x)$ y $\phi_{out}(x)$.

Veamos que

$$\langle 0 | \phi(x) | \vec{p} \rangle_{in} = \langle 0 | \phi(x) | \vec{p} \rangle_{out} = f_{\vec{p}}(x) \tag{2}$$

lo cual nos dice, esencialmente, que no hay diferencia entre los estados in y out para una sola partícula. En efecto

$$\begin{aligned} \langle 0 | \phi(x) | \vec{p} \rangle_{in} &= \langle 0 | e^{+iEx} \phi(0) e^{-iEx} | \vec{p} \rangle_{in} = \langle 0 | \phi(0) | \vec{p} \rangle_{in} e^{-iEx} \\ &= \langle 0 | \phi(0) | \vec{p} \rangle_{in} f_{\vec{p}}(x). \end{aligned}$$

La condición asintótica nos permite comprobar que $\langle 0 | \phi(0) | \vec{p} \rangle_{in} = 1$ y en tanto (2) es válida.

Por otra parte si $|\vec{p}\rangle$ es el estado correspondiente a una partícula del campo cuya fuente es $J(x)$ entonces

$$\langle 0 | J(x) | \vec{p} \rangle = 0 \tag{3}$$

En efecto

$$\langle 0 | J(x) | \vec{p} \rangle = \langle 0 | (\square + m^2) \phi(x) | \vec{p} \rangle = (\square + m^2) \langle 0 | \phi(x) | \vec{p} \rangle = (\square + m^2) f_{\vec{p}}(x) = 0. \text{ D.E.D.}$$

Además, consecuencia inmediata de la condición asintótica es la igualdad

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx^0 \frac{\partial}{\partial x^0} \langle 2 | \phi(x) | 1 \rangle = \lim_{x^0 \rightarrow +\infty} \langle 2 | \phi_{out}(x) | 1 \rangle - \lim_{x^0 \rightarrow -\infty} \langle 2 | \phi_{in}(x) | 1 \rangle \tag{4}$$

donde $|1\rangle, |2\rangle$ son estados arbitrarios.

Veamos como usando estos resultados podemos escribir los elementos de la matriz S de una forma útil para estudiar las situaciones de dispersión. Consideremos el proceso de colisión. Supongamos un estado inicial de partículas y un estado final de las partículas. El elemento de matriz S correspondiente es

$$\langle f | S | i \rangle \equiv \langle \vec{p}' | \vec{k}' | \vec{p} \vec{k} \rangle_{in} \tag{5}$$

Se tiene

$$S_{fi} = \langle \bar{p}' | a_{in}(\vec{k}') | \bar{p}, \vec{k} \rangle_{im} \quad (1)$$

y usando (4.4)

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \langle \bar{p}' | a_{in}(\vec{k}') | \bar{p}, \vec{k} \rangle_{im} + \int_{-\infty}^{+\infty} dx^0 \frac{\partial}{\partial x^0} \langle \bar{p}' | a(\vec{k}'; x^0) | \bar{p}, \vec{k} \rangle_{im} = \\ &= \delta_{fi} + \int_{-\infty}^{+\infty} dx^0 \frac{\partial}{\partial x^0} \left\{ i \int d^3x \langle \bar{p}' | f_{k'}^* \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x) | \bar{p}, \vec{k} \rangle_{im} \right\} = \\ &= \delta_{fi} + i \int d^4x \langle \bar{p}' | \left(f_{k'}^*(x) \partial_0 \partial^0 \phi(x) - \phi(x) \partial_0 \partial^0 f_{k'}^*(x) \right) | \bar{p}, \vec{k} \rangle_{im} = \\ &= \delta_{fi} + i \int d^4x \langle \bar{p}' | \left(f_{k'}^*(x) \partial_0 \partial^0 \phi(x) + \phi(x) [\partial^2 \partial_k + m^2] f_{k'}^*(x) \right) | \bar{p}, \vec{k} \rangle_{im} \\ &= \delta_{fi} + i \int d^4x \langle \bar{p}' | f_{k'}^*(x) (\square + m^2) \phi(x) | \bar{p}, \vec{k} \rangle_{im} \end{aligned}$$

y así obtenemos

$$S_{fi} = \delta_{fi} + i \int d^4x f_{k'}^*(x) \langle \bar{p}' | J(x) | \bar{p}, \vec{k} \rangle_{im} \quad (2)$$

El proceso de reducción que se ha usado para sacar las variables mecánicas del estado saliente puede continuarse. Vamos a contar ahora las variables \vec{k} , la parte importante es

$$\langle \bar{p}' | J(x) | \bar{p}, \vec{k} \rangle_{im} = \langle \bar{p}' | J(x) a_{in}^+(\vec{k}) | \bar{p} \rangle \quad (3)$$

Ahora podemos ir como antes pero debemos tener presente que x está integrada a todo el espesor. Una forma de proceder es introduciendo el commutador retardado

$$R(A(x) B(y)) \equiv \theta(x^0 - y^0) [A(x), B(y)] \quad (4)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \langle \bar{p}' | J(x) | \bar{p}, \vec{k} \rangle_{im} &= \lim_{y^0 \rightarrow -\infty} \langle \bar{p}' | J(x) a^+(\vec{k}; y^0) | \bar{p} \rangle = \\ &= \lim_{y^0 \rightarrow -\infty} \theta(x^0 - y^0) \langle \bar{p}' | J(x) a^+(\vec{k}; y^0) | \bar{p} \rangle = \\ &= \lim_{y^0 \rightarrow -\infty} \langle \bar{p}' | R(J(x) a^+(\vec{k}; y^0)) | \bar{p} \rangle + \lim_{y^0 \rightarrow -\infty} \theta(x^0 - y^0) \langle \bar{p}' | a^+(\vec{k}; y^0) J(x) | \bar{p} \rangle \end{aligned}$$

$$= \lim_{y_0 \rightarrow -\infty} \langle \bar{p}' | R(J(x) a^\dagger(\bar{k}; y_0)) | \bar{p} \rangle + \langle \bar{p}' | a^\dagger_{im}(\bar{k}) J(x) | \bar{p} \rangle$$

El último término es nulo:

$$\langle \bar{p}' | a^\dagger_{im}(\bar{k}) J(x) | \bar{p} \rangle = (2\pi)^3 \mathcal{R} E(\bar{k}) \delta(\bar{k} - \bar{p}') \langle 0 | J(x) | \bar{p} \rangle = 0 \quad (1)$$

y queda

$$\begin{aligned} \langle \bar{p}' | J(x) | \bar{p}, \bar{k} \rangle_{im} &= \lim_{y_0 \rightarrow +\infty} \langle \bar{p}' | R(J(x) a^\dagger(\bar{k}; y_0)) | \bar{p} \rangle - \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} a^4 y^0 \frac{\partial}{\partial y^0} \langle \bar{p}' | R(J(x) a^\dagger(\bar{k}; y_0)) | \bar{p} \rangle \end{aligned}$$

donde el primer término del miembro de la derecha es nulo debido a la definición de R . Entonces

$$\langle \bar{p}' | J(x) | \bar{p}, \bar{k} \rangle_{im} = -i \int a^4 y \frac{\partial}{\partial y^0} \langle \bar{p}' | R(J(x) (\phi(y) \overleftrightarrow{\partial}_0 f_k(y))) | \bar{p} \rangle \quad (2)$$

A partir de esta ecuación una forma de proceder es

$$\langle \bar{p}' | J(x) | \bar{p}, \bar{k} \rangle_{im} = -i \int a^4 y \frac{\partial}{\partial y^0} \langle \bar{p}' | \left\{ \theta(x^0 - y^0) [J(x), \phi(y) \partial_0 f_k(y) - \partial_0 \phi(y) \dot{f}_k(y)] \right\} | \bar{p} \rangle =$$

$$= -i \int a^4 y \langle \bar{p}' | \left\{ \theta(x^0 - y^0) J(x) \phi(y) \partial_0 \partial^0 f_k(y) - \theta(x^0 - y^0) J(x) \partial^0 \partial_0 \phi(y) f_k(y) \right.$$

$$\left. - \theta(x^0 - y^0) \phi(y) \partial^0 \partial_0 f_k(y) J(x) - \theta(x^0 - y^0) \partial_0 \partial^0 \phi(y) f_k(y) J(x) - \delta(x^0 - y^0) [J(x), \phi(y)] \partial_0 f_k(y) \right.$$

$$\left. + \delta(x^0 - y^0) [J(x), \dot{\phi}(y)] f_k(y) \right\} | \bar{p} \rangle =$$

$$= -i \int a^4 y \langle \bar{p}' | \left\{ -R(J(x) J(y)) f_k(y) + \delta(x^0 - y^0) [J(x), \dot{\phi}(y)] f_k(y) \right.$$

$$\left. - \delta(x^0 - y^0) [J(x), \phi(y)] \partial_0 f_k(y) \right\} | \bar{p} \rangle \quad (3)$$

El segundo de estos conmutadores es nulo en general pues la corriente no suele contener derivadas de los campos, pero el primero no es en general nulo. En los casos normales todo este término es proporcional a $\delta^{(4)}(x-y)$ y su contribución a S_{fi} es un polo de la función ω . p y p' (teniendo en cuenta que $k-k' = p'-p$). Después de este momento este término

$$S_{fi} = \delta_{fi} - \int d^4x \int d^4y f_{k'}^*(x) \langle \bar{p}' | R(J(x) J(y)) | \bar{p} \rangle f_k(y) \quad (1)$$

Un procedimiento alternativo es partir de (5.2) con $J(x) \equiv (\square_x + m^2) \phi(x)$ y proceder de forma análoga y así se obtiene, despreciando contribuciones que solo intervienen en scattering elástico hacia adelante, la expresión

$$S_{fi} = \delta_{fi} - \int d^4x \int d^4y f_{k'}^*(x) f_k(y) (\square_x + m^2) (\square_y + m^2) \langle \bar{p}' | R(\phi(x) \phi(y)) | \bar{p} \rangle \quad (2)$$

que es esencialmente la fórmula escrita en primera vez por F.E. Low (Phys. Rev. 97, 1392 (1955)) y H. Lehmann, K. Symanzik y W. Zimmermann (Nuovo Giom. 1, 205 (1955))

Partiendo de (2) podemos continuar el proceso y escribir

$$\langle \bar{p}' \bar{k}' | \bar{p} \bar{k} \rangle_{in} = {}_{in} \langle \bar{p}' \bar{k}' | \bar{p} \bar{k} \rangle_{in} + \int d^4x_1 \dots d^4x_4 f_{p'}^*(x_1) f_{k'}^*(x_2) f_k(x_3) f_p(x_4) (\square_1 + m^2) \dots (\square_4 + m^2) \langle 0 | R(\phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) \phi(x_4)) | 0 \rangle \quad (3)$$

donde

$$R(\phi(x_1) \phi(x_2) \dots \phi(x_m)) \equiv \sum_P \theta(x - x_{p1}) \theta(x_{p1} - x_{p2}) \dots \theta(x_{p(m-1)} - x_{pm}) [\dots [[\phi(x), \phi(x_{p1})], \phi(x_2)] \dots \phi(x_m)] \quad (4)$$

donde la suma se extiende a todas las permutaciones posibles.

Como es usual definimos la matriz T como

$$S_{fi} = \delta_{fi} - i (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' + k' - p - k) T_{fi} \quad (5)$$

y entonces

$$\begin{aligned} -i (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' + k' - p - k) T_{fi} &= - \int d^4x d^4y f_{k'}^*(x) \langle \bar{p}' | R(J(x) J(y)) | \bar{p} \rangle f_k(y) \\ &+ \int d^4x d^4y f_{k'}^*(x) \langle \bar{p}' | \delta(x^0 - y^0) [J(x), \phi(y)] | \bar{p} \rangle f_k(y) \\ &- \int d^4x d^4y f_{k'}^*(x) \langle \bar{p}' | \delta(x^0 - y^0) [J(x), \phi(y)] | \bar{p} \rangle f_k(y) \end{aligned} \quad (6)$$

Usemos ahora la invariancia traslacional. Entonces

$$\begin{aligned}
 & - \int d^4x d^4y e^{i k' x} e^{-i k y} \langle \vec{p}' | R (J(x) J(y)) | \vec{p} \rangle = \\
 & = - \int d^4x d^4y e^{i k' x} e^{-i k y} \langle \vec{p}' | e^{+i p y} e^{-i p y} R (J(x) J(y)) e^{+i p y} e^{-i p y} | \vec{p} \rangle = \\
 & = - \int d^4x d^4y e^{i k' x} e^{-i (k+p-p') y} \langle \vec{p}' | \theta(x^0-y^0) [J(x-y), J(0)] | \vec{p} \rangle = \\
 & = - \int d^4x d^4y e^{i k' (x-y)} e^{-i (k+p-k'-p') y} \langle \vec{p}' | R (J(x-y) J(0)) | \vec{p} \rangle = \\
 & = - (2\pi)^4 \delta(k+p-p'-k') \int d^4x e^{i k' x} \langle \vec{p}' | R (J(x) J(0)) | \vec{p} \rangle
 \end{aligned}$$

y en tanto

$$\begin{aligned}
 T_{fi} & = -i \int d^4x e^{i k' x} \langle p' | R (J(x) J(0)) | \vec{p} \rangle \\
 & + i \int d^4x e^{i k' x} \langle \vec{p}' | \delta(x^0) [J(x), \tilde{\phi}(0)] | \vec{p} \rangle \\
 & - i \int d^4x e^{i k' x} \langle \vec{p}' | \delta(x^0) [J(x), \phi(0)] | \vec{p} \rangle \quad \text{Veo} \tag{1}
 \end{aligned}$$

Ya hemos dicho antes que el último término no suele contribuir. En el segundo término el conmutador es proporcional, usualmente, a $\delta(\vec{x})$ y en tanto es independiente de \vec{k} y \vec{k}' . Si el conmutador tiene derivadas de $\delta(\vec{x})$ entonces su contribución es un polinomio en k' con coeficientes que dependan de p y p' .

Tengamos en cuenta que el primer término de (1) puede escribirse, si se desea, de una forma más simétrica y lo mismo para el segundo y tercer

$$\begin{aligned}
 T_{fi} & = -i \int d^4x e^{i \frac{k+k'}{2} \cdot x} \langle \vec{p}' | R (J(\frac{x}{2}), J(-\frac{x}{2})) | \vec{p} \rangle \tag{2} \\
 & + i \int d^4x e^{i \frac{k+k'}{2} \cdot x} \langle \vec{p}' | \delta(x^0) [J(\frac{x}{2}), \tilde{\phi}(-\frac{x}{2})] | \vec{p} \rangle \\
 & - i \int d^4x e^{i \frac{k+k'}{2} \cdot x} \langle \vec{p}' | \delta(x^0) [J(\frac{x}{2}), \phi(-\frac{x}{2})] | \vec{p} \rangle
 \end{aligned}$$

El problema más simple a analizar usando relaciones de dispersión es el de colisiones hacia adelante. En este caso la matriz T es función únicamente de una variable que tomaremos como

$$v = \frac{1}{M} (k \cdot p) \quad (1)$$

Supondremos que los estados con momentos k y k' tienen masa m y los de momentos p y p' tienen masa M . Suponiendo $p^0 = (M, 0)$ entonces $v = k^0$. Supondremos que el último término de (8.1) no contribuye y que el segundo es a lo sumo una constante o un polinomio en k^0 . Es inmediato darse cuenta que los coeficientes de este polinomio deben ser reales

$$T_{fi}^* = i \int d^4x e^{-i k \cdot x} \langle \bar{p} | \delta(x^0) [J(x), \phi(0)] | \bar{p} \rangle = T_{fi} \quad (2)$$

Olvidándonos, por el momento, de esta posible contribución polinómica tomemos que en el sistema de referencia en el que el blanco está en reposo y la colisión es hacia adelante

$$T(k_0) = -i \int d^4x e^{i k \cdot x} \langle p | R(J(x) J(0)) | p \rangle \quad (3)$$

En principio parece que T deba ser función tanto de k_0 como de \vec{k} . Esto no es cierto físicamente en el sistema en el que el blanco está en reposo y se discute matemáticamente del hecho de que el elemento de matriz en (3) es función únicamente de x^0 y \vec{x}^2 . Tengamos además en cuenta que

$$T^*(k_0) = -i \int d^4x e^{-i k \cdot x} \langle p | R(J(x) J(0)) | p \rangle \quad (4)$$

y como el resultado no puede depender de la dirección de \vec{k} se obtiene la importante relación

$$T(-k_0) = T^*(k_0) \quad (\text{Relación de cruz}) \quad (5)$$

Escribamos

$$\theta(x^0) \equiv \frac{1}{2} [1 + \epsilon(x^0)] \quad (6)$$

entonces

$$T(k_0) = D(k_0) + i A(k_0)$$

$$D(k_0) \equiv -\frac{i}{2} \int d^4x e^{i k \cdot x} \langle p | \epsilon(x^0) [J(x), J(0)] | p \rangle \quad (\text{Parte dispersiva}) \quad (7)$$

$$A(k_0) \equiv -\frac{1}{2} \int d^4x e^{i k \cdot x} \langle p | [J(x), J(0)] | p \rangle \quad (\text{Parte absorbente})$$

Es inmediato ver que ambas son reales

$$\begin{aligned}
 D^*(k_0) &= + \frac{i}{2} \int d^4x e^{-i k \cdot x} \langle p | \epsilon(x^0) [J(0), J(x)] | p \rangle = \\
 &= \frac{i}{2} \int d^4x e^{-i k \cdot x} \langle p | \epsilon(x^0) e^{-i p \cdot x} e^{i p \cdot x} [J(0), J(x)] e^{-i p \cdot x} e^{i p \cdot x} | p \rangle = \\
 &= \frac{i}{2} \int d^4x e^{-i k \cdot x} \langle p | \epsilon(x^0) [J(-x), J(0)] | p \rangle = \\
 &= \frac{i}{2} \int d^4x e^{+i k \cdot x} \langle p | \epsilon(-x^0) [J(x), J(0)] | p \rangle = D(k_0) \quad (1)
 \end{aligned}$$

Como el valor esperado en (9.3) es esfericamente simetrico podemos integrar fuil- mente sobre angulos

$$\begin{aligned}
 T(k_0) &= -i \int_{-\infty}^{+\infty} dx^0 \int_0^{\infty} dr r^2 \int_{-1}^{+1} d\mu \int_0^{2\pi} d\phi e^{i k_0 x_0} e^{-i \sqrt{k_0^2 - m^2} r \mu} \langle p | \theta(x^0) [J(x), J(0)] | p \rangle \Rightarrow \\
 T(k_0) &= \int_0^{\infty} dr T(k_0, r) \quad (2)
 \end{aligned}$$

$$T(k_0, r) = -i 4\pi \frac{\sin(\sqrt{k_0^2 - m^2} r)}{\sqrt{k_0^2 - m^2}} r \int_{-\infty}^{+\infty} dx^0 e^{i k_0 x_0} \langle p | \theta(x^0) [J(x), J(0)] | p \rangle$$

El limite inferior de la integral no es $-\infty$ pues $\theta(x^0)$ lo limite a $(0, \infty)$. Mas aun la microcausalidad implica que el integrando se anula para $x_0 < r$. Si nos olvidamos de una posible contribucion de una funcion delta para $x_0 = r$ la dependencia de $T(k_0, r)$ en k_0 es

$$\frac{\sin(\sqrt{k_0^2 - m^2} r)}{\sqrt{k_0^2 - m^2}} e^{i k_0 x_0} \quad x_0 > r \quad (3)$$

Entonces $T(k_0, r)$ considerada como funcion de la variable compleja k_0 es una funcion analitica en todo el semiplano superior y se anula en el infinito por lo cual podemos escribir una relacion de dispersion

$$T(k_0, r) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk'_0 \frac{A(k'_0, r)}{k'_0 - k_0 - i\eta} \quad , \quad \eta \neq 0 \quad (4)$$

Donde $A(k_0, r)$ y $A(k_0)$ estan relacionadas de la misma forma que $T(k_0)$ y $T(k_0, r)$ (ver (2))

Para obtener la relacion de dispersion deseada abemos sustituir (4) en (2) y cui resulta

$$T(k_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dr \int_{-\infty}^{+\infty} dk_0' \frac{A(k_0', r)}{k_0' - k_0 - i\eta} \quad (1)$$

o equivalentemente

$$T(k_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dr \left\{ \int_{-\infty}^{-m} + \int_{-m}^{+m} + \int_m^{\infty} \right\} dk_0' \frac{A(k_0', r)}{k_0' - k_0 - i\eta} \quad (2)$$

donde

$$A(k_0, r) = -2\pi r \frac{\sin kr}{k} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 e^{ik_0 x_0} \langle p | [J(x), J(0)] | p \rangle, \quad k \equiv \sqrt{k_0^2 - m^2} \quad (3)$$

En la región $k_0^2, k_0'^2 > m^2$ los caminos de integración pueden intercambiarse y obtenere

$$T(k_0) = U(k_0) + \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\infty}^{-m} + \int_m^{\infty} \right) dk_0' \frac{A(k_0')}{k_0' - k_0 - i\eta} \quad (4)$$

$$U(k_0) \equiv \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dr \int_{-m}^{+m} dk_0' \frac{A(k_0', r)}{k_0' - k_0 - i\eta}$$

La forma standard de dispersión $U(k_0)$ es considerar $A(k_0, r)$ dado en (4) y usar un conjunto completo de estados intermedios

$$\begin{aligned} A(k_0, r) &= -2\pi r \frac{\sin kr}{k} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 e^{ik_0 x_0} \sum_m \left\{ \langle p | J(x) | m \rangle \langle m | J(0) | p \rangle - \langle p | J(0) | m \rangle \langle m | J(x) | p \rangle \right\} = \\ &= -2\pi r \frac{\sin kr}{k} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 e^{ik_0 x_0} \sum_m \left\{ \langle p | e^{iBx} J(0) e^{-iBx} | m \rangle \langle m | J(0) | p \rangle - \langle p | J(0) | m \rangle \langle m | e^{iBx} J(x) e^{-iBx} | p \rangle \right\} = \\ &= -2\pi r \frac{\sin kr}{k} \sum_m \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 e^{ik_0 x_0} \left\{ e^{i(p-p_m)x} - e^{-i(p-p_m)x} \right\} |\langle m | J(0) | p \rangle|^2 \end{aligned}$$

Como $\vec{p} = 0$ no puede haber una dirección preferida para \vec{x} y podemos sustituir las partes exponenciales de las integrales por sus promedios sobre todos los ángulos

$$e^{+i\vec{p}\cdot\vec{x}} \rightarrow \frac{1}{4\pi} \int d\hat{p} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} dp e^{ipr} p^2 = \frac{\sin pr}{pr}$$

y por tanto

$$A(k_0, r) = -2\pi \frac{\sin kr}{k} \sum_m \frac{\sin p_m r}{p_m} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 e^{ik_0 x_0} \left\{ e^{i(p_0 - p_m)x_0} - e^{-i(p_0 - p_m)x_0} \right\} |\langle m | J(0) | p \rangle|^2 \Rightarrow$$

$$A(k_0, r) = -4\pi^2 \frac{\sin kr}{k} \sum_m \frac{\sin p_m r}{p_m} |\langle m | J(0) | p \rangle|^2 \left\{ \delta(k_0 + m - p_m) - \delta(k_0 - m + p_m) \right\} \quad (5)$$

i) Consideremos que las cuatro partículas sean mesones pseudoescalares de igual masa ($M=m$). En este caso el enumerar los estados $|m\rangle$ el de menor masa es el estado con un meson. La primera función δ contribuirá a una integral sobre k_0 para todos los $k_0 > 0$ mientras que la segunda contribuirá para $k_0 < 0$. Esto en la hipótesis de que $\langle p | T(0) | m \rangle \neq 0$, por la paridad y conservación del momento angular nos aseguran que $\langle p | T(0) | m \rangle \equiv 0$ y en tanto el estado de menor masa es el de dos partículas pseudoescalares $p_{\text{mín}} > 2m$ y en tanto $A(k_0, r) \neq 0$ solo para $k_0^2 > m^2$ y se tiene que $U(k_0) \equiv 0$. Por otra parte la relación de cruz nos dice que $A(k_0) = -A(-k_0)$ y se puede escribir

$$\begin{aligned} T(k_0) &= \frac{1}{\pi} \int_m^{\infty} dk_0' \frac{A(k_0')}{k_0' - k_0 - i\eta} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-m} dk_0' \frac{A(k_0')}{k_0' - k_0 - i\eta} = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_m^{\infty} dk_0' \frac{A(k_0')}{k_0' - k_0 - i\eta} - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-m} dk_0' \frac{A(k_0')}{k_0' - k_0 - i\eta} = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_m^{\infty} dk_0' \frac{A(k_0')}{k_0' - k_0 - i\eta} + \frac{1}{\pi} \int_m^{\infty} dk_0' \frac{A(k_0')}{k_0' + k_0 + i\eta} = \frac{2}{\pi} \int_m^{\infty} dk_0' \frac{k_0' A(k_0')}{k_0'^2 - k_0^2 - i\eta} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$T(k_0) = \frac{2}{\pi} \int_m^{\infty} dk_0' \frac{k_0' A(k_0')}{k_0'^2 - k_0^2 - i\eta}, \quad k_0^2 > m^2 \quad (4)$$

que es la relación de dispersión deseada.

Por otra parte de $SS^\dagger = I$ se deduce que

$$(I - iT)(I + iT) = I \Rightarrow -iT + iT^\dagger = -TT^\dagger \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -i(2\pi)^4 \delta(p'+k'-p-k) \langle p'k' | T | pk \rangle + i(2\pi)^4 \delta(p'+k'-p-k) \langle p'k' | T^\dagger | pk \rangle =$$

$$= - (2\pi)^4 (2\pi)^4 \sum_m \langle p'k' | T | m \rangle \delta(p'+k'-p_m) \langle m | T^\dagger | pk \rangle \delta(p+k-p_m) \Rightarrow$$

$$i \langle p'k' | T^\dagger | pk \rangle - i \langle p'k' | T | pk \rangle = - (2\pi)^4 \sum_m \delta(p+k-p_m) \langle p'k' | T | m \rangle \langle m | T^\dagger | pk \rangle$$

y para colisiones elásticas hacia adelante

$$+ 2 \operatorname{Im} \langle pk | T | pk \rangle = - (2\pi)^4 \sum_m \delta(p+k-p_m) |\langle m | T | pk \rangle|^2 =$$

$$= - (2\pi)^4 \sigma(s) 2 \lambda^{1/2}(s, m^2, m^2) \frac{1}{(2\pi)^4} \Rightarrow$$

$$A(k_0) = - 2m \sqrt{k_0^2 - m^2} \sigma(k_0)$$

y por tanto

$$T(k_0) = - \frac{4m}{\pi} \int_m^{\infty} dk'_0 \frac{k'_0 \sqrt{k_0'^2 - m^2} \sigma(k_0)}{k_0'^2 - k_0^2 - i\eta} \quad (1)$$

donde $\sigma(k_0)$ es la sección eficaz total para este proceso.

(ii) Consideremos ahora el caso de partículas escalares de igual masa. En este caso $\langle p | J_0 | 1, m \rangle \neq 0$ y $U(k_0) \neq 0$. En este caso no podemos intercambiar los ordenes de integración en (11.4) ya que para $|k_0| < m$, el momento $k \equiv \sqrt{k_0^2 - m^2}$ es imaginario. Esto significa que en (11.5) $\sinh kr/k \rightarrow \sinh(kr/k)$ y la integral diverge. Si bien hay formas rigurosas de solucionar el problema dejando de lado la precaución y si bien intercambiamos los ordenes de integración

$$U(k_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\mu}^{+\mu} dk'_0 \frac{A(k'_0)}{k_0'^2 - k_0^2 - i\eta} \quad (2)$$

con

$$A(k_0) = - \frac{1}{2} \int d^4x e^{ikx} \sum_m [\langle p | J(x) | m \rangle \langle m | J_0 | p \rangle - \langle p | J_0 | m \rangle \langle m | J(x) | p \rangle] =$$

$$= - \frac{1}{2} \int d^4x e^{ikx} \sum_m \left\{ e^{i(p-p_m)x} - e^{-i(p-p_m)x} \right\} |\langle m | J_0 | p \rangle|^2 \Rightarrow$$

$$A(k_0) = - \frac{1}{2} (2\pi)^4 \sum_m \left\{ \delta(\vec{k} - \vec{p}_m) \delta(k_0 + m - p_{m0}) - \delta(\vec{k} + \vec{p}_m) \delta(k_0 - m + p_{m0}) \right\} |\langle m | J_0 | p \rangle|^2 \quad (3)$$

Como estamos interesados en $A(k_0)$ para $k_0^2 < m^2$ solo los estados de una partícula pueden contribuir a esta suma

$$A(k_0) = - \frac{1}{2} (2\pi)^4 \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p_m}{2E(p_m)} \left\{ \delta(\vec{k} - \vec{p}_m) \delta(k_0 + m - p_{m0}) - \delta(\vec{k} + \vec{p}_m) \delta(k_0 - m + p_{m0}) \right\} |\langle m | J_0 | p \rangle|^2 \Rightarrow$$

$$A(k_0) = - \frac{\pi}{2E(p_m)} \left\{ |\langle p | J_0 | 1, m' \rangle|^2 \delta(k_0 + m - p_{m0}) - |\langle p | J_0 | 1, m \rangle|^2 \delta(k_0 - m + p_{m0}) \right\} \quad (4)$$

donde m' tiene un momento $\vec{p}_{m'} = \vec{k}$ y m un momento $\vec{p}_m = -\vec{k}$ y $E(p_m) = p_{m0} = \sqrt{k^2 + m_m^2} = \sqrt{k_0^2 - m^2 + m_m^2}$ como

$$\delta(k_0 + m - p_{m0}) = \frac{p_{m0}}{m} \delta(k_0 + k_0) \quad , \quad \delta(k_0 - m + p_{m0}) = \frac{p_{m0}}{m} \delta(k_0 - k_0) \quad (5)$$

$$k_0 = \frac{1}{2m} (m^2 + m_m^2 - m^2)$$

y en tanto

$$A(k_0) = -\frac{\eta}{2m} \left\{ |\langle m' | J(0) | p \rangle|^2 \delta(k_0 + k_E) - |\langle m | J(0) | p \rangle|^2 \delta(k_0 - k_E) \right\} \quad (1)$$

como además suponemos $m_m = m$ entonces $k_E = m/2$. En la región no física toda hay dos contribuciones distintas a $A(k_0)$. Además la relación de crossing implica que $A(k_0) = -A(-k_0)$ y en tanto $|\langle m' | J(0) | p \rangle|^2 = |\langle m | J(0) | p \rangle|^2$. Finalmente la simetría implica

$$\langle p | J(0) | m \rangle \equiv m F((p - p_m)^2) \quad (2)$$

donde $F(q^2)$ es una función invariante Lorentz adimensional. Entonces como para los dos elementos que aparecen en (1) $(p - p_m)^2 = m^2$ se obtiene

$$A(k_0) = -\frac{\eta m}{2} |F(m^2)|^2 \left\{ \delta(k_0 + m/2) - \delta(k_0 - m/2) \right\} \quad (3)$$

La función $F(q^2)$ evaluada en $q^2 = m^2$ es solo una constante y definiremos la constante de acoplamiento como

$$g^2 \equiv |F(m^2)|^2 \quad (4)$$

cuyo valor debe ser tomado de los experimentos. La única duda es si $F(m^2)$ existe. El quid de la cuestión es que para estados físicos $F(q^2)$ está definido para $q^2 < 0$, y en tanto \times debe extenderse al dominio no físico $q^2 > 0$. Para saber si esto es posible \times deben estudiarse las condiciones de analiticidad de $F(q^2)$. Supondremos que esto es posible y así obtenemos

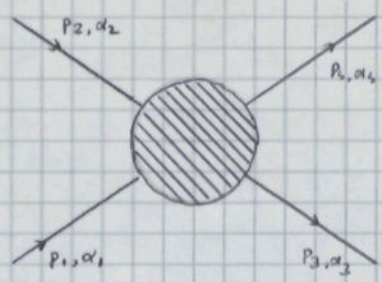
$$U(k_0) = -\frac{g^2 m^2}{2} \frac{1}{k_0^2 - m^2/4} \quad (5)$$

y podemos escribir la ecuación de dispersión

$$T(k_0) = -\frac{g^2 m^2}{2} \frac{1}{k_0^2 - m^2/4} + \frac{2}{\eta} \int_m^\infty dk_0' \frac{k_0' A(k_0')}{k_0'^2 - k_0^2 - i\eta} \quad (6)$$

$T(k_0)$ viene representada como una función que es analítica en el semiplano superior con polos en $k_0 = \pm m/2$ y cortes en $-\infty < k_0 < -\mu$, $\mu < k_0 < \infty$.

XXVI-A- COLISION PION - PION



$p_i^2 = m^2, i=1,2,3,4, \alpha_i=1,2,3$

$s \equiv (p_1 + p_2)^2$

$t \equiv (p_1 - p_3)^2$

$u \equiv (p_1 - p_4)^2$

$s + t + u = 4m^2$

Se tiene que la amplitud más general posible es

$$\langle p_3 \alpha_3; p_4 \alpha_4 | T | p_1 \alpha_1; p_2 \alpha_2 \rangle = A_1(s, t, u) \delta_{\alpha_1 \alpha_2} \delta_{\alpha_3 \alpha_4} +$$

$$+ A_2(s, t, u) \delta_{\alpha_1 \alpha_3} \delta_{\alpha_2 \alpha_4} + A_3(s, t, u) \delta_{\alpha_1 \alpha_4} \delta_{\alpha_2 \alpha_3} \quad (1)$$

Estas amplitudes invariantes $A_i(s, t, u)$ no son arbitrarias pues están relacionadas por igualdades de cruce.

I) Intercambio $2 \leftrightarrow 3 : s \leftrightarrow t \Rightarrow A_1(s, t, u) = A_2(t, s, u)$ (2)

$A_3(s, t, u) = A_3(t, s, u)$

II) Intercambio $2 \leftrightarrow 4 : s \leftrightarrow u \Rightarrow A_1(s, t, u) = A_3(u, t, s)$ (3)

$A_2(s, t, u) = A_2(u, t, s)$

III) Intercambio $3 \leftrightarrow 4 : t \leftrightarrow u \Rightarrow A_1(s, t, u) = A_1(s, u, t)$ (4)

$A_2(s, t, u) = A_3(s, u, t)$

Definimos ahora $M_T^{(r)}(s, t, u)$ como la amplitud de isospin T en el canal r . Los estados $|T T_3\rangle$ pueden escribirse en términos de los $|i\rangle |j\rangle \equiv |ij\rangle$ como

$$|100\rangle = -\frac{1}{\sqrt{3}} (|111\rangle + |122\rangle + |133\rangle)$$

$$|110\rangle = +\frac{1}{\sqrt{2}} (|112\rangle - |121\rangle)$$

$$|120\rangle = -\frac{1}{\sqrt{6}} (|111\rangle + |122\rangle - 2|133\rangle)$$
(5)

De aquí

$$M_T^{(r)}(s, t, u) = \sum_{i=1}^3 \alpha_T^{(r)} A_i(s, t, u) \quad (6)$$

donde

$$\alpha^{(s)} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \alpha^{(t)} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \alpha^{(u)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (7)$$

Entonces

$$M_T^{(s)}(s, t, u) = \sum_{T'} [\alpha^{(s)} \alpha^{(t)-1}]_{TT'} M_{T'}^{(t)}(t, s, u)$$

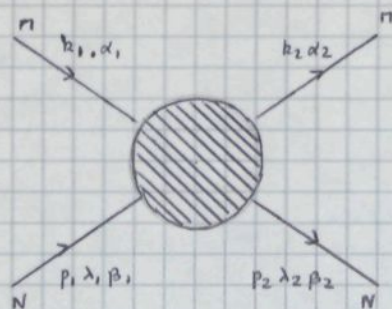
$$M_T^{(s)}(s, t, u) = \sum_{T'} [\alpha^{(s)} \alpha^{(u)-1}]_{TT'} M_{T'}^{(u)}(t, s, u)$$

$$M_T^{(t)}(s, t, u) = \sum_{T'} [\alpha^{(t)} \alpha^{(u)-1}]_{TT'} M_{T'}^{(u)}(s, u, t)$$

$$\alpha^{(s)} \alpha^{(t)-1} = \begin{vmatrix} 1/3 & 1 & 5/3 \\ 1/3 & 1/2 & -5/6 \\ 1/3 & -1/2 & 1/6 \end{vmatrix}, \quad \alpha^{(s)} \alpha^{(u)-1} = \begin{vmatrix} 1/3 & -1 & 5/3 \\ -1/3 & 1/2 & 5/6 \\ 1/3 & 1/2 & 1/6 \end{vmatrix}$$

$$\alpha^{(t)} \alpha^{(u)-1} = \begin{vmatrix} 1/3 & 1 & 5/3 \\ -1/3 & -1/2 & 5/6 \\ 1/3 & -1/2 & 1/6 \end{vmatrix}$$

XXXI - B - COLLISION PION-NUCLEON



$$k_i^2 = m^2, \quad p_i^2 = M^2$$

$$\alpha_i = 1, 2, 3; \quad \beta_i = 1, 2$$

$\lambda_i = \text{helices}$

Consideraremos la amplitud invariante T como una matriz 2×2 en el espacio de isospin de los nucleones

$$T \equiv \langle k_2, \alpha_2; p_2, \lambda_2, \beta_2 | T | k_1, \alpha_1; p_1, \lambda, \beta_1 \rangle = \\ = \bar{u}(p_2, \lambda_2, \beta_2) [A_{\alpha_2 \alpha_1}(s, t, u) + \gamma \cdot Q B_{\alpha_2 \alpha_1}(s, t, u)] u(p_1, \lambda, \beta_1) \quad (1)$$

donde hemos usado convención Lorentz y

$$Q \equiv \frac{1}{2} (k_1 + k_2)^\mu \quad (2)$$

Si $\bar{X} = A, B$ entonces

$$\bar{X}_{\alpha_2 \alpha_1} = \bar{X}^{(+)} \frac{1}{2} \{ \tau_{\alpha_2}, \tau_{\alpha_1} \} + \bar{X}^{(-)} \frac{1}{2} [\tau_{\alpha_2}, \tau_{\alpha_1}] = \\ = \bar{X}^{(+)} \delta_{\alpha_2 \alpha_1} + i \bar{X}^{(-)} \epsilon_{\alpha_2 \alpha_1 \lambda} \tau_\lambda \quad (3)$$

Escribiendo \bar{X} como una matriz en el espacio producto directo del isospin del nucleón y del pión y teniendo en cuenta que $(T_i)_{jk} = -i \epsilon_{ijk}$ entonces

$$\bar{X} = \bar{X}^{(+)} - \bar{X}^{(-)} \vec{\tau} \cdot \vec{T} \quad (4)$$

Notas que las proyectores en espacios de isospin tal bien definido son

$$P_{3/2} = \frac{1}{3} (2 + \vec{\tau} \cdot \vec{T}), \quad P_{1/2} = \frac{1}{3} (1 - \vec{\tau} \cdot \vec{T}) \quad (5)$$

$$\Rightarrow \bar{X} = \bar{X}^{(+)} [P_{3/2} + P_{1/2}] + \bar{X}^{(-)} [2P_{1/2} - P_{3/2}] \quad (6)$$

y por tanto las amplitudes con isospin bien definido son

$$\bar{X}_{3/2} = \bar{X}^{(+)} - \bar{X}^{(-)} \quad , \quad \bar{X}_{1/2} = \bar{X}^{(+)} + 2\bar{X}^{(-)}$$

(1)

$$\bar{X}^{(+)} = \frac{1}{3} (\bar{X}_{1/2} + 2\bar{X}_{3/2}) \quad , \quad \bar{X}^{(-)} = \frac{1}{3} (\bar{X}_{1/2} - \bar{X}_{3/2})$$

Todas estas amplitudes son funciones de dos de las tres variables de Mandelstam:

$$s \equiv (k_1 + p_1)^2 \quad , \quad t \equiv (k_1 - k_2)^2 \quad , \quad u \equiv (k_1 - p_2)^2 \quad , \quad s + t + u = 2M^2 + 2m^2 \quad (2)$$

En ocasiones es útil usar en lugar de (s, t) las variables (v, t) donde

$$v \equiv \frac{1}{M} (E \cdot Q) = \frac{1}{4m} (s - u) \quad , \quad \rho^M \equiv \frac{1}{2} (p_1 + p_2)^M \quad (3)$$

Por otra parte usando técnicas de reducción

$$\langle k_2 \alpha_2; p_2 \lambda_2 \beta_2 | T | k_1 \alpha_1; p_1 \lambda_1 \beta_1 \rangle = -i \int d^4x e^{i \frac{p_1 + p_2}{2} \cdot x} \langle p_2 \lambda_2 \beta_2 | R \left(J_{\alpha_2} \left(\frac{x}{2} \right), J_{\alpha_1} \left(-\frac{x}{2} \right) \right) | p_1 \lambda_1 \beta_1 \rangle \quad (4)$$

o donde

$$\begin{aligned} \langle k_2 \alpha_2; p_2 \lambda_2 \beta_2 | T | k_1 \alpha_1; p_1 \lambda_1 \beta_1 \rangle &= i \int d^4x e^{-i \frac{p_1 + p_2}{2} \cdot x} \langle p_2 \lambda_2 \beta_2 | R \left(J_{\alpha_2} \left(-\frac{x}{2} \right), J_{\alpha_1} \left(\frac{x}{2} \right) \right) | p_1 \lambda_1 \beta_1 \rangle \\ &= -i \int d^4x e^{-i \frac{p_1 + p_2}{2} \cdot x} \langle p_1 \lambda_1 \beta_1 | R \left(J_{\alpha_2} \left(\frac{x}{2} \right), J_{\alpha_1} \left(-\frac{x}{2} \right) \right) | p_2 \lambda_2 \beta_2 \rangle \end{aligned} \quad (5)$$

y comparando (4) y (5)

$$\langle k_2 \alpha_2; p_2 \lambda_2 \beta_2 | T | k_1 \alpha_1; p_1 \lambda_1 \beta_1 \rangle = \langle -k_2 \alpha_2; p_1 \lambda_1 \beta_1 | T | -k_1 \alpha_1; p_2 \lambda_2 \beta_2 \rangle^* \quad (6)$$

que es la propiedad de unitariedad. Entonces

$$\begin{aligned} \bar{u}(\vec{p}_2 \lambda_2 \beta_2) [A^{(+)}(v, t) \delta_{\alpha_2 \alpha_1} + i A^{(-)}(v, t) \epsilon_{\alpha_2 \alpha_1 \lambda} \tau_\lambda + \gamma Q B^{(+)}(v, t) \delta_{\alpha_2 \alpha_1} \\ + i \gamma Q B^{(-)}(v, t) \epsilon_{\alpha_2 \alpha_1 \lambda} \tau_\lambda] \bar{u}(p_1 \lambda_1 \beta_1) = \left\{ \bar{u}(p_1 \lambda_1 \beta_1) [A^{(+)}(-v, t) \delta_{\alpha_2 \alpha_1} + i A^{(-)}(-v, t) \epsilon_{\alpha_2 \alpha_1 \lambda} \tau_\lambda \right. \\ \left. + \gamma Q B^{(+)}(-v, t) \delta_{\alpha_2 \alpha_1} - i \gamma Q B^{(-)}(-v, t) \epsilon_{\alpha_2 \alpha_1 \lambda} \tau_\lambda] u(\vec{p}_2 \lambda_2 \beta_2) \right\}^* = \end{aligned}$$

$$= \bar{u}(p_2, \lambda_2, p_z) \left\{ A^{(+)*}(-v, t) \delta_{\alpha_2 \alpha_1} - i A^{(-)*}(-v, t) \epsilon_{\alpha_2 \alpha_1 \lambda} \tau_\lambda \right. \\ \left. - \gamma(Q) B^{(+)*}(-v, t) \delta_{\alpha_2 \alpha_1} + i \gamma(Q) B^{(-)*}(-v, t) \epsilon_{\alpha_2 \alpha_1 \lambda} \tau_\lambda \right\} u(p_1, \lambda_1, \beta_1) \quad (1)$$

de donde

$$A^{(+)}(v, t) = + A^{(+)*}(-v, t) \quad , \quad A^{(-)}(v, t) = - A^{(-)*}(-v, t) \\ B^{(+)}(v, t) = - B^{(+)*}(-v, t) \quad , \quad B^{(-)}(v, t) = + B^{(-)*}(-v, t) \quad (2)$$

que son las propiedades de fase para las amplitudes pión-nucleón.

Recordemos que los estados de isospin bien definidos son

$$|3/2, 3/2\rangle = |11\rangle |1/2, 1/2\rangle = -|10^+\rangle |1/2, 1/2\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} |11, 1/2\rangle + i |12, 1/2\rangle \quad]$$

$$|1/2, 1/2\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} |11\rangle |1/2, -1/2\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} |110\rangle |1/2, -1/2\rangle =$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{3}} |10^+\rangle |1/2, -1/2\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} |10^0\rangle |1/2, -1/2\rangle =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ + |11, -1/2\rangle + i |12, -1/2\rangle + |13, 1/2\rangle \right\}$$

De donde

$$T^{(3/2)} = \frac{1}{2} \left\{ \langle k_2, 1; p_2, \lambda_2 | T | k_1, 1; p_1, \lambda_1 \rangle + i \langle k_2, 1; p_2, \lambda_2 | T | k_2, 2; p_1, \lambda_1 \rangle \right. \\ \left. - i \langle k_2, 2; p_2, \lambda_2 | T | k_1, 1; p_1, \lambda_1 \rangle + \langle k_2, 2; p_2, \lambda_2 | T | k_2, 2; p_1, \lambda_1 \rangle \right\}$$

$$T^{(1/2)} = \frac{1}{3} \left\{ \langle k_2, 1; p_2, \lambda_2 - 1 | T | k_1, 1; p_1, \lambda_1 - 1 \rangle + i \langle k_2, 1; p_2, \lambda_2 - 1 | T | k_2, 2; p_1, \lambda_1 - 1 \rangle + \right.$$

$$+ \langle k_2, 1; p_2, \lambda_2 - 1 | T | k_2, 3; p_1, \lambda_1, 1 \rangle - i \langle k_2, 2; p_2, \lambda_2 - 1 | T | k_1, 1; p_1, \lambda_1 - 1 \rangle$$

$$+ \langle k_2, 2; p_2, \lambda_2 - 1 | T | k_2, 2; p_1, \lambda_1 - 1 \rangle - i \langle k_2, 2; p_2, \lambda_2 - 1 | T | k_2, 3; p_1, \lambda_1, 1 \rangle$$

$$+ \langle k_2, 3; p_2, \lambda_2 | T | k_1, 1; p_1, \lambda_1 - 1 \rangle + i \langle k_2, 3; p_2, \lambda_2 | T | k_2, 2; p_1, \lambda_1 - 1 \rangle$$

$$\left. + \langle k_2, 3; p_2, \lambda_2 | T | k_2, 3; p_1, \lambda_1, 1 \rangle \right\}$$

de donde

$$T^{(3/2)} = \bar{u}(\vec{p}_2, \lambda_2) \left\{ [A^{(+)} - A^{(-)}] + \gamma \cdot \vec{Q} [B^{(+)} - B^{(-)}] \right\} u(\vec{p}_1, \lambda_1) \quad (1)$$

$$T^{(1/2)} = \bar{u}(\vec{p}_2, \lambda_2) \left\{ [A^{(+)} + 2A^{(-)}] + \gamma \cdot \vec{Q} [B^{(+)} + 2B^{(-)}] \right\} u(\vec{p}_1, \lambda_1)$$

De acuerdo con (2.4). Entonces para estados de isospin bien definidos tenemos

$$T^{(\tau)}(k_2, p_2, \lambda_2; k_1, p_1, \lambda_1) = \bar{u}(p_2, \lambda_2) [A_T(v, t) + \vec{\gamma} \cdot \vec{Q} B_T(v, t)] u(\vec{p}_1, \lambda_1) \quad (2)$$

y usando el formalismo de Dirac:

$$T^{(\tau)}(k_2, p_2, \lambda_2; k_1, p_1, \lambda_1) = [E(p_1) + M]^{1/2} [E(p_2) + M]^{1/2} \alpha^+(\hat{p}_2, \lambda_2) \left\{ A_T + Q^0 B_T \right.$$

$$- \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{Q}) (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1)}{E(p_1) + M} B_T - \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_2) (\vec{\sigma} \cdot \vec{Q})}{E(p_2) + M} B_T - \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_2) (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1)}{E(p_2) + M} A_T +$$

$$\left. + Q^0 \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_2) (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1)}{E(p_2) + M} B_T \right\} \alpha(\vec{p}_1, \lambda_1) \quad (3)$$

En el sistema C.M.

$$\vec{p}_1 = -\vec{k}_1, \quad \vec{p}_2 = -\vec{k}_2, \quad |\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| = |\vec{k}_1| = |\vec{k}_2| = \frac{1}{2\sqrt{s}} \lambda^{1/2}(s, M^2, m^2)$$

$$E(p_1) = E(p_2) = \frac{1}{2\sqrt{s}} (s + M^2 - m^2) \equiv E, \quad E(k_1) = E(k_2) = \frac{1}{2\sqrt{s}} (s + m^2 - M^2) \quad (4)$$

$$Q^0 = \frac{1}{2\sqrt{s}} (s + m^2 - M^2)$$

obtenemos

$$T^{(\tau)}(k_2, p_2, \lambda_2; k_1, p_1, \lambda_1) = \alpha^+(\hat{p}_2, \lambda_2) \left\{ (E + M) [A_T(v, t) + (\sqrt{s} - M) B_T(v, t)] \right. \\ \left. + (E - M) [-A_T(v, t) + (\sqrt{s} + M) B_T(v, t)] (\vec{\sigma} \cdot \hat{k}_2) (\vec{\sigma} \cdot \hat{k}_1) \right\} \alpha(\vec{p}_1, \lambda_1) \quad (5)$$

Usando

$$\hat{k}_1 = (0, 0, 1), \quad \hat{k}_2 = (\sin \theta, 0, \cos \theta)$$

e introduciendo

$$\begin{cases} \psi_1^{(T)}(s, t) \equiv (E + M) [A_T + B_T (\sqrt{s} - M)] \\ \psi_2^{(T)}(s, t) \equiv (E - M) [-A_T + B_T (\sqrt{s} + M)] \end{cases} \quad (1)$$

$$T^{(T)}(k_2; p_2, \lambda_2; k_1; p_1, \lambda_1) \equiv \langle \lambda_2 | T^{(T)}(s, t) | \lambda_1 \rangle$$

EnGma

$$\langle + | T^{(T)}(s, t) | + \rangle = \langle - | T^{(T)}(s, t) | - \rangle = [f_1^{(T)}(s, t) + f_2^{(T)}(s, t)] \cos \frac{\theta}{2} \quad (2)$$

$$\langle + | T^{(T)}(s, t) | - \rangle = - \langle - | T^{(T)}(s, t) | + \rangle = [f_1^{(T)}(s, t) - f_2^{(T)}(s, t)] \sin \frac{\theta}{2}$$

Per otra part de secció diferencial total (X-49.3)

$$\left. \frac{d\sigma_T}{d\Omega} \right|_{CM} = \sum_{\lambda_1} \sum_{\lambda_2} |\langle \lambda_2 | T^{(T)}(s, t) | \lambda_1 \rangle|^2 = \frac{1}{64\pi^2 s} \quad (3)$$

$$= \frac{1}{64\pi^2 s} \left\{ |f_1^{(T)}(s, t)|^2 + |f_2^{(T)}(s, t)|^2 + 2 \operatorname{Re} [f_1^{(T)}(s, t) f_2^{(T)*}(s, t)] \cos \theta \right\}$$

XXIII - c - RELACIONES DE DISPERSION

Consideremos un sistema con respuesta lineal, es decir que la señal de entrada $E(t)$ y la respuesta $R(t)$ están relacionadas en la forma

$$R(t) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau G(t, \tau) E(\tau) \quad (1)$$

Si suponemos que el sistema es invariante bajo traslaciones temporales, entonces (1) se escribe en la forma

$$R(t) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau G(t-\tau) E(\tau) \quad (2)$$

Definiremos la transformada de Fourier de una función $X(t)$ como

$$\hat{X}(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega t} X(t) \quad \Rightarrow \quad X(t) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega t} \hat{X}(\omega) \quad (3)$$

Con lo cual (2) se puede escribir, en términos de sus transformadas de Fourier, como

$$\hat{R}(\omega) = \hat{G}(\omega) \hat{E}(\omega) \quad (4)$$

Prueba:
$$\hat{R}(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega t} R(t) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau G(t-\tau) E(\tau) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega'' e^{i\omega t} e^{-i\omega'(t-\tau)} e^{-i\omega''\tau} \hat{G}(\omega') \hat{E}(\omega'') =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega'' \delta(\omega - \omega') \delta(\omega - \omega'') \hat{G}(\omega') \hat{E}(\omega'') = \hat{G}(\omega) \hat{E}(\omega) \quad \text{Q. E. D.}$$

Nosotros estaremos interesados en sistemas causales, esto es sistemas en los que la respuesta $R(t)$ depende exclusivamente de $E(\tau)$ para $\tau \leq t$, o equivalentemente

$$G(t) = 0 \quad \text{si} \quad t \leq 0 \quad (5)$$

Para ellos (2) se reduce a

$$R(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t d\tau G(t-\tau) E(\tau) \quad (6)$$

En este caso $\hat{G}(w)$ puede escribirse como

$$\hat{G}(w) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^{\infty} dt e^{iwt} G(t) \quad (1)$$

A partir de ahora nos limitaremos al estudio de sistemas causales y nuestro objetivo será dar algunas propiedades de interés para la $\hat{G}(w)$ definida en la ecuación (1). Es evidente que si $\hat{G}(w)$ existe para w real, también existirá para w complejo si $\text{Im } w > 0$ y por tanto podemos usar la representación (1) para extender $\hat{G}(w)$ al plano superior complejo.

Antes de empezar deseamos introducir algunas distribuciones. Definiremos la distribución paso $\Theta(t)$ como

$$\Theta(t) = \begin{cases} 1 & , \quad t > 0 \\ 1/2 & , \quad t = 0 \\ 0 & , \quad t < 0 \end{cases} \quad (2)$$

y la distribución $\epsilon(t)$ mediante

$$\epsilon(t) = \begin{cases} 1 & , \quad t > 0 \\ 0 & , \quad t = 0 \\ -1 & , \quad t < 0 \end{cases} \quad (3)$$

y ambas distribuciones están relacionadas por

$$\Theta(t) = \frac{1}{2} [1 + \epsilon(t)] \quad (4)$$

La $\hat{G}(w)$ dada en (1) puede escribirse como

$$\hat{G}(w) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{iwt} \Theta(t) G(t) \quad (5)$$

Solamente hay problemas si $G(t)$ tiene una contribución proporcional a $\delta(t)$; supondremos que esto no sucede. Si esto sucediera ambas expresiones pueden diferir en una cantidad constante. Es conveniente imaginar ahora que $G(t)$ se halla extendida a $t < 0$ de forma que si $G(0) = 0$

$$G(-t) = -G(t) \quad (6)$$

Admitiremos además que $G(t)$ es una función real. Entonces usando (4) la expre-

si en (2.5) se puede escribir como

$$\hat{G}(\omega) = D(\omega) + i A(\omega) \quad (1)$$

$$D(\omega) \equiv \frac{1}{2(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{+i\omega t} \epsilon(t) G(t), \quad A(\omega) \equiv -\frac{i}{2(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{+i\omega t} G(t)$$

que son las llamadas partes dispersiva y absorbtiva de $\hat{G}(\omega)$ y que como consecuencia de la ecuación (2.6) y del hecho de que $G(t)$ es una función real cumplen, para ω real,

$$D^*(\omega) = D(\omega), \quad A^*(\omega) = A(\omega) \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{Prueba: } D^*(\omega) &= \frac{1}{2(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-i\omega t} \epsilon(t) G(t) = \frac{1}{2(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega t} \epsilon(-t) G(-t) = \\ &= \frac{1}{2(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega t} \epsilon(t) G(t) = D(\omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^*(\omega) &= \frac{i}{2(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-i\omega t} G(t) = \frac{i}{2(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega t} G(-t) = \\ &= -\frac{i}{2(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega t} G(t) = A(\omega) \quad \text{Q.E.D.} \end{aligned}$$

Una representación interesante de la distribución $\epsilon(t)$ es

$$\epsilon(t) e^{i\omega t} = \frac{1}{i\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{e^{i\omega' t}}{\omega' - \omega} \quad (3)$$

Por ejemplo si $t > 0$ usaremos para calcular la integral el contorno de la figura.

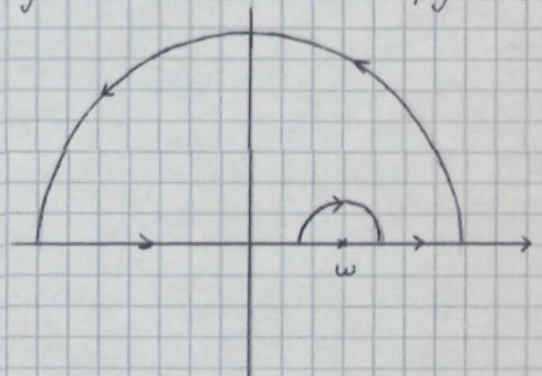
El teorema de los residuos nos asegura que

$$\frac{1}{i\pi} \int_C d\omega' \frac{1}{\omega' - \omega} e^{i\omega' t} = 0$$

donde C es el contorno de la figura. La integral a lo largo del semi-círculo mayor tiende hacia cero cuando su radio tiende hacia infinito y por tanto

$$\frac{1}{i\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{e^{i\omega' t}}{\omega' - \omega} = -\frac{1}{i\pi} \int_{C_E} d\omega' \frac{e^{i\omega' t}}{\omega' - \omega}$$

donde C_E es el camino a lo largo del semi-círculo menor. En el $\omega' - \omega = \epsilon e^{i\theta}$ con



θ cuando de π a 0 y con $\epsilon > 0$. Entonces

$$\frac{1}{i\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{e^{i\omega' t}}{\omega' - \omega} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} -\frac{1}{\pi} e^{i\omega t} \int_{\pi}^0 d\theta e^{i\epsilon e^{i\theta} t} = e^{i\omega t}.$$

Un resultado análogo se obtiene para $t < 0$ tomando los semi-círculos en el semiplano inferior. El valor preciso de $\theta(t=0)$ carece de interés pues usaremos esta expresión solo en (3.1) y hemos supuesto que $G(t)$ no tiene una contribución proporcional a $\delta(t)$. Introduciendo (3.3) en (3.4) la parte dispersiva de $\hat{G}(\omega)$ puede escribirse

$$D(\omega) = \frac{1}{2(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt G(t) \frac{1}{i\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{e^{i\omega' t}}{\omega' - \omega}$$

Suponiendo intercambiables los ordenes de integración

$$D(\omega) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{1}{\omega' - \omega} \left\{ -\frac{i}{2(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega' t} G(t) \right\}$$

y usando (3.1)

$$D(\omega) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{A(\omega')}{\omega' - \omega} \quad (1)$$

Además, usando (3.3)

$$1 = \epsilon(t) \epsilon(t) = \epsilon(t) \frac{1}{i\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{e^{i(\omega' - \omega)t}}{\omega' - \omega}, \quad t \neq 0 \quad (2)$$

por lo que

$$\begin{aligned} A(\omega) &= -\frac{i}{2(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \epsilon(t) G(t) = \\ &= -\frac{i}{2(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt G(t) \epsilon(t) \frac{1}{i\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{e^{i\omega' t}}{\omega' - \omega} = \\ &= -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{1}{\omega' - \omega} \left\{ \frac{1}{2(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega' t} \epsilon(t) G(t) \right\} \end{aligned}$$

y en tanto

$$D(\omega) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{A(\omega')}{\omega' - \omega}, \quad A(\omega) = -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{D(\omega')}{\omega' - \omega} \quad (3)$$

Estas relaciones son las llamadas transformadas de Hilbert. De aquí se

deduce inmediatamente que

$$\hat{G}(\omega) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{A(\omega')}{\omega' - \omega - i\eta}, \quad \eta \downarrow 0 \quad (1)$$

Prueba:

$$\begin{aligned} \hat{G}(\omega) &= D(\omega) + iA(\omega) = \frac{i}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{A(\omega')}{\omega' - \omega} + i \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \delta(\omega' - \omega) A(\omega') \\ &= \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' A(\omega') \left\{ \mathcal{P} \frac{i}{\omega' - \omega} + i\pi \delta(\omega' - \omega) \right\} \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta

$$\lim_{\eta \downarrow 0} \frac{i}{x \pm i\eta} = \mathcal{P} \frac{i}{x} \mp i\pi \delta(x) \quad (2)$$

se obtiene el resultado deseado. También se obtienen fácilmente las relaciones

$$\hat{G}(\omega) = -\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{D(\omega')}{\omega' - \omega - i\eta}, \quad \eta \downarrow 0 \quad (3)$$

$$\hat{G}(\omega) = \frac{i}{2i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\hat{G}(\omega')}{\omega' - \omega - i\eta}, \quad \eta \downarrow 0 \quad (4)$$

$$\hat{G}(\omega) = \frac{i}{i\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\hat{G}(\omega')}{\omega' - \omega} \quad (5)$$

La importancia de estos resultados es manifiesta: Para sistemas con respuesta lineal y causal la transformada de Fourier $\hat{G}(\omega)$ de la función $G(t)$, que conecta la señal de entrada con la de salida, debe satisfacer las relaciones (2.3), (2), (3), (4) y (5), y por tanto el conocimiento de su parte absorbente o dispersiva implica su total conocimiento. Notar que en la deducción de estas relaciones no se ha hecho uso de que $D(\omega)$ y $A(\omega)$ fueran reales, lo cual era consecuencia de (2.6) y de la hipótesis de que $G(t)$ fuera real.

Nuestra demostración, carente de rigor matemático, puede rigourizarse (E. C. Titchmarsh "Introduction to the Theory of Fourier Integrals". Second

Edition. Oxford at the Clarendon Press, 1948. Capítulo V). Se puede probar que si $G(t)$ es una función tal que $G(t) = 0$ para $t < 0$ y además

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt |G(t)|^2 < \infty \quad (1)$$

Entonces existe una función analítica $\hat{G}(w + iy)$, regular para todo $y > 0$, y tal que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dw |\hat{G}(w + iy)|^2 < \infty, \quad \forall y > 0 \quad (2)$$

Cuando $y \downarrow 0$ entonces $\hat{G}(w + iy)$ converge en media a la transformada de Fourier $\hat{G}(w)$ de la función $G(t)$ y además $\hat{G}(w + iy) \rightarrow \hat{G}(w)$ casi por doquier. Finalmente

$$\hat{G}(w + iy) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} dw' \frac{\hat{G}(w')}{w' - w - iy}, \quad \forall y > 0 \quad (3)$$

En el artículo de J.S. Toll [Phys. Rev. 104, 1760 (1952)] se dan condiciones mucho menos restrictivas que permiten probar la validez de las transformadas de Hilbert para sistemas causales, aún cuando (1) no se cumpla, lo cual sucede frecuentemente para situaciones físicas reales. Téngase en cuenta que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt |G(t)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dw |\hat{G}(w)|^2 \quad (4)$$

como se demuestra fácilmente.

Continuemos con los razonamientos heurísticos. Una situación relativamente usual es que

$$\lim_{|w| \rightarrow \infty} \hat{G}(w) = \hat{G}(\infty) = c \quad (5)$$

cuando el límite se toma en cualquier dirección en el semiplano superior complejo, en cuyo caso la condición (1) no se cumplirá. Entonces aplicaremos el teorema de Titchmarsh a la función $f(w) \equiv \hat{G}(w) - \hat{G}(\infty)$, suponiendo que esta ya cumple las condiciones exigidas, y así obtendremos

$$\hat{G}(w + iy) - \hat{G}(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} dw' \frac{\hat{G}(w') - \hat{G}(\infty)}{w' - w - iy}, \quad \forall y > 0 \quad (6)$$

Si en esta expresión hacemos $\gamma = \eta \downarrow 0$ y usamos (5.2) se obtiene

$$\hat{G}(\omega) - \hat{G}(\infty) = \frac{1}{i\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\hat{G}(\omega') - \hat{G}(\infty)}{\omega' - \omega} \quad (1)$$

Supongamos que conocemos $\hat{G}(\omega_0)$, entonces podemos particularizar (1) en el valor $\omega = \omega_0$

$$\hat{G}(\omega_0) - \hat{G}(\infty) = \frac{1}{i\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\hat{G}(\omega') - \hat{G}(\infty)}{\omega' - \omega_0} \quad (2)$$

y restando (2) de (1)

$$\hat{G}(\omega) = \hat{G}(\omega_0) + \frac{(\omega - \omega_0)}{i\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\hat{G}(\omega') - \hat{G}(\infty)}{(\omega' - \omega)(\omega' - \omega_0)} \quad (3)$$

Ahora bien la distribución $P(1/x)$ admite la representación integral

$$\mathcal{P} \frac{1}{x} = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda e^{i\lambda x} \epsilon(\lambda) \quad (4)$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{1}{(\omega' - \omega)(\omega' - \omega_0)} &= -\frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda' \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda'' \epsilon(\lambda') \epsilon(\lambda'') e^{i(\omega' - \omega)\lambda'} e^{i(\omega' - \omega_0)\lambda''} \\ &= -\frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda' \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda'' \epsilon(\lambda') \epsilon(\lambda'') \delta(\lambda' + \lambda'') e^{-i(\omega - \omega_0)\lambda'} \\ &= \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda' e^{-i(\omega - \omega_0)\lambda'} \Rightarrow \\ \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{1}{(\omega' - \omega)(\omega' - \omega_0)} &= \pi^2 \delta(\omega - \omega_0) \end{aligned} \quad (5)$$

Entonces como $x \delta(x) = 0$ la relación (3) se puede escribir

$$\hat{G}(\omega) = \hat{G}(\omega_0) + \frac{(\omega - \omega_0)}{i\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\hat{G}(\omega')}{(\omega' - \omega)(\omega' - \omega_0)} \quad (6)$$

Vemos pues que el conocimiento de $\hat{G}(\omega)$ en un punto nos permite escribir una relación de dispersión cuya integral converge mas rápidamente. Notar que heurísticamente el mismo resultado se obtiene partiendo de (5.5), particularizándola

en el punto $w = w_0$ y substituyendo la nueva expresión de la original. La relación que acabamos de obtener se denomina relación de dispersión con una substracción.

Este mismo procedimiento puede extenderse. Imaginemos que

$$\lim_{|w| \rightarrow \infty} \hat{G}(w) = \hat{G}(\infty) + \hat{G}'(\infty) w \quad (1)$$

donde $\hat{G}(\infty)$ y $\hat{G}'(\infty)$ son constantes y el límite se toma en cualquier dirección en el semiplano superior complejo. Supongamos, ahora, que a la función $[\hat{G}(w) - \hat{G}(\infty) - w \hat{G}'(\infty)]$ sea aplicable el Teorema de Titchmarsh, entonces, como en el caso anterior, podemos escribir

$$\hat{G}(w) - \hat{G}(\infty) - w \hat{G}'(\infty) = \frac{1}{i\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} dw' \frac{\hat{G}(w') - \hat{G}(\infty) - w' \hat{G}'(\infty)}{w' - w} \quad (2)$$

y derivando

$$\hat{G}'(w) - \hat{G}'(\infty) = \frac{1}{i\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} dw' \frac{\hat{G}(w') - \hat{G}(\infty) - w' \hat{G}'(\infty)}{(w' - w)^2} \quad (3)$$

Supongamos ahora que se conoce la función $\hat{G}(w)$ y su derivada $\hat{G}'(w)$ en $w = w_0$. Particularizando (2) y (3) para este valor de w

$$\hat{G}(w_0) - \hat{G}(\infty) - w_0 \hat{G}'(\infty) = \frac{1}{i\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} dw' \frac{\hat{G}(w') - \hat{G}(\infty) - w' \hat{G}'(\infty)}{w' - w_0} \quad (4)$$

$$\hat{G}'(w_0) - \hat{G}'(\infty) = \frac{1}{i\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} dw' \frac{\hat{G}(w') - \hat{G}(\infty) - w' \hat{G}'(\infty)}{(w' - w_0)^2} \quad (5)$$

Restando (4) de (2):

$$\hat{G}(w) - \hat{G}(w_0) - (w - w_0) \hat{G}'(\infty) = \frac{(w - w_0)}{i\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} dw' \frac{\hat{G}(w') - \hat{G}(\infty) - w' \hat{G}'(\infty)}{(w' - w)(w' - w_0)} \quad (6)$$

y restando ahora de esta expresión la (5), previamente multiplicada por $(w - w_0)$, se obtiene

$$\hat{G}(w) = \hat{G}(w_0) + (w - w_0) \hat{G}'(w_0) + \frac{(w - w_0)^2}{i\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} dw' \frac{\hat{G}(w') - \hat{G}(\infty) - w' \hat{G}'(\infty)}{(w' - w)(w' - w_0)^2} \quad (7)$$

Razonamientos análogos a los del caso anterior permiten finalmente escribir

$$\hat{G}(\omega) = \hat{G}(\omega_0) + (\omega - \omega_0) \hat{G}'(\omega_0) + \frac{(\omega - \omega_0)^2}{i\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\hat{G}(\omega')}{(\omega' - \omega)(\omega' - \omega_0)^2} \quad (1)$$

y en general

$$\hat{G}(\omega) = \sum_{m=0}^N \frac{1}{m!} (\omega - \omega_0)^m \hat{G}^{(m)}(\omega_0) + \frac{(\omega - \omega_0)^{N+1}}{i\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\hat{G}(\omega')}{(\omega' - \omega)(\omega' - \omega_0)^{N+1}} \quad (2)$$

que es la relación de dispersión con $N+1$ sustracciones.

i) Relaciones de Kramers - Kronig

Recordemos que en el vacío una distribución de densidades de carga $\rho(\vec{x}; t)$ y de densidades de corriente $\vec{j}(\vec{x}; t)$ creaba un campo electromagnético que podía caracterizarse mediante los vectores $\vec{E}(\vec{x}; t)$ y $\vec{B}(\vec{x}; t)$, que llamaremos campo eléctrico e inducción magnética, y que vienen determinadas por las ecuaciones de Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}; t) = 4\pi \rho(\vec{x}; t) \quad , \quad \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}; t) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{x}; t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}(\vec{x}; t)}{\partial t} \quad (3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{x}; t) = 0 \quad , \quad \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}; t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}(\vec{x}; t)}{\partial t} = 0$$

Para un pequeño número de fuentes la determinación del campo electromagnético usando (3) es un problema tratable, pero para agregados macroscópicos de materia la resolución de las ecuaciones de Maxwell es totalmente insalvable de forma directa y además, como veremos, el resultado obtenido carecería de interés.

Hay dos aspectos importantes que se deben tener en cuenta al tratar los medios materiales:

- i) El número de partículas individuales, las partículas cargadas de cada átomo o núcleo, es prohibitivamente alto
- ii) Para observaciones macroscópicas el comportamiento detallado de los campos, en sus variaciones drásticas sobre las pequeñas distancias interatómicas, es irrelevante. Lo único relevante es el promedio del campo o de la fuente sobre volúmenes grandes comparados con el volumen ocupado por un único átomo o molécula.

La forma usual de proceder [ver p. ej. J. D. Jackson, "Classical Electrodynamics" 2nd Edition. John Wiley and Sons, Inc. 1975. Chapter I and IV] es escribir las ecuaciones de Maxwell en el vacío teniendo en cuenta todas las cargas y corrientes del problema y promediarlas espacialmente sobre regiones de un tamaño de unos 10^2 \AA . Se puede entonces probar que el resultado final es

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{x}; t) = 4\pi \rho(\vec{x}; t) \quad , \quad \vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{x}; t) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{x}; t) + \frac{1}{c} \frac{\partial D(\vec{x}; t)}{\partial t} \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{x}; t) = 0 \quad , \quad \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}; t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}(\vec{x}; t)}{\partial t} = 0$$

donde ahora $\vec{E}(\vec{x}; t)$ y $\vec{B}(\vec{x}; t)$ son ahora los promedios espaciales de los campos microscópicos y $\rho(\vec{x}; t)$ y $\vec{j}(\vec{x}; t)$ son los promedios espaciales de los términos fuente. Los dos nuevos campos vectoriales $\vec{D}(\vec{x}; t)$ y $\vec{H}(\vec{x}; t)$ se suelen denominar desplazamiento eléctrico y campo magnético.

Las ecuaciones macroscópicas de Maxwell (1) constituyen un conjunto de ocho ecuaciones que relacionan las componentes de los cuatro campos \vec{E} , \vec{D} , \vec{B} y \vec{H} . Las cuatro ecuaciones homogéneas pueden resolverse formalmente expresando \vec{E} y \vec{B} en términos de un potencial escalar $\phi(\vec{x}; t)$ y de un potencial vector $\vec{A}(\vec{x}; t)$, pero las ecuaciones no homogéneas no pueden ser resueltas hasta que los campos derivados \vec{D} y \vec{H} sean conocidos en función de \vec{E} y \vec{B} . Estas relaciones son las llamadas relaciones constitutivas del medio

$$\vec{D} = \vec{D}[\vec{E}, \vec{B}] \quad , \quad \vec{H} = \vec{H}[\vec{E}, \vec{B}] \quad (2)$$

Los corchetes cuadrados significan que las relaciones no son necesariamente simples; pueden no ser lineales, pueden depender de la historia del medio material (fenómenos de histeresis) y su estudio constituye un capítulo importante del Estado Sólido. Además, para medios conductores debe considerarse la ley de Ohm generalizada

$$\vec{j} = \vec{j}[\vec{E}, \vec{B}] \quad (3)$$

En substancias que no sean ferroelectricas o ferromagneticas (en las que la historia de la muestra es importante) y para campos aplicados suficientemente débiles, la presencia de un campo eléctrico o de una inducción magnética

induce, respectivamente, una polarización o una magnetización, que es una función lineal del campo aplicado. Si para simplificar suponemos un medio homogéneo e isotrópico podemos escribir, en particular, que

$$\vec{D}(\vec{x}; t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3x' dt' \epsilon(\vec{x}-\vec{x}'; t-t') \vec{E}(\vec{x}'; t') \quad (1)$$

Usando la transformada de Fourier definida como

$$f(\vec{x}; t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3k d\omega \hat{f}(\vec{k}; \omega) e^{-i\omega t + i\vec{k} \cdot \vec{x}} \quad (2)$$

se obtiene, inmediatamente, que

$$\vec{D}(\vec{k}; \omega) = \hat{\epsilon}(\vec{k}; \omega) \vec{E}(\vec{k}; \omega) \quad (3)$$

donde $\hat{\epsilon}(\vec{k}; \omega)$ es la llamada constante dieléctrica del medio y depende, en general, tanto de la frecuencia ω , como del vector número de ondas \vec{k} .

[ver p. ej. D. Pines "Elementary Excitations in Solids". W. A. Benjamin Inc. New York, 1964]. Para longitudes de onda grandes (3) es una forma muy adecuada para describir los efectos del medio. Para longitudes de onda más cortas este procedimiento puede dejar de ser válido al fallar la aproximación de campo medio. De una forma totalmente equivalente se obtiene

$$\vec{H}(\vec{k}; \omega) = \hat{\mu}'(\vec{k}; \omega) \vec{B}(\vec{k}; \omega) \quad (4)$$

donde $\hat{\mu}'(\vec{k}; \omega)$ es la llamada la constante inversa de permeabilidad magnética.

Para simplificar más el problema tendremos en cuenta que para luz visible o radiaciones electromagnéticas de longitudes de onda aún mayores es una buena aproximación suponer que la respuesta del medio es local:

$$\epsilon(\vec{x}-\vec{x}'; t-t') \equiv (2\pi)^{3/2} \delta(\vec{x}-\vec{x}') \delta(t-t') \quad (5)$$

y por tanto (1) se reduce a

$$\vec{D}(\vec{x}; t) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \epsilon(t-t') \vec{E}(\vec{x}; t') \quad (6)$$

y usando la transformada de Fourier dada en (1.3)

$$\vec{D}(\vec{x}; \omega) = \hat{\epsilon}(\omega) \vec{E}(\vec{x}; \omega) \quad (1)$$

que es la relación deseada. En consecuencia comparando (1.3) con una nueva transformada de Fourier de (1) se ve que $\hat{\epsilon}(\omega) = \hat{\epsilon}(\vec{k}=0; \omega)$ y por tanto la hipótesis de localidad es equivalente a despreciar la dependencia en \vec{k} en la constante dieléctrica.

Después de esta introducción, para entrar al problema, vamos como deducir las relaciones de Kramers - Kronig [H.A. Kramers *Atti. Congr. Intern. Fisici*, Como, 2, 545 (1927)] [R. Kronig *J. Opt. Soc. Am.* 12, 547 (1926)]. Como en ausencia de medios materiales $\vec{D}(\vec{x}; t) \equiv \vec{E}(\vec{x}; t)$ es conveniente reescribir (1.6) en la forma

$$\vec{D}(\vec{x}; t) = \vec{E}(\vec{x}; t) + \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' G(t-t') \vec{E}(\vec{x}; t') \quad (2)$$

y por tanto

$$\hat{\epsilon}(\omega) = 1 + \hat{G}(\omega) \quad , \quad \hat{G}(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau e^{i\omega\tau} G(\tau) \quad (3)$$

Supondremos ahora que el sistema es causal, es decir $G(\tau) = 0$ si $\tau < 0$, con lo que (3) se reduce a

$$\hat{G}(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau} G(\tau) \quad (4)$$

Del hecho que \vec{D} y \vec{E} sean reales se deduce que $G(\tau)$ también lo es y entonces (4) implica

$$\hat{G}^*(\omega^*) = \hat{G}(-\omega) \quad \Rightarrow \quad \hat{\epsilon}^*(\omega^*) = \hat{\epsilon}(-\omega) \quad , \quad \text{Im } \omega \leq 0 \quad (5)$$

Notar que una vez realizada la separación (2) no hay ninguna razón física para creer que $G(\tau)$ pudiera tener una contribución proporcional a $\delta(\tau)$ y supondremos que esto no es así y que $G(\tau) = 0$ para $\tau \leq 0$. Podemos

por tanto aplicar los métodos generales a la función $\hat{G}(\omega) = \hat{E}(\omega) - 1$ y escribir de acuerdo con (4.3)

$$\operatorname{Re} \hat{E}(\omega) = 1 + \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\operatorname{Im} \hat{E}(\omega')}{\omega' - \omega} \quad (1)$$

$$\operatorname{Im} \hat{E}(\omega) = -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\operatorname{Re} \hat{E}(\omega') - 1}{\omega' - \omega}$$

que son las relaciones deseadas. Otra forma usual de escribir estas relaciones es usar (12.5) para extender las integrales solo a valores positivos de las frecuencias

$$\operatorname{Re} \hat{E}(\omega) = 1 + \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\infty} d\omega' \frac{\omega' \operatorname{Im} \hat{E}(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} \quad (2)$$

$$\operatorname{Im} \hat{E}(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\infty} d\omega' \frac{\operatorname{Re} \hat{E}(\omega') - 1}{\omega'^2 - \omega^2}$$

Evidentemente las relaciones (1), y por tanto las (2), solo son ciertas si la función $G(z)$ cumple ciertas condiciones matemáticas tales como (6.1). En el caso de medios dieléctricos $G(z) \rightarrow 0$ para $z \rightarrow \infty$ y entonces las relaciones (1) son válidas. No sucede así en medios conductores para los que

$$\lim_{z \rightarrow \infty} G(z) = (2\pi)^{1/2} 4\pi\sigma \quad (3)$$

donde σ es la conductividad eléctrica estática del medio. Esto equivale a afirmar que

$$\hat{G}(\omega) \underset{\omega \rightarrow 0}{\simeq} \hat{E}(\omega) \underset{\omega \rightarrow 0}{\simeq} \frac{i 4\pi\sigma}{\omega} \quad (4)$$

Debemos entonces usar (7.6) que, descompuesta en sus partes real e imaginaria, puede escribirse

$$\operatorname{Re} \hat{E}(\omega) = 1 + \frac{\omega}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\operatorname{Im} \hat{E}(\omega')}{\omega'(\omega' - \omega)} \quad (5)$$

$$\operatorname{Im} \hat{E}(\omega) = \frac{4\pi\sigma}{\omega} - \frac{\omega}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\operatorname{Re} \hat{E}(\omega') - 1}{\omega'(\omega' - \omega)}$$

y reduciendo, como antes, las integrales a frecuencias positivas obtenemos

$$\operatorname{Re} \hat{\epsilon}(\omega) = 1 + \frac{2\omega^2}{\pi} \rho \int_0^{\infty} d\omega' \frac{\operatorname{Im} \hat{\epsilon}(\omega')}{\omega'(\omega'^2 - \omega^2)} \quad (1)$$

$$\operatorname{Im} \hat{\epsilon}(\omega) = \frac{4\pi\sigma}{\omega} - \frac{2\omega}{\pi} \rho \int_0^{\infty} d\omega' \frac{\operatorname{Re} \hat{\epsilon}(\omega') - 1}{\omega'^2 - \omega^2}$$

Las relaciones de Kramers-Kronig son de una validez extraordinariamente general pues son consecuencia, prácticamente, de la relación causal (12.2). El conocimiento empírico de $\operatorname{Im} \hat{\epsilon}(\omega)$ a partir de los estudios de absorción permite obtener $\operatorname{Re} \hat{\epsilon}(\omega)$ a partir de estas relaciones. [ver p.ej. J.D. Jackson "Classical Electrodynamics" Second Edition. John Wiley and Sons, New York, 1975. (Chapter 7).

(ii) Relaciones de dispersión en Mecánica Cuántica

En un proceso mecánico-cuántico de colisión simple es bien sabido [A. Galindo y P. Pascual "Mecánica Cuántica". Editorial Alhambra S.A. Madrid 1978] que se puede escribir la expresión asintótica

$$\langle \vec{x} | \vec{p}_+ \rangle \underset{|\vec{x}| \rightarrow \infty}{\sim} (2\pi\hbar)^{-3/2} \left\{ e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + f(\vec{p} \rightarrow \vec{p}\hat{x}) \frac{e^{ik|\vec{x}|}}{|\vec{x}|} \right\} \quad (2)$$

Su interpretación es sencilla: Al incidir sobre el potencial una onda plana $\exp\{i\vec{k}\cdot\vec{x}\}$ el estado de colisión resultante contiene, a grandes distancias del centro difusor, esa misma onda plana y una onda difundida, con emergencia radial, $\exp\{ik|\vec{x}|\}/|\vec{x}|$, modulada en amplitud por el factor $f(\vec{p} \rightarrow \vec{p}\hat{x})$, según la dirección de observación. El factor $f(\vec{p} \rightarrow \vec{p}\hat{x})$ suele denominarse amplitud de dispersión. La amplitud de dispersión suele también escribirse como $f(E, q^2)$ donde E es la energía y q^2 el momento transferido

$$q^2 = 4k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (3)$$

siendo θ es el ángulo de colisión. En la aproximación de Born y para potenciales centrales

$$f(E, q^2) = f_B(q^2) = - \int_0^{\infty} dr r^2 U(r) \frac{\sin qr}{qr}, \quad q \equiv 2k \sin \frac{\theta}{2} \quad (4)$$

$$U(r) \equiv \frac{2M}{\hbar^2} V(r)$$

Para q^2 fijo y físico (esto es $q^2 \geq 0$) se puede demostrar que, si $V(r)$ satisface ciertas condiciones matemáticas, entonces $f(E, q^2)$ como función de E es analíticamente extendible al plano complejo E salvo un corte $[0, \infty)$ y polos simples para $E = E_1, E_2, \dots$ siendo estos los valores de las energías de los estados ligados con energía negativa y que además la amplitud física ($E \geq 0$) se obtiene como límite $f(E+i\eta, q^2)$ con $\eta \downarrow 0$. Una consecuencia de estas propiedades de analiticidad es, por ejemplo, la relación de dispersión hacia adelante

$$f(E, 0) = f_B(0) + \sum_m \frac{\Gamma_m}{E - E_m} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dE' \frac{\text{Im} f(E', 0)}{E' - E - i\eta} \quad (1)$$

donde el sumatorio recorre los niveles ligados (que pueden representar degeneración accidental) y las constantes Γ_m están relacionadas con el comportamiento asintótico a grandes distancias de las funciones de onda normalizadas de los estados ligados. La función $\text{Im} f(E, 0)$ no es más que la discontinuidad sobre el corte $[0, \infty)$ de la amplitud

$$\text{Im} f(E, 0) = \frac{1}{2i} [f(E+i\eta, 0) - f(E-i\eta, 0)] \quad (2)$$

función que es real pues $f^*(E^*, q^{2*}) = f(E, q^2)$. Condiciones precisas sobre $V(r)$ para que sea válida (1) han sido dadas por A. Klein y C. Zemach [Nuovo Limento 10, 1078 (1958)]. Definiam

$$I(r) \equiv \int d^3r' \frac{|V(r')|}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (3)$$

y prueban que la validez de (1) exige que

$$I(r) < \infty, \quad \forall r; \quad I(r) \text{ sea una función continua de } r \quad (4)$$

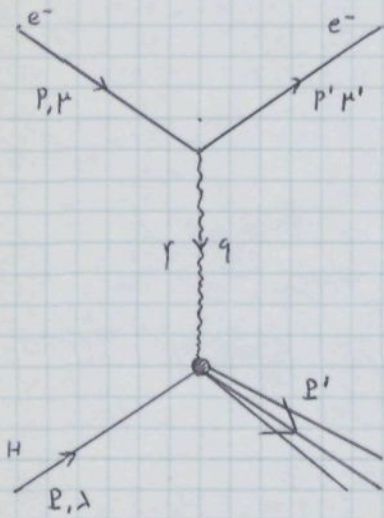
$$I(r) \sim O(1/r) \quad \text{para } r \rightarrow \infty$$

Usando el Teorema óptico (1) se puede reescribir como

$$f(E, 0) = f_B(0) + \sum_m \frac{\Gamma_m}{E - E_m} + \frac{\sqrt{2M}}{4\pi^2 K} \int_0^{\infty} dE' \frac{\sqrt{E'} \sigma(E')}{E' - E - i\eta} \quad (5)$$

XL - COLISIONES PROFUNDAMENTE INELASTICAS

Empezaremos considerando las colisiones inelásticas leptón-hadrón en la aproximación de intercambio de un fotón



$$p^2 = p'^2 = m^2, \quad E^2 = M^2, \quad E'^2 = M'^2$$

$$q^\mu \equiv p^\mu - p'^\mu = P'^\mu - P^\mu$$

(1)

$$q^2 = q \cdot q \quad v \equiv q \cdot P = \frac{1}{2} (M'^2 - M^2 - q^2)$$

$$s = (P + p)^2$$

Si las masas de los leptones son despreciables entonces de (X-8.1)

$$-\frac{1}{s} (s - M^2)(s - M'^2) \leq q^2 \leq 0 \quad m=0 \quad (2)$$

y teniendo en cuenta correcciones (X-8.2)

$$-s + (M^2 + M'^2 + 2m^2) - \frac{(M^2 - m^2)(M'^2 - m^2)}{s} + \frac{m^2 (M^2 - M'^2)^2}{s^2} + \dots \leq q^2 \leq -\frac{m^2 (M^2 - M'^2)^2}{s^2} + \dots \quad (3)$$

De aquí se deducen fácilmente los límites de v .

i) Sistema C.M.

$$p^\mu = (\sqrt{m^2 + k^2}, 0, 0, k) \quad P^\mu \equiv (\sqrt{M^2 + k^2}, 0, 0, -k) \quad (4)$$

como

$$q^2 = 2p \cdot q = 2\sqrt{m^2 + k^2} q_0 + 2k q_3 \quad (5)$$

$$2v = 2P \cdot q = 2\sqrt{M^2 + k^2} q_0 - 2k q_3$$

de donde

$$q_0 = \frac{q^2 + 2v}{2[(m^2 + k^2)^{1/2} + (M^2 + k^2)^{1/2}]} \quad (6)$$

$$q_3 = \frac{q^2 (M^2 + k^2)^{1/2} - 2v (m^2 + k^2)^{1/2}}{2k[(m^2 + k^2)^{1/2} + (M^2 + k^2)^{1/2}]}$$

Definimos, de la forma usual, la transferencia de momento transversal al cuadrado como

$$q_T^2 \equiv q_0^2 - q_3^2 - q^2 \quad (1)$$

En el límite de altas energías en el que se desprecian todas las masas

$$q_0 \approx \frac{2v + q^2}{4k}, \quad q_3 \approx -\frac{2v - q^2}{4k}, \quad q_T^2 \approx -q^2 \left[1 - \frac{v}{2k^2} \right] \quad (2)$$

Podemos introducir las variables de scaling

$$x \equiv -\frac{q^2}{2v}, \quad y^* \equiv \frac{q_0}{P_0} \quad (3)$$

Notan que en el límite de altas energías $0 \leq x \leq 1$. y en este límite obtenemos de las dos últimas ecuaciones

$$v \approx 2k^2 \frac{y^*}{1-x}, \quad q^2 \approx -4k^2 \frac{xy^*}{1-x}, \quad q_T^2 = 4k^2 \frac{xy^*}{(1-x)^2} (1-x-y^*) \quad (4)$$

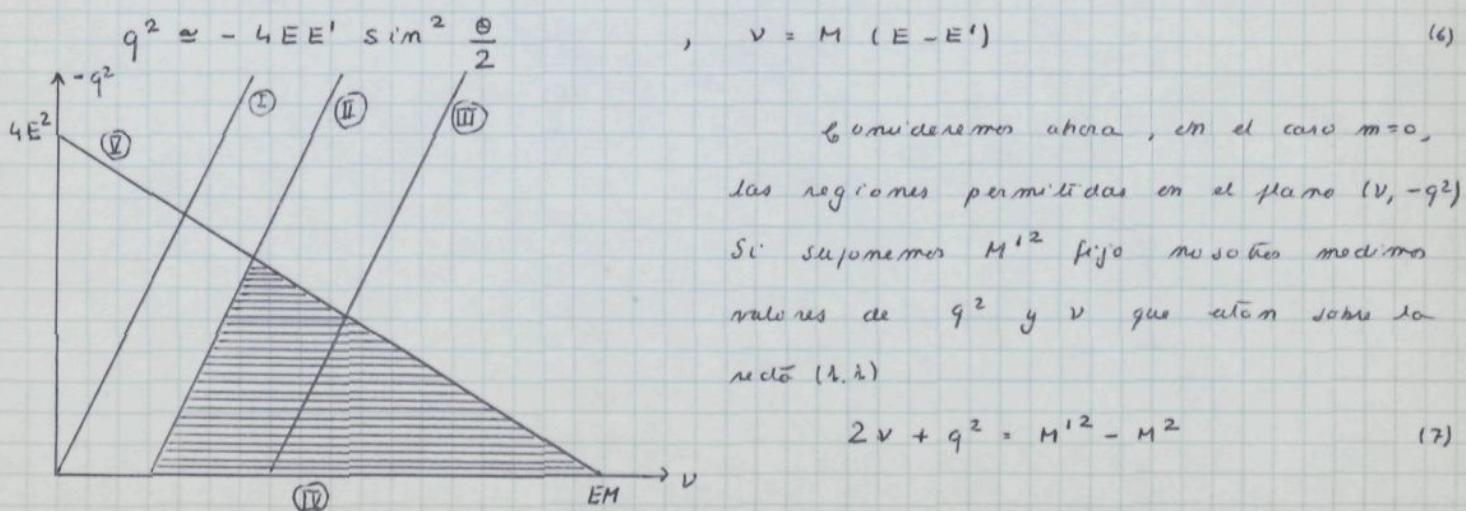
Para valores fijos de x e y^* y para $k \rightarrow \infty$ es evidente que v , $-q^2$ y q_T^2 aumentan como k^2 .

ii) Sistema laboratorio

Indiquemos por E y E' la energía del leptón cargado inicial y final, respectivamente en el sistema laboratorio y $\cos \theta = \hat{p} \cdot \hat{p}'$, entonces

$$q^2 = 2m^2 - 2EE' + 2|\vec{p}||\vec{p}'| \cos \theta, \quad v = M(E - E') \quad (5)$$

Si despreciamos la masa del leptón



Consideremos ahora, en el caso $m=0$, las regiones permitidas en el plano $(v, -q^2)$. Si suponemos M'^2 fijo nosotros medimos valores de q^2 y v que están sobre la recta (6.6)

$$2v + q^2 = M'^2 - M^2 \quad (7)$$

En la figura damos también algunos casos especiales

- I) Colisión elástica: $M' = M$
- II) Umbral inelástico: $M' = M + m_n$
- III) Un caso cualquiera $M' > M + m_n$

Para valores dados de E y θ medimos a lo largo de una

$$q^2 = -4E^2 \left(1 - \frac{v}{ME}\right) \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (m=0) \quad (1)$$

Algunos casos especiales son

- IV) Línea para $\theta = 0 \Rightarrow q^2 = 0$
- V) Línea para $\theta = \pi \Rightarrow q^2 = -4E^2 (1 - v/ME)$

Experimentos de colisiones inelásticas para energía fija E permiten medir las dependencias en v y $-q^2$ en la región sombreada. Es evidente que la región correspondiente a grandes valores de v y de $-q^2$ pueden estudiarse sólo si E es grande y θ no demasiado pequeño.

iii) Sección eficaz

Supongamos que en el estado final hadrónico haya n partículas con momentos p_1, p_2, \dots, p_n tales que $P' = \sum_{i=1}^n p_i$ y sean $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ las heliudades correspondientes. Sea e la carga del hadrón inicial, entonces la sección eficaz diferencial correspondiente al caso en que sólo se mide el momento del leptón cargado saliente es

$$d^3 \sigma^{(m)} = \frac{(2\pi)^4}{2 \lambda^{1/2}(s, m^2, M^2)} \frac{e^4}{q^4} \sum_{\mu, \lambda} \sum_{\mu', \lambda_1, \dots, \lambda_n} \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2E'} L^{\mu\nu} \int \prod_{i=1}^n \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i} \delta(P' - P - q) S_{\mu\nu}^{(m)}$$

$$L^{\mu\nu} \equiv \langle p', \mu' | J^\mu(0) | p, \mu \rangle \langle p, \mu | J^\nu(0) | p', \mu' \rangle \quad (2)$$

$$S_{\mu\nu}^{(m)} \equiv \langle P', \lambda' | J_\mu(0) | P, \lambda \rangle \langle P, \lambda | J_\nu(0) | P', \lambda' \rangle$$

donde $J^\mu(x)$ es el operador corriente electromagnética y $|P, \lambda\rangle \equiv |p_1, \lambda_1, \dots, p_n, \lambda_n\rangle$

El tensor leptónico $L^{\mu\nu}$ puede calcularse inmediatamente

$$\sum_{\mu} \sum_{\mu'} L^{\mu\nu} = \sum_{\mu} \sum_{\mu'} \bar{u}(\bar{p}', \mu') \gamma^\mu u(\bar{p}, \mu) \bar{u}(\bar{p}, \mu) \gamma^\nu u(\bar{p}', \mu') =$$

$$= \frac{1}{2} \text{Tr} [(\not{p}' + m) \gamma^\mu (\not{p} + m) \gamma^\nu] = 2 [p^\mu p'^\nu + p^\nu p'^\mu + g^{\mu\nu} (m^2 - p \cdot p')] \equiv N^{\mu\nu} \quad (3)$$

Introduz camos

$$W_{\mu\nu}^{(m)} \equiv \frac{1}{2} (2\pi)^3 \sum_{\lambda, -\lambda} \sum_{\lambda} \int \prod_{i=1}^m \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i} \delta(p' - p - q) S_{\mu\nu}^{(m)} \quad (1)$$

Entonces

$$d^3 \sigma^{(m)} = \frac{4\alpha^2}{\lambda^{1/2}(S, m^2, M^2)} \frac{d^3 p'}{2E'} \frac{1}{q^4} N^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^{(m)} \quad (2)$$

Si no sabemos nada sobre el estado hadrónico final, debemos sumar sobre todas las configuraciones posibles finales y a partir de ahora supondremos que esto es así. Eliminaremos el índice (m) en (1) y $W_{\mu\nu} \equiv \sum_m W_{\mu\nu}^{(m)}$, donde la suma se extiende a todas las configuraciones hadrónicas finales. Nótese que $W_{\mu\nu}$ carece de dimensiones. Así

$$d^3 \sigma = \frac{4\alpha^2}{\lambda^{1/2}(S, m^2, M^2)} \frac{d^3 p'}{2E'} \frac{1}{q^4} N^{\mu\nu} W_{\mu\nu} \quad (3)$$

Vamos a dar algunas alternativas a (3) para procesos inclusivos. Como

$$\lambda^{1/2}(S, m^2, M^2) = 2[(p \cdot p')^2 - M^2 m^2]^{1/2} = 2M |\vec{p}'| \quad (4)$$

donde $|\vec{p}'|$ es el momento del leptón inicial en el sistema laboratorio. Entonces

$$d^3 \sigma = \frac{2\alpha^2}{[(p \cdot p')^2 - M^2 m^2]^{1/2}} \frac{d^3 p'}{2E'} \frac{1}{q^4} N^{\mu\nu} W_{\mu\nu} \quad (5)$$

y

$$\frac{d^3 \sigma}{d\vec{p}'} = \frac{1}{E' |\vec{p}'|} \frac{d^3 \sigma}{dE' d\Omega'} \quad (6)$$

En el límite $m=0$ podemos escribir

$$\frac{d^3 \sigma}{d\vec{p}'} = \frac{1}{E'^2} \frac{d^3 \sigma}{dE' d\Omega'} = \frac{2ME}{E'} \frac{d^3 \sigma}{d\phi' dv d|q^2|} \quad (m=0) \quad (7)$$

donde para obtener la última expresión hemos hecho uso de (2.6) y ϕ' es ángulo azimutal esférico.

(v) Formas alternativas de $W_{\mu\nu}$

Formularé ahora formas alternativas de $W_{\mu\nu}$ que son de especial

interés. De (4.4)

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (2\pi)^3 \sum_{\lambda} \sum_F \delta(q + P - P_F) \langle P\lambda | J_{\nu}(0) | F \rangle \langle F | J_{\mu}(0) | P\lambda \rangle \quad (1)$$

donde la suma sobre F indica suma sobre todas las configuraciones finales posibles y para cada configuración hay una suma sobre helicidad y una integración sobre los momentos finales de todos los hadrones. Utilizando la forma integral de la delta y teniendo en cuenta que

$$e^{ia \cdot P} A(x) e^{-ia \cdot P} = A(x+a) \quad (2)$$

donde P^{μ} es el operador momento y $A(x)$ un operador arbitrario, se obtiene

$$W_{\mu\nu} = \sum_{\lambda} \sum_F \int \frac{d^4x}{4\pi} e^{iq \cdot x} \langle P\lambda | J_{\nu}(x) | F \rangle \langle F | J_{\mu}(0) | P\lambda \rangle \quad (3)$$

y también

$$W_{\mu\nu} = \sum_{\lambda} \int \frac{d^4x}{4\pi} e^{iq \cdot x} \langle P\lambda | J_{\nu}(x) J_{\mu}(0) | P\lambda \rangle \quad (4)$$

Esta cantidad también puede escribirse en la forma

$$W_{\mu\nu} = \sum_{\lambda} \int \frac{d^4x}{4\pi} e^{iq \cdot x} \langle P\lambda | [J_{\nu}(x), J_{\mu}(0)] | P\lambda \rangle \quad (5)$$

Para pasar de (4) a (5) hemos añadido un término que puede escribirse de forma análoga a (4) pero con $\delta(q - P + P_F)$ y también solo los estados intermedios con energía laboratorio $E_F = M - (E - E')$ contribuyen, pero en general no existen estos estados y ambas expresiones son análogas.

De (5) se obtiene inmediatamente que

$$W_{\mu\nu}(P, q) = - W_{\nu\mu}^*(P, -q) \quad (\text{Propiedad de cruz}) \quad (6)$$

y de (4)

$$W_{\mu\nu}(P, q) = W_{\nu\mu}^*(P, q) \quad (\text{Hermiticidad}) \quad (7)$$

En ocasiones es útil introducir la llamada amplitud de colisión Compton

hacia adelante

$$T_{\mu\nu} \equiv i \sum_{\lambda} \int d^4x e^{iq \cdot x} \Theta(x^0) \langle P\lambda | [J_\nu(x), J_\mu(0)] | P\lambda \rangle =$$

$$= i \sum_{\lambda} \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle P\lambda | T(J_\nu(x), J_\mu(0)) | P\lambda \rangle \quad (1)$$

que está relacionada con nuestra función por

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi} \text{Im} T_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{4\pi i} [T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu}^*] \quad (2)$$

v) Funciones de estructura

Es inmediato comprobar que $W_{\mu\nu}(P, q)$ es un tensor de segundo orden que depende sólo de dos cuadrivectores P^μ y q^μ , pues hemos sumado sobre helicidad final y promediado sobre las iniciales. A partir de ellos podemos formar sólo dos escalares que elegiremos como q^2 y ν (recuerda que $P^2 = M^2$ es fijo). Entonces la invariancia Lorentz implica

$$W_{\mu\nu}(P, q) = - \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) W_1(q^2, \nu) +$$

$$+ \frac{1}{M^2} \left(P_\mu - \frac{\nu}{q^2} q_\mu \right) \left(P_\nu - \frac{\nu}{q^2} q_\nu \right) W_2(q^2, \nu) - \frac{i}{2M^2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} P^\alpha q^\beta W_3(q^2, \nu)$$

$$+ \frac{1}{M^2} q_\mu q_\nu W_4(q^2, \nu) + \frac{1}{M^2} (P_\mu q_\nu + P_\nu q_\mu) W_5(q^2, \nu) +$$

$$+ \frac{i}{M^2} (P_\mu q_\nu - P_\nu q_\mu) W_6(q^2, \nu) \quad (3)$$

donde las $W_i(q^2, \nu)$ son las llamadas funciones de estructura y contienen la información dinámica del problema. Como la paridad es conservada en las interacciones fuertes y electromagnéticas $W_3(q^2, \nu) \equiv 0$. Además de (5.7) se obtiene $W_i^*(q^2, \nu) = W_i(q^2, \nu)$ es decir las funciones de estructura son reales. Más aún la conservación de la corriente electromagnética implica que

$$q^\mu W_{\mu\nu}(P, q) = W_{\mu\nu}(P, q) q^\nu = 0 \quad (4)$$

y por tanto $W_i(q^2, \nu) \equiv 0 \quad i=4,5,6$. Por tanto

$$W_{\mu\nu}(p, q) = - \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) W_1(q^2, \nu) + \frac{1}{M^2} \left(p_\mu - \frac{\nu}{q^2} q_\mu \right) \left(p_\nu - \frac{\nu}{q^2} q_\nu \right) W_2(q^2, \nu) \quad (1)$$

Por tanto toda nuestra ignorancia de las interacciones fuertes queda reducida a dos funciones de estructura adimensionales, que deben ser reales y además como consecuencia de (5.3)

$$W_1(q^2, \nu) = -W_1(q^2, -\nu), \quad W_2(q^2, \nu) = -W_2(q^2, -\nu) \quad (\text{Prop. cruz}) \quad (2)$$

Las funciones de estructura deben satisfacer además las llamadas condiciones de positividad que vamos a deducir a continuación. De (5.1) es evidente que para cualquier cuadrivector η_μ

$$\eta^\mu W_{\mu\nu} \eta^\nu \geq 0 \quad (3)$$

Considerando $W_{\mu\nu}$ como una matriz 4×4 , $W = \{W_{\mu\nu}\}$, se tiene (5.7) que $W^+ = W$, entonces (3) es cierto si y sólo si la matriz W y todas sus submatrices diagonales tienen determinantes no negativos. Para obtener estas condiciones explícitamente es útil introducir un sistema de referencia en el que

$$p^\mu \equiv \left(M \sqrt{1 - \frac{\nu^2}{M^2 q^2}}, 0, 0, -\frac{\nu}{\sqrt{-q^2}} \right), \quad q^\mu \equiv (0, 0, 0, \sqrt{-q^2}) \quad (4)$$

entonces

$$W = \begin{vmatrix} \left(1 - \frac{\nu^2}{M^2 q^2}\right) W_2 - W_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

y las condiciones de positividad son

$$\left(1 - \frac{\nu^2}{M^2 q^2}\right) W_2(q^2, \nu) \geq W_1(q^2, \nu) \geq 0 \quad (5)$$

Para obtener más información sobre las $W_i(q^2, \nu)$ necesitamos un modelo de interacciones fuertes.

vi) Sección eficaz

Veamos ahora como expresar la sección eficaz inclusiva en términos de las funciones de estructura. Usando (4.5) y (7.1) obtenemos

$$d^3\sigma = \frac{2\alpha^2}{[(E.p)^2 - m^2 M^2]^{1/2}} \frac{d^3p'}{2E'} \frac{1}{q^4} \left\{ -2(2m^2 + q^2) W_1(q^2, \nu) + 2 \left[\frac{2}{M^2} (E.p)(E.p') + \frac{1}{2} q^2 \right] W_2(q^2, \nu) \right\} \quad (1)$$

Usando (4.6) podemos escribir en el sistema laboratorio

$$\frac{d^3\sigma}{dE' d\Omega'} = \frac{2\alpha^2}{q^4} \frac{|\vec{p}'|}{M |\vec{p}|} \left\{ 2 [EE' - |\vec{p}| |\vec{p}'| \cos \theta - 2m^2] W_1(q^2, \nu) + [EE' + |\vec{p}| |\vec{p}'| \cos \theta + m^2] W_2(q^2, \nu) \right\} \quad (2)$$

y si, como es usual, despreciamos la masa del leptón

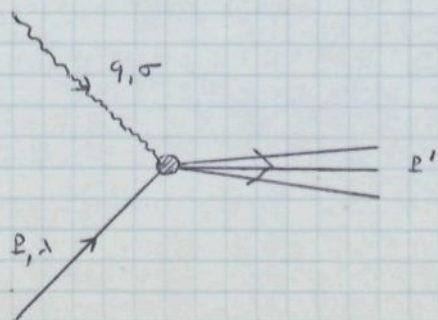
$$\frac{d^3\sigma}{dE' d\Omega'} = \frac{4\alpha^2}{q^4} \frac{E'^2}{M} \left\{ 2 W_1(q^2, \nu) \sin^2 \frac{\theta}{2} + W_2(q^2, \nu) \cos^2 \frac{\theta}{2} \right\} \quad (3)$$

$$q^2 = -4EE' \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad \nu = M(E - E'), \quad m = 0$$

De forma aproximada podemos decir que a ángulos pequeños medimos W_2 , mientras que W_1 es medida a ángulos grandes.

vii) Fotoabsorción

Vamos ahora a expresar las funciones de estructura en términos de las secciones eficaces de fotoabsorción. Consideremos el proceso de fotoabsorción



$$q^\mu \equiv p'^\mu - p^\mu$$

La sección eficaz total para este proceso es

$$\sigma_{ph} = \frac{(2\pi)^2 \alpha}{2 [(P \cdot q)^2]^{1/2}} W_{\mu\nu}(P, q) \sum_{\sigma} E^{\mu}(\vec{q}, \sigma) E^{\nu*}(\vec{q}, \sigma) \quad , \quad q^2 \rightarrow 0 \quad (1)$$

donde $E^{\mu}(\vec{q}, \sigma)$ son los vectores de polarización del fotón. Entonces

$$\sigma_{ph} = \frac{(2\pi)^2 \alpha}{2 [(P \cdot q)^2]^{1/2}} [-W^{\mu}_{\mu}(P, q)] \quad , \quad q^2 \rightarrow 0 \quad (2)$$

Demostremos ahora que en (1) no deben aparecer singularidades en el límite $q^2 \rightarrow 0$ ya que los elementos de matriz usados en la definición de $W_{\mu\nu}$ son las amplitudes físicas de fotoabsorción a dos límites estados final. Las singularidades aparentes en (1) deben cancelarse en el límite $q^2 \rightarrow 0$ y esto implica que

$$W_1(q^2, \nu) + \frac{\nu^2}{M^2 q^2} W_2(q^2, \nu) = 0 + O(q^2) \quad (3)$$

$$W_2(q^2, \nu) = 0 + O(q^2)$$

Más aún

$$W^{\mu}_{\mu}(P, q) = -3W_1(q^2, \nu) + \left(1 - \frac{\nu^2}{M^2 q^2}\right) W_2(q^2, \nu) \quad (4)$$

y en tanto

$$W^{\mu}_{\mu}(P, q) = -2W_1(0, \nu) + O(q^2) \quad (5)$$

De todo esto y usando (2)

$$\sigma_{ph} = \frac{(2\pi)^2 \alpha}{\nu} W_1(0, \nu) \quad (6)$$

y de aquí

$$W_1(q^2, \nu) = \frac{\nu}{(2\pi)^2 \alpha} \sigma_{ph} + O(q^2) \quad (7)$$

$$W_2(q^2, \nu) = -\frac{M^2 q^2}{(2\pi)^2 \alpha \nu} \sigma_{ph} + O(q^4) \quad (8)$$

Para profundizar en el significado de las funciones de estructura vamos a considerar la fotoabsorción de fotones virtuales ($q^2 \neq 0$); en particular nos interesa la región $q^2 \leq 0$ que es la física de la colisión

inelástica de leptones. La sección eficaz total es

$$\sigma = \frac{2(2\pi)^2 \alpha}{\lambda^{1/2}(s, M^2, q^2)} \sum_{\sigma} \overline{E^{\mu}(\vec{q}, \sigma)} W_{\mu\nu}(P, q) E^{\nu*}(\vec{q}, \sigma) \quad (1)$$

e introduciendo el triángulo del fotón \vec{q} en el sistema laboratorio podemos escribir

$$\sigma = \frac{(2\pi)^2 \alpha}{M |\vec{q}|} \sum_{\sigma} \overline{E^{\mu}(\vec{q}, \sigma)} W_{\mu\nu}(P, q) E^{\nu*}(\vec{q}, \sigma) \quad (2)$$

Para simplificar los cálculos elegiremos

$$q^{\mu} \equiv \left(\frac{v}{M}, \sqrt{\frac{v^2}{M^2} - q^2}, 0, 0 \right) \quad (3)$$

y por tanto los vectores de polarización pueden elegirse

$$E^{\mu}(\vec{q}, \pm 1) \equiv \left(0, 0, -\frac{i}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \quad (4)$$

$$E^{\mu}(\vec{q}, 0) \equiv \left(\frac{i}{\sqrt{1-q^2}} \sqrt{\frac{v^2}{M^2} - q^2}, \frac{iv}{M\sqrt{1-q^2}}, 0, 0 \right)$$

y de aquí

$$E_{\mu}(\vec{q}, \pm 1) W^{\mu\nu}(P, q) E_{\nu}^*(\vec{q}, \pm 1) = W_1(q^2, v) \quad (5)$$

$$E_{\mu}(\vec{q}, 0) W^{\mu\nu}(P, q) E_{\nu}^*(\vec{q}, 0) = -W_1(q^2, v) + \left(1 - \frac{v^2}{M^2 q^2} \right) W_2(q^2, v)$$

y obtenemos para las secciones eficaces de fotones polarizados transversal y longitudinalmente

$$\sigma_{TR} = \frac{(2\pi)^2 \alpha}{M |\vec{q}|} W_1(q^2, v) \quad (6)$$

$$\sigma_{LO} = \frac{(2\pi)^2 \alpha}{M |\vec{q}|} \left[-W_1(q^2, v) + \left(1 - \frac{v^2}{M^2 q^2} \right) W_2(q^2, v) \right]$$

Notar que ambas son no-negativas debido a las condiciones de positividad

Erudientemente para fotones físicos $\sigma_{TR} = \sigma_{ph}$ y $\sigma_{LO} = 0$, como debe ser.

Otros autores prefieren otras definiciones de estas dos secciones eficaces que

aún cumplen ambas condiciones. Por ejemplo como $M |\vec{q}| / (v + \frac{1}{2} q^2) \rightarrow 1$

cuando $q^2 \rightarrow 0$, podemos usar

$$\sigma_T = \frac{(2\pi)^2 \alpha}{v + q^2/2} W_1(q^2, v) \quad (1)$$

$$\sigma_L = \frac{(2\pi)^2 \alpha}{v + q^2/2} \left[-W_1(q^2, v) + \left(1 - \frac{v^2}{M^2 q^2}\right) W_2(q^2, v) \right]$$

En términos de estas secciones eficaces

$$W_1(q^2, v) = \frac{v + q^2/2}{(2\pi)^2 \alpha} \sigma_T \quad (2)$$

$$W_2(q^2, v) = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{M^2 q^2}} \frac{v + q^2/2}{(2\pi)^2 \alpha} (\sigma_T + \sigma_L)$$

Es útil introducir

$$R \equiv \frac{\sigma_L}{\sigma_T} = -1 + \left(1 - \frac{v^2}{M^2 q^2}\right) \frac{W_2(q^2, v)}{W_1(q^2, v)} \quad (3)$$

para colisiones elásticas: Hadrón de spin cero.

Comenzaremos la colisión elástica cuando el hadrón blanco tiene spin cero. En este caso la covariante Lorentz y la C.V.C. nos permiten escribir

$$\langle \vec{P}' | J^\mu(0) | \vec{P} \rangle = F(q^2) (P + P')^\mu \quad (4)$$

donde $F(0) = Z$ ($Ze =$ carga del hadrón) y $F(q^2)$ puede tomarse real en la región física. Recordemos que en el caso de colisiones elásticas $M' = M$ y $2v + q^2 = 0$. Usando (4) y (4.1) para colisión elástica

$$W_{\mu\nu}^{(el)}(P, q) = \delta [E(\vec{P} + \vec{q}) - E(\vec{P}) - q^0] \frac{1}{E(\vec{P} + \vec{q})} |F(q^2)|^2 (P_\mu + \frac{1}{2} q_\mu) (P_\nu + \frac{1}{2} q_\nu) \quad (5)$$

y comparando con (7.1)

$$W_1^{(el)}(q^2, v) = 0 \quad (6)$$

$$W_2^{(el)}(q^2, v) = \frac{M^2}{E(\vec{P} + \vec{q})} \delta [E(\vec{P} + \vec{q}) - E(\vec{P}) - q^0] |F(q^2)|^2$$

La función δ de Dirac puede escribirse de forma más conveniente:

$$\phi \equiv E(\vec{p} + \vec{q}) - E(\vec{p}) - q^0 = [M^2 + \vec{q}^2]^{1/2} - M - \frac{v}{M} =$$

$$= \left[M^2 + \frac{v^2}{M^2} - q^2 \right]^{1/2} - M - \frac{v}{M} \quad (1)$$

$$\phi = 0 \Rightarrow v + q^2/2 = 0, \quad \left. \frac{d\phi}{dv} \right|_{\phi=0} = 1/E(\vec{p} + \vec{q})$$

y por tanto para bloques de spin uno

$$W_1^{(el)}(q^2, v) = 0 \quad (2)$$

$$W_2^{(el)}(q^2, v) = \delta\left(v + \frac{1}{2}q^2\right) M^2 |F(q^2)|^2$$

Calculamos ahora, usando (8.2), la sección eficaz. Debido a la función δ la integración sobre E' puede hacerse inmediatamente (A)

$$\phi = \left[M^2 + (E - E')^2 + 2EE' - 2|\vec{p}||\vec{p}'|\cos\theta - 2m^2 \right]^{1/2} - M - E + E' \quad (3)$$

La ecuación $\phi = 0$ nos permite calcular $E' = E'(E, \cos\theta)$ y en este punto

$$\left. \frac{d\phi}{dE'} \right|_{\phi=0} = \frac{1}{E(\vec{p} + \vec{q})} \left[M + E - E' \frac{|\vec{p}'|}{|\vec{p}|} \cos\theta \right] \quad (4)$$

y así obtenemos en el sistema laboratorio

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega'} = \frac{|\vec{p}'|}{|\vec{p}|} \frac{2\alpha^2}{q^4} \frac{EE' + |\vec{p}'||\vec{p}'|\cos\theta + m^2}{1 + \frac{E}{M} \left[1 - \frac{E'|\vec{p}'|}{E|\vec{p}|} \cos\theta \right]} |F(q^2)|^2 \quad (5)$$

y despreciando la masa del leptón

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega'} = \frac{\alpha^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{1}{1 + \frac{2E}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}} |F(q^2)|^2 \quad (6)$$

$$q^2 = -4EE' \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad E' = E \left\{ 1 + \frac{2E}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\}^{-1}, \quad m=0$$

(x) Colisión elástica: Hadrón de spin $1/2$.

En este caso C.V.C. y covariante Lorentz implica (VI-D-4.2)

$$\langle \bar{P}' \lambda' | J^\mu(0) | \bar{P} \lambda \rangle = \bar{u}(\bar{P}' \lambda') \left[F_1(q^2) \gamma^\mu + \frac{i}{2M} F_2(q^2) \sigma^{\mu\nu} q_\nu \right] u(\bar{P}, \lambda) \quad (1)$$

$$F_1(0) = Z \qquad F_2(0) = \kappa$$

donde κ es el momento magnético anómalo. Una forma más conveniente de escribir esto es

$$\langle \bar{P}' \lambda' | J^\mu(0) | \bar{P} \lambda \rangle = \bar{u}(\bar{P}' \lambda') \left[(F_1(q^2) + F_2(q^2)) \gamma^\mu - \frac{1}{2M} F_2(q^2) (\not{P} + \not{P}')^\mu \right] u(\bar{P}, \lambda) \quad (2)$$

y obtenemos directamente

$$W_1^{(el)}(q^2, \nu) = - \delta(\nu + \frac{1}{2} q^2) q^2 \left| \frac{1}{2} F_1(q^2) + \frac{1}{2} F_2(q^2) \right|^2 \quad (3)$$

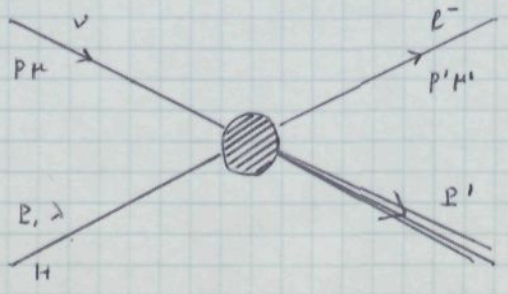
$$W_2^{(el)}(q^2, \nu) = + \delta(\nu + \frac{1}{2} q^2) M^2 \left[F_1^2(q^2) - \frac{q^2}{4M^2} F_2^2(q^2) \right]$$

de donde se obtiene como antes la sección eficaz. En particular despreciando la masa del leptón en el sistema laboratorio

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega'} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \cos^2 \frac{\theta}{2} \left\{ \left[F_1^2(q^2) - \frac{q^2}{4M^2} F_2^2(q^2) \right] - \frac{q^2}{2M^2} \tan^2 \frac{\theta}{2} [F_1(q^2) + F_2(q^2)]^2 \right\} \frac{1}{1 + \frac{2E}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}} \quad (4)$$

que es la llamada fórmula de Rosenbluth. La comparación de (4) con los datos experimentales permite determinar los factores de forma de los nucleones.

Consideraremos a continuación y mediante técnicas análogas a las que acabamos de usar la colisión neutrino-hadrón



Supondremos que q^2 es mucho menor que la masa del mesón intermedio que media esta interacción. En analogía con el caso anterior podemos escribir

$$d^3 \sigma^{(m)} = \frac{(2\pi)^4}{2(s-M^2)} \frac{G^2}{2} \sum_{\lambda} \sum_{\mu\mu'} \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2E'} L^{\mu\nu} \int \prod_{i=1}^n \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i} \delta(p-p'-q) S_{\mu\nu}^{(m)}$$

$$L^{\mu\nu} \equiv \langle \bar{p}' \mu' | e^{\mu}(0) | \bar{p} \mu \rangle \langle \bar{p} \mu | e^{\nu\dagger}(0) | \bar{p}' \mu' \rangle \quad (1)$$

$$S_{\mu\nu}^{(m)} \equiv \langle \bar{p}' \lambda' | J_{\mu}^{\dagger}(0) | \bar{p} \lambda \rangle \langle \bar{p} \lambda | J_{\nu}(0) | \bar{p}' \lambda' \rangle$$

donde J_{μ} y e_{μ} son las corrientes hadrónicas y leptónicas débiles que median esta interacción. La contribución leptónica se evalúa fácilmente con el resultado

$$\begin{aligned} N^{\mu\nu} &= \sum_{\mu\mu'} L^{\mu\nu} = \sum_{\mu\mu'} \bar{u}(\bar{p}' \mu') \gamma^{\mu} (1 + \gamma_5) u(\bar{p} \mu) \bar{u}(\bar{p} \mu) \gamma^{\nu} (1 + \gamma_5) u(\bar{p}' \mu') = \\ &= 8 [p^{\mu} p'^{\nu} + p^{\nu} p'^{\mu} - g^{\mu\nu} (p \cdot p') + i \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_{\alpha} p'_{\beta}] \end{aligned} \quad (2)$$

Podemos ahora introducir un tensor hadrónico de segundo orden $W_{\mu\nu}^{(m)}$ análogo al del caso anterior y podemos escribir como antes la sección eficaz inclusive como

$$d^3 \sigma = \frac{G^2}{8\pi^2} \frac{1}{s-M^2} \frac{d^3 p'}{2E'} N^{\mu\nu} W_{\mu\nu} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu} &= \sum_{\lambda} \int \frac{d^4 x}{4\pi} e^{iqx} \langle \bar{p} \lambda | J_{\nu}(x) J_{\mu}^{\dagger}(0) | \bar{p} \lambda \rangle = \\ &= \sum_{\lambda} \int \frac{d^4 x}{4\pi} e^{iqx} \langle \bar{p} \lambda | [J_{\nu}(x), J_{\mu}^{\dagger}(0)] | \bar{p} \lambda \rangle \end{aligned}$$

donde recordemos ahora que $J_{\mu}(x)$ es la corriente hadrónica débil.

i) Funciones de estructura

Como antes covariancia Lorentz permite escribir una fórmula análoga a (6.3). También ahora $W_{\mu\nu}^*(p, q) = W_{\nu\mu}(p, q)$ y en límite $W_{\mu}^*(q^2, \nu) = W_{\mu}(q^2, \nu)$. Vamos a ver ahora que si la interacción es invariante bajo inversión temporal y despreciamos las interacciones de estados finales entonces $W_{\mu}(q^2, \nu) \equiv 0$. En efecto (VI-19.2)*

$$U_T J_{\mu}(x) U_T^{-1} = \eta (-1)^{\delta_{\mu 0}} J_{\mu}(Tx) \equiv J_{\mu}^T(x), \quad |\eta| = 1 \quad (4)$$

Entonces

$$\text{out} \langle f | J_{\mu}(0) | i \rangle_{\text{in}} \longrightarrow \text{in} \langle \bar{f} | J_{\mu}^T(0) | \bar{i} \rangle_{\text{out}}^* = \text{out} \langle f | U_T^{\dagger} U_T J_{\mu}(0) U_T^{\dagger} U_T | i \rangle_{\text{in}} =$$

46/002

* Recordemos que para los polos semileptomios $L(x) = \frac{G}{\sqrt{2}} L_p(x) J^\mu(x)$ y que bajo T

$$U_T L_p(x) U_T^{-1} = \eta (-1)^{\delta_{\mu 0}} \mathbb{I}_\mu(-x^0, \vec{x}) \equiv \tilde{\eta} (-1)^{\delta_{\mu 0}} L_p(Tx)$$

$L(x)$ debe ser invariante bajo T , en muy buena aproximación, y en tanto $J^\mu(x)$ se debe transformar como

$$U_T J^\mu(x) U_T^{-1} = \eta (-1)^{\delta_{\mu 0}} J^\mu(Tx)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \text{out} \langle f | J^\mu(x) | i \rangle_{\text{in}} &= \text{out} \langle f | U_T^{-1} U_T J^\mu(x) U_T^{-1} U_T | i \rangle_{\text{in}} = \text{in} \langle \bar{f} | U_T J^\mu(x) U_T^{-1} | \bar{i} \rangle_{\text{out}}^* \\ &= \eta^* (-1)^{\delta_{\mu 0}} \text{in} \langle \bar{f} | J^\mu(Tx) | \bar{i} \rangle_{\text{out}}^* \end{aligned}$$

pues para operadores antiunitarios $\langle Vx | A | Vy \rangle^* = \langle x | V^\dagger A V | y \rangle$ y además si la dinámica es invariante bajo inversión temporal

$$\begin{aligned} |\psi_{\text{out}}\rangle &= S |\psi_{\text{in}}\rangle \Rightarrow U_T |\psi_{\text{out}}\rangle = U_T S U_T^{-1} U_T |\psi_{\text{in}}\rangle \stackrel{\text{invariancia}}{=} S^\dagger U_T |\psi_{\text{in}}\rangle \Rightarrow \\ &\Rightarrow U_T |\psi_{\text{in}}\rangle = S U_T |\psi_{\text{out}}\rangle \end{aligned}$$

Hemos usado $|\bar{i}\rangle$ para denotar $|i\rangle$ con los momentos cambiados de signo.

Similarmente

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu}(\bar{p}, q) &= \int \frac{d^4x}{4\pi} e^{iq \cdot x} \sum_\lambda \langle \bar{p} \lambda | J_\nu(x) J_\mu^\dagger(0) | \bar{p} \lambda \rangle = \\ &= \int \frac{d^4x}{4\pi} \sum_\lambda \langle -\bar{p} \lambda | J_\nu(Tx) J_\mu^\dagger(0) | -\bar{p} \lambda \rangle^* e^{iq \cdot x} (-1)^{\delta_{\mu 0} + \delta_{\nu 0}} = \\ &= \int \frac{d^4x}{4\pi} e^{iq \cdot Tx} (-1)^{\delta_{\mu 0} + \delta_{\nu 0}} \sum_\lambda \langle -\bar{p} \lambda | J_\nu(x) J_\mu^\dagger(0) | -\bar{p} \lambda \rangle^* = \\ &= \left\{ \int \frac{d^4x}{4\pi} e^{+i(-Tq) \cdot x} (-1)^{\delta_{\mu 0} + \delta_{\nu 0}} \sum_\lambda \langle -\bar{p} \lambda | J_\nu(x) J_\mu^\dagger(0) | -\bar{p} \lambda \rangle \right\}^* = (-1)^{\delta_{\mu 0} + \delta_{\nu 0}} W_{\mu\nu}(p^0, -\vec{p}; q^0, -\vec{q}). \end{aligned}$$

$$= \text{out} \langle f | J_\mu(0) | i \rangle_{\text{in}}$$

y despreciando las interacciones de estado final

$$\langle f | J_\mu(0) | i \rangle = \eta (-1)^{\delta_{\mu 0}} \langle \bar{f} | J_\mu(0) | \bar{i} \rangle^* \quad (1)$$

donde $|\bar{i}\rangle$ se obtiene de $|i\rangle$ invirtiendo el signo de todos los momentos.

Entonces

$$W_{\mu\nu}(P, q) = (-1)^{\delta_{\mu 0} + \delta_{\nu 0}} W_{\mu\nu}^*(TP, Tq) \quad (2)$$

y entonces se deduce inmediatamente que $W_6(q^2, \nu) \equiv 0$. Quedan por tanto cinco funciones de estructura. Notemos sin embargo que

$$\begin{aligned} q_\mu \bar{u}(\vec{p}', \mu') \gamma^\mu (1 + \gamma_5) u(\vec{p}, \mu) &= \bar{u}(\vec{p}', \mu') (\not{q}' - \not{p}) (1 + \gamma_5) u(\vec{p}, \mu) = \\ &= m \bar{u}(\vec{p}', \mu') (1 + \gamma_5) u(\vec{p}, \mu) \end{aligned} \quad (3)$$

y si despreciamos la masa del leptón cargado los únicos términos de $W_{\mu\nu}$ que contribuyen a la sección eficaz son

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu}(P, q) &= -g_{\mu\nu} W_1(q^2, \nu) + \frac{1}{M^2} P_\mu P_\nu W_2(q^2, \nu) - \\ &- \frac{i}{2M^2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} P^\alpha q^\beta W_3(q^2, \nu) \end{aligned} \quad (4)$$

En esta aproximación

$$\begin{aligned} N^{\mu\nu} W_{\mu\nu} &= 8 \left\{ -q^2 W_1(q^2, \nu) + \left[\frac{2}{M^2} (P \cdot p)(P \cdot p') - (p \cdot p') \right] W_2(q^2, \nu) \right. \\ &\left. + \frac{1}{M^2} \left[(q \cdot p)(P \cdot p') - (q \cdot p')(P \cdot p) \right] W_3(q^2, \nu) \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

y usando las cantidades en el sistema laboratorio

$$\begin{aligned} N^{\mu\nu} W_{\mu\nu} &= 16 E E' \left\{ 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} W_1(q^2, \nu) + \cos^2 \frac{\theta}{2} W_2(q^2, \nu) - \right. \\ &\left. - \frac{E + E'}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2} W_3(q^2, \nu) \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

y así obtenemos

$$\frac{d^2 \sigma^{\nu, \bar{\nu}}}{dq^2 dv} = \frac{E'}{E} \frac{1}{M^2} \frac{G^2}{2\pi} \left\{ 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} W_1^{\nu, \bar{\nu}}(q^2, \nu) + \cos^2 \frac{\theta}{2} W_2^{\nu, \bar{\nu}}(q^2, \nu) \right. \\ \left. + \frac{E + E'}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2} W_3^{\nu, \bar{\nu}}(q^2, \nu) \right\} \quad (1)$$

donde

$$W_{\mu\nu}^{\nu}(\mathbb{P}, q) = \sum_{\lambda} \int \frac{d^4 x}{4\pi} e^{i q \cdot x} \langle \vec{\mathbb{P}} \lambda | [J_{\nu}(x), J_{\mu}^{\dagger}(0)] | \vec{\mathbb{P}} \lambda \rangle \quad (2)$$

$$W_{\mu\nu}^{\bar{\nu}}(\mathbb{P}, q) = \sum_{\lambda} \int \frac{d^4 x}{4\pi} e^{i q \cdot x} \langle \vec{\mathbb{P}} \lambda | [J_{\nu}^{\dagger}(x), J_{\mu}(0)] | \vec{\mathbb{P}} \lambda \rangle$$

de donde

$$W_{\mu\nu}^{\nu*}(\mathbb{P}, q) = -W_{\mu\nu}^{\bar{\nu}}(\mathbb{P}, -q) \quad (\text{Propiedad de cruz}) \quad (3)$$

y esto implica

$$W_i^{\nu}(q^2, \nu) = -W_i^{\bar{\nu}}(q^2, -\nu) \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (4)$$

$$W_5^{\nu}(q^2, \nu) = +W_5^{\bar{\nu}}(q^2, -\nu)$$

con condiciones de positividad

Las funciones de estructura correspondientes a neutrones o anti-neutrones deben satisfacer condiciones de positividad. Usando (7.4) se obtiene

$$W_{\mu\nu}(\mathbb{P}, q) = \begin{vmatrix} W_{00} & 0 & 0 & W_{03} \\ 0 & W_{11} & W_{12} & 0 \\ 0 & W_{12}^* & W_{22} & 0 \\ W_{03}^* & 0 & 0 & W_{33} \end{vmatrix} \quad (5)$$

$$W_{00} = -W_1 + \left(1 - \frac{\nu^2}{M^2 q^2}\right) W_2, \quad W_{11} = W_{22} = W_4$$

$$W_{33} = -\frac{q^2}{M^2} W_4 - \frac{2\nu}{M^2} W_5, \quad W_{03} = -\frac{\sqrt{-q^2}}{M} \sqrt{1 - \frac{\nu^2}{M^2 q^2}} (W_5 + i W_6)$$

$$W_{12} = \frac{i}{2M} \sqrt{-q^2} \sqrt{1 - \frac{\nu^2}{M^2 q^2}} W_3$$

y obtenemos inmediatamente las siguientes condiciones de positividad

$$\left[1 - \frac{v^2}{M^2 q^2} \right] W_2(q^2, v) \geq W_4(q^2, v) \geq \frac{1}{2M} \sqrt{\frac{v^2}{M^2} - q^2} |W_3(q^2, v)| \geq 0$$

$$-q^2 W_4(q^2, v) \geq 2v W_5(q^2, v) \quad (1)$$

$$\left[\left(1 - \frac{v^2}{M^2 q^2} \right) W_2(q^2, v) - W_4(q^2, v) \right] - \left[W_4(q^2, v) + \frac{2v}{q^2} W_5(q^2, v) \right] \geq$$

$$\geq |W_5(q^2, v)|^2 + |W_6(q^2, v)|^2$$

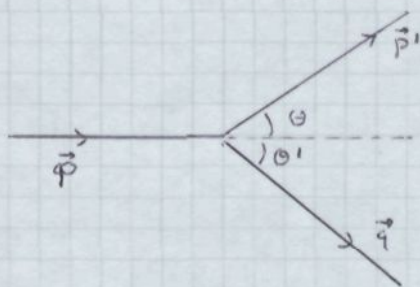
Claramente si hay invariancia bajo inversión temporal debemos poner $W_6 \equiv 0$ en la última desigualdad

(iii) La corriente leptónica

Despreciaremos aquí la masa del lepton cargado. En esta aproximación y en la teoría V-A la helicidad leptónica es conservada y la corriente axial leptónica es

$$L^{\mu} \equiv \bar{u}(\vec{p}', -) \gamma^{\mu} (1 + \gamma_5) u(\vec{p}, -) \quad (2)$$

Supondremos que en el sistema laboratorio \vec{q} está a lo largo del eje z y \vec{p} y \vec{p}' están en el plano $y=0$



$$\vec{q} = (0, 0, |q|)$$

$$\vec{p} = (E \sin \theta', 0, E \cos \theta')$$

$$\vec{p}' = (E' \sin(\theta + \theta'), 0, E' \cos(\theta + \theta'))$$

$$E \sin \theta' = E' \sin(\theta + \theta') \quad (3)$$

$$\sin \frac{\theta}{2} = \sqrt{-\frac{q^2}{2EE'}}, \quad \cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{1 + \frac{q^2}{4EE'}}$$

$$\sin \theta' = \frac{M \sqrt{-q^2}}{v} \sqrt{\frac{E'}{E}} \left(\frac{1 + q^2/4EE'}{1 - q^2 M^2/v^2} \right)^{1/2}, \quad \cos \theta' = \frac{1 - Mq^2/2Ev}{\sqrt{1 - q^2 M^2/v^2}}$$

Usando (VI-12.1)

$$u(\vec{p}, -) = \sqrt{E} \begin{pmatrix} \alpha(\hat{p}, -) \\ -\alpha(\hat{p}, -) \end{pmatrix} \quad \bar{u}(p', -) = \sqrt{E'} [\alpha^+(\hat{p}', -), \alpha^+(\hat{p}', -)] \quad (4)$$

$$\alpha(\hat{p}, -) = \begin{pmatrix} -\sin \theta/2 \\ \cos \theta/2 \end{pmatrix} \quad \alpha(\hat{p}', -) = \begin{pmatrix} -\sin(\theta + \theta')/2 \\ \cos(\theta + \theta')/2 \end{pmatrix}$$

De aquí

$$L^0 = 4 \sqrt{EE'} \sqrt{1 + \frac{q^2}{4EE'}} \quad , \quad L^1 = 2 \frac{M \sqrt{-q^2}}{v} \frac{E + E'}{\sqrt{1 - \frac{M^2 q^2}{v^2}}} \quad (1)$$

$$L^2 = -2L^1 \sqrt{-q^2} \quad , \quad L^3 = L^0 \left(1 - \frac{M^2 q^2}{v^2}\right)^{-1/2}$$

Es inmediato comprobar que $g_{\mu} L^{\mu} = 0$ como debe ser en la aproximación $m=0$.
Introducimos las direcciones polarización

$$E_S^{\mu} \equiv \frac{1}{\sqrt{-q^2}} \left(\sqrt{\frac{v^2}{M^2} - q^2} \quad , \quad 0 \quad , \quad 0 \quad , \quad \frac{v}{M} \right) \quad , \quad E_S^+ \cdot E_S = 1 \quad \text{escalar}$$

$$E_R^{\mu} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left(0 \quad , \quad 1 \quad , \quad +i \quad , \quad 0 \right) \quad , \quad E_R^+ \cdot E_R = -1 \quad \text{dextrógira} \quad (2)$$

$$E_L^{\mu} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left(0 \quad , \quad 1 \quad , \quad -i \quad , \quad 0 \right) \quad , \quad E_L^+ \cdot E_L = -1 \quad \text{levógira}$$

Entonces

$$L^{\mu} = \frac{4M \sqrt{EE'} \sqrt{-q^2}}{v} \left\{ \left(\frac{1 + q^2/4EE'}{1 - M^2 q^2/v^2} \right)^{1/2} E_S^{\mu} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\sqrt{2EE'}} \left(\frac{E + E'}{\sqrt{1 - M^2 q^2/v^2}} + \frac{v}{M} \right) E_L^{\mu} + \frac{1}{2\sqrt{2EE'}} \left(\frac{E + E'}{\sqrt{1 - M^2 q^2/v^2}} - \frac{v}{M} \right) E_R^{\mu} \right\} \quad (3)$$

Suponiendo que solo existe la parte escalar, levógira o dextrógira se obtiene para la sección eficaz

$$\sigma_S = \frac{M \pi}{v + q^2/2} \left[\left(1 - \frac{v^2}{M^2 q^2} \right) W_2(q^2, v) - W_4(q^2, v) \right]$$

$$\sigma_R = \frac{M \pi}{v + q^2/2} \left[W_4(q^2, v) + \frac{1}{2M} \sqrt{\frac{v^2}{M^2} - q^2} W_3(q^2, v) \right] \quad (4)$$

$$\sigma_L = \frac{M \pi}{v + q^2/2} \left[W_4(q^2, v) - \frac{1}{2M} \sqrt{\frac{v^2}{M^2} - q^2} W_3(q^2, v) \right]$$

Es frecuente expresar los datos experimentales en términos de

$$W_2(q^2, v) \quad , \quad L \equiv \frac{\sigma_L}{\sigma_R + \sigma_L + 2\sigma_S} \quad , \quad R \equiv \frac{\sigma_S}{\sigma_R + \sigma_L + 2\sigma_S} \quad (5)$$

Entonces

$$\frac{d^2\sigma}{d|q^2|dv} = \frac{G^2}{2\pi} \frac{E'}{ME} W_2 \left\{ 1 + \frac{q^2}{4EE'} + \frac{v^2/M^2 - q^2}{2EE'} (R+L) + \frac{(E+E') \sqrt{v^2/M^2 - q^2}}{2EE'} (L-R) \right\} \quad (1)$$

$$L, R \equiv \frac{1}{2 \left(1 - \frac{v^2}{M^2 q^2}\right) W_3} \left\{ W_1 \mp \frac{v}{2M^2} \sqrt{1 - \frac{M^2 q^2}{v^2}} W_3 \right\}$$

y en el límite $E \gg 2M$ y $|q^2| \ll v^2/M^2$ esto se reduce a

$$\frac{d^2\sigma}{d|q^2|dv} = \frac{G^2}{2\pi} \frac{E'}{ME} W_2 \left[1 + \frac{v}{ME'} L - \frac{v}{ME} R \right] \quad (2)$$

(v) Variables de scaling

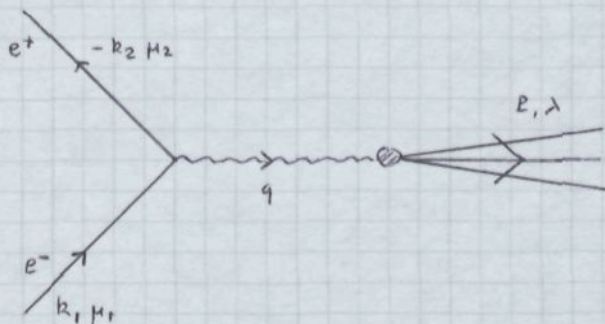
Es frecuente introducir las variables de scaling

$$X \equiv -\frac{q^2}{2v}, \quad Y \equiv \frac{v}{EM} \quad (3)$$

y entonces si la masa del leptón cargado es despreciable

$$\frac{d^2\sigma^{v,\bar{v}}}{dX dY} = \frac{G^2 M E}{\pi} \left\{ X Y^2 W_1^{v,\bar{v}}(q^2, v) + \left(1 - Y - \frac{MXY}{2E}\right) \frac{EY}{M} W_2^{v,\bar{v}}(q^2, v) \mp \left(1 - \frac{1}{2} Y\right) \frac{E}{M} X Y^2 W_3^{v,\bar{v}}(q^2, v) \right\} \quad (4)$$

Consideremos finalmente el proceso de aniquilación e^+e^- en hadrones



Si hay m hadrones en el estado final

$$\sigma^{(m)} = \frac{(2\pi)^4}{2s} \sum_{k_1, k_2} \sum_{\lambda} \int \prod_{i=1}^m \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i} \delta(k_1 + k_2 - P) |T|^2 \quad (5)$$

Con

$$|T|^2 = \frac{16 \pi^2 \alpha^2}{q^4} e^{\mu\nu} S_{\mu\nu}^{(m)}$$

$$e^{\mu\nu} \equiv \bar{v}(\vec{k}_2, \mu_2) \gamma^\mu u(\vec{k}_1, \mu_1) \bar{u}(\vec{k}_1, \mu_1) \gamma^\nu v(\vec{k}_2, \mu_2) \quad (1)$$

$$S_{\mu\nu}^{(m)} \equiv \langle \bar{P} \lambda | J_\mu(0) | 0 \rangle \langle 0 | J_\nu(0) | \bar{P} \lambda \rangle$$

donde $J^\mu(x)$ es la corriente electromagnética. Hemos despreciado la masa de los leptones y $S \equiv q^2 = 2(k_1 \cdot k_2)$. Si tomamos en cuenta todos los estados hadrónicos finales posibles y definimos $W_{\mu\nu}$ en total analogía con los casos anteriores

$$\sigma = \frac{32 \pi^3 \alpha^2}{q^6} W_{\mu\nu}(q) \sum_{\mu_1, \mu_2} e^{\mu\nu} \quad (2)$$

La invariancia gauge nos dice que

$$W_{\mu\nu}(q) = \frac{1}{3} W^\lambda{}_\lambda(q) \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) \quad (3)$$

y en lo tanto

$$\sigma(e^-e^+ \rightarrow \gamma \rightarrow \text{hadrones}) = - \frac{32 \pi^3 \alpha^2}{3 q^4} W^\mu{}_\mu(q) \quad (4)$$

$$W^\mu{}_\mu(q) = \int \frac{d^4x}{4\pi} e^{iq \cdot x} \langle 0 | J^\mu(x) J_\mu(0) | 0 \rangle$$

que son las ecuaciones deseadas

XL1 - MODELO DE PARTONES

Uno de los resultados más interesantes del estudio de la colisión profundamente inelástica leptón-hadrón a altas energías y grandes transferencias de momento es la posibilidad de obtener información detallada acerca de la estructura de los hadrones. Discutiremos aquí un modelo intuitivo pero poderoso en el que los hadrones están compuestos de constituyentes puntuales. El llamado modelo de partones fue introducido por Feynman [R. P. FEYNMAN Phys. Rev. Letters 23, 1415 (1969)] y desarrollado por Bjorken y Paschos [J. D. BJORKEN y E. A. PASCHOS - Phys. Rev. 185, 1975 (1969); Phys. Rev. D1, 3151 (1970)]

Consideremos la colisión leptón-hadrón a altas energías. En el sistema C.M. el momento del hadrón es ($m=0$)

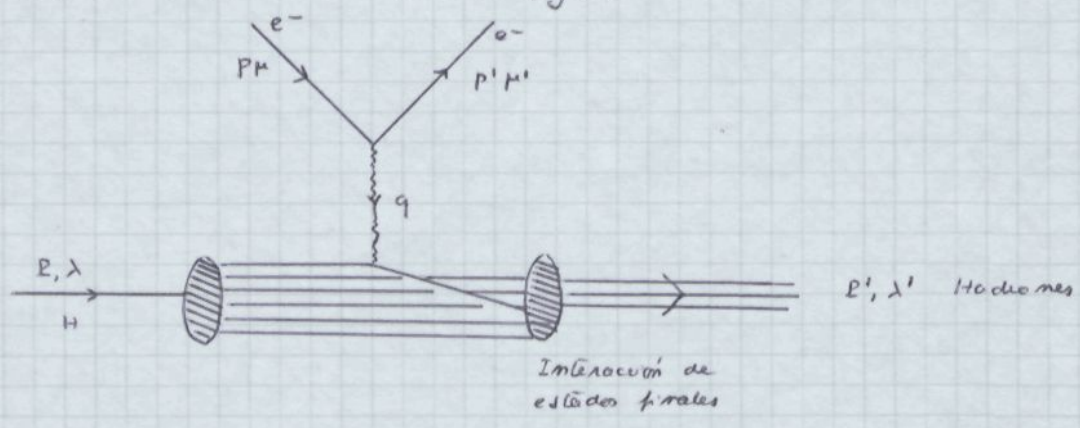
$$|\vec{k}| = \frac{S - M^2}{2\sqrt{S}} \approx \sqrt{\frac{ME}{2}} \quad (1)$$

donde E es la energía del leptón incidente en el sistema laboratorio, es decir el momento del hadrón en el sistema C.M. aumenta como \sqrt{E} . Mas aún el tiempo de interacción τ (ver (XL-2.2)) es

$$\tau \approx \frac{1}{q^0} = \frac{4k}{2v + q^2} \quad (2)$$

Como para valores fijos de las variables de scaling X y Y^* los invariantes v y $-q^2$ aumentan como k^2 (ver XL-2.4) se tiene que a grandes energías $\tau \rightarrow 0$, es decir la interacción es instantánea. A causa del efecto relativista de dilatación de tiempos, la vida media de los estados virtuales del hadrón va hacia infinito en el límite de altas energías y la distribución de carga del hadrón sufre una contracción Lorentz de forma que parece un "pancake". Entonces podemos considerar el hadrón durante el proceso de colisión como constituido por un estado "frozen" de partículas con-reales, los llamados partones, que pueden considerarse libres durante la interacción. Más aún supondremos que el momento de los partones perpendicular a \vec{P} es pequeño. Esto es razonable pues sabemos que si un protón es roto en la colisión con otro hadrón el momento transversal de los secundarios es pequeño. La amplitud para el proceso en el cual el fotón virtual es absorbido por el

partem "a" dejando los partones "b", "c", ... con momentos transversales pequeños no puede interferir con la amplitud del proceso en el que el fotón es absorbido en el parton "b" dejando los partones "a", "c", ... con momentos transversales pequeños; esperamos pues que la colisión por los partones individuales sea incoherente. Por tanto la receta fundamental del modelo de partones es: en la región de colisiones profundamente inelástica un hadrón se comporta como un gas de partones libres la sección eficaz inelástica se obtiene añadiendo incoherentemente las secciones eficaces de colisión para cada uno de los partones. Esta situación viene dada en la figura.



Más aun se supone que la interacción de estados finales que juega un papel esencial en la formación del estado final y que actúa en un tiempo mucho mayor que τ puede despreciarse al calcular la sección eficaz total. Una analogía clásica puede ser útil: consideremos una partícula ligada a un punto mediante una banda elástica que está tensa. Cuando golpeamos la partícula responde como una partícula libre. Posteriormente la banda queda tensa y limita el movimiento de la partícula. Sin embargo, este es irrelevante en el cálculo de la sección eficaz que es proporcional a que sueda algo. Cuando la partícula empieza a moverse ya no sueda algo y por tanto la sección eficaz viene determinada por la respuesta libre inicial. De todo esto

$$\sum_{|F\rangle} \left| \text{Diagram 1} \right|^2 \approx_{\substack{-q^2 \text{ y } v \\ \text{grandes}}} \sum_{|F\rangle, i} \left| \text{Diagram 2} \right|^2$$

Todo estas ideas son los ingredientes básicos de la aproximación de impulso y en su formulación usaremos la teoría de perturbaciones de la mecánica cuántica. Imaginemos un mundo descrito por un Hamiltoniano $H = H_0 + H_1$, donde H_0 describe los constituyentes desmenuados y H_1 sus interacciones.

La interacción puede exponenciarse mediante el operador

$$U(t) \equiv T \left(\exp \left[-i \int_{-\infty}^t d\tau H_I(\tau) \right] \right) \tag{1}$$

donde T indica ordenación temporal. Este operador hace pasar de la imagen de Heisenberg a la de interacción. Usemos $U(t)$ para desmenuar la corriente hadrónica

$$J_\mu(x) = U^{-1}(t) j_\mu(x) U(t) \tag{2}$$

donde $j_\mu(x)$ es la corriente desmenuada que tiene una expresión simple en términos de los campos desmenuados de los constituyentes del hadrón. Entonces el tensor hadrónico $W_{\mu\nu}$ dado en (XL-5.1) se puede escribir

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} (2\pi)^3 \sum_{\lambda} \sum_F \delta(q + P - P_F) \langle UP | j_\nu(0) | UF \rangle \langle U F | j_\mu(0) | UP \rangle = \\ &= \sum_{\lambda} \sum_F \int \frac{d^4x}{4\pi} e^{i q \cdot x} e^{i(P - P_F) \cdot x} \langle UP | j_\nu(x) | UF \rangle \langle UF | j_\mu(0) | UP \rangle \end{aligned} \tag{3}$$

En la teoría de perturbaciones se conservan los momentos pero no las energías. Sin embargo si suponemos que

$$E(P) = E(UP) \quad , \quad E(F) = E(UF) \tag{4}$$

entonces obtenemos inmediatamente

$$W_{\mu\nu} = \sum_{\lambda} \int \frac{d^4x}{4\pi} e^{i q \cdot x} \langle UP | j_\nu(x) j_\mu(0) | UP \rangle \tag{5}$$

donde $|UP\rangle$ es una representación del blanco en términos de estados desmenuados;

$$|UP\rangle = Z^{1/2} \left\{ |P\rangle + \sum_{m \neq P} \frac{\langle m | H_I | P \rangle}{E(P) - E(m)} |m\rangle + \dots \right\} \equiv \sum_m a_m |m\rangle \tag{6}$$

Veamos ahora que hipótesis se deben hacer para que (4) sea aproximadamente válida. Conviene tomar por ejemplo un estado de dos partículas $|m\rangle \equiv |p_1, p_2\rangle$.

En el sistema de referencia C.M.

$$P_1^\mu \equiv (E_1, \vec{p}_T, \Sigma k) \quad , \quad P_2^\mu \equiv (E_2, -\vec{p}_T, (1-\Sigma)k) \tag{7}$$

donde Σ es la fracción de momento de $|P\rangle$ que lleva la primera partícula. Como en la teoría de perturbaciones que consideramos las partículas están en su capa

más veces

$$E_1 = [m_1^2 + \vec{p}_T^2 + \delta^2 k^2]^{1/2} = |\delta| k + \frac{m_1^2 + \vec{p}_T^2}{2|\delta| k} + \dots \quad (1)$$

$$E_2 = [m_2^2 + \vec{p}_T^2 + (1-\delta)^2 k^2]^{1/2} = |1-\delta| k + \frac{m_2^2 + \vec{p}_T^2}{2|1-\delta| k}$$

Como también

$$E(p) = \sqrt{M^2 + k^2} = k + \frac{M^2}{2k} + \dots \quad (2)$$

vemos que la conservación de energía puede tener lugar a lo sumo como $E(p) = E_1 + E_2 + O(k/k)$ y esto solo puede lograrse si $|\vec{p}_T|$ está acotado y $|\delta| + |1-\delta| = 1$, esto es $0 \leq \delta \leq 1$. Notemos que en esta situación los estados parton son de vida media muy larga ya que sus tiempos característicos son

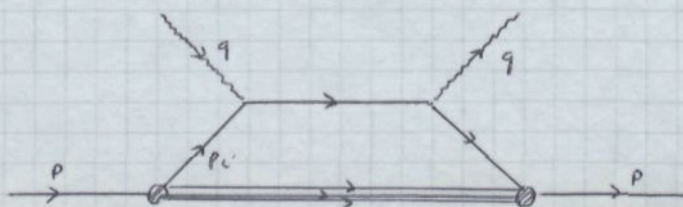
$$T \approx \frac{1}{|E_1 + E_2 - E(p)|} \approx \frac{2k}{\frac{m_1^2 + |\vec{p}_T|^2}{|\delta|} + \frac{m_2^2 + |\vec{p}_T|^2}{|1-\delta|} - M^2} \quad (3)$$

Esto confirma que en esta situación particular la vida media de los estados virtuales es mucho mayor que el tiempo de interacción τ . A partir de ahora supondremos que $|\vec{p}_T|$ está acotado y que $0 \leq \delta \leq 1$ y que (3.5) es cierta. (Queremos sin embargo señalar [S.D. PRELL, y T.M. YAN Ann. Phys. 66, 578 (1972)] que la limitación de $|\vec{p}_T|$ es falsa en todas las teorías de campos renormalizables conocidas si se usa teoría de perturbaciones. Por otra parte la media de $|\vec{p}_T|$ de los secundarios hadrónicos en colisiones de alta energía queda cortado exponencialmente; la relación entre ambos hechos es oscura. A altas energías la contribución de estados distintos de los conucleones queda eliminada, básicamente, por los denominadores en (3.6))

En esta aproximación y usando (3.5) y (3.6)

$$W_{\mu\nu}(p, q) = \sum_{\lambda} \sum_m |a_m|^2 \int \frac{d^4x}{4\pi} e^{iq \cdot x} \langle m | j_\nu(x) j_\mu(0) | m \rangle \quad (4)$$

que se suele representar en el famoso diagrama "bolso" de la figura que



puede calcularse usando reglas de Feynman ordinarias. Podemos escribir

$$W_{\mu\nu}(P, q) = \sum_m |a_m|^2 \sum_i \int \frac{d^4x}{4\pi} e^{iq \cdot x} \langle m | j_\nu(x) j_\mu(0) | m \rangle$$

$$= \sum_m |a_m|^2 \sum_{i \in m} \frac{P_i^0}{P_i^0} W_{\mu\nu}^{(i)}(P_i, q) \quad (1)$$

donde la i recoge todos los partones que constituyen el estado $|m\rangle$. La cantidad $W_{\mu\nu}^{(i)}$ es el parton i -ésimo lo que $W_{\mu\nu}$ era el hadrón inicial. El factor P_i^0/P_i^0 es debido a la normalización de los estados. Usando la análoga de (XL-7.1)

$$W_{\mu\nu}(P, q) = \sum_m |a_m|^2 \sum_{i \in m} Q_i^2 \frac{P_i^0}{P_i^0} \left\{ - \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) W_1^{(i)}(q^2, \nu_i) \right.$$

$$\left. + \frac{1}{m_i^2} \left(P_{i\mu} - \frac{\nu_i q_\mu}{q^2} \right) \left(P_{i\nu} - \frac{\nu_i q_\nu}{q^2} \right) W_2^{(i)}(q^2, \nu_i) \right\} \quad (2)$$

donde hemos introducido Q_i^2 , donde Q_i es la carga del partón i en términos de la carga del protón.

Supongamos que los partones son objetos puntuales sin masa y que tienen spin $1/2$. Indicaremos por ξ_i ($0 \leq \xi_i \leq 1$) la fracción del momento del hadrón que lleva el partón " i ", es decir $P_i = \xi_i P$ y $\nu_i = \xi_i \nu$. Usando (XL-13.3) para partículas sin estructura ($F_1(q^2) = 1$, $F_2(q^2) = 0$)

$$W_{\mu\nu}(P, q) = - \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) \sum_m |a_m|^2 \sum_{i \in m} \frac{1}{2} Q_i^2 \delta(\xi_i - \xi) +$$

$$+ \frac{1}{M^2} \left(P_\mu - \frac{\nu q_\mu}{q^2} \right) \left(P_\nu - \frac{\nu q_\nu}{q^2} \right) \sum_m |a_m|^2 \sum_{i \in m} Q_i^2 \frac{M^2 \xi}{\nu} \delta(\xi_i - \xi) \quad (3)$$

donde hemos introducido la variable $\xi \equiv -q^2/2\nu$. Comparando con (XL-7.1)

$$W_1(q^2, \nu) = \frac{1}{2} \sum_m \sum_{i \in m} |a_m|^2 Q_i^2 \delta(\xi - \xi_i) \quad (4)$$

$$W_2(q^2, \nu) = \frac{M^2 \xi}{\nu} \sum_m \sum_{i \in m} |a_m|^2 Q_i^2 \delta(\xi - \xi_i)$$

Introducimos ahora la función de distribución de partones

$$q_a(x) \equiv \sum_{i \in m} \sum_m |a_m|^2 \delta(\xi - \xi_i)$$

Esta función es tal que el número de partones del tipo "a" con proyección de momento entre \bar{x} y $\bar{x} + d\bar{x}$ es $q_a(\bar{x}) d\bar{x}$. De donde

$$W_1(q^2, \nu) = \frac{1}{2} \sum_a q_a(\bar{x}) Q_a^2 \quad (1)$$

$$W_2(q^2, \nu) = \frac{M^2 \bar{x}}{\nu} \sum_a q_a(\bar{x}) Q_a^2$$

Entonces es de esperar que

$$\lim_{Bj} W_1(q^2, \nu) = \frac{1}{2} \sum_a Q_a^2 q_a(\bar{x}) \equiv F_1(\bar{x}) \quad (2)$$

$$\lim_{Bj} \frac{\nu W_2(q^2, \nu)}{M^2} = \bar{x} \sum_a Q_a^2 q_a(\bar{x}) \equiv F_2(\bar{x})$$

donde el límite Bjorken es $-q^2, \nu \rightarrow \infty$ con $\bar{x} = -q^2/2\nu$ fijo. Este hecho de que los límites solo dependen de \bar{x} es lo que se conoce como scaling Bjorken [J. D. BJORKEN Phys. Rev. 179, 1547 (1969)]. Esta propiedad es una simple consecuencia del modelo de partones y totalmente independiente del hecho de que se haya supuesto para ellos spin 1/2. Las relaciones (2) implican para partones de spin 1/2

$$F_2(\bar{x}) = 2\bar{x} F_1(\bar{x}) \quad (\text{Relación de Callan-Gross}) \quad (3)$$

[C. G. CALLAN y D. J. GROSS. Phys. Rev. Letters 22, 159 (1969)]. Si los partones tuvieran spin 0 entonces $F_1(\bar{x}) = 0$ y $F_2(\bar{x})$ coincide con lo dado en (2) como se deduce de los resultados de la pag. (XL-12).

Consideremos la función R ^{5.107} introducida en (XL-11.3). Podemos escribir

$$R(q^2, \nu) = \frac{1}{W_1(q^2, \nu)} \left\{ -W_1(q^2, \nu) + \frac{1}{2\bar{x}} \frac{\nu W_2(q^2, \nu)}{M^2} - \frac{2M^2 \bar{x}}{q^2} \frac{\nu W_2(q^2, \nu)}{M^2} \right\}$$

de donde

$$\lim_{Bj} R(q^2, \nu) = \frac{1}{F_1(\bar{x})} \left\{ -F_1(\bar{x}) + \frac{1}{2\bar{x}} F_2(\bar{x}) \right\} \quad (4)$$

Devido a los resultados anteriores

$$\lim_{Bj} R(q^2, \nu) = \begin{cases} 0 & \text{para partones de spin } 1/2 \\ \infty & \text{para partones de spin } 0 \end{cases} \quad (5)$$

Este resultado se entiende fácilmente: A muy altas energías y despreciando los momentos transversales la colisión partón - fotón virtual es frontal.

Si \vec{E} está a lo largo del eje Oz , un partón de spin cero tiene $J_z = 0$ en el estado inicial y en el final y por tanto no puede observar el fotón de helicidad ± 1 y de aquí $\sigma_T = 0$ y $R = \sigma_L / \sigma_T \rightarrow \infty$. Para un partón de spin $1/2$, el vector electromagnético conserva la helicidad a altas energías y $\Delta J_z^{\text{partón}} = 1$ que solo puede provenir de un fotón transversal y por tanto $\sigma_L = 0$ y $R \rightarrow 0$.

Los datos experimentales favorecen sin lugar a dudas el spin $1/2$ para los partones.

La invariancia de escala fue predicha por Bjorken basándose en el siguiente argumento: Supongamos que cuando $-q^2, v \rightarrow \infty$ se pueden despreciar todas las masas y los parámetros con dimensiones de forma que no existe ninguna escala natural de masas (y la teoría es invariante bajo transformaciones de escala en las que todas las coordenadas y momentos cambian como $x \rightarrow \lambda x, p \rightarrow p/\lambda$). Como $W_{\mu\nu}(p, q)$ no tiene dimensiones entonces (XL-7.1) implica que $W_2(q^2, v)$ y $v W_2(q^2, v) / M^2$ dependen en este límite solo de \bar{x} y por tanto hay scaling. Este postulado conocido como scaling de Bjorken es lejos de obvio. En general no es cierto que las masas, constantes de acoplamiento son dimensiones, ... puedan despreciarse a altas energías y que la sección eficaz, por ejemplo, dependa únicamente de variables dinámicas con dimensiones. Esto implicaría por ejemplo que $\sigma_{\text{tot}}(p, p) \sim 1/s$ lo cual es falso; en este caso el radio del protón es otra cantidad con dimensiones que juega un papel en la construcción de $\sigma_{\text{tot}}(p, p)$.

Se creyó en un principio que la propiedad de scaling podía ser exacta. Hoy día datos experimentales más precisos demuestran por ejemplo que $F_2(\bar{x}, q^2) \equiv v W_2(q^2, v) / M^2$ decrece con $-q^2$ a grandes \bar{x} y aumenta con $-q^2$ a pequeños \bar{x} . Volveremos más adelante sobre todo esto y de momento continuaremos con el modelo de partones que o bien predice scaling exacto es una aproximación muy buena a la situación experimental.

En lo que sigue identificaremos los partones con los quarks del modelo

de Gell-Mann - Zweig. En este modelo la corriente electromagnética des-
nuda es

$$j_{\mu}^{em}(x) = \frac{2}{3} \bar{u}(x) \gamma_{\mu} u(x) - \frac{1}{3} \bar{d}(x) \gamma_{\mu} d(x) - \frac{1}{3} \bar{s}(x) \gamma_{\mu} s(x) + \dots \quad (1)$$

donde $u(x)$, $d(x)$, $s(x)$, ... son respectivamente los campos de los quarks
 u , d , s , ... los puntos suspensivos corresponden al charm, bottom, top, ...
Similarmemente la corriente hadrónica débil es

$$j_{\mu}^{wk+}(x) = \cos \theta_c \bar{u}(x) \gamma_{\mu} (1 + \gamma_5) d(x) + \sin \theta_c \bar{u}(x) \gamma_{\mu} (1 + \gamma_5) s(x) \quad (2)$$

en la hipótesis de que sólo los quarks u , d y s juegan un papel importante.

Consideremos las funciones de estructura para los procesos elementales
lepton - quark. Supondremos sólo quarks de tipo u , d y s . Se obtiene
fácilmente mediante métodos análogos a los usados para obtener (XL-13.3)

$$e + X \rightarrow e + X' : \quad W_1(q^2, \nu) = \frac{1}{2} Q_X^2 \nu \delta(\nu + \frac{1}{2} q^2) \quad (3)$$

$$W_2(q^2, \nu) = Q_X^2 M^2 \delta(\nu + \frac{1}{2} q^2)$$

donde $X = u, d, s$, ó sus antipartículas

$$\left. \begin{array}{l} \nu + X \rightarrow u + e^- \\ \nu + \bar{u} \rightarrow \bar{X} + e^+ \\ \bar{\nu} + u \rightarrow X + e^+ \\ \bar{\nu} + \bar{X} \rightarrow \bar{u} + e^+ \end{array} \right\} \begin{array}{l} W_1(q^2, \nu) = \alpha (M^2 + \nu) \delta(\nu + \frac{1}{2} q^2) \\ W_2(q^2, \nu) = 2\alpha M^2 \delta(\nu + \frac{1}{2} q^2) \\ W_3(q^2, \nu) = -2\alpha F M^2 \delta(\nu + \frac{1}{2} q^2) \end{array} \quad (4)$$

$$\alpha \equiv \cos^2 \theta_c \quad \text{si } X = d, \quad \alpha = \sin^2 \theta_c \quad \text{si } X = s$$

$$F = +1 \quad (-1) \quad \text{si } X \text{ blanco es un quark (antiquark)}$$

$$X = d, s.$$

De aquí se deduce inmediatamente que la función de estructura e-p es

$$F_1^{ep}(\mathcal{X}) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{4}{9} [u(\mathcal{X}) + \bar{u}(\mathcal{X})] + \frac{4}{9} [d(\mathcal{X}) + \bar{d}(\mathcal{X}) + s(\mathcal{X}) + \bar{s}(\mathcal{X})] \right\} \quad (1)$$

donde $u(\mathcal{X})$ es la densidad de distribución de momento de los quarks de tipo u (recordar que $u(\mathcal{X})d\mathcal{X}$ es el número de quarks de tipo u en una fracción del momento entre \mathcal{X} y $\mathcal{X}+d\mathcal{X}$); igualmente $\bar{u}(\mathcal{X})$ lo es de los antiquarks $\bar{u}(\mathcal{X})$. Similarmenete en los otros casos. La simetría bajo carga implica que $u(\mathcal{X}) [d(\mathcal{X})]$ es la densidad de distribución de los quarks de tipo $d [u]$ en el neutrón, mientras que las distribuciones de s y \bar{s} son análogas en protones y neutrones. Entonces

$$F_1^{em}(\mathcal{X}) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{4}{9} [d(\mathcal{X}) + \bar{d}(\mathcal{X})] + \frac{4}{9} [u(\mathcal{X}) + \bar{u}(\mathcal{X}) + s(\mathcal{X}) + \bar{s}(\mathcal{X})] \right\} \quad (2)$$

Obramamente $F_2(\mathcal{X})$ se obtiene usando la relación de Callan-Gross (6.3)

Las funciones de estructura de neutrones o antineutrones sobre nucleones son

$$F_1^{vp}(\mathcal{X}) = \cos^2 \theta_c [\bar{u}(\mathcal{X}) + d(\mathcal{X})] + \sin^2 \theta_c [s(\mathcal{X}) + \bar{u}(\mathcal{X})]$$

$$F_1^{vm}(\mathcal{X}) = \cos^2 \theta_c [u(\mathcal{X}) + \bar{d}(\mathcal{X})] + \sin^2 \theta_c [s(\mathcal{X}) + \bar{d}(\mathcal{X})] \quad (3)$$

$$F_1^{\bar{v}p}(\mathcal{X}) = \cos^2 \theta_c [u(\mathcal{X}) + \bar{d}(\mathcal{X})] + \sin^2 \theta_c [\bar{s}(\mathcal{X}) + u(\mathcal{X})]$$

$$F_1^{\bar{v}m}(\mathcal{X}) = \cos^2 \theta_c [\bar{u}(\mathcal{X}) + d(\mathcal{X})] + \sin^2 \theta_c [\bar{s}(\mathcal{X}) + d(\mathcal{X})]$$

mientras $F_2(\mathcal{X})$ se obtiene como antes de la relación de Callan-Gross (6.3)

Además de (8.4) obtenemos

$$\lim_{B_j} \frac{\nu W_3(q', \nu)}{M^2} = F_3(\mathcal{X}) \quad (4)$$

y entonces

$$\frac{1}{2} F_3^{\nu p}(\bar{x}) = \cos^2 \theta_c [\bar{u}(\bar{x}) - d(\bar{x})] + \sin^2 \theta_c [-s(\bar{x}) + \bar{u}(\bar{x})]$$

$$\frac{1}{2} F_3^{\nu m}(\bar{x}) = \cos^2 \theta_c [-u(\bar{x}) + \bar{d}(\bar{x})] + \sin^2 \theta_c [-s(\bar{x}) + \bar{d}(\bar{x})]$$

(1)

$$\frac{1}{2} F_3^{\bar{\nu} p}(\bar{x}) = \cos^2 \theta_c [-u(\bar{x}) + \bar{d}(\bar{x})] + \sin^2 \theta_c [\bar{s}(\bar{x}) - u(\bar{x})]$$

$$\frac{1}{3} F_3^{\bar{\nu} p}(\bar{x}) = \cos^2 \theta_c [\bar{u}(\bar{x}) - d(\bar{x})] + \sin^2 \theta_c [\bar{s}(\bar{x}) - d(\bar{x})]$$

En muchos casos la aproximación $\theta_c = 0$ es suficientemente buena, pues los errores experimentales son grandes. Recordar

$$\cos^2 \theta_c = 0.9471 \quad (14) \quad \sin^2 \theta_c = 0.0529 \quad (14) \quad (2)$$

A partir de (9.1), (9.2), (9.3) y (1) es posible obtener en este número de relaciones entre las funciones de estructura. Veamos algunas de ellas

i) Regla de suma de Adler [S.L. ADLER Phys. Rev. 143, 1144 (1965)]

De (9.3)

$$F_4^{\bar{\nu} p}(\bar{x}) - F_4^{\nu p}(\bar{x}) = \cos^2 \theta_c [u(\bar{x}) - \bar{u}(\bar{x}) - d(\bar{x}) + \bar{d}(\bar{x})] + \sin^2 \theta_c [u(\bar{x}) - \bar{u}(\bar{x}) - s(\bar{x}) + \bar{s}(\bar{x})] \quad (3)$$

y por tanto

$$\int_0^1 d\bar{x} [F_4^{\bar{\nu} p}(\bar{x}) - F_4^{\nu p}(\bar{x})] = \cos^2 \theta_c [N_u - N_{\bar{u}} - N_d + N_{\bar{d}}] + \sin^2 \theta_c [N_u - N_{\bar{u}} - N_s + N_{\bar{s}}] = \\ = \cos^2 \theta_c + 2 \sin^2 \theta_c = 1 + \sin^2 \theta_c$$

donde N_q es el número de quarks de tipo q en el protón. Se puede hacer lo mismo con un blanco de neutrones y obtenemos

$$\int_0^1 d\bar{x} \frac{1}{2\bar{x}} [F_2^{\bar{\nu} N}(\bar{x}) - F_2^{\nu N}(\bar{x})] = \\ = \int_0^1 d\bar{x} [F_1^{\bar{\nu} N}(\bar{x}) - F_1^{\nu N}(\bar{x})] = 2T_3 - (T_3 - \frac{3}{2}) \sin^2 \theta_c \quad (4)$$

donde $T_3 = +1/2$ ($-1/2$) para protones (neutrones). En la forma de la F_2 es una consecuencia directa del algebra de conmutadores a tiempos iguales y es válida para todos los valores de $-q^2$ y no solo en el límite de scaling. La comprobación experimental de esta regla no es simple.

ii) Regla de suma de Gross-Llewellyn-Smith [D.J. GROSS y C.H. LLEWELLYN SMITH *Nucl. Phys.* B14, 337 (1969)]

De las relaciones (10.4)

$$\int_0^1 dX [F_3^{VP}(X) + F_3^{\bar{V}P}(X)] = 2 \cos^2 \theta_c \int_0^1 dX [-u(X) + \bar{u}(X) - d(X) + \bar{d}(X)]$$

$$+ 2 \sin^2 \theta \int_0^1 dX [-u(X) + \bar{u}(X) - s(X) + \bar{s}(X)] = -6 \cos^2 \theta_c - 4 \sin^2 \theta = -6 + 2 \sin^2 \theta_c$$

Haciendo lo mismo para el neutrón

$$\int_0^1 dX [F_3^{VN}(X) + F_3^{\bar{V}N}(X)] = -6 + (3 - 2T_3) \sin^2 \theta_c \quad (11)$$

Esta regla fue obtenida por primera vez usando algebra de conmutadores a tiempos iguales.

En la colaboración yargamelle [H. DEGEN et al *Nucl. Phys.* B85, 269 (1975)] se midió

$$\left[\int F_3^{VN} \right]_{\text{neón}} \equiv$$

$$\equiv -\frac{1}{2(S+1)} \int_0^1 dX \left\{ [F_3^{VP}(X) + F_3^{\bar{V}P}(X)] + S [F_3^{Vm}(X) + F_3^{\bar{V}m}(X)] \right\}$$

$$+ \frac{1}{S+1} \int_0^1 dX \frac{1}{X} \left\{ [F_2^{VP}(X) - F_2^{\bar{V}P}(X)] + S [F_2^{Vm}(X) - F_2^{\bar{V}m}(X)] \right\}$$

donde $S = 1.19$ es la razón neutrón / protón en el neón. El segundo término da una contribución pequeña y puede evaluarse mediante (10.4). Usando (11.1)

$$\left[\int F_3^{VN} \right]_{\text{neón}} = \frac{3(2S+1) \cos^2 \theta_c - (S+2)}{(S+1)} = 2.93 \quad (12)$$

que coincide con el valor experimental.

iii) Desigualdad de Nachtmann [O. NACHTMANN J. de Phys. (Paris) 32 97, (1971); *Nucl. Phys.* B38, 397 (1972), *Phys. Rev.* D5, 686 (1972)]

Como la distribución de momento para los quarks debe ser positiva se obtiene

$$\frac{1}{4} \leq \frac{F_2^{em}(\xi)}{F_2^{ep}(\xi)} \leq 4 \tag{1}$$

Esta regla se puede comprobar de la forma siguiente: De (XL-8.3) y usando las variables de scaling (XL-19.3) y en la aproximación en que la masa del leptón es despreciable

$$\frac{d^2\sigma}{d\nu dq^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{\nu q^4} \left\{ \xi y^2 W_1(q^2, \nu) + \left(1 - y - \frac{Mxy}{2E}\right) \frac{\nu W_2(q^2, \nu)}{M^2} \right\} \tag{2}$$

y en el límite de scaling y usando la relación de Callan-Gross

$$\sigma \equiv \lim_{B_j} \frac{\nu q^4}{4\pi\alpha^2} \frac{d^2\sigma}{d\nu dq^2} = \left[1 - y + \frac{1}{2} y^2\right] F_2(\xi) \tag{3}$$

De donde

$$\frac{\sigma_m}{\sigma_p} = \frac{F_2^{em}(\xi)}{F_2^{ep}(\xi)} \tag{4}$$

Cuando se mide esta función de ξ se encuentra que desciende desde $\sigma_m/\sigma_p \approx 1$ para $\xi \approx 0$ hasta $\sigma_m/\sigma_p \approx 1/4$ para $\xi \approx 1$.

Esta desigualdad es muy sensible a las cargas de los quarks y por ejemplo en el modelo de Han-Nambu $1/2 \leq \sigma_m/\sigma_p \leq 2$ lo cual queda eliminado por los datos experimentales.

iv) Desigualdad de anti-quarks

De (9.1), (9.2) y (9.3) obtenemos

$$\frac{18}{5} [F_1^{ep}(\xi) + F_1^{em}(\xi)] = u(\xi) + \bar{u}(\xi) + d(\xi) + \bar{d}(\xi) + \frac{2}{5} [s(\xi) + \bar{s}(\xi)]$$

$$F_1^{vp}(\xi) + F_1^{vm}(\xi) = u(\xi) + \bar{u}(\xi) + d(\xi) + \bar{d}(\xi) \quad \text{con } c = 0$$

y como las funciones de densidad de distribución de momento deben ser positivas se obtiene

$$F_1^{\nu p}(\mathcal{X}) + F_2^{\nu m}(\mathcal{X}) \leq \frac{18}{5} [F_1^{ep}(\mathcal{X}) + F_1^{em}(\mathcal{X})] \quad (1)$$

que usando Callan-gross se puede escribir

$$F_2^{\nu p}(\mathcal{X}) + F_2^{\nu m}(\mathcal{X}) \leq \frac{18}{5} [F_2^{ep}(\mathcal{X}) + F_2^{em}(\mathcal{X})] \quad (2)$$

El miembro de la izquierda ha sido medido en la colaboración Gargamelle [A. BODEK et al Phys. Rev. Letters 30, 1087 (1973)] y el de la derecha se obtiene de los datos SLAC-MIT. Ambos términos son iguales para $\mathcal{X} \geq 0.1$. Esto sugiere que en el nucleón hay poca antimateria salvo a pequeños valores de \mathcal{X} .

v) Regla de suma de momentos [C.H. LLEWELLYN SMITH Phys. Rev. D4, 2392 (1971)]

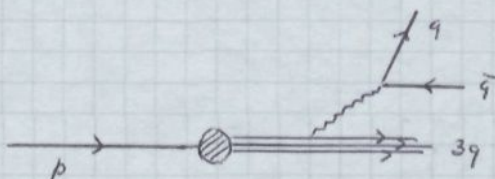
Como $q(\mathcal{X})$ es la densidad de distribución de momento de los quarks q , entonces $\int_0^1 d\mathcal{X} \mathcal{X} q(\mathcal{X})$ es la fracción total de momento que llevan los quarks del tipo q . En el límite $\theta_c = 0$

$$\begin{aligned} \frac{9}{2} [F_2^{ep}(\mathcal{X}) + F_2^{em}(\mathcal{X})] - \frac{3}{4} [F_2^{\nu p}(\mathcal{X}) + F_2^{\nu m}(\mathcal{X})] = \\ = \mathcal{X} \{ u(\mathcal{X}) + \bar{u}(\mathcal{X}) + d(\mathcal{X}) + \bar{d}(\mathcal{X}) + s(\mathcal{X}) + \bar{s}(\mathcal{X}) \} \end{aligned}$$

obtenemos

$$\int_0^1 d\mathcal{X} \left\{ \frac{9}{2} [F_2^{ep}(\mathcal{X}) + F_2^{em}(\mathcal{X})] - \frac{3}{4} [F_2^{\nu p}(\mathcal{X}) + F_2^{\nu m}(\mathcal{X})] \right\} = 1 - \epsilon \quad (3)$$

donde ϵ es la fracción del momento del nucleón que no se llevan los quarks. Los experimentos dan $\epsilon \approx 1/2$. Puesto que no todo el momento del nucleón se lo llevan los quarks y antiquarks la interpretación usual es que el resto lo llevan los gluones que deben presentarse en el nucleón ligando los nucleones entre sí y cuando pares quark-antiquark



Los datos experimentales sugieren que $F_2(x) \rightarrow \text{cte}$ cuando $x \rightarrow 0$ y en tanto $F_1(x) \sim 1/x$ en este límite. Este comportamiento se puede entender a partir de la teoría de Regge [H.D.I. ABARBANEL, M.Z. GOLDBERGER y S.B. TREIMAN, Phys. Rev. Letters 22, 500 (1969)]. En la teoría de Regge esperamos que las secciones eficaces ($XL-11.1$) y ($XL-18.4$) se comporten como

$$\sigma_i \sim v^{\alpha_i(0)-1} \quad (1)$$

$v \rightarrow \infty, q^2 = \text{fijo}$

donde $\alpha_i(t)$ es la trayectoria dominante que puede ser intercambiada en el scattering hadrónico [recordar que de acuerdo con el teorema óptico $\sigma \sim \text{Im} A(JN \rightarrow JN, \text{forward})$ donde J es la corriente adecuada]. Esto implica que

$$W_1(q^2, v) \sim \beta_1(q^2) v^{\alpha_1(0)}, \quad W_2(q^2, v) \sim \beta_2(q^2) v^{\alpha_2(0)-2}$$

$$W_3(q^2, v) \sim \beta_3(q^2) v^{\alpha_3(0)-1} \quad (2)$$

Este resultado se puede derivar más formalmente haciendo un análisis de helicidad en el canal t de la colisión elástica corriente-nucleón y usando el modelo de Regge. El Pomeron puede contribuir a W_1 y W_2 de forma que esperamos que $\alpha_1(0) = \alpha_2(0) = 1$. No puede contribuir a W_3 que es debido a la interferencia de las corrientes vectorial y axial [$\sim \text{Im} A[J^VN \rightarrow J^VN]$] ya que estas corrientes tienen paridad G -opuesta. Se debe intercambiar una unidad de paridad G y en tanto $\alpha_3(0) \cong 1/2$. Si las contribuciones de Regge tienen la propiedad de scaling entonces para $-q^2 \rightarrow \infty$

$$\beta_1(q^2) \sim (-q^2)^{-\alpha_1(0)}, \quad \beta_2(q^2) \sim (-q^2)^{-\alpha_2(0)+1}, \quad \beta_3(q^2) \sim (-q^2)^{-\alpha_3(0)} \quad (3)$$

y en tanto

$$F_1(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} x^{-\alpha_1(0)}, \quad F_2(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} x^{-\alpha_2(0)+1}, \quad F_3(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} x^{-\alpha_3(0)} \quad (4)$$

e introduciendo las trayectorias dominantes

$$F_1(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}, \quad F_2(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \text{cte}, \quad F_3(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (5)$$

Como el Pomeron es par hay conjugación de carga y tiene isospin cero

esperamos que la colisión de los cuarks J y J^+ de p, \bar{p}, n y \bar{n} sea idéntica para $x \rightarrow 0$. Todo esto sugiere que

$$\left. \begin{aligned} u(x) \sim \bar{u}(x) \sim d(x) \sim \bar{d}(x) \sim 1/x \\ s(x) \sim \bar{s}(x) \sim 1/x \end{aligned} \right\} x \rightarrow 0 \quad (1)$$

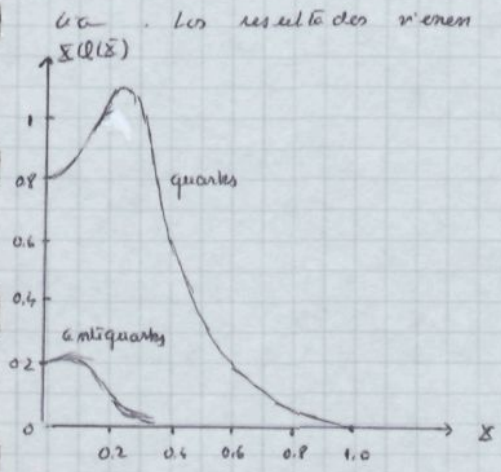
Todo esto implica que $\sigma_{M1} / \sigma_p \rightarrow 1$ para $x \rightarrow 0$ lo cual está en buen acuerdo con los datos experimentales. Efectos cinemáticos debidos a las masas de los quarks hacen esperar que las distribuciones de momento de los quarks u y d difieran de las s en el límite $x \rightarrow 0$.

Los datos de la colaboración Gargamelle [H. DEEDEN et al Nucl. Phys. B85, 269 (1975)] permiten calcular $F_2(x)$ y $F_3(x)$ y calcular las cantidades ($\theta_c = 0$)

$$\begin{aligned} xQ(x) &\equiv \frac{1}{4} \left\{ F_2^{vp}(x) + F_2^{vm}(x) - x [F_3^{vp}(x) + F_3^{vm}(x)] \right\} = \\ &= x [u(x) + d(x)] \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} x\bar{Q}(x) &\equiv \frac{1}{4} \left\{ F_2^{vp}(x) + F_2^{vm}(x) + x [F_3^{vp}(x) + F_3^{vm}(x)] \right\} = \\ &= x [\bar{u}(x) + \bar{d}(x)] \end{aligned}$$

Demostremos cuenta que $Q(x)dx$ es el número de quarks de tipos u y d con momento fraccional en $[x, x+dx]$, mientras que $xQ(x)$ es el momento total que llevan los quarks en una unidad de intervalo de x . Los resultados experimentales indican que $Q(x) \sim \bar{Q}(x) \sim 1/x$ para $x \rightarrow 0$ en buen acuerdo con la experiencia.



Los resultados vienen esquematizados en la figura. Es de notar que solo entre un 5 y 10% del momento es llevado en los antiquarks \bar{u} y \bar{d} , y que la mayor fracción del momento idéntificado u lo llevan los quarks de valencia. El resto del momento se lo llevan los gluones. De todo esto surge la siguiente imagen del nucleón

$$p = \underbrace{(u + u + d)}_{\text{Quarks de valencia gran } \langle x \rangle} + \underbrace{(u + \bar{u} + d + \bar{d} + s + \bar{s} + \dots)}_{\text{mar de quarks + antiquarks pequeños } x}$$

+ gluones
 $\langle x \rangle$ intermedios.

De la figura de la pag 13 esperamos que el valor de \mathcal{E} para los gluones sea intermedio entre los quarks de valencia y el mar quark-antiquark.

Como aplicación de todo esto consideremos la producción de hadrones en las colisiones e^+e^- . De acuerdo (XL-20.4) para evaluar la sección eficaz debemos calcular $W_{\mu}^{\mu}(q^2)$. Como antes usamos el operador $U(t)$ para desmenuar la corriente electromagnética $J^{\mu}(x)$ e introducir la desmenua $j^{\mu}(x)$. En el límite $q^2 \rightarrow \infty$, que en el sistema C.M. implica $q^0 \rightarrow \infty$, y suponiendo como antes que los momentos transversales están cuantizados, para las partículas que aparecen en los estados intermedios podemos escribir

$$W_{\mu}^{\mu}(q^2) \xrightarrow{q^2 \rightarrow \infty} \int \frac{d^4x}{4\pi} e^{iq \cdot x} \langle 0 | j^{\mu}(x) j_{\mu}(0) | 0 \rangle \quad (1)$$

y teniendo en cuenta (8.1) obtenemos en el modelo de quark-partones

$$W_{\mu}^{\mu}(q^2) \xrightarrow{q^2 \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_a \frac{Q_a^2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p_1}{2E_1} \frac{d^3p_2}{2E_2} \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \delta(q - p_1 - p_2) \bar{u}_a(\vec{p}_1, \lambda_1) \gamma^{\mu} u_a(p_1, \lambda_1) \cdot \bar{u}_a(\vec{p}_2, \lambda_2) \gamma_{\mu} u_a(\vec{p}_2, \lambda_2) = - \frac{q^2}{8\pi^2} \sum_a Q_a^2 \quad (2)$$

donde la suma está extendida a los distintos tipos de quarks (colores y aromas). Por tanto

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \gamma \rightarrow \text{hadrones}) \xrightarrow{q^2 \rightarrow \infty} \frac{4\pi\alpha^2}{3q^2} \sum_a Q_a^2 \quad (3)$$

Una fórmula análoga es válida para $\sigma(e^+e^- \rightarrow \gamma \rightarrow \mu^+\mu^-)$ si $\sum_a Q_a^2 \rightarrow 1$. Entonces si

$$R(q^2) \equiv \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \gamma \rightarrow \text{hadrones})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \gamma \rightarrow \mu^+\mu^-)} \quad (4)$$

obtenemos

$$\lim_{q^2 \rightarrow \infty} R(q^2) = \sum_a Q_a^2 \quad (5)$$

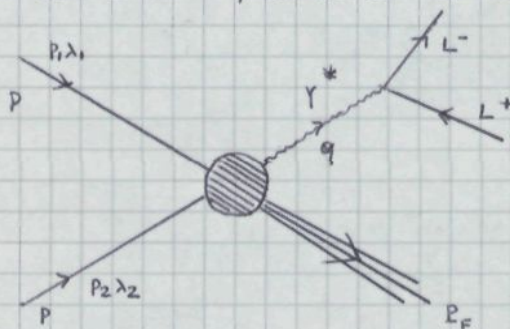
Experimentalmente se encuentra que en la región $2.5 \text{ GeV} \leq q^0 \leq 4. \text{ GeV}$ el valor de R es esencialmente constante y vale $R \approx 2.5$. En el modelo de quarks de Gell-Mann - Zweig con tres colores $R = 3(4/9 + 1/9 + 1/9) = 2$, en buen acuerdo con los datos experimentales. (En el modelo de Han-Nambu $R = 4$). Entre

$4 \text{ GeV} \leq q^0 \leq 9 \text{ GeV}$ se encuentra que $R(q^2)$ es constante con $R \approx 5.0$. Ahora el quark encantado puede producirse y además los datos experimentales incluyen la producción de pares e^-e^+ y por tanto el valor teórico es $R = 3\left(\frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}\right) + 1 = 13/3 \approx 4.3$ en buen acuerdo con la experiencia.

XLII - A - MECANISMO DE DRELL-YAN

De todo lo dicho surge una descripción física sencilla para los procesos físicos considerados en este capítulo, en los que se detecta a lo sumo una partícula en el estado final, haciendo uso de la unitariedad. Por ejemplo el proceso $e + p \rightarrow e + \text{"anything"}$ aparece como una superposición incoherente de procesos clásicos en los constituyentes elementales del protón. Estos constituyentes se comportan como partículas puntuales, sin estructura, y la dinámica de las interacciones fuertes es totalmente aislada en términos de la estructura del protón expresada a través de los constituyentes del protón.

Drell y Yan [S.D. DRELL y T.M. YAN Phys. Rev. Lett. 24, 855 (1970), Phys. Rev. Lett. 25, 316 (1970), Ann. Phys. (N.Y.) 66, 578 (1971)] intentaron hallar otros procesos en los que se satisficieran las condiciones matemáticas que permitieran aplicar la aproximación de impulso, de la que el modelo de partones es una expresión adecuada a las interacciones entre partículas elementales. Empezaremos considerando el llamado mecanismo de Drell-Yan a la producción de pares leptónicos en colisiones pp. Este proceso se halla representado en la figura



$L = e, \mu, \tau, \dots$

$S \equiv (p_1 + p_2)^2$

$q^2 \equiv m^2 > 0$

La estructura hadrónica relevante es ahora

$$W_{\mu\nu}(p_1, p_2, q) = \frac{1}{2} (2\pi)^3 \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \sum_F \delta(p_1 + p_2 + q - p_F)$$

$$\langle p_1, \lambda_1, p_2, \lambda_2 | J_\nu(0) | F \rangle \langle F | J_\mu(0) | p_1, \lambda_1, p_2, \lambda_2 \rangle \tag{1}$$

donde $J_\mu(x)$ es la corriente electromagnética. Como antes podemos obtener la forma equivalente

$$W_{\mu\nu}(p_1, p_2, q) = \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \int \frac{d^4x}{4\pi} e^{-i q \cdot x} \langle p_1, \lambda_1, p_2, \lambda_2 | J_\nu(x) J_\mu(0) | p_1, \lambda_1, p_2, \lambda_2 \rangle \tag{2}$$

Consideremos el sistema C.M. y altas energías de forma que

$$p_1^\mu \equiv (P, 0, 0, P) \quad , \quad p_2^\mu \equiv (P, 0, 0, -P) \quad , \quad q^\mu \equiv (q^0, \vec{q}_T, \Sigma P) \tag{3}$$

con $P \rightarrow \infty$. Tomaremos el límite de forma que

$$\tau \equiv \frac{q^2}{s} \equiv \frac{m^2}{s} \approx \frac{m^2}{4P^2} = \text{fixed} \quad (1)$$

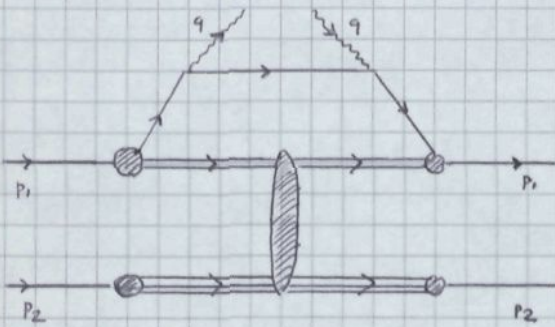
Evidentemente

$$q_0^2 = P^2 (4\tau + \Sigma^2) + \vec{q}_T^2 \quad (2)$$

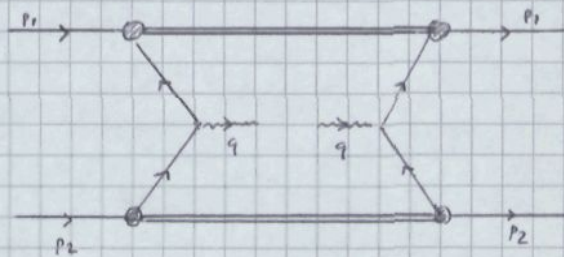
Notar que en este caso el tiempo de interacción no ligo se haya uno para $P \rightarrow \infty$ si τ es fijo. Ahora podemos desarrollar las técnicas anteriores imponiendo los mismos cortes sobre el momento transversal y obtenemos

$$W_{\mu\nu} = \sum_{\lambda, \lambda_2} \sum_{m, n} |a_m|^2 |a_n|^2 \int \frac{d^4x}{4\pi} e^{-i q x} \langle m, m | j_\nu(x) j_\mu(0) | n, n \rangle \quad (3)$$

De forma más se puede pensar que las contribuciones a (3) provienen de los siguientes diagramas



Bremsstrahlung de partones



Aniquilación pomon-pomón

El diagrama de bremsstrahlung se supone que está fuertemente deprimido pues la aproximación de impulso fume esencialmente las partículas en su capa más rica y entonces es imposible obtener $q^2 > 0$ y grandes, mientras que esto no ocurre en el diagrama de aniquilación donde el vertice de interacción conteniendo la corriente es el mismo que aparece en el proceso $e^+e^- \rightarrow$ hadrones. Siguiendo a Drell-Yan supondremos dominante el diagrama de aniquilación.

Para obtener la sección eficaz podremos de la siguiente forma: la aproximación de impulso nos dice que podemos considerar los hadrones entrantes como dos haces de partones que colisionan. Si $q_a(\vec{x}_1)$ y $\bar{q}_a(\vec{x}_2)$ indican, como antes, la función de distribución de momento de un partón de tipo a en un hadron de momento $(\vec{x}_1 P, \vec{0}, x, P)$ y de un partón de tipo \bar{a} en un hadron de momento $(x_2 P, \vec{0}, -x_2 P)$ obtendremos inmediatamente a (XL1-16.3)

$$\frac{d^2\sigma}{d\bar{x}_1 d\bar{x}_2} (pp \rightarrow (L^+L^-) + \text{Anything}) = \frac{4\pi\alpha^2}{9q^2} \sum_a Q_a^2 [q_a(\bar{x}_1)\bar{q}_a(\bar{x}_2) + \bar{q}_a(\bar{x}_1)q_a(\bar{x}_2)] \quad (1)$$

Como estamos considerando quarks coloreados hemos dividido por un factor 3: solo un tercio de las colisiones parton-parton se producen entre quarks de idéntico color y pueden conducir a aniquilación. Como q^k es la suma de los momentos de los quarks que se aniquilan obtenemos (2.2) $q^k \equiv (q^0, \vec{0}, XE) \Rightarrow X = X_1 - X_2$

$$\bar{x} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2, \quad \tau = \bar{x}_1 \bar{x}_2, \quad \vec{q}_T \approx 0 \quad (2)$$

donde la última relación es una consecuencia del corte que hemos supuesto para momentos transversales. Teniendo esto en cuenta

$$\frac{d\sigma}{dm^2} (pp \rightarrow (L^+L^-) + \text{Anything}) = \frac{4\pi\alpha^2}{9m^4} \int d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 \bar{x}_1 \bar{x}_2 \delta(X_1 X_2 - \tau) \sum_a Q_a^2 [q_a(\bar{x}_1)\bar{q}_a(\bar{x}_2) + \bar{q}_a(\bar{x}_1)q_a(\bar{x}_2)] \quad (3)$$

Las consecuencias son relevantes en la discusión de los datos experimentales

i) La ecuación (3) contiene una ley de scaling simple

$$s^2 \frac{d\sigma}{dm^2} = F(\tau) \quad \text{o} \quad m^3 \frac{d\sigma}{dm} = \tilde{F}(\tau) \quad (4)$$

ii) El momento transversal medio, $\langle \vec{q}_T \rangle$, debe estar limitado ya que hemos supuesto que los momentos transversales de los partones están correlacionados

iii) Como la sección eficaz es una suma incoherente sobre constituyentes las secciones eficaces en núcleos deben ser proporcionales al número atómico A .

La situación experimental es la siguiente [J. Ellis, "Deep Hadronic Structure" Les Houches, July 1976]: La ley de escala (4) se cumple bien para $\sqrt{s} \gtrsim 40$ GeV, el nivel medio $\langle \vec{q}_T \rangle$ parece aumentar con m de forma desagradable y la dependencia lineal en A parece razonable para $m \gtrsim 3$ GeV. Intente mos ahora calcular (3)

$$m^3 \frac{d\sigma}{dm} = \frac{8\pi\alpha^2}{9} \sum_a Q_a^2 \mathcal{L}_{a\bar{a}}(\tau) \quad (5)$$

$$\mathcal{L}_{a\bar{a}}(\tau) \equiv \int d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 \bar{x}_1 \bar{x}_2 \delta(\bar{x}_1 \bar{x}_2 - \tau) [q_a(\bar{x}_1)\bar{q}_a(\bar{x}_2) + \bar{q}_a(\bar{x}_1)q_a(\bar{x}_2)]$$

donde $\mathcal{L}_{a\bar{a}}(\tau)$ se denomina la luminosidad de la colisión $a\bar{a}$. Para pequeños τ la

contribución a la integral proviene de δ_1 y δ_2 muy pequeñas. Si consideramos únicamente quarks de tipo u, d y s y además despreciamos los efectos debidos a la masa del extraño, se obtiene (XLI-15.4)

$$u(x) \sim \bar{u}(x) \sim d(x) \sim \bar{d}(x) \sim s(x) \sim \bar{s}(x) \sim \frac{C}{x}, \quad x \rightarrow 0 \quad (1)$$

y usando (XLI-9.4) y la relación de fallom-gross

$$F_2^{ep}(0) \approx \frac{4C}{3}$$

y como experimentalmente $F_2^{ep}(0) \approx 1/3$ se obtiene $C \approx 1/4$ y por tanto

$$u_{\bar{u}}(\tau) \approx d_{\bar{d}}(\tau) \approx s_{\bar{s}}(\tau) \approx 2C^2 \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \delta(x_1 x_2 - \tau) = 2C^2 \int_{\tau}^1 \frac{dx_1}{x_1} = 2C^2 \ln \tau^{-1} \quad (2)$$

de donde

$$m^3 \frac{d\sigma}{dm} \approx \frac{8\pi\alpha^2}{9} \left(\sum_c Q_c^2 \right) 2C^2 \ln \tau^{-1} \quad (3)$$

Si por ejemplo $\tau = 10^{-2}$ entonces $m^3 d\sigma/dm \approx 2.2 \times 10^{-32} \text{ GeV}^2 \text{ cm}^2$ que es perfectamente compatible con los datos experimentales. En la figura damos datos experimentales para $m^3 d\sigma/dm$

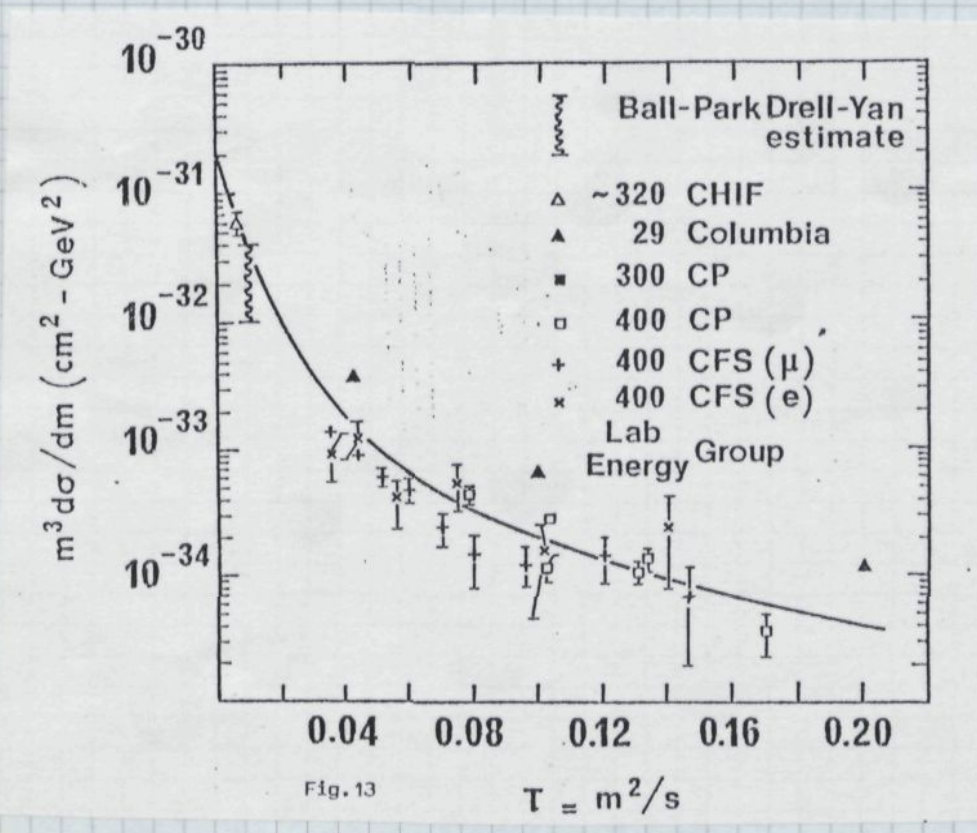


Fig. 13

donde se aprecia claramente la ley de escala. El valor que acabamos de calcular se da en la figura con sus puntos 2 de error típicos. La línea continua se obtiene de (3.5) con aproximaciones más sofisticadas a las funciones de distribución de quarks.

El cálculo de la sección eficaz que acabamos de realizar puede extenderse a otras partículas que tengan masa suficientemente pequeña que se pueda aplicar la aproximación de impulso. Ejemplos son la producción de W^\pm y Z^0 [E.A. PASCHOS y LL. WANG Comm. Nucl. Part. Phys. 6, 87 (1976)], bosón de Higgs [J. ELLIS, M.K. GALLARD y D.V. MOND POULOS

Nucl. Phys. B106, 292 (1976) y probablemente la J/ψ [D. SILVERI Nucl. Phys. B106, 95 (1976)]
 [A. DONNACHIE y P.V. LANDSHOFF Nucl. Phys. B112, 233 (1976)]

Consideremos, por ejemplo la producción de Z^0 . En el modelo standard la acoplamiento del Z^0 viene dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int}(x) = & \sum_q \bar{q}_a(x) \gamma^\mu (g_{Vq} + g_{Aq} \gamma_5) q_a(x) Z_\mu(x) + \sum_L \bar{L}(x) \gamma^\mu (g_{VL} + g_{AL} \gamma_5) L(x) Z_\mu(x) \\ & + \sum_{\nu_L} \bar{\nu}_L(x) \gamma^\mu (1 + \gamma_5) \nu_L(x) Z_\mu(x) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\bar{G} \equiv \left[\frac{G M_W^2}{2\sqrt{2} \cos^2 \theta_W} \right]^{1/2}, \quad M_W^2 = \frac{\pi \alpha}{\sqrt{2} G \sin^2 \theta_W}, \quad M_W = M_Z \cos \theta_W$$

$$g_V = \bar{G} \left(1 - \frac{8}{3} \sin^2 \theta_W \right), \quad g_A = \bar{G} \quad \text{(Quark tipo u)}$$

$$g_V = \bar{G} \left(-1 + \frac{4}{3} \sin^2 \theta_W \right), \quad g_A = -\bar{G} \quad \text{(Quark tipo d)}$$

$$g_V = \bar{G} \left(-1 + 4 \sin^2 \theta_W \right), \quad g_A = -\bar{G} \quad \text{Lepton}$$

$$g_L = \bar{G} \quad \text{neutrinos}$$

donde G es la constante de acoplamiento de Fermi y θ_W el ángulo de Weinberg.

Empezamos calculando $\Gamma(Z^0 \rightarrow L^+ L^-)$ suponiendo $m_L^2 \ll M_Z^2$. Tenemos

$$\Gamma(Z^0 \rightarrow L^+ L^-) = \frac{(2\pi)^4}{2M_Z} \frac{1}{3} \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} \delta(p - p_1 - p_2) |T|^2$$

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2} |T|^2 = \sum_\lambda \sum_{\lambda_1, \lambda_2} |\epsilon^\mu(p, \lambda) \bar{u}(p_1, \lambda_1) \gamma_\mu (g_{VL} + g_{AL} \gamma_5) v(p_2, \lambda_2)|^2 =$$

$$= \left(-g^{\mu\nu} + \frac{p^\mu p^\nu}{M_Z^2} \right) \text{Tr} \{ \not{p}_1 \gamma_\mu (g_{VL} + g_{AL} \gamma_5) \not{p}_2 \gamma_\nu (g_{VL} + g_{AL} \gamma_5) \} =$$

$$= \left(-g^{\mu\nu} + \frac{p^\mu p^\nu}{M_Z^2} \right) (g_{VL}^2 + g_{AL}^2) \text{Tr} [\not{p}_1 \gamma_\mu \not{p}_2 \gamma_\nu] = 4M_Z^2 (g_{VL}^2 + g_{AL}^2)$$

y por tanto

$$\Gamma(Z^0 \rightarrow L^+ L^-) = \frac{M_Z}{12\pi} (g_{VL}^2 + g_{AL}^2) \quad (2)$$

y la anchura total del Z^0 es

$$\Gamma(Z^0) = \frac{M_Z}{12\pi} \left\{ \sum_{\text{quarks}} (g_{Vq}^2 + g_{Aq}^2) + \sum_{\text{lept}} (g_{VL}^2 + g_{AL}^2) + \sum_{\text{neutr}} 2g_L^2 \right\}$$

El cual

$$\Gamma(Z^0) = \frac{M_Z \alpha}{48 \sin^2 \theta_w \cos^2 \theta_w} \left\{ \left[(1 - 4 \sin^2 \theta_w)^2 + 1 \right] N_L + 2 N_{\nu L} + 3 \left[\left(1 - \frac{8}{3} \sin^2 \theta_w\right)^2 + 1 \right] N_u + 3 \left[\left(1 - \frac{4}{3} \sin^2 \theta_w\right)^2 + 1 \right] N_d \right\} \quad (1)$$

donde $N_L, N_{\nu L}, N_u, N_d$ son, respectivamente, el número de leptones cargados, neutrinos, quarks tipo u y quarks tipo d. Com

$$\sin^2 \theta_w = 0.230, \quad M_Z = 88.6 \text{ GeV}, \quad \alpha = 1/137.036$$

$$\Gamma(Z^0) = 0.0761 \text{ GeV} \left\{ 1.006 N_L + 2 N_{\nu L} + 3.449 N_u + 4.442 N_d \right\} \quad (2)$$

Si $N_L = 3, N_{\nu L} = 3, N_u = 2, N_d = 3$ entonces $\Gamma(Z^0) = 2.23 \text{ GeV}$ y la branching ratios son

$$B_u = 0.24, \quad B_d = 0.46, \quad B_e = 0.10, \quad B_{\nu e} = 0.20 \quad (3)$$

Consideremos ahora la sección eficaz (3.5)

$$\frac{d\sigma}{dm^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{9m^4} \sum_a Q_a^2 v_{e\bar{a}}(z) \quad (4)$$

Para obtener la sección eficaz deseada debemos llevar a cabo las substituciones

$$e^4 Q_a^2 \longrightarrow (g_{V_a}^2 + g_{A_a}^2) (g_{V_e}^2 + g_{A_e}^2) \quad (5)$$

y para el propagador

$$\frac{1}{m^2} \longrightarrow \frac{1}{(m^2 - M_Z^2)^2 + M_Z^2 \Gamma_Z^2} \quad (6)$$

Y así obtenemos

$$\sigma(p p \longrightarrow Z^0 + \text{Anything}; Z^0 \longrightarrow L^+ L^-) = \frac{1}{36\pi} \sum_a (g_{V_a}^2 + g_{A_a}^2) (g_{V_e}^2 + g_{A_e}^2) \int_0^s dm^2 \frac{v_{e\bar{a}}(m^2/s)}{(m^2 - M_Z^2)^2 + M_Z^2 \Gamma_Z^2} \quad (7)$$

donde se ha tomado en cuenta la anchura de la Z^0 . Suponiendo que $v_{e\bar{a}}(m^2/s)$ depende de forma suave de m^2 y para $s \gg M_Z^2$ tomando en cuenta que se comporta con pequeño

emoi exte mdero el i ntervalo de i ntegraci on de (-∞, +∞) y usardo (8.2)

$$\sigma(pp \rightarrow Z^0 + \text{Anything}; Z^0 \rightarrow L^+L^-) = \frac{1}{36\pi} \sum_a \frac{12\pi \Gamma(Z^0 \rightarrow q_a \bar{q}_a)}{3M_Z} \cdot \frac{12\pi \Gamma(Z^0 \rightarrow L^+L^-)}{M_Z}$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{+\infty} dm^2 \frac{1}{(m^2 - M_Z^2)^2 + M_Z^2 \Gamma_Z^2} \tag{1}$$

La i ntegral puede llevarse a cabo analiticamente con el resultado $\pi/M_Z \Gamma_Z$ y asi obtenemos

$$\sigma(pp \rightarrow Z^0 + \text{Anything}; Z^0 \rightarrow L^+L^-) = \frac{4\pi^2 \Gamma_Z B_L}{3M_Z^3} \sum_a B_a \cdot \int_a \cdot (M_Z^2/s) \tag{2}$$

Esta formula puede extenderse facilmente a otras situaciones

$$\sigma(pp \rightarrow R + \text{Anything}; R \rightarrow f) = \frac{4\pi^2 \Gamma_R B_f}{M_R^3} \frac{2J+1}{9} \sum_a B_a \int_a \cdot (M_R^2/s) \tag{3}$$

valida para la producci on de cualquier resonancia R, de masa R, spin J, anchura Γ_R branching ratio B_a en $\bar{q}_a q_a$ y branching ratio B_f en el estado final f modo para detectar la resonancia.

Si suponemos que las luminosidades son las mismas para todos los quarks y ademas elegimos $M_Z^2/s = 0.012$ como suede en un anillo pp a 500 GeV en cada haz y usamos los resultados anteriores

$$\begin{aligned} \sigma(pp \rightarrow Z^0 + \text{Anything}; Z^0 \rightarrow \mu^+\mu^-) &= \frac{4\pi^2 \Gamma_Z}{3M_Z^3} 0.034 \cdot (0.24 + 0.56) \\ &= \frac{4\pi^2 \Gamma_Z}{3M_Z^3} 0.024 \approx 5.06 \times 10^{-27} \text{ GeV}^{-2} = 2 \times 10^{-32} \text{ cm}^2. \end{aligned} \tag{4}$$

Otras aplicaciones de este modelo pueden hallarse en [C.H. LLEWELYN-SMITH "Deep Inelastic Phenomena" Lectures. (argense 1977)].

XLII - LIBERTAD ASINTÓTICA Y COLISIONES PROFUNDAMENTE INELÁSTICAS

Hemos visto como las colisiones profundamente inelásticas, así como también la aniquilación e^+e^- dando hadrones, están bien descritos por el modelo de partones y vemos como este modelo está relacionado con la dinámica del cono de luz. En ambos análisis el fenómeno de scaling es debido a la hipotesis de un cierto comportamiento de campos libres: en el modelo de partones en ciertas regiones del espacio de momento y en la dinámica del cono de luz en los conmutadores de las corrientes cerca del cono de luz. Hemos visto además como en una teoría asintóticamente libre y renormalizable estamos próximos a esta situación salvo términos constantes de tipo logarítmico que son calculables. Esperamos que la Q.C.D sea una teoría asintóticamente libre con la constante de acoplamiento en el dominio de atracción del UVSIP en el origen. Vamos a ver ahora como los resultados para colisiones profundamente inelásticas y para aniquilación e^+e^- en hadrones obtenidos antes quedan modificados por términos logarítmicos calculables.

i) Aniquilación e^+e^- en hadrones

[T. APPELQUIST y H. GEORGI Phys. Rev. D8, 5000 (1973)] [A. ZEE Phys. Rev. D8, 5008 (1973)]. De los resultados del Cap. XL anteriores escribi (6.2) (204)

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \gamma \rightarrow \text{hadrones}) = \frac{16 \pi^2 \alpha^2}{q^4} \text{Im} \Pi(q^2) \cdot \frac{D-2}{2} \tag{1}$$

donde

$$T_{\mu\nu} \equiv i \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle 0 | T (J_\nu(x) J_\mu(0)) | 0 \rangle =$$

$$\equiv \left[-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right] \Pi(q^2) \tag{2}$$

donde $J_\mu(x)$ es la corriente electromagnética y hemos usado la invariancia gauge de la teoría para escribir la última ecuación. Puesto que ni las interacciones fuertes ni las electromagnéticas cambian el aroma de los quarks ni más a considerar un solo aroma y así escribiremos la corriente electromagnética desmenuada como

$$j_\mu(x) = Q_\alpha \bar{q}_\alpha(x) \gamma_\mu q_\alpha(x):$$

donde hay una suma sobre el índice de color. En el orden de los términos de perturbaciones

$$T_{\mu\nu}^{(0)} = i Q^2 \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | T (: \bar{q}_\alpha(x) \gamma^\nu q_\alpha(x) : : \bar{q}_\beta(0) \gamma^\mu q_\beta(0) :) | 0 \rangle =$$

$$= i Q^2 (\gamma^\nu)_{ij} (\gamma^\mu)_{kl} \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | T (: \bar{q}_{\alpha i}(x) q_{\alpha j}(x) : : \bar{q}_{\beta k}(0) q_{\beta l}(0) :) | 0 \rangle$$

Usando el teorema de Wick e introduciendo

$$\underline{q_{\alpha i}(x) \bar{q}_{\beta j}(y)} = \delta_{\alpha\beta} S_{ij}(x-y) = \delta_{\alpha\beta} i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} S_{ij}(p) =$$

$$= \delta_{\alpha\beta} i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \frac{1}{\not{p} - m + i\epsilon} \tag{1}$$

podemos escribir

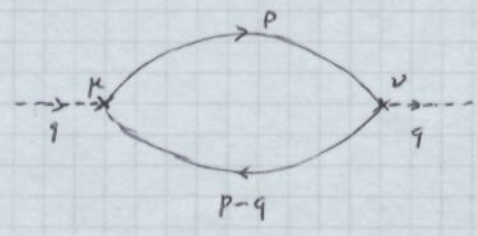
$$T_{\mu\nu}^{(0)} = - i Q^2 (\gamma^\nu)_{ij} (\gamma^\mu)_{kl} \int d^4x e^{iqx} \underline{q_{\alpha j}(x) \bar{q}_{\beta k}(0)} \underline{q_{\beta l}(0) \bar{q}_{\alpha i}(x)}$$

$$= - i Q^2 C_2(G) \int d^4x e^{iqx} \text{Tr} [\gamma^\nu S(x) \gamma^\mu S(-x)] =$$

$$= + i Q^2 C_2(G) \int d^4x e^{iqx} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} e^{-ipx} e^{ip'x} \text{Tr} [\gamma^\nu S(p) \gamma^\mu S(p')]$$

$$= i Q^2 C_2(G) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr} [\gamma^\nu S(p) \gamma^\mu S(p-q)] \tag{2}$$

que corresponde al diagrama



(3)

Puesto que estamos interesados en el comportamiento a altas energías despreciamos la masa del quark y podemos escribir

$$\Pi^{(0)}(q^2) = - \frac{1}{(D-4)} T^{(0)\mu}{}_\mu = - \frac{i Q^2 C_2(G)}{(D-4)} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{\text{Tr} [\gamma^\mu \not{p} \gamma_\mu (\not{p}-q)]}{p^2 (p-q)^2}$$

$$\begin{aligned}
&= + \frac{i Q^2 C_2(R)}{(D-1)} (D-2) \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{\text{Tr} [\not{p} (\not{p}-\not{q})]}{p^2 (p-q)^2} = \\
&= + 4 \frac{i Q^2 C_2(R) (D-2)}{(D-1)} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{p^2 - p \cdot q}{p^2 (p-q)^2} = - 4 \frac{i Q^2 C_2(R) (D-2)}{(D-1)} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{p \cdot q}{p^2 (p-q)^2} \\
&= - 4 \frac{i Q^2 C_2(R) (D-2)}{(D-1)} \frac{i}{16\pi^2} q^2 \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\epsilon} - \ln 4\pi + \gamma + \ln \left(-\frac{q^2}{v^2} \right) \right) + \frac{1}{6} \right\}
\end{aligned}$$

de donde

$$\Pi^{(0)}(q^2) = \frac{Q^2}{2\pi^2} q^2 \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\epsilon} - \ln 4\pi + \gamma + \ln \left(-\frac{q^2}{v^2} \right) \right) + \frac{5}{6} \right\}$$

y en lo tanto

$$\text{Im} \Pi^{(0)}(q^2) = \frac{Q^2}{2\pi^2} q^2 \left\{ -\frac{1}{2} (-\pi) \right\} \quad (1)$$

Recuperando así el resultado del modelo de partones

$$\sigma^{(0)}(e^+e^- \rightarrow \gamma \rightarrow \text{hadrones}) = \frac{4\pi\alpha^2 Q^2}{q^2} \quad (2)$$

Como era de esperar

Consideremos ahora las correcciones debidas a las interacciones fuertes del resultado anterior

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^{(2)} &= i Q^2 \frac{i^2}{2!} \int d^4x d^4y d^4z e^{iq \cdot x} \langle 0 | T (: \bar{q}_\alpha(x) \gamma^\nu q_\alpha(x) : , : \bar{q}_\beta(0) \gamma^\mu q_\beta(0) : ; \\
&\quad L_I(y), L_I(z)) | 0 \rangle \quad (3)
\end{aligned}$$

donde $L_I(x)$ es el Lagrangiano de interacción de la QCD dado en (XXI-4-1). En el orden deseado contribuye solo la interacción quark-quark-gluon, y en tanto

$$T^{(2)\mu\nu} = i Q^2 \frac{i^2}{2!} \int d^4x d^4y d^4z e^{iq \cdot x} \langle 0 | T (: \bar{q}_\alpha(x) \gamma^\nu q_\alpha(x) : , : \bar{q}_\beta(0) \gamma^\mu q_\beta(0) : ;$$

$$\frac{g}{2} : \bar{q}_\gamma(y) \gamma^\lambda (\lambda^{(a)})_{\gamma\delta} q_\delta(y) A_\lambda^{(a)}(y) : , \frac{g}{2} : \bar{q}_\epsilon(z) \gamma^\rho (\lambda^{(b)})_{\epsilon\tau} q_\tau(z) A_\rho^{(b)}(z) : | 0 \rangle$$

donde debemos aplicar el teorema de Wick contrayendo todos los campos

$$T^{(2)\mu\nu} = + i \frac{Q^2}{2} \frac{g^2}{4} 2 \int d^4x d^4y d^4z e^{i q \cdot x} (\gamma^\nu)_{ij} (\gamma^\mu)_{kl} (\gamma^\lambda)_{mn} (\gamma^\rho)_{st} (\lambda^{(a)})_{\gamma\delta} (\lambda^{(b)})_{\epsilon\zeta}$$

$$\begin{aligned} & \underbrace{A_\lambda^{(a)}(y)} A_\rho^{(b)}(z) \left\{ \underbrace{q_{\beta\epsilon}(0)} \bar{q}_{\alpha\zeta}(x) \quad \underbrace{q_{\alpha j}(x)} \bar{q}_{\epsilon\delta}(z) \quad \underbrace{q_{\zeta\epsilon}(z)} \bar{q}_{\gamma m}(y) \quad \underbrace{q_{\delta\rho}(y)} \bar{q}_{\beta\kappa}(0) + \right. \\ & + \underbrace{q_{\beta\epsilon}(0)} \bar{q}_{\epsilon\delta}(z) \quad \underbrace{q_{\zeta\epsilon}(z)} \bar{q}_{\gamma m}(y) \quad \underbrace{q_{\delta\rho}(y)} \bar{q}_{\alpha\zeta}(x) \quad \underbrace{q_{\alpha j}(x)} \bar{q}_{\beta\kappa}(0) + \\ & \left. + \underbrace{q_{\beta\epsilon}(0)} \bar{q}_{\gamma m}(y) \quad \underbrace{q_{\delta\rho}(y)} \bar{q}_{\alpha\zeta}(x) \quad \underbrace{q_{\alpha j}(x)} \bar{q}_{\epsilon\delta}(z) \quad \underbrace{q_{\zeta\epsilon}(z)} \bar{q}_{\beta\kappa}(0) \right\} \end{aligned}$$

Usando (2.1) y

$$\begin{aligned} \underbrace{A_\mu^{(a)}(x)} A_\nu^{(b)}(y) &= \delta_{ab} W_{\mu\nu}(x-y) = -i \delta_{ab} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} W_{\mu\nu}(k) e^{-i k(x-y)} \\ &= -i \delta_{ab} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \left[g_{\mu\nu} - (1-a) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 + i\epsilon} \right] e^{-i k(x-y)} \quad (1) \end{aligned}$$

podemos escribir

$$T^{(2)\mu\nu} = i Q^2 \frac{g^2}{4} 4 C_2(R) C_2(G) \int d^4x d^4y d^4z e^{i q \cdot x} W_{\lambda\rho}(y-z)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \text{Tr} [S(0-x) \gamma^\nu S(x-z) \gamma^\rho S(z-y) \gamma^\lambda S(y-0) \gamma^\mu] + \right. \\ & + \text{Tr} [S(0-z) \gamma^\rho S(z-y) \gamma^\lambda S(y-x) \gamma^\nu S(x-0) \gamma^\mu] + \\ & \left. + \text{Tr} [S(0-y) \gamma^\lambda S(y-x) \gamma^\nu S(x-z) \gamma^\rho S(z-0) \gamma^\mu] \right\} \end{aligned}$$

⇒

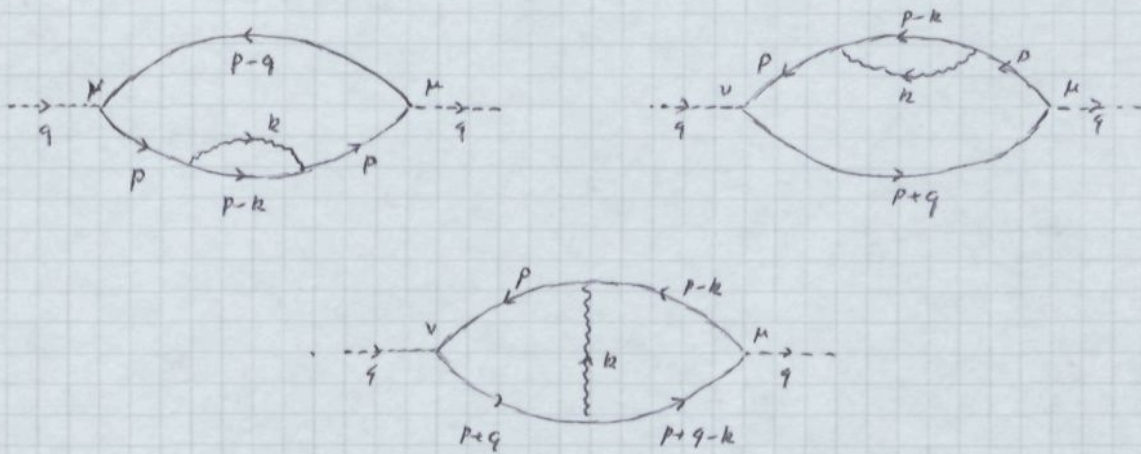
$$\begin{aligned} T^{(2)\mu\nu} &= Q^2 \frac{g^2}{4} 4 C_2(R) C_2(G) \int d^4x d^4y d^4z \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4p_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4p_4}{(2\pi)^4} W_{\lambda\rho}(k) \\ & \left\{ \text{Tr} [S(p_1) \gamma^\nu S(p_2) \gamma^\rho S(p_3) \gamma^\lambda S(p_4) \gamma^\mu] e^{i q \cdot x} e^{-i k(y-z)} e^{-i p_1(0-x)} e^{-i p_2(x-z)} e^{-i p_3(z-y)} e^{-i p_4(y-0)} \right. \\ & + \text{Tr} [S(p_1) \gamma^\rho S(p_2) \gamma^\lambda S(p_3) \gamma^\nu S(p_4) \gamma^\mu] e^{i q \cdot x} e^{-i k(y-z)} e^{-i p_1(0-z)} e^{-i p_2(z-y)} e^{-i p_3(y-x)} e^{-i p_4(x-0)} \\ & \left. + \text{Tr} [S(p_1) \gamma^\lambda S(p_2) \gamma^\nu S(p_3) \gamma^\rho S(p_4) \gamma^\mu] e^{i q \cdot x} e^{-i k(y-z)} e^{-i p_1(0-y)} e^{-i p_2(y-x)} e^{-i p_3(x-z)} e^{-i p_4(z-0)} \right\} \end{aligned}$$

Realizando las tres integraciones espaciales.

$$T^{(2)\mu\nu} = Q^2 g^2 C_2(R) C_2(G) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^D} W_{\lambda\rho}(k) \cdot \left\{ \text{Tr} [S(p-q) \gamma^\nu S(p) \gamma^\rho S(p-k) \gamma^\lambda S(p) \gamma^\mu] \right.$$

$$\left. + \text{Tr} [S(p) \gamma^\rho S(p-k) \gamma^\lambda S(p) \gamma^\nu S(p+q) \gamma^\mu] + \text{Tr} [S(p) \gamma^\lambda S(p-k) \gamma^\nu S(p-k+q) \gamma^\rho S(p+q) \gamma^\mu] \right\}$$

los cuales pueden representarse diagramáticamente como



Despreciando las masas, trabajando en el gauge de Feynman (el resultado debe ser independiente del gauge), y cambiando los momentos

$$T^{(2)\mu}_{\mu} = Q^2 g^2 C_2(R) C_2(G) \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \left\{ \frac{\text{Tr} [(\not{x}-q) \gamma_\mu \not{x} \gamma_\nu (\not{x}-k) \gamma^\rho \not{x} \gamma^\mu]}{k^2 p^4 (p-k)^2 (p-q)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\text{Tr} [\not{x} \gamma^\rho (\not{x}-k) \gamma_\nu \not{x} \gamma_\mu (\not{x}-q) \gamma^\mu]}{k^2 p^4 (p-k)^2 (p-q)^2} + \frac{\text{Tr} [\not{x} \gamma_\nu \not{x} \gamma_\mu (\not{x}-q) \gamma^\rho (\not{x}-q) \gamma^\mu]}{(p-k)^2 p^2 k^2 (k-q)^2 (p-q)^2} \right\}$$

Evidentemente los dos primeros diagramas dan la misma contribución y podemos escribir

$$T^{(2)\mu}_{\mu}(q) = Q^2 g^2 C_2(R) C_2(G) [2 I_I(q) + I_{III}(q)]$$

$$I_I(q) \equiv \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{\text{Tr} [\gamma^\mu (\not{x}-q) \gamma_\mu \not{x} \gamma_\nu (\not{x}-k) \gamma^\rho \not{x}]}{k^2 [p^2]^2 (p-k)^2 (p-q)^2} \quad (1)$$

$$I_{III}(q) \equiv \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{\text{Tr} [\not{x} \gamma_\nu \not{x} \gamma_\mu (\not{x}-q) \gamma^\rho (\not{x}-q) \gamma^\mu]}{k^2 p^2 (p-k)^2 (k-q)^2 (p-q)^2}$$

Procedamos ahora al cálculo de estas integrales

$$T_I \equiv \text{Tr} [\gamma^\mu (\not{x}-q) \gamma_\mu \not{x} \gamma_\nu (\not{x}-k) \gamma^\rho \not{x}] = (D-2)^2 \text{Tr} [(\not{x}-q) \not{x} (\not{x}-k) \not{x}]$$

$$= 4(D-2)^2 [2(p^2 - p \cdot q)(p^2 - p \cdot k) - p^2(p^2 - p \cdot k - p \cdot q + k \cdot q)]$$

$$= 4(D-2)^2 [p^4 - p^2(p \cdot q) - p^2(p \cdot k) - p^2(k \cdot q) + 2(p \cdot q)(k \cdot p)]$$

$$I_{\text{I}}(q) = 4(D-2)^2 \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{p^4 (p-q)^2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{p^4 - p^2(p \cdot q) - p^2(k \cdot p) - p^2(k \cdot q) + 2(p \cdot q)(k \cdot p)}{k^2 (k-p)^2}$$

$$= \frac{i}{4\pi^2} (D-2)^2 \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{p^4 (p-q)^2} \left\{ [p^4 - p^2(p \cdot q)] \left(-\frac{p^2}{4\pi}\right)^\epsilon \frac{\Gamma(1+\epsilon)\Gamma(1+\epsilon)\Gamma(-\epsilon)}{\Gamma(2+2\epsilon)} - \right.$$

$$\left. p^2 [p^4 - p^2(p \cdot q)] \left(-\frac{p^2}{4\pi}\right)^\epsilon \frac{\Gamma(1+\epsilon)\Gamma(1+\epsilon)\Gamma(-\epsilon)}{2\Gamma(2+2\epsilon)} \right\} =$$

$$= \frac{i}{8\pi^2} (D-2)^2 \frac{\Gamma(1+\epsilon)\Gamma(1+\epsilon)\Gamma(-\epsilon)}{\Gamma(2+2\epsilon)} \left(-\frac{1}{4\pi}\right)^\epsilon \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \left\{ \frac{1}{[p^2]^\epsilon [(p-q)^2]} - \frac{p \cdot q}{[p^2]^{1-\epsilon} (p-q)^2} \right\}$$

$$= \frac{i}{8\pi^2} \frac{i}{16\pi^2} 4(1+\epsilon)^2 \frac{\Gamma(1+\epsilon)\Gamma(1+\epsilon)\Gamma(-\epsilon)}{\Gamma(2+2\epsilon)} \left(-\frac{q^2}{4\pi}\right)^\epsilon \left(-\frac{q^2}{4\pi}\right)^\epsilon q^2 \cdot$$

$$\left\{ \frac{\Gamma(2+2\epsilon)\Gamma(1+\epsilon)\Gamma(-1-2\epsilon)}{\Gamma(-\epsilon)\Gamma(3+3\epsilon)} - \frac{\Gamma(2+2\epsilon)\Gamma(1+\epsilon)\Gamma(-2\epsilon)}{\Gamma(1-\epsilon)\Gamma(3+3\epsilon)} \right\}$$

de donde

$$I_{\text{I}}(q) = \frac{1}{32\pi^4} q^2 \left(-\frac{q^2}{4\pi}\right)^{2\epsilon} \frac{[\Gamma(2+\epsilon)]^3 \Gamma(-\epsilon)\Gamma(-2\epsilon)}{(1+2\epsilon)\Gamma(1-\epsilon)\Gamma(3+3\epsilon)} \quad (1)$$

Consideremos ahora la segunda integral.

$$T_{\text{II}} = \text{Tr} [\not{x} \gamma_\rho \not{k} \gamma_\mu (\not{k}-\not{q}) \gamma^\rho (\not{x}-\not{q}) \gamma^\mu] = -2 \text{Tr} [\not{k} \gamma_\rho \not{x} (\not{k}-\not{q}) \gamma^\rho (\not{x}-\not{q})]$$

$$= (D-4) \text{Tr} [\not{x} \gamma_\rho \not{k} (\not{k}-\not{q}) \gamma^\rho (\not{x}-\not{q})] =$$

$$= -8 [p \cdot (k-q)] \text{Tr} [\not{k} (\not{x}-\not{q})] - 2(D-4) \text{Tr} [\not{k} \not{x} (\not{k}-\not{q}) (\not{x}-\not{q})]$$

$$= -4(D-4) [k \cdot (k-q)] \text{Tr} [\not{x} (\not{x}-\not{q})] - (D-4)^2 \text{Tr} [\not{x} \not{k} (\not{k}-\not{q}) (\not{x}-\not{q})]$$

$$= 4 \left\{ -8 [p \cdot (k-q)] [k \cdot (p-q)] - 2(D-4) [k \cdot p] [(k-q) \cdot (p-q)] + \right.$$

$$+ 2(D-4) [k \cdot (k-q)] [p \cdot (p-q)] - 2(D-4) [k \cdot (p-q)] [p \cdot (k-q)] -$$

$$- 4(D-4) [k \cdot (k-q)] [p \cdot (p-q)] - (D-4)^2 [p \cdot k] [(k-q) \cdot (p-q)] +$$

$$\left. + (D-4)^2 [p \cdot (k-q)] [k \cdot (p-q)] - (D-4)^2 [p \cdot (p-q)] [k \cdot (k-q)] \right\}$$

$$= 4 \{ [-8 - 2(D-4) + (D-4)^2] [p(k-q)] [k(p-q)] -$$

$$- (D-2)(D-4)(k,p) [(k-q)(p-q)] - (D-2)(D-4) [k(k-q)] [p(p-q)] \}$$

Ahora bien

$$T_{III} = \{ (D-2)(D-4) - 4(D-2) \} [k^2 - q^2 + (p-q)^2 - (p-k)^2] [p^2 - q^2 - (p-k)^2 + (k-q)^2]$$

$$- (D-2)(D-4) [p^2 + k^2 - (p-k)^2] [(p-q)^2 - (p-k)^2 + (k-q)^2] -$$

$$- (D-2)(D-4) [k^2 - q^2 + (q-k)^2] [p^2 - q^2 + (p-q)^2]$$

$$T_{III} = -4(D-2) \{ q^4 + (p-k)^4 + 2q^2(p-k)^2 - q^2 p^2 - p^2(p-k)^2 - q^2(p-q)^2$$

$$- q^2 k^2 - q^2(k-q)^2 + p^2(p-q)^2 + p^2 k^2 - (p-k)^2(p-q)^2 - k^2(p-k)^2 - (p-k)^2(k-q)^2$$

$$+ (p-q)^2(k-q)^2 + k^2(k-q)^2 \} + 2(D-2)(D-4) \{ q^2(p-k)^2 - k^2(p-q)^2 - p^2(k-q)^2 \}$$

donde hemos tachado los términos que al integrar dan cero. Por otra parte p y k juegan papeles idénticos y en tanto T_{III} es equivalente a

$$T_{III} = -4(D-2) \{ q^4 + (p-k)^4 - 2q^2 p^2 - 2q^2(p-q)^2 + 2q^2(p-k)^2 \}$$

$$+ 2(D-2)(D-4) \{ q^2(p-k)^2 - 2p^2(k-q)^2 \}$$

Las integrales a realizar son todas ellas fácilmente deducibles de los resultados dados en los apéndice del cap XII. *

$$I_1 = q^4 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{p^2 k^2 (p-q)^2 (k-q)^2 (k-p)^2} = \frac{1}{(4\pi)^4} q^2 \Gamma(3)$$

$$I_2 = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{(p-k)^2}{p^2 k^2 (p-q)^2 (k-q)^2} = \frac{1}{(4\pi)^4} q^2 \left(-\frac{q^2}{4\pi}\right)^{2\epsilon} \frac{\Gamma^4(1+\epsilon) \Gamma^2(-\epsilon)}{2 \Gamma^2(2+2\epsilon)}$$

$$I_3 = q^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2 (p-q)^2 (k-q)^2 (k-p)^2} = -\frac{1}{(4\pi)^4} q^2 \left(-\frac{q^2}{4\pi}\right)^{2\epsilon} \frac{\Gamma^3(1+\epsilon) \Gamma(-\epsilon) \Gamma(-2\epsilon)}{(1+2\epsilon) \Gamma(1-\epsilon) \Gamma(2+3\epsilon)}$$

$$I_4 = q^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{p^2 k^2 (k-q)^2 (k-p)^2} = I_3$$

$$I_5 = q^2 \int \frac{d^0 k d^0 p}{(2\pi)^0 (2\pi)^0} \frac{1}{p^2 k^2 (p-q)^2 (k-q)^2} = - \frac{1}{(4\pi)^4} q^2 \left(-\frac{q^2}{4\pi}\right)^{2\epsilon} \frac{\Gamma^4(1+\epsilon) \Gamma^2(-\epsilon)}{\Gamma^2(2+2\epsilon)} = -2 I_2$$

$$I_{III} = 8 \left\{ -I_1 + (1+\epsilon)(3-2\epsilon) I_2 + 4(1+\epsilon) I_3 \right\}$$

Entonces

$$2I_I(q^2) + I_{III}(q^2) = \frac{q^2}{32\pi^4} \left\{ 6\zeta(3) + \left(-\frac{q^2}{4\pi}\right)^{2\epsilon} \left[\frac{2\Gamma^3(2+\epsilon)\Gamma(-\epsilon)\Gamma(-2\epsilon)}{(1+2\epsilon)\Gamma(1-\epsilon)\Gamma(3+3\epsilon)} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(1+\epsilon)(3-2\epsilon)\Gamma^4(1+\epsilon)\Gamma^2(-\epsilon)}{2\pi^2(2+2\epsilon)} - \frac{4(1+\epsilon)\Gamma^3(1+\epsilon)\Gamma(-\epsilon)\Gamma(-2\epsilon)}{(1+2\epsilon)\Gamma(1-\epsilon)\Gamma(2+3\epsilon)} \right] \right\}$$

$$2I_I(q^2) + I_{III}(q^2) = \frac{q^2}{32\pi^4} \left\{ 6\zeta(3) + \frac{1}{2} + \left(-\frac{q^2}{4\pi}\right)^{2\epsilon} \frac{\Gamma^3(1+\epsilon)\Gamma(-\epsilon)(1+\epsilon)}{(1+2\epsilon)} \right.$$

$$\left. \left[\frac{2(1+\epsilon)^2\Gamma(1-2\epsilon)}{\Gamma(1-\epsilon)\Gamma(3+3\epsilon)} + \frac{(3-2\epsilon)\Gamma(1+\epsilon)\Gamma(-\epsilon)}{2\Gamma(1+2\epsilon)\Gamma(2+2\epsilon)} - \frac{4\Gamma(-2\epsilon)}{\Gamma(1+\epsilon)\Gamma(2+3\epsilon)} \right] \right\} \quad (1)$$

Notemos que en (1) las divergencias son a lo sumo del tipo $1/\epsilon$ y no existen las $1/\epsilon^2$. Si escribimos

$$2I_I(q^2) + I_{III}(q^2) = \frac{q^2}{32\pi^4} \left\{ 6\zeta(3) + \frac{1}{2} + \left(-\frac{q^2}{4\pi}\right)^{2\epsilon} \left(\frac{A}{\epsilon} + B + \dots \right) \right\}$$

entonces

$$\text{Im} [2I_I(q^2) + I_{III}(q^2)] = \frac{q^2}{32\pi^4} \left(\frac{A}{\epsilon} + B \right) \left(\frac{q^2}{4\pi} \right)^{2\epsilon} e^{-2\text{in}\epsilon} = \\ = - \frac{q^2}{32\pi^4} 2\pi A \quad (2)$$

Necesitamos pues únicamente los términos divergentes de (1)

$$\frac{2(1+\epsilon)^2\Gamma(-2\epsilon)}{\Gamma(1-\epsilon)\Gamma(3+3\epsilon)} = -\frac{1}{2\epsilon} - 2\gamma + \frac{5}{4} + \dots$$

$$\frac{(3-2\epsilon)\Gamma(1+\epsilon)\Gamma(-\epsilon)}{2\Gamma(1+2\epsilon)\Gamma(2+2\epsilon)} = -\frac{3}{2\epsilon} - 6\gamma + 4 + \dots$$

$$-\frac{4\Gamma(-2\epsilon)}{\Gamma(1-\epsilon)\Gamma(2+3\epsilon)} = +\frac{2}{\epsilon} + 8\gamma - 6 + \dots$$

y la suma de los términos es $-3/4$

Entonces

$$= \frac{3}{4} \frac{\Gamma^3(1+\epsilon) \Gamma(1+\epsilon) \Gamma(1-\epsilon)}{(1+2\epsilon)} = \frac{3}{4} \frac{1}{\epsilon}$$

y finalmente

$$\text{Im } \Pi^{(2)}(q^2) = Q^2 \alpha_s \frac{q^2}{4\pi^2}$$

y por tanto

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \gamma \rightarrow \text{hadrons}) = \frac{4\pi \alpha^2 Q^2}{q^2} \left\{ 1 + \frac{\alpha_s}{\pi} \right\} \quad (1)$$

E introduciendo como es usual

$$R(q^2) = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \gamma \rightarrow \text{hadrons})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \gamma \rightarrow \mu^+\mu^-)} \quad (2)$$

se obtiene

$$R(q^2) = 3 \sum_{i=1}^{N_f} Q_i^2 \left[1 + \frac{\alpha_s}{\pi} \right] \quad (3)$$

donde hemos incluido los distintos aromas y el factor 3 proviene del color y donde α_s es la constante de estructura fina fuerte renormalizada. Fijémosnos que no hemos elevado a cabo las correcciones radiativas debidas a las interacciones electrodinámicas. El resultado (3) coincide con el hallado por Appelquist - Georgi y por Zee. El siguiente orden en las correcciones fuertes también en la vida calculada [K.G. CHETYRKIN, A.L. KATAEV y F.V. TRACHOV Phys. Letters 85B, 277 (1979)].

[H. DINE y J. SAPIRSTEIN Phys. Rev. Letters 43, 668 (1979)] [W. CELMISTER y R. J. GONSALVES Phys. Rev. Letters 55, 560 (1980) y Phys. Rev. D21, 3112 (1980)]. En resultado

$$R(q^2) = 3 \sum_{i=1}^{N_f} Q_i^2 \left[1 + \frac{\alpha_s}{\pi} + F_2 \left(\frac{\alpha_s}{\pi} \right)^2 \right] \quad (4)$$

un F_2 en el MS modificado dada por *

$$F_{2\overline{MS}} = \left[\frac{2}{3} 5(3) - \frac{11}{12} \right] N_f + \frac{365}{24} - 11 5(3) =$$

$$= + 1.985 707 400 - 0.115 295 3980 N_f \quad (5)$$

46/002

* En el esquema mínimo

$$F_{2Ms} = F_{2\bar{Ms}} + \frac{1}{12} (33 - 2N_f) [\ln 4\pi - \gamma] =$$

$$= 7.358681001 - 0.4409301617N_f$$

Veamos ahora como mejorar el resultado (9.2) usando el grupo de renormalización. El efecto de usar el grupo de renormalización da

$$R(q^2) = 3 \sum_{i=1}^{N_f} Q_i^2 \left[1 + \frac{\bar{\alpha}_s(q^2)}{n} \right]$$

es decir

$$R(q^2) = 3 \sum_{i=1}^{N_f} Q_i^2 \left[1 + \frac{12}{(33 - 2N_f) \ln q^2/\Lambda^2} \right] \quad (11)$$

Para $q^2 \approx (6 \text{ GeV})^2$, $\Lambda \approx 0.5 \text{ GeV}$ y $N_f = 4$ se obtiene $R(q^2) = \frac{10}{3} (1 + 0.096)$ y añadiendo la contribución del e^+e^- , $R(q^2) = 4.65$ que está en mejor acuerdo con los datos experimentales que el valor R con correcciones radiativas gluónicas $R(q^2) = 4.33$

Antes de continuar queríamos analizar dos puntos del resultado obtenido

i) Surge la pregunta ¿cuántos átomos deben ser tenidos en cuenta en la ecuación (4)? En los esquemas \overline{MS} y \overline{MS} no es válido el teorema de desacoplamiento de Appelquist y Carazzone [T. APPELQUIST y J. CARAZZONE Phys. Rev. D11, 2856 (1975)]. Este teorema nos dice que el efecto de partículas pesadas (fermiones, bosones) de masa $m^2 \gg |q^2|$ pueden ignorarse en todos los puntos de bajas energías. De hecho en los esquemas \overline{MS} y \overline{MS} utilizadas las partículas pesadas todavía contribuyen a las funciones universales de las ecuaciones del grupo de renormalización pues estas funciones son independientes de la masa en los esquemas \overline{MS} y \overline{MS} . Hay una variante de estos esquemas que satisface el teorema de desacoplamiento [P. BINETRUY y T. SCHÜCKER CERN preprint TH2802 (1979)] [S. WEINBERG Phys. Lett. 91B, 51 (1980)]. De momento tomaremos el punto de vista más restrictivo de incluir en la suma solo aquellos átomos que puedan ser excitados para cada S ; es decir incluiremos solo aquellos quarks tales que $m_q^2 \ll s$

ii) En Q.E.D hay un esquema de renormalización natural: se renormaliza con fotones y electrones sobre su capa más sencilla. Como hemos discutido antes esto es útil gracias al teorema de Thirring que dice que para la energía del fotón tendiendo hacia cero la amplitud completa viene dada exactamente (a todos los ordenes en α) por la aproximación clásica, de forma que se pueden usar los resultados de la física clásica para determinar los parámetros fundamentales α y m_e . En Q.C.D no hay razones físicas para

preferir un esquema de renormalización. Es necesario pues ver lo que sucede cuando cambiamos el esquema. Nos olvidaremos de las masas y del parámetro de gauge para simplificar nuestras consideraciones.

Consideremos un observable físico P . Obviamente P debe ser independiente del esquema de renormalización en que lo calculemos. Sin embargo, cuando escribimos

$$P = \sum_m C_m(R) [\alpha_s(R)]^m \quad (1)$$

donde tanto C_m como α_s dependen del esquema de renormalización usado. Consideremos ahora la situación en un nuevo esquema R' , entonces

$$P = \sum_m C_m(R') [\alpha_s(R')]^m \quad (2)$$

El desarrollo de $\alpha_s(R')$ en términos de $\alpha_s(R)$ es de la forma

$$\alpha_s(R') = \alpha_s(R) \left\{ 1 + a_1(R', R) \alpha_s(R) + \dots \right\} \quad (3)$$

Entonces sustituyendo (3) en (2) e igualando a (1) se obtiene

$$C_1(R) = C_1(R')$$

$$C_2(R) = a_1(R', R) C_1(R') + C_2(R') \quad (4)$$

$$C_3(R) = a_2(R', R) C_1(R') + 2 a_1(R', R) C_2(R') + C_3(R')$$

y análogamente

Se tiene por ejemplo para $R(q^2)$

$$R(q^2) = 3 \sum_{i=1}^{N_f} Q_i^2 \left\{ 1 + \frac{\alpha_s(MS)}{\pi} + F_2(MS) \left(\frac{\alpha_s(MS)}{\pi} \right)^2 + \dots \right\} \quad (5)$$

$$R(q^2) = 3 \sum_{i=1}^{N_f} Q_i^2 \left\{ 1 + \frac{\alpha_s(\overline{MS})}{\pi} + F_2(\overline{MS}) \left(\frac{\alpha_s(\overline{MS})}{\pi} \right)^2 + \dots \right\}$$

donde

$$F_2(MS) = F_2(\overline{MS}) + \frac{1}{12} (33 - 2N_f) (\ln 4\pi - \gamma) \quad (6)$$

Esto implica que si:

$$\alpha_s(\bar{MS}) = \alpha_s(MS) \left\{ 1 + a \frac{\alpha_s(MS)}{n} + \dots \right\} \quad (1)$$

entonces

$$a = F_2(MS) - F_2(\bar{MS}) = \frac{1}{12} (33 - 2N_f) (\ln 4n - \gamma)$$

XLIII - DESARROLLO EN PRODUCTO DE OPERADORES (O.P.E.)

Vamos a empezar considerando algunos ejemplos simples

c) Campo escalar autoadjunto libre

Empecemos considerando un campo escalar $\phi(x) = \phi^\dagger(x)$ y consideremos el operador compuesto

$$J(x) \equiv : \phi(x) \phi(x) : \quad (1)$$

Notar que si no hubiéramos introducido el producto de Wick una cantidad del tipo $\phi(x+\eta) \phi(x-\eta)$ presenta singularidades para $\eta^\mu \rightarrow 0$. En una expresión tal como esta aparecen productos como $\phi^{(+)}(x+\eta) \phi^{(-)}(x+\eta)$ que representa un cuanto creado en $(x-\eta)^\mu$ y propagándose a $(x+\eta)^\mu$ y se genera una singularidad para $\eta^\mu \rightarrow 0$. Descomponiendo en (1) los campos en sus partes de frecuencias positivas y negativas

$$J(x) = \phi^{(-)}(x) \phi^{(+)}(x) + 2 \phi^{(-)}(x) \phi^{(+)}(x) + \phi^{(+)}(x) \phi^{(+)}(x) \quad (2)$$

Consideremos ahora

$$T(J(x) J(0)) = \Theta(x^0) : \phi^2(x) :: \phi^2(0) : + \Theta(-x^0) : \phi^2(0) :: \phi^2(x) : \quad (3)$$

que no está ordenado normalmente y por tanto contiene singularidades para $x^2 \rightarrow 0$. Introduzcamos (2) en (3) y usando (ver pag IV-6)

$$[\phi^{(\pm)}(x), \phi^{(\mp)}(0)] = i \Delta_{\pm}(x; m^2) \quad (4)$$

podemos escribir todos los términos ordenados normalmente y obtenemos

$$T(J(x) J(0)) = -2 [\Delta_F(x, m^2)]^2 + 4i \Delta_F(x; m^2) : \phi(x) \phi(0) : + : \phi^2(x) \phi^2(0) : \quad (5)$$

donde :: indica de nuevo que estos operadores bilocales no son singulares cuando $x^\mu \rightarrow 0$. Si en (5) mantenemos sólo las singularidades dominantes para $x^2 \rightarrow 0$ se tiene, usando (IV-5.4), que

$$T(J(x)J(0)) \underset{x^2 \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{8\pi^4(x^2 - i\epsilon)^2} - \frac{: \phi(x)\phi(0) :}{\pi^2(x^2 - i\epsilon)} + : \phi^2(x)\phi^2(0) : \quad (1)$$

Este es un ejemplo de lo que se denomina un desarrollo de producto de operadores en el cono de luz. Es una combinación algebraica de funciones c-número singulares en el cono de luz, multiplicadas por operadores bilocales no-singulares. Se pueden obtener expresiones análogas para $J(x)J(0)$, $[J(x), J(0)]$, ... A continuación podemos desarrollar los operadores bilocales no-singulares de (1) en términos de operadores locales, tales como

$$: \phi(x)\phi(0) : \underset{x^2 \rightarrow 0}{\sim} : \phi^2(0) : + x_\mu : \phi(0) \partial^\mu \phi(0) : + \dots \quad (2)$$

y así obtenemos

$$T(J(x)J(0)) \underset{x^2 \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{8\pi^4(x^2 - i\epsilon)^2} - \frac{J(0)}{\pi^2(x^2 - i\epsilon)} - \frac{x_\mu J^\mu(0)}{\pi^2(x^2 - i\epsilon)} + \dots \quad (3)$$

donde $J^\mu(0) \equiv : \phi(0) \partial^\mu \phi(0) :$. Este es un ejemplo de lo que se llama desarrollo en producto de operadores a cortas distancias. Los distintos términos son productos de funciones c-número singulares en el cono de luz, multiplicadas por operadores locales no-singulares. Notemos que en ambas expresiones los singularidades dominantes son independientes de la masa.

ii) Modelo de cuarks libres

Consideremos un campo espinorial libre de spin 1/2. De acuerdo con (VI-55)

$$\psi(x) = \psi^{(+)}(x) + \psi^{(-)}(x)$$

$$\psi^{(+)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2E(\vec{p})} \sum_{\lambda} u(\vec{p}, \lambda) a(\vec{p}, \lambda) e^{-i p \cdot x} \quad (4)$$

$$\psi^{(-)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2E(\vec{p})} \sum_{\lambda} v(\vec{p}, \lambda) b^+(\vec{p}, \lambda) e^{+i p \cdot x}$$

De (VI-44)

$$\{ \psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(0) \} = i S_{\alpha\beta}(x; m) \quad (5)$$

$$\{ \psi_\alpha^{(+)}(x), \bar{\psi}_\beta^{(-)}(0) \} = i S_{+\alpha\beta}(x; m), \quad \{ \psi_\alpha^{(-)}(x), \bar{\psi}_\beta^{(+)}(0) \} = i S_{-\alpha\beta}(x; m)$$

$$S_C(x; m) \equiv (i\not{\partial} + m) \Delta_C(x; m^2) \quad (1)$$

También

$$\langle 0 | T (\psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(0)) | 0 \rangle = i S_{F\alpha\beta}(x; m) \quad (2)$$

Por otra parte y teniendo en cuenta (IV-5.3) las singularidades dominantes en el plano de luz son

$$S_{\pm}(x; m) \underset{x^2 \rightarrow 0}{\sim} \pm \frac{x \cdot \gamma}{2\pi^2 (x^2 \mp i\epsilon x^0)^2} \quad (3)$$

$$S_F(x; m) \underset{x^2 \rightarrow 0}{\sim} \frac{x \cdot \gamma}{2\pi^2 (x^2 - i\epsilon)^2}$$

que son independientes de la masa.

En analogía con (XXX-9.2) introducimos los corrientes de los quarks libres

$$V_a^\mu(x) \equiv : \bar{\psi}(x) I \otimes \frac{1}{2} \lambda_a \otimes \gamma^\mu \psi(x) : \quad (4)$$

$$A_a^\mu(x) \equiv : \bar{\psi}(x) I \otimes \frac{1}{2} \lambda_a \otimes \gamma^\mu \gamma_5 \psi(x) :$$

donde I es la matriz 3×3 unidad de color y las λ_a son las matrices hermiticas de $SU(N)$ de aroma. Queremos calcular las singularidades dominantes de los productos ordenados en el tiempo de estas corrientes. Para hacer esto es conveniente definir

$$J^A(x) \equiv : \bar{\psi}(x) \Gamma^A \psi(x) : \quad (5)$$

Entonces

$$T(J^A(x) J^B(0)) = \theta(x^0) J^A(x) J^B(0) + \theta(-x^0) J^B(0) J^A(x) =$$

$$= \Gamma_{ab}^A \Gamma_{cd}^B \left\{ \theta(x^0) : \bar{\psi}_a(x) \psi_b(x) : : \bar{\psi}_c(0) \psi_d(0) : + \theta(-x^0) : \bar{\psi}_c(0) \psi_d(0) : : \bar{\psi}_a(x) \psi_b(x) : \right\}$$

y usando (2.5) podemos ordenarlos en forma normal y un cálculo directo nos da

$$\text{Tr} (J^A(x) J^B(0)) = - \text{Tr} [S_F(x; -m) \Gamma^A S_F(x; m) \Gamma^B] I -$$

$$- i : \bar{\psi}(0) \Gamma^B S_F(x; -m) \Gamma^A \psi(x) : + i : \bar{\psi}(x) \Gamma^A S_F(x; m) \Gamma^B \psi(0) : +$$

$$+ : \bar{\psi}(x) \Gamma^A \psi(x) \bar{\psi}(0) \Gamma^B \psi(0) : \quad (1)$$

Estámos interesados en calcular las singularidades dominantes en cada término. Como éstas no dependen de la masa podemos poner igual a cero las masas de los quarks en lo que sigue.

Empecemos considerando el caso de dos corrientes vectoriales:

$$\Gamma^A \equiv I \otimes \frac{1}{2} \lambda_a \otimes \gamma^\mu \quad \Gamma^B \equiv I \otimes \frac{1}{2} \lambda_b \otimes \gamma^\nu \quad (2)$$

El primer término de (1) se puede escribir

$$- \text{Tr} [S_F(x; 0) \Gamma^A S_F(x; 0) \Gamma^B] = - \text{Tr} (I) \cdot \text{Tr} \left(\frac{1}{4} \lambda_a \lambda_b \right) \cdot \text{Tr} [(i \gamma^\lambda \partial_\lambda \Delta_F(x)) \gamma^\mu$$

$$(i \gamma^\sigma \partial_\sigma \Delta_F(x)) \gamma^\nu] = - 3 \cdot \frac{2}{4} \delta_{ab} (-1)^4 [2 (\partial^\mu \Delta_F(x)) (\partial^\nu \Delta_F(x)) - g^{\mu\nu} [\partial_\lambda \Delta_F(x)] [\partial^\lambda \Delta_F(x)]]$$

$$= 6 \left\{ 2 [\partial^\mu \Delta_F(x)] [\partial^\nu \Delta_F(x)] - g^{\mu\nu} [\partial^\lambda \Delta_F(x)] [\partial_\lambda \Delta_F(x)] \right\} \delta_{ab}$$

de donde

$$- \text{Tr} [S_F(x) \Gamma^A S_F(x) \Gamma^B] \sim \frac{3}{2\pi^4} \frac{g^{\mu\nu} x^2 - 2x^\mu x^\nu}{[x^2 - i\epsilon]^4} \delta_{ab} \quad (3)$$

En los restantes términos de (1) haremos $\psi(x) \rightarrow \psi(0)$ para calcular las singularidades dominantes. Entonces

$$: \bar{\psi}(0) \Gamma^B S_F(x) \Gamma^A \psi(0) : = : \bar{\psi}(0) I \otimes \frac{1}{2} \lambda^b \otimes \gamma^\nu [i \gamma^\lambda \partial_\lambda \Delta_F(x)] I \otimes \frac{1}{2} \lambda^a \otimes \gamma^\mu \psi(0) :$$

y usando (XXX-12.2) y (XXX-A.4.6) que se puede escribir

$$\lambda_a \lambda_b = [d_{abc} + i f_{abc}] \lambda_c \quad (4)$$

donde los índices van de 0 a N y $\lambda_0 \equiv (2/N)^{1/2} I$, o sea

$$: \bar{\psi}(0) \Gamma^B S_F(x) \Gamma^A \psi(0) : = : \bar{\psi}(0) I \otimes \frac{1}{4} [d_{abc} + i f_{abc}] \lambda_c \otimes$$

$$\otimes [S^{\nu\lambda\mu} + i \epsilon^{\nu\lambda\mu} \gamma_5] \gamma_\alpha [i \partial^\lambda \Delta_F(x)] \psi(0) :$$

Entonces

$$-i: \bar{\psi}(0) \Gamma^B S_F(x) \Gamma^A \psi(0): + i: \bar{\psi}(0) \Gamma^A S_F(x) \Gamma^B \psi(0): =$$

$$= -i d_{abc} \epsilon^{\mu\nu\lambda\alpha} \partial_\lambda \Delta_F(x): \bar{\psi}(0) [I \otimes \frac{1}{2} \lambda_c \otimes \gamma_\alpha \gamma_5] \psi(0): -$$

$$- i f_{abc} S^{\mu\nu\lambda\alpha} \partial_\lambda \Delta_F(x): \bar{\psi}(0) [I \otimes \frac{1}{2} \lambda_c \otimes \gamma_\alpha] \psi(0): \sim$$

$$\sim - \frac{d_{abc}}{2\pi^2} \frac{\epsilon^{\mu\nu\lambda\alpha} x_\lambda A_{CE}(0)}{(x^2-i\epsilon)^2} - \frac{f_{abc}}{2\pi^2} \frac{S^{\mu\nu\lambda\alpha} x_\lambda V_{CE}(0)}{(x^2-i\epsilon)^2}$$

Haciendo lo mismo en los restantes casos obtenemos

$$T(V_a^\mu(x) V_b^\nu(0)) \sim T(A_a^\mu(x) A_b^\nu(0)) \sim \underset{x^0 \rightarrow 0}{3} \frac{\delta_{ab}}{2\pi^4} \frac{g^{\mu\nu} x^2 - 2x^\mu x^\nu}{(x^2-i\epsilon)^4} I -$$

$$- \frac{d_{abc}}{2\pi^2} \frac{\epsilon^{\mu\nu\lambda\alpha} x_\lambda A_{CE}(0)}{(x^2-i\epsilon)^2} - \frac{f_{abc}}{2\pi^2} \frac{S^{\mu\nu\lambda\alpha} x_\lambda V_{CE}(0)}{(x^2-i\epsilon)^2} \quad (4)$$

$$T(V_a^\mu(x) A_b^\nu(0)) \sim \underset{x^0 \rightarrow 0}{-} \frac{d_{abc}}{2\pi^2} \frac{\epsilon^{\mu\nu\lambda\alpha} x_\lambda V_{CE}(0)}{(x^2-i\epsilon)^2} - \frac{f_{abc}}{2\pi^2} \frac{S^{\mu\nu\lambda\alpha} x_\lambda A_{CE}(0)}{(x^2-i\epsilon)^2}$$

Notemos que el único efecto del corte es el factor 3 que aparece en el primer término del lado derecho de la primera relación. Las formulas (4) pueden extenderse a productos o conmutadores de corrientes bien sea en calculo directo bien usando $(x^2-i\epsilon)^{-1}$ en $(x^2-i\epsilon x^0)^{-1}$ en un producto de corrientes o usando (IV-7.5) para obtener el conmutador. Así se obtiene por ejemplo

$$[V_a^0(x), V_b^0(0)] \sim \underset{x^0 \rightarrow 0}{3} \frac{\delta_{ab}}{2\pi^4} \frac{g^{00} x^2 - 2x^0 x^0}{(x^2-i\epsilon x^0)^4} I - \frac{d_{abc}}{2\pi^2} \frac{\epsilon^{0\nu\lambda\alpha} x_\lambda A_{CE}(0)}{(x^2-i\epsilon x^0)^2} -$$

$$- \frac{f_{abc}}{2\pi^2} \frac{S^{0\lambda\nu\alpha} x_\lambda V_{CE}(0)}{(x^2-i\epsilon x^0)^2} - 3 \frac{\delta_{ab}}{2\pi^4} \frac{g^{0\nu} x^2 - 2x^0 x^\nu}{(x^2+i\epsilon x^0)^4} I + \frac{d_{abc}}{2\pi^2} \frac{\epsilon^{0\nu\lambda\alpha} x_\lambda A_{CE}(0)}{(x^2+i\epsilon x^0)^2}$$

$$+ \frac{f_{abc}}{2\pi^2} \frac{S^{0\lambda\nu\alpha} x_\lambda V_{CE}(0)}{(x^2+i\epsilon x^0)^2} \underset{x^0 \rightarrow 0}{\sim} -i \frac{\delta_{ab}}{2\pi^3} (g^{0\nu} x^2 - 2x^0 x^\nu) \delta^{(3)}(x^2) \epsilon(x^0) I$$

$$+ i \frac{d_{abc}}{\pi} \epsilon^{0\nu\lambda\alpha} x_\lambda A_{CE}(0) \delta^{(1)}(x^2) \epsilon(x^0) + i \frac{f_{abc}}{\pi} S^{0\lambda\nu\alpha} x_\lambda V_{CE}(0) \delta^{(1)}(x^2) \epsilon(x^0)$$

Usando la identidad

$$2\pi i \epsilon(x^0) \delta^{(1)}(x^2) \xrightarrow{x^2 \rightarrow 0} \frac{2\pi^2 i}{x^0} \delta^{(3)}(\vec{x}) \quad (2)$$

se obtiene inmediatamente

$$\delta(x^0) [V_a^0(x), V_b^0(0)] = i \delta^4(x) f_{abc} V_c^0(0)$$

$$\delta(x^0) [A_a^0(x), A_b^0(0)] = i \delta^4(x) f_{abc} V_c^0(0) \quad (1)$$

$$\delta(x^0) [V_a^0(x), A_b^0(0)] = i \delta^4(x) f_{abc} A_c^0(0)$$

que son las bien conocidas relaciones de conmutación para componentes tiempo-tiempo y tiempo-espacio del álgebra de corrientes de Yang-Mills y que aquí se han obtenido como consecuencia directa del OPE a órdenes distantes.

De forma análoga se pueden obtener las reglas de conmutación espacio-espacio

$$\begin{aligned} [V_a^i(x), A_b^j(0)] \sim & -\frac{dabc}{2\pi^2} \frac{\epsilon^{ij\lambda\tau} x_\lambda V_{c\tau}(0)}{(x^2 - i\epsilon x_0)^2} - \frac{f_{abc}}{2\pi^2} \frac{S^{i\lambda j\tau} x_\lambda A_{c\tau}(0)}{(x^2 - i\epsilon x_0)^2} + \\ & + \frac{dabc}{2\pi^2} \frac{\epsilon^{ij\lambda\tau} x_\lambda V_{c\tau}(0)}{(x^2 + i\epsilon x_0)^2} + \frac{f_{abc}}{2\pi^2} \frac{S^{i\lambda j\tau} x_\lambda A_{c\tau}(0)}{(x^2 + i\epsilon x_0)^2} \end{aligned}$$

de donde

$$\delta(x^0) [V_a^i(x), A_b^j(0)] = \delta^4(x) \left\{ -i dabc \epsilon_{ijk} V_{ck}(0) + i f_{abc} g^{ij} A_c^0(0) \right\} \quad (2)$$

Es útil también el OPE sobre el cono de luz para el conmutador de dos corrientes. Un cálculo directo da

$$\begin{aligned} [J^A(x), J^B(0)] &= \text{Tr} [S_-(x; -m) \Gamma^A S_-(x; m) \Gamma^B] I - \\ &- \text{Tr} [S_+(x; -m) \Gamma^A S_+(x; m) \Gamma^B] I + i : \bar{\psi}(x) \Gamma^A S(x; m) \Gamma^B \psi(0) : - \\ &- i : \bar{\psi}(0) \Gamma^B S(x; m) \Gamma^A \psi(x) : \end{aligned} \quad (3)$$

como hemos hecho uso de la identidad

$$[AB, CD] = \{A, C\} DB - C \{A, D\} B + A \{B, C\} D - AC \{B, D\} \quad (4)$$

Entonces tomando

$$\Gamma^A \equiv I \otimes \frac{1}{2} \lambda_a \otimes \gamma^A, \quad \Gamma^B \equiv I \otimes \frac{1}{2} \lambda_b \otimes \gamma^B$$

se obtiene

$$\begin{aligned} [J^A(x), J^B(0)] \sim & \frac{i}{4\pi^3} \text{Tr} \left(\frac{1}{4} \lambda_a \lambda_b \right) \text{Tr} (\gamma^\lambda \gamma^A \gamma^\sigma \gamma^B) x_\lambda x_\sigma \delta^{(3)}(x^2) \epsilon(x^0) + \\ & + \frac{1}{2\pi} \partial_\lambda [\delta(x^2) \epsilon(x^0)] \left\{ : \bar{\psi}(x) I \otimes \frac{1}{4} \lambda_a \lambda_b \otimes \gamma^A \gamma^\lambda \gamma^B \psi(0) : - : \bar{\psi}(0) I \otimes \frac{1}{4} \lambda_b \lambda_a \otimes \gamma^B \gamma^\lambda \gamma^A \psi(x) : \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

que es la expresión general deseada. Introduce ahora además

$$\Delta_{c,\tau}^V(x;0) \equiv : \bar{\psi}(x) I \otimes \frac{1}{2} \lambda_c \otimes \gamma_\tau \psi(0) : - : \bar{\psi}(0) I \otimes \frac{1}{2} \lambda_c \otimes \gamma_\tau \psi(x) : \quad (1)$$

$$\Sigma_{c,\tau}^V(x;0) \equiv : \bar{\psi}(x) I \otimes \frac{1}{2} \lambda_c \otimes \gamma_\tau \psi(0) : + : \bar{\psi}(0) I \otimes \frac{1}{2} \lambda_c \otimes \gamma_\tau \psi(x) :$$

que serán muy útiles para escribir los resultados deseados.

Empecemos considerando el conmutador de dos corrientes electromagnéticas. En este caso

$$\frac{1}{2} \lambda_a = \frac{1}{2} \lambda_b = \frac{1}{2} (\lambda_3 + \frac{1}{\sqrt{3}} \lambda_8) \equiv Q, \quad \gamma^A = \gamma^H, \quad \gamma^B = \gamma^V \quad (2)$$

y teniendo en cuenta que

$$Q^2 = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \frac{1}{2} \lambda_0 + \frac{1}{3} \frac{1}{2} \lambda_3 + \frac{1}{3\sqrt{3}} \frac{1}{2} \lambda_8, \quad \lambda_0 \equiv \frac{\sqrt{2}}{3} I \quad (3)$$

obtenemos

$$\begin{aligned} [J^H(x), J^V(0)] \underset{x^2 \rightarrow 0}{\sim} & - \frac{i}{3\pi^3} \sum_a Q_a^2 (g^{\mu\nu} x^2 - 2x^\mu x^\nu) \delta^{(3)}(x^2) \epsilon(x^0) + \\ & + \frac{1}{2\pi} \partial_\lambda [\delta(x^2) \epsilon(x^0)] \left\{ S^{\mu\lambda\nu\tau} \left[\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \Delta_{0,\tau}^V(x;0) + \frac{1}{3} \Delta_{3,\tau}^V(x;0) + \frac{1}{3\sqrt{3}} \Delta_{8,\tau}^V(x;0) \right] \right. \\ & \left. - i \epsilon^{\mu\lambda\nu\tau} \left[\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \Sigma_{0,\tau}^A(x;0) + \frac{1}{3} \Sigma_{3,\tau}^A(x;0) + \frac{1}{3\sqrt{3}} \Sigma_{8,\tau}^A(x;0) \right] \right\} \quad (4) \end{aligned}$$

donde $\Sigma_{a,\tau}^A$ se define como $\Sigma_{a,\tau}^V$ con $\gamma_\tau \rightarrow \gamma_\tau \gamma_5$.

Consideremos la corriente axial suponiendo $\theta_c = 0$:

$$J_W^{\mu+}(x) = : \bar{\psi}(x) I \otimes \frac{1}{2} (\lambda_1 + i\lambda_2) \otimes \gamma^\mu (1 + \gamma_5) \psi(x) : \quad (5)$$

Entonces un cálculo análogo da

$$\begin{aligned} [J_W^\mu(x), J_W^{\nu+}(0)] \underset{x^2 \rightarrow 0}{\sim} & - \frac{2i}{\pi^3} (g^{\mu\nu} x^2 - 2x^\mu x^\nu) \delta^{(3)}(x^2) \epsilon(x^0) + \\ & + \frac{1}{\pi} \partial_\lambda [\delta(x^2) \epsilon(x^0)] \left\{ S^{\mu\lambda\nu\tau} \left[\frac{\sqrt{2}}{3} \Delta_{0,\tau}(x;0) - \Delta_{3,\tau}(x;0) + \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta_{8,\tau}(x;0) \right] - \right. \\ & \left. - i \epsilon^{\mu\lambda\nu\tau} \left[\frac{\sqrt{2}}{3} \Sigma_{0,\tau}(x;0) - \Delta_{3,\tau}(x;0) + \frac{1}{\sqrt{3}} \Sigma_{8,\tau}(x;0) \right] \right\} \quad (6) \end{aligned}$$

donde $\Delta \equiv \Delta^V + \Delta^A$ y $\Sigma \equiv \Sigma^V + \Sigma^A$.

Hasta aquí hemos dado ejemplos de OPE para campos libres. ¿Que importancia tienen estos desarrollos? Consideremos, por ejemplo, las colisiones profundamente inelásticas de leptones cargados sobre hadrones. De acuerdo con (XL-5.5) debemos estudiar

$$W_{\mu\nu}(P, q) \equiv \overline{\sum}_{\lambda} \int \frac{d^4x}{4\pi} e^{iq \cdot x} \langle P\lambda | [J_\nu(x), J_\mu(0)] | P\lambda \rangle \quad (1)$$

donde $J_\mu(x)$ es la corriente electromagnética. Vamos a dar una prueba formal de que el comportamiento en el cono de luz controla el límite de Bjorken. Podemos escribir

$$q \cdot x = \frac{1}{2} (q^0 + q^3)(x^0 - x^3) + \frac{1}{2} (q^0 - q^3)(x^0 + x^3) - \vec{q}_T \cdot \vec{x}_T \quad (2)$$

Consideremos el sistema de referencia laboratorio en el que

$$q^\mu \equiv \left(\frac{v}{M}, 0, 0, \frac{v}{M} \sqrt{1 + \frac{2M^2 \Sigma}{v}} \right) \quad (3)$$

En el límite de Bjorken obtenemos

$$q^0 + q^3 = \frac{v}{M} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2M^2 \Sigma}{v}} \right] \approx \frac{2v}{M} \quad (4)$$

$$q^0 - q^3 = \frac{v}{M} \left[1 - \sqrt{1 + \frac{2M^2 \Sigma}{v}} \right] \approx -M \Sigma$$

De esto se deduce que si el elemento de matriz que aparece en (1) no tiene variaciones de fase peculiares, la exponencial que aparece en (1) oscilará rápidamente y matará las contribuciones a $W_{\mu\nu}$ fuera de la región

$$x^0 - x^3 \approx 0 \quad (M/2v) \quad x^0 + x^3 \approx 0 \quad (1/M \Sigma) \quad (5)$$

y en tanto esperamos que la región $x_0^2 - x_3^2 \approx 0 \quad (1/|q^2|)$ dará las contribuciones dominantes a la integral. Tengamos en cuenta que en (1) aparece el conmutador de forma que el integrando es igual a cero para $x^2 < 0$ debido a microcausalidad. Por tanto

$$0 \quad (1/q^2) \approx x_0^2 - x_3^2 \geq x_0^2 - x_3^2 - \vec{x}_T^2 = x^2 > 0 \quad (6)$$

dará en la región dominante. Por tanto en el límite de Bjorken la región

dominante en la integral (10.1) es $x^2 \approx 0$, es decir la región del cono de luz. Este argumento prueba una importante es poder hacer afirmaciones sobre el comportamiento de cantidades tales como $[J_\mu(x), J_\nu(0)]$ cuando $x^2 \rightarrow 0$.

Pasemos ahora a discutir los O.P.E. Wilson [K.G. WILSON Phys. Rev. 179, 1499 (1969)] propuso un O.P.E. de cortas distancias de la siguiente forma

$$A(x) B(0) \underset{x^2 \rightarrow 0}{\sim} \sum_m C_m(x) O_m(0) \quad (1)$$

donde $A(x)$ y $B(0)$ son operadores locales (elementales o compuestos). Los $C_m(x)$ son funciones números \mathbb{C} que tienen singularidades en el cono de luz de la forma $[x^2 - i\epsilon x^0]^{-p}$, siendo p un número real. Pueden también incluir logaritmos de x^2 . El desarrollo completo contiene, en general, un número infinito de operadores locales no singulares O_m , pero a cualquier orden finito en x solo un número finito de estos operadores contribuye. Estos desarrollos son válidos en sentido débil: uno debe tomar el valor esperado de $A(x)B(0)$ entre estados inicial y final. Desarrollos análogos existen para productos ordenados en el tiempo, conmutadores o cualquier otro tipo de producto.

Estos O.P.E. existen para teorías escalares y spinoriales libres y para campos en interacción para teorías renormalizables en todos los órdenes de teoría de perturbaciones. En todos los casos son válidas para campos locales elementales o compuestos: A y B pueden ser campos escalares o spinoriales, corrientes locales, tensor energía-momento o cualquier producto local de Wick en una teoría libre. Antes hemos dado ejemplos de O.P.E. a cortas distancias en teorías libres.

La naturaleza de las singularidades de las funciones $C_m(x)$ es determinada, en general, por las simetrías exactas y rotas de la teoría. La más crucial de estas simetrías es la invariancia de escala rota. Las teorías de campos escalares o spinoriales libres sin masa son exactamente invariantes bajo transformaciones de escala. Los términos másicos y las interacciones renormalizables tratadas por teoría de perturbaciones rompen esa simetría pero el espíritu de la invariancia de escala aun gobierna el comportamiento de las funciones singulares. Invariancia de escala exacta significa que la teoría de campos es invariante bajo un grupo uniparamétrico de transformaciones $U(1)$. Los operadores locales $O(x)$ se transforman como

$$O_m(x) \longrightarrow U^\dagger(\lambda) O_m(x) U(\lambda) = \lambda^{d_{O_m}} O_m(\lambda x) \quad (1)$$

En teorías de campos libres d_{O_m} es la dimensión de O_m ($[O_m(x)] = M^{d_{O_m}}$) que viene determinada por las relaciones de conmutación. En particular $d_\phi = 1$, $d_\psi = 3/2$ para campos escalares y spinoriales respectivamente.

En una teoría en la que la invariancia de escala sea exacta el comportamiento de las funciones $C_m(x-y)$ viene determinado, salvo constantes, por invariancia de escala. Realizando una transformación de escala en

$$A(x) B(y) \underset{x^\mu \rightarrow y^\mu}{\sim} \sum_m C_m(x-y) O_m(y) \quad (2)$$

obtenemos

$$\lambda^{d_A + d_B} A(\lambda x) B(\lambda y) \underset{x^\mu \rightarrow y^\mu}{\sim} \sum_m C_m(x-y) \lambda^{d_{O_m}} O_m(\lambda y) \quad (3)$$

Pero

$$\lambda^{d_A + d_B} A(\lambda x) B(\lambda y) \underset{x^\mu \rightarrow y^\mu}{\sim} \lambda^{d_A + d_B} \sum_m C_m(\lambda x - \lambda y) O_m(\lambda y) \quad (4)$$

y comparando (3) y (4) obtenemos para $x^\mu \rightarrow y^\mu$

$$\lambda^{d_A + d_B} \sum_m C_m(\lambda x - \lambda y) O_m(\lambda y) \sim \sum_m C_m(x-y) \lambda^{d_{O_m}} O_m(\lambda y)$$

Si los campos $O_m(x)$ son linealmente independientes, lo cual siempre se puede lograr, entonces

$$C_m(\lambda x - \lambda y) = \lambda^{d_{O_m} - d_A - d_B} C_m(x-y) \quad (5)$$

ecuación que nos asegura que $C_m(x-y)$ debe ser una función homogénea de orden $(d_{O_m} - d_A - d_B)$ en $(x-y)$. Esto junto con las propiedades de transformación Lorentz de $C_m(x-y)$ determinan el comportamiento de $C_m(x-y)$ completamente salvo una o más constantes arbitrarias [E.T. SCHREIER, *Phys. Rev.* **3D**, 980 (1974)]. En particular la intensidad de la singularidad en el caso de luz viene determinada por la dimensión $(d_A + d_B - d_{O_m})$. La función $C_m(x-y)$ puede ser singular solo si $d_A + d_B \geq d_{O_m}$.

¿Cuál es el efecto de las interacciones? El OPE a cortas distancias aun tiene la misma forma [W. ZIMMERMAN, Brandeis University Summer Institute in Theoretical Physics, 1970]. Aun es verdad que las funciones C_m tienen comportamiento cuando $x^\mu \rightarrow 0$ dado por las transformaciones de escala

que pueden resumirse escribiendo

$$C_m(x) \underset{x^2 \rightarrow 0}{\sim} x^{-\lambda_m} \quad (1)$$

$$\lambda_m \equiv d_A + d_B - d_{O_m}$$

excepto que las dimensiones de los operadores no vienen dadas ya en un conteo naïve: en general desarrollan dimensiones anómalas [S. COLEMAN, Eric 1971].

Hay sin embargo operadores que mantienen su dimensión naïve: estos incluyen el operador identidad I y los operadores que generan las simetrías de la teoría tales como las corrientes J_μ y el tensor energía-momento $T_{\mu\nu}$, relacionado con la invariancia Lorentz. Como es bien sabido la integral sobre todo el espacio de $J^0(x)$ da la carga y en tanto $d_{J^0} = 3$ y por conservación Lorentz $d_{J_\mu} = 3$. Similarmen- te el hecho de que el momento tenga dimen- sión 4 se deduce $d_{T_{\mu\nu}} = 4$.

Los OPE en el cono de luz fueron sugeridos como una generalización de los OPE a cortas distancias [Y. FRISHMAN Phys. Rev. Letters 25, 966 (1970) Ann Phys. (N.Y.) 66, 373 (1971)] [R. A. BRANDT y G. PREPARATA Nucl. Phys. B27, 551 (1971)] para estudiar colisiones profundamente inelásticas. Tiene la forma

$$A(x) B(0) \underset{x^2 \rightarrow 0}{\sim} \sum_m \tilde{C}_m(x) O_m(x, 0) \quad (2)$$

donde A y B son aún operadores locales, pero $O_m(x, 0)$ son bilocales, regulares cuando $x^2 \rightarrow 0$. Los $\tilde{C}_m(x)$ son funciones C -número que pueden ser singulares para $x^2 \rightarrow 0$. Desarrollos análogos existen para productos ordenados, conmutadores, ...

Más aun si se supone que $O_m(x, 0)$ son regulares cuando $x^2 \rightarrow 0$, es posible conectar el desarrollo (2) con el (11.1) propuesto por Wilson. Es obvio que cualquier término que es regular cerca del cono de luz es también regular a cortas distancias. Sin embargo, un término singular en el cono de luz puede ser regular a pequeñas distancias. Frishman ha probado que necesitamos conocer el desarrollo de Wilson con exactitud infinita para poder establecer el desarrollo (2). En este caso podemos decir que no es posible obtener el desarrollo en el cono de luz a partir del de pequeñas distancias.

Este tipo de desarrollos existen para teorías libres y hemos dado otros ejemplos de los mismos. La hipótesis básica de Frishman es que desarrollos de la forma (2)

existen para teorías en interacción. Sabemos hoy día que esto no es cierto en general para teorías renormalizables. Sin embargo y en algún sentido que más adelante especificaremos es aún una aproximación buena y útil para los tipos de problemas en que estamos interesados.

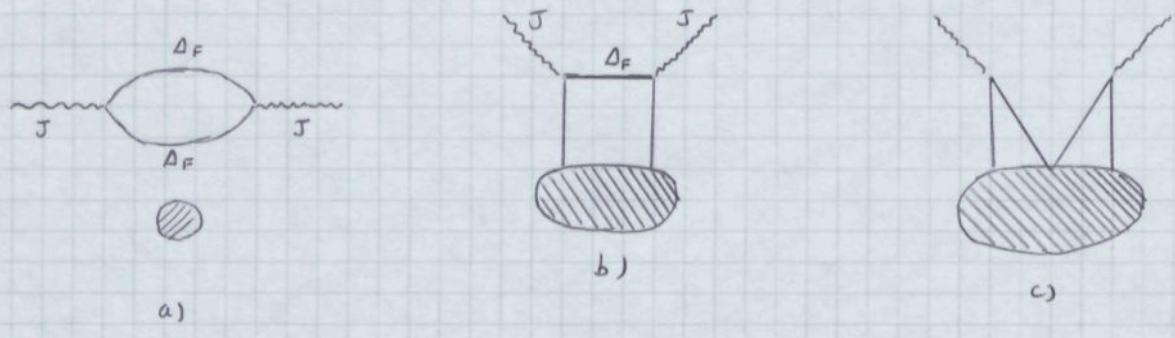
Un importante paso hacia adelante en el uso de los OPE en el caso de luz fue dado por FRITZSCH y GELL-MANN [H. FRITZSCH y M. GELL-MANN "Light Cone Element Algebra" in Proc. Int. Conf. on Duality and Symmetry in Hadron Physics, Ed. E. Gellman, Weizmann Sci. Press, Israel 1971]. Comenzamos el modelo de quarks libres; utilizando los métodos por los que hemos obtenido (9.4) y (9.6) podemos calcular las singularidades dominantes sobre el cono de luz de $[V_a^\mu(x), V_b^\nu(y)]$, $[A_a^\mu(x), A_b^\nu(y)]$ y $[N_a^\mu(x), A_b^\nu(y)]$ y es evidente que las partes conectadas de estos conmutadores (los términos multiplicados el operador unidad o m'índes) pueden expresarse en términos de los operadores bilocales $\Delta_{a,\mu}^{V,A}(x,y)$, $\Sigma_{a,\mu}^{V,A}(x,y)$. Más aún es posible probar que el algebra de estos operadores bilocales es cerrado, es decir las similitudes dominantes de los conmutadores de estos operadores bilocales sobre el cono de luz pueden ser escritas en términos de estos mismos operadores bilocales. La conjetura de FRITZSCH y GELL-MANN es que hay modelos no triviales de teorías de quarks con interacciones tales que las singularidades dominantes sobre el cono de luz vienen dadas aun por el modelo de quarks libres y sin masa, ya que las masas no afectan las singularidades dominantes. Esta conjetura es falsa pero en la Q.C.D. de libertad asintótica de la teoría fuerte probar [D.J. GROSS y F. WILCZEK Phys. Rev. Letters 30, 1343 (1973)] [H.D. POLITZER Phys. Rev. Letters 30, 1346 (1973)] que la estructura de la OPE de corrientes electromagnéticas y débiles es la del modelo de quarks libres salvo correcciones logarítmicas que pueden calcularse usando las técnicas del grupo de renormalización.

Antes de continuar queremos comentar sobre el sentido físico de los distintos términos que aparecen en el OPE en términos del modelo de partones. Para simplificar la notación consideremos partones de spin cero; podemos escribir (2.1) en la forma

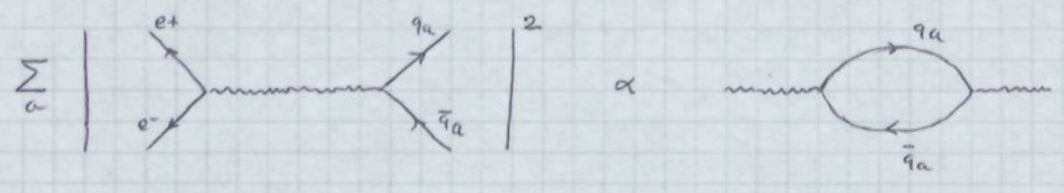
$$T(J(x) J(0)) \underset{x^2 \rightarrow 0}{\sim} -2 [A_F(x;0)]^2 + 4i \Delta_F(x;0) : \phi(x) \phi(0) : + : \phi^2(x) \phi^2(0) : \quad (1)$$

El primer término de (1) corresponde al diagrama desconectado a) de la

figura siguiente. No contribuye a las colisiones profundamente inelásticas, pero



es el término importante en el estudio de la aniquilación e^+e^- como se ve en la próxima figura



El segundo término de (14.1) es el típico diagrama "bolso" del modelo de partones (como en b) y es importante en el análisis de los procesos de colisión profundamente inelástica. El último término, representado en c) es el diagrama de "ojas de gato" y no contribuye a las colisiones profundamente inelásticas si las interacciones entre partones son despreciadas.

Veamos algunos ejemplos de como aplicar todo este

i) Aniquilación e^+e^-

Usemos ahora las OPE en el cono de luz y en particular el algebra en el cono de luz de Fretzsch y Gell-Mann para derivar la sección eficaz de aniquilación e^+e^- dando hadrones. Se tiene de acuerdo con (KL-20.1)

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \gamma \rightarrow \text{hadrones}) = - \frac{32\pi^3 \alpha^2}{3q^4} \int \frac{d^4x}{4\pi} e^{iq \cdot x} \langle 0 | [J^\mu(x), J_\mu(0)] | 0 \rangle \quad (1)$$

donde hemos reemplazado el producto de las corrientes por su conmutador ya que sólo los estados de energía positiva contribuyen. Como ya hemos indicado ante este punto viene dominado por la parte desconectada de (9.4) y por tanto

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \gamma \rightarrow \text{hadrones}) = \frac{16\pi \alpha^2}{9\pi q^4} \sum_a Q_a^2 \int d^4x x^2 e^{iq \cdot x} E(x^0) \delta^{(3)}(x^i) \quad (2)$$

de donde

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \gamma \rightarrow \text{hadrones}) = - \frac{16i\alpha^2}{9\pi q^4} \sum_a Q_a^2 \frac{\partial}{\partial q_\mu} \frac{\partial}{\partial q^\mu} \int d^4x e^{iq \cdot x} \epsilon(x^0) \delta^{(3)}(x^2) \quad (1)$$

y usando (IV-7.2) obtenemos

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \gamma \rightarrow \text{hadrones}) = \frac{\pi\alpha^2}{18q^4} \sum_a Q_a^2 \frac{\partial}{\partial q_\mu} \frac{\partial}{\partial q^\mu} (q^2)^2 = \frac{4\pi\alpha^2}{3q^2} \sum_a Q_a^2 \quad (2)$$

que coincide con el resultado obtenido en el modelo de partones.

(ii) Singularidades en el cono de luz e invariancia de escala

En orden a demostrar la relación entre las singularidades en el cono de luz y el comportamiento de scaling vamos a considerar un modelo de campo escalar y definimos

$$W(P, q) \equiv \int \frac{d^4x}{4\pi} e^{iq \cdot x} \langle P | [J(x), J(0)] | P \rangle \quad (3)$$

donde $J(x) \equiv : \phi(x) \phi(x) :$. La parte conectada de este conmutador viene dada por $4i \Delta(x; m^2) : \phi(x) \phi(0) :$ y por tanto en el orden dominante y en el orden siguiente las singularidades en el cono de luz son (IV-5.2)

$$[J(x), J(0)] \underset{x^2 \rightarrow 0}{\sim} \frac{2}{i\pi} \epsilon(x^0) \delta(x^2) : \phi(x) \phi(0) : + \frac{i m^2}{2\pi} \theta(x^2) \epsilon(x^0) : \phi(x) \phi(0) \quad (4)$$

Veamos la contribución de la singularidad dominante

$$W_L(P, q) = \frac{1}{2i\pi^2} \int d^4x e^{iq \cdot x} \epsilon(x^0) \delta(x^2) \langle P | : \phi(x) \phi(0) : | P \rangle \quad (5)$$

El elemento de matriz debe ser una función escalar que dependa solo de (x, P) pues x^2 y P^2 son fijos. Indicemos por $B(x, P)$ esta función y por $\hat{B}(\alpha)$ su transformada de Fourier

$$\hat{B}(\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} d(x, P) e^{-i\alpha(x, P)} B(x, P) \quad (6)$$

Utilizando la inversa de (6) en (5)

$$W_L(P, q) = \frac{1}{2i\pi^2 (2\pi)^{1/2}} \int d^4x \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \hat{B}(\alpha) e^{i(\alpha P + q) \cdot x} \delta(x^2) \epsilon(x^0) \quad (7)$$

Intercambiando el orden de integración y usando (IV-4.6) obtenemos

$$W_L(p, q) = -2(2\pi)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \hat{B}(\alpha) \Delta(\alpha p + q; 0) \quad (1)$$

y usando para la función Δ su expresión exacta (IV-5.6)

$$W_L(p, q) = \frac{2}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \hat{B}(\alpha) \epsilon\left(\alpha M + \frac{v}{M}\right) \delta(M^2 \alpha^2 + 2v\alpha + q^2) \quad (2)$$

Las raíces del argumento de la función δ son

$$\alpha_{\pm} = -\frac{v}{M^2} \left[1 \mp \sqrt{1 + \frac{2M^2 \Sigma}{v}} \right] = \begin{cases} \Sigma \\ -\frac{2v}{M^2} \end{cases} \quad (3)$$

donde en el último caso hemos tomado el límite Bjorken. Entonces

$$\lim_{Bj} v W_L(p, q) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \left[\hat{B}(\Sigma) - \hat{B}\left(-\frac{2v}{M}\right) \right] \quad (4)$$

Pero las condiciones espectrales exigen que $W_L(p, q) = 0$ para $|\Sigma| > 1$ por lo que $\hat{B}(\alpha) = 0$ si $|\alpha| > 1$ y por tanto el segundo término de (4) se anula y obtenemos

$$\lim_{Bj} v W_L(p, q) = (2\pi)^{-1/2} \hat{B}(\Sigma) \quad (5)$$

Notar que esto se deduce por conteo naïve de dimensiones de (16.5)

Veamos la contribución del orden siguiente al dominante, dado en (16.4). Vamos a comprobar que su contribución es despreciable en el límite de Bjorken. En efecto

$$W_{NL}(p, q) = \frac{im^2}{8\pi^2} \int d^4x e^{iq \cdot x} \theta(x^2) \epsilon(x^0) \langle p | : \phi(x) \phi(0) : | p \rangle \quad (6)$$

Usando las mismas técnicas de antes

$$\begin{aligned} W_{NL}(p, q) &= \frac{im^2}{8\pi^2 (2\pi)^{1/2}} \int d^4x \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \hat{B}(\alpha) e^{i(\alpha p + q) \cdot x} \theta(x^2) \epsilon(x^0) = \\ &= -\frac{2m^2}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \hat{B}(\alpha) \delta^{(1)}(M^2 \alpha^2 + 2v\alpha + q^2) \epsilon\left(M\alpha + \frac{v}{M}\right) \end{aligned}$$

de donde

$$\lim_{B_j} v W_{NL}(P, q) = \frac{m^2 v}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \frac{1}{M^2 \alpha + v} \frac{d \hat{B}(\alpha)}{d\alpha} \delta(M^2 \alpha^2 + 2v\alpha + q^2) \in (M\alpha + \frac{v}{M})$$

y de aquí

$$\lim_{B_j} v W_{NL}(P, q) = \lim_{B_j} \frac{m^2}{2v(2\pi)^{1/2}} \left[\frac{d \hat{B}(\alpha)}{d\alpha} \right]_{\alpha=\pm} = 0 \quad (1)$$

que es lo que se deseaba. Este resultado también se obtiene por análisis dimensional
maire. Trabajo relacionado puede hallarse en [R.L. JAFFE Phys. Rev. D6, 716 (1972)].

Pasemos ahora a considerar una situación más realista en la que deseamos evaluar,
en el límite Bjorken, las funciones de estructura (XL-7.1) suponiendo válidas las
relaciones (9.4). Se obtiene que

$$W_1(q^2, v) = \frac{1}{2\eta} \left\{ \frac{1}{M^2} P_\mu W^{\mu\nu}(P, q) P_\nu - \eta W^\mu_\mu(P, q) \right\} \quad \eta \equiv 1 + \frac{v}{2M^2 x} \quad (2)$$

$$W_2(q^2, v) = \frac{1}{2\eta^2} \left\{ \frac{3}{M^2} P_\mu W^{\mu\nu}(P, q) P_\nu - \eta W^\mu_\mu(P, q) \right\}$$

Para estudiar estas cantidades y teniendo en cuenta que solo contribuyen las canti-
dades conectadas nos resulta

$$[J^\mu(x), J_\nu(0)] \underset{x^2 \rightarrow 0}{\sim} - \frac{1}{\pi} \partial^\lambda [\delta(x^2) \epsilon(x^0)] \Delta_\lambda(x, 0)$$

$$[P_\mu J^\mu(x), P_\nu J^\nu(0)] \underset{x^2 \rightarrow 0}{\sim} + \frac{1}{2\pi} \partial_\lambda [\delta(x^2) \epsilon(x^0)] [2P^\lambda P^\nu - M^2 g^{\lambda\nu}] \Delta_\nu(x, 0) \quad (3)$$

$$\Delta_\nu(x, 0) \equiv \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \Delta_{0,\nu}^V(x, 0) + \frac{1}{3} \Delta_{3,\nu}^V(x, 0) + \frac{1}{3\sqrt{3}} \Delta_{8,\nu}^V(x, 0)$$

Teniendo esto en cuenta la contribución dominante de W^μ_μ es

$$W^\mu_\mu(P, q)_L = - \frac{1}{4\pi^2} \int d^4x e^{iq \cdot x} \partial^\lambda [\delta(x^2) \epsilon(x^0)] \sum \langle P | \Delta_\lambda(x, 0) | P \rangle \quad (4)$$

La covarianza Lorentz permite escribir

$$\sum \langle P | \Delta_\lambda(x, 0) | P \rangle = P_\lambda D(x, P) + x_\lambda \tilde{D}(x, P) \quad (5)$$

Introduciendo las transformadas de Fourier de D y \tilde{D} que indicaremos por \hat{D} y $\hat{\tilde{D}}$,
respectivamente, se puede escribir

$$W_{\mu}^{\nu} (p, q)_L = - \frac{1}{4\pi^2 (2\pi)^{1/2}} \int d^4x \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha e^{i(q+\alpha p) \cdot x} \partial^{\lambda} [\delta(x^2) \in(x^0)] [p_{\lambda} \hat{D}(\alpha) + x_{\lambda} \hat{\tilde{D}}(\alpha)]$$

Si guiamos procedimientos análogos a los ya usados es fácil ver que toda la contribución dominante viene de \hat{D} y a partir de ahora despreciaremos $\hat{\tilde{D}}$. Entonces

$$\begin{aligned} W_{\mu}^{\nu} (p, q)_L &= \frac{i}{4\pi^2 (2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \hat{D}(\alpha) (v + M^2 \alpha) \int d^4x e^{i(q+\alpha p) \cdot x} \delta(x^2) \in(x^0) = \\ &= (2\pi)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \hat{D}(\alpha) (v + M^2 \alpha) \Delta(\alpha p + q, 0) = \\ &= - (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \hat{D}(\alpha) (v + M^2 \alpha) \epsilon(M\alpha + \frac{v}{M}) \delta(M^2 \alpha^2 + 2v\alpha + q^2) \end{aligned}$$

y finalmente en el límite Bjorken

$$W_{\mu}^{\nu} (p, q)_L \longrightarrow - \frac{1}{2 (2\pi)^{1/2}} \hat{D}(\Sigma) \tag{1}$$

y análogamente

$$\frac{1}{M^2} [p_{\mu} W^{\mu\nu} (p, q) p_{\nu}]_L \longrightarrow \frac{1}{8 (2\pi)^{1/2}} \hat{D}(\Sigma) \tag{2}$$

y usando (18.2)

$$\lim_{Bj} W_2(q^2, \nu) = \frac{1}{4 (2\pi)^{1/2}} \hat{D}(\Sigma) \tag{3}$$

$$\lim_{Bj} \frac{\nu W_2(q^2, \nu)}{M^2} = \frac{\Sigma}{2 (2\pi)^{1/2}} \hat{D}(\Sigma)$$

que son los límites de scaling y la relación de Callan-Gross que antes hemos obtenido en el marco del modelo de partones.

iii) Reglas de suma

Las reglas de suma obtenidas con el modelo de partones se pueden también obtener en el marco del OPE en el caso de luz. Vamos, como ejemplo, a deducir la regla de suma de Adler en el límite $\theta_c = 0$. De (XL-14.3) y usando (9.6)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [W_{\mu\nu}^{\nu\mu} + W_{\mu\mu}^{\nu\nu}]_L &= \frac{1}{4\pi^2} S_{\mu\nu\lambda\tau} \int d^4x e^{iq \cdot x} \partial^{\lambda} [\delta(x^2) \in(x^0)] \cdot \\ &\cdot \left\{ - \langle p | Z_3^{\tau} (x, 0) | p \rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \langle p | \Delta_0^{\tau} (x, 0) | p \rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} \langle p | \Delta_8^{\tau} (x, 0) | p \rangle \right\} \end{aligned}$$

Conservando Lorentz permite escribir

$$\bar{\Sigma} \langle P | \Sigma_a^\pm(x, 0) | P \rangle = P^\pm S_a(x, P) + x^\pm \tilde{S}_a(x, P) \quad (1)$$

$$\bar{\Sigma} \langle P | \Delta_a^\pm(x, 0) | P \rangle = P^\pm D_a(x, P) + x^\pm \tilde{D}_a(x, P)$$

Como antes se puede probar que la contribución dominante es debida al primer término de (1) y podemos olvidar los que contienen \tilde{D} o \tilde{S} . Usando los métodos anteriores

$$\frac{1}{2} [W_{\mu\nu}^{\nu P}(P, q) + W_{\nu\mu}^{\nu P}(P, q)]_L = \frac{1}{2\nu(2\pi)^{1/2}} [-\nu g_{\mu\nu} + q_\mu p_\nu + q_\nu p_\mu + 2x p_\mu p_\nu] \cdot [-\hat{S}_3(x) + \sqrt{\frac{2}{3}} \hat{D}_0(x) + \frac{1}{\sqrt{3}} \hat{D}_8(x)] \quad (2)$$

comparando con (XL-7.1) y teniendo en cuenta (XLI-6.2)

$$F_2^{\nu P}(x) = (2\pi)^{-1/2} x [-\hat{S}_3(x) + \sqrt{\frac{2}{3}} \hat{D}_0(x) + \frac{1}{\sqrt{3}} \hat{D}_8(x)] \quad (3)$$

Entonces

$$\int_{-1}^{+1} d\bar{x} \frac{1}{\bar{x}} F_2^{\nu P}(\bar{x}) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-1}^{+1} d\bar{x} \left\{ -\hat{S}_3(\bar{x}) + \sqrt{\frac{2}{3}} \hat{D}_0(\bar{x}) + \frac{1}{\sqrt{3}} \hat{D}_8(\bar{x}) \right\}$$

Las condiciones espectrales permiten extender esta integral en $(-\infty, +\infty)$ y en tanto

$$\int_{-1}^{+1} d\bar{x} \frac{1}{\bar{x}} F_2^{\nu P}(\bar{x}) = -S_3(0) + \sqrt{\frac{2}{3}} D_0(0) + \frac{1}{\sqrt{3}} D_8(0)$$

Pero de su definición es evidente que $D_0(0) = 0$ y en tanto

$$\int_{-1}^{+1} d\bar{x} \frac{1}{\bar{x}} F_2^{\nu P}(\bar{x}) = -S_3(0) \quad (4)$$

Tengamos en cuenta que las relaciones de suma implican $F_2^{\nu P}(-x) = F_2^{\bar{\nu} P}(x)$ y además

$$P^\mu S_3(0) = \bar{\Sigma} \langle P | \Sigma_3^\mu(0, 0) | P \rangle = 2 \bar{\Sigma} \langle P | V_3^\mu(0) | P \rangle = 4 P^\mu T_3 \quad (5)$$

podemos escribir

$$\int_0^1 d\bar{x} \frac{1}{2\bar{x}} [F_2^{\nu P}(\bar{x}) - F_2^{\bar{\nu} P}(\bar{x})] = 2T_3 = 1 \quad (6)$$

que es la regla de suma de Adler con $\theta_c = 0$. Mas sobre esto en [J. ELLIS "Deep Hadronic Structure" Lectures. Les Houches, 1976] y X. FRI'SHMAN, Phys. Rep. 13, 1 (1974)]

En las últimas páginas hemos visto como el modelo de fantasmas y el análisis de singularidades en el caso de luz tratan el problema de scattering profundamente inelástico de leptones por dos métodos distintos. En el modelo de fantasmas [R.P. Feynman Phys. Rev. Letters 23, 1515 (1969)] [J.D. BJORKEN Phys. Rev. 179, 1567 (1969)] [J.D. BJORKEN y E.A. PASCHOS Phys. Rev. D1, 3151 (1970)] se supone la existencia de constituyentes puntuales o fantasmas en el nucleón blanco. Una imagen intuitivamente simple de las colisiones inelásticas profundamente inelásticas surge cuando el proceso es observado en un sistema de referencia de momento infinito. Donde, se argumenta, que los fantasmas son dispersados elásticamente e incoherentemente por el electron incidente. Por otra parte el análisis del caso de luz se hace en el espacio de coordenadas sin ninguna referencia a la descomposición del blanco en los estados constitutivos, características del modelo de fantasmas. En primer lugar la sección eficaz inelástica se relaciona al conmutador de dos corrientes. A continuación se argumenta que, salvo patologías, la contribución dominante al scattering profundamente inelástico se origina cuando las dos corrientes están separadas por una distancia casi de tipo luz. El conmutador de las corrientes se desarrolla en una serie de términos con distintas singularidades sobre el caso de luz y la sección eficaz inelástica apropiada a cada término se calcula. Se encuentra que la ley de escala se deduce al suponer que las singularidades dominantes en el caso de luz son las de una teoría de campos libres.

Se hace notar frecuentemente que ambos análisis alcanzan la predicción de escala para colisiones inelásticas de leptones suponiendo un cierto comportamiento de campos libres. De nuestro análisis se deduce que, en lo que respecta a la colisión inelástica de leptones, el modelo de fantasmas es una simple realización en el espacio de momentos del desarrollo en producto de operadores en el caso de luz con las singularidades dominadas por las de los campos libres.

Un análisis [R.L. JAFFE Phys. Rev. D6, 716 (1972)] apunta sin embargo que la identificación no puede extenderse a otros procesos importantemente como el mecanismo de Drell-Yan. En este modelo y para poder calcular la sección eficaz para la producción de pares de leptones cargados debemos considerar

$$W^{\mu\nu}_p = \int \frac{d^4x}{4i\pi} e^{-iq \cdot x} \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \langle p_1, \lambda_1, p_2, \lambda_2 | J^\mu(x) J^\nu(0) | p_1, \lambda_1, p_2, \lambda_2 \rangle \quad (1)$$

Para simplificar los argumentos al máximo consideraremos partones de spin cero y sustituiremos la corriente por $J(x) \equiv : \phi(x) \phi(x) :$. Entonces el análogo de la fórmula anterior es

$$W = \int \frac{d^4x}{L^4} e^{-iq \cdot x} \langle p_1, p_2 | J(x) J(0) | p_1, p_2 \rangle \quad (1)$$

donde estamos interesados en la parte conectada del producto de estos operadores compuestos que resultará ser (1.5)

$$[J(x) J(0)]_c = 4i \Delta_+(x; m^2) : \phi(x) \phi(0) : + : \phi^2(x) \phi^2(0) : \quad (2)$$

que corresponden, respectivamente, al los diagramas del bucle y de las superficies de gato. Indicamos por W_2 y W_4 la contribución a W del primero y segundo término de (2); indicando los subíndices el número de partones interaccionantes. Consideremos el primero

$$W_2 = \frac{i}{\pi} \int d^4x e^{-iq \cdot x} \Delta_+(x; m^2) \langle p_1, p_2 | : \phi(x) \phi(0) : | p_1, p_2 \rangle \quad (3)$$

Para calcular el comportamiento dominante debemos tomar $m^2=0$ y estudiar el elemento de matriz del operador en el límite $x^2=0$. Es claro que este elemento puede escribirse como $B_2(x, p_1, x, p_2; s)$ donde $s = (p_1 + p_2)^2$. Podemos hacer la transformada de Fourier respecto a x, p_1 y x, p_2 (se debe tener un cierto cuidado ya que en el cono de luz estos dos productos están relacionados) y un cálculo explícito o un típico argumento dimensional dan que la contribución a W_2 es proporcional a $\hat{B}_2(x_1, x_2; s) / q^2$. Un argumento similar da para el otro $\hat{B}_4(x_1, x_2; s) / q^4$.

Como no sabemos nada sobre la dependencia de estas funciones de s , deduciremos simplemente que el segundo dominará en el límite $q^2, s \rightarrow \infty$, $z = q^2/s = \text{fijo}$. La diferencia fundamental es que aquí el elemento de matriz no se toma sino está fijo como en los casos anteriores.

En el modelo de partones el primer término de (2) corresponde al bremsstrahlung mientras que el segundo es el de aniquilación partón-partón, que es el dominante. La única forma de recuperar el modelo de partones es tomar hipótesis más o menos arbitrarias [R. L. JAFFE Phys. Rev. D5, 2622 (1972)].

XLV - FUNCIÓNES ESPECTRALES DE DOS PUNTOS EN Q.C.D

Consideremos las corrientes

$$V_{ij}^{\mu}(x) \equiv : \bar{q}_i(x) \gamma^{\mu} q_j(x) :$$

(1)

$$A_{ij}^{\mu}(x) \equiv : \bar{q}_i(x) \gamma^{\mu} \gamma_5 q_j(x) :$$

donde una suma sobre índices de color es sobreentendida. Definamos ahora las funciones espectrales de dos puntos siguientes

$$\psi_{ij}(q^2) \equiv i \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle 0 | T (\partial_{\mu} V_{ij}^{\mu}(x), \partial_{\nu} V_{ij}^{\nu+}(0)) | 0 \rangle$$

$$\psi_{5ij}(q^2) \equiv i \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle 0 | T (\partial_{\mu} A_{ij}^{\mu}(x), \partial_{\nu} A_{ij}^{\nu+}(0)) | 0 \rangle$$

(2)

$$T_{ij}^{\mu\nu}(q) \equiv i \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle 0 | T (V_{ij}^{\mu}(x), V_{ij}^{\nu+}(0)) | 0 \rangle$$

$$T_{5ij}^{\mu\nu}(q) \equiv i \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle 0 | T (A_{ij}^{\mu}(x), A_{ij}^{\nu+}(0)) | 0 \rangle$$

Notar que

$$V_{ij}^{\mu+}(x) = V_{ji}^{\mu}(x), \quad A_{ij}^{\mu+}(x) = A_{ji}^{\mu}(x) \quad (3)$$

Por invariancia Lorentz nos dice que las dos últimas expresiones de (2) deben ser de la forma

$$\Sigma^{\mu\nu}(q) = [q^2 g^{\mu\nu} - q^{\mu} q^{\nu}] \Sigma^{(1)}(q^2) + q^{\mu} q^{\nu} \Sigma^{(2)}(q^2) \quad (4)$$

Introduciendo

$$P_{\mu\nu}(q) \equiv \frac{1}{(D-1)[q^2]^2} [-q^2 g_{\mu\nu} + D q_{\mu} q_{\nu}] \Rightarrow \begin{aligned} P_{\mu\nu} g^{\mu\nu} &= 0 \\ P_{\mu\nu} q^{\mu} q^{\nu} &= 1 \end{aligned} \quad (5)$$

obtenemos

$$\bar{\Sigma}(q^2) \equiv P_{\mu\nu}(q) \Sigma^{\mu\nu}(q) = -\Sigma^{(1)}(q^2) + \Sigma^{(2)}(q^2)$$

$$\tilde{\Sigma}(q^2) \equiv \frac{1}{q^2} \Sigma^{\mu}_{\mu}(q) = (D-1) \Sigma^{(1)}(q^2) + \Sigma^{(2)}(q^2) \quad (6)$$

$$\Sigma^{(1)}(q^2) = \frac{1}{D} [\tilde{\Sigma}(q^2) - \bar{\Sigma}(q^2)]$$

$$\Sigma^{(2)}(q^2) = \frac{1}{D} [\tilde{\Sigma}(q^2) + (D-1) \bar{\Sigma}(q^2)]$$

Usaremos también la notación

$$\psi_{i a}^{\alpha}(x) \bar{\psi}_{j b}^{\beta}(y) = \delta_{\alpha\beta} \delta_{ij} S_{ab}^i(x-y) =$$

$$= \delta_{\alpha\beta} \delta_{ij} i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} S_{ab}^i(p) e^{-i p(x-y)} ; S_{ab}^i(p) = \frac{1}{\not{p} - m_i + i\epsilon}$$

$$W_{\mu}^{(a)}(x) W_{\nu}^{(b)}(y) = \delta_{ab} W_{\mu\nu}(x-y) = -i \delta_{ab} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} W_{\mu\nu}(k) e^{-i k(x-y)}$$

$$W_{\mu\nu}(k) = \frac{i}{k^2 + i\epsilon} \left[g_{\mu\nu} - (1-a) \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{k^2 + i\epsilon} \right]$$

c) Orden más bajo en teoría de perturbaciones

Recordemos que en este caso

$$\partial_{\mu} V_{ij}^{\mu}(x) = i(m_i - m_j) : \bar{q}_i(x) q_j(x) :$$

$$\partial_{\mu} A_{ij}^{\mu}(x) = i(m_i + m_j) : \bar{q}_i(x) \gamma_5 q_j(x) :$$

con lo cual

$$\psi_{ij}(q^2) = + i(m_i - m_j)^2 \int d^4 x e^{i q \cdot x} \langle 0 | T (S_{ij}(x), S_{ij}^+(0)) | 0 \rangle$$

$$\psi_{ij}(q^2) = + i(m_i + m_j)^2 \int d^4 x e^{i q \cdot x} \langle 0 | T (P_{ij}(x), P_{ij}^+(0)) | 0 \rangle$$

$$S_{ij}(x) = : \bar{q}_i(x) q_j(x) : = S_{ij}^+(x)$$

$$P_{ij}(x) = : \bar{q}_i(x) \gamma_5 q_j(x) : = - P_{ij}^+(x)$$

Para calcular esto en general introducimos

$$I_{ij}(A, B) = i \int d^4 x e^{i q \cdot x} \langle 0 | T (J_{ij}^A(x), J_{ij}^{B+}(0)) | 0 \rangle$$

$$J_{ij}^A(x) = : \bar{q}_i(x) \gamma^A q_j(x) :$$

$$J_{ij}^{B+}(x) = : \bar{q}_j(x) \gamma^0 \gamma^{B+} \gamma^0 q_i(x) :$$

Entonces

$$I_{ij}(A, B) = i \int d^D x e^{iq \cdot x} \langle 0 | T (: \bar{q}_{ia}^\alpha(x) \gamma_{ab}^A q_{jb}^\alpha(x) : : \bar{q}_{jc}^\beta(0) (\gamma^0 \gamma^{B+} \gamma^0)_{cd} q_{id}^\beta(0) :) | 0 \rangle$$

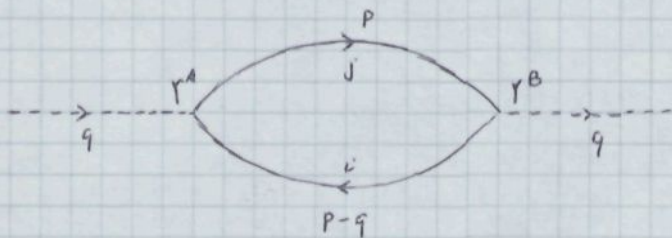
$$= -i \gamma_{ab}^A (\gamma^0 \gamma^{B+} \gamma^0)_{cd} \int d^D x e^{iq \cdot x} \underbrace{q_{jb}^\alpha(x)} \underbrace{\bar{q}_{jc}^\beta(0)} \underbrace{q_{id}^\beta(0)} \underbrace{\bar{q}_{ia}^\alpha(x)}$$

$$= -3i \int d^D x e^{iq \cdot x} \text{Tr} [\gamma^A S^j(x-0) \gamma^0 \gamma^{B+} \gamma^0 S^i(0-x)]$$

$$= +3i \int d^D x e^{iq \cdot x} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{d^D p'}{(2\pi)^D} \text{Tr} [\gamma^A S^j(p) \gamma^0 \gamma^{B+} \gamma^0 S^i(p')] e^{-i p \cdot x} e^{i p' \cdot x}$$

$$\Rightarrow I_{ij}(A, B) = 3i \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \text{Tr} [\gamma^A S^j(p) \gamma^0 \gamma^{B+} \gamma^0 S^i(p-q)] \quad (1)$$

que corresponde al diagrama



Usando (2.4)

$$I_{ij}(A, B) = 3i \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{\text{Tr} [\gamma^A (\not{p} + m_j) \gamma^0 \gamma^{B+} \gamma^0 (\not{p} - \not{q} + m_i)]}{[p^2 - m_j^2 + i\epsilon] [(p-q)^2 - m_i^2 + i\epsilon]} \quad (2)$$

y también

$$\Psi_{ij}(q^2) = 12i (m_i - m_j)^2 \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{p^2 - p \cdot q + m_i m_j}{[p^2 - m_j^2 + i\epsilon] [(p-q)^2 - m_i^2 + i\epsilon]}$$

$$\Psi_{ij}(q^2) = 12i (m_i + m_j)^2 \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{p^2 - p \cdot q - m_i m_j}{[p^2 - m_j^2 + i\epsilon] [(p-q)^2 - m_i^2 + i\epsilon]}$$

$$T_{ij}^{\mu\nu}(q) = 12i \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{2 p^\mu p^\nu - p^\mu q^\nu - p^\nu q^\mu - g^{\mu\nu} (p^2 - p \cdot q - m_i m_j)}{[p^2 - m_j^2 + i\epsilon] [(p-q)^2 - m_i^2 + i\epsilon]}$$

$$T_{ij}^{\mu\nu}(q) = 12i \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{2 p^\mu p^\nu - p^\mu q^\nu - p^\nu q^\mu - g^{\mu\nu} (p^2 - p \cdot q + m_i m_j)}{[p^2 - m_j^2 + i\epsilon] [(p-q)^2 - m_i^2 + i\epsilon]}$$

Es obvio que basta calcular $\psi_{ij}(q^2)$ y $T_{ij}^{\mu\nu}(q)$ pues los otros dos se obtienen a partir de estos haciendo el cambio $m_j \rightarrow -m_j$. Por otra parte y en analogía con (XII-B-1) u Lore

$$\frac{1}{[p^2 - m_j^2 + i\epsilon][p - q]^2 - m_i^2 + i\epsilon} = \int_0^1 dx \frac{1}{\{[p - (1-x)q]^2 + q^2 x(1-x) - m_j^2 x - m_i^2(1-x) + i\epsilon\}^2}$$

Introduciendo

$$q^2 x(1-x) - m_j^2 x - m_i^2(1-x) \equiv q^2 [x(1-x) - \mu_j^2 x - \mu_i^2(1-x)] \equiv$$

$$\equiv -q^2(x - x_+)(x - x_-) \quad \mu_i^2 \equiv \frac{m_i^2}{q^2} \quad \begin{aligned} x_+ + x_- &= 1 - \mu_j^2 + \mu_i^2 \\ x_+ \cdot x_- &= \mu_i^2 \end{aligned} \quad (1)$$

Obtenemos

$$\psi_{ij}(q^2) = 12i(m_i - m_j)^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{p^2 - x(1-x)q^2 + m_i m_j}{[p^2 - q^2(x-x_+)(x-x_-) + i\epsilon]^2}$$

$$T_{ij}^{\mu\nu}(q) = 12i \int_0^1 dx \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{\frac{2}{D} p^2 g^{\mu\nu} - 2x(1-x)q^\mu q^\nu - g^{\mu\nu}[p^2 - x(1-x)q^2 - m_i m_j]}{[p^2 - q^2(x-x_+)(x-x_-) + i\epsilon]^2}$$

Es decir debemos calcular

$$\psi_{ij}(q^2) = 12i(m_i - m_j)^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{p^2 - x(1-x)q^2 + m_i m_j}{[p^2 - q^2(x-x_+)(x-x_-) + i\epsilon]^2}$$

$$T_{ij}(q^2) = 12i \int_0^1 dx \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{-2x(1-x)}{[p^2 - q^2(x-x_+)(x-x_-) + i\epsilon]^2} \quad (2)$$

$$\tilde{T}_{ij}(q^2) = \frac{12i}{q^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{(2-D)p^2 + (D-2)x(1-x)q^2 + D m_i m_j}{[p^2 - q^2(x-x_+)(x-x_-) + i\epsilon]^2}$$

Ahora bien

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{[p^2 - q^2(x-x_+)(x-x_-) + i\epsilon]^2} = \frac{i}{16\pi^2} \left(\frac{q^2}{4\pi}\right)^\epsilon \Gamma(-\epsilon) [(x-x_+)(x-x_-)]^\epsilon$$

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{p^2}{[p^2 - q^2(x-x_+)(x-x_-) + i\epsilon]^2} = \frac{i}{16\pi^2} \left(\frac{q^2}{4\pi}\right)^\epsilon q^2 \frac{(2+\epsilon)\Gamma(-\epsilon)}{1+\epsilon} [(x-x_+)(x-x_-)]^{1+\epsilon}$$

y en tanto

$$\psi_{ij}(q^2) = -\frac{3}{4\pi^2} q^2 (m_i - m_j)^2 \left(-\frac{q^2}{4\pi}\right)^\epsilon \Gamma(-\epsilon) \int_0^1 dx [(x_+ - x)(x - x_-)]^\epsilon$$

$$\cdot \left\{ \frac{2+\epsilon}{1+\epsilon} (x - x_+)(x - x_-) - x(1-x) + \mu_i \mu_j \right\}$$

$$T_{ij}(q^2) = +\frac{3}{2\pi^2} \left(-\frac{q^2}{4\pi}\right)^\epsilon \Gamma(1-\epsilon) \int_0^1 dx [(x_+ - x)(x - x_-)]^\epsilon \times (1-x)$$

$$\tilde{T}_{ij}(q^2) = -\frac{3}{2\pi^2} \left(-\frac{q^2}{4\pi}\right)^\epsilon \Gamma(-\epsilon) \int_0^1 dx [(x_+ - x)(x - x_-)]^\epsilon$$

$$\cdot \left\{ -(2+\epsilon)(x - x_+)(x - x_-) + (1+\epsilon)x(1-x) + (2+\epsilon)\mu_i \mu_j \right\} \quad (4)$$

Las integrales a realizar son

$$I_m \equiv \int_0^1 dx x^m [(x_+ - x)(x - x_-)]^\epsilon =$$

$$= \frac{1}{m+1} + \epsilon \int_0^1 dx x^m \ln[(x_+ - x)(x - x_-)] + O(\epsilon^2) \quad (2)$$

y despreciando términos en $O(\epsilon^2)$

$$I_0 = 1 + \epsilon \left\{ (1-x_+) \ln(x_+ - 1) + (1-x_-) \ln(1-x_-) + x_+ \ln x_+ + x_- \ln(-x_-) - 2 \right\}$$

$$2I_1 = 1 + \epsilon \left\{ (1-x_+^2) \ln(x_+ - 1) + (1-x_-^2) \ln(1-x_-) + x_+^2 \ln x_+ + x_-^2 \ln(-x_-) \right.$$

$$\left. - 1 - x_+ - x_- \right\}$$

$$3I_2 = 1 + \epsilon \left\{ (1-x_+^3) \ln(x_+ - 1) + (1-x_-^3) \ln(1-x_-) + x_+^3 \ln x_+ + x_-^3 \ln(-x_-) \right.$$

$$\left. - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} x_+ - \frac{1}{2} x_- - x_+^2 - x_-^2 \right\} \quad (3)$$

Entonces

$$\psi_{ij}(q^2) = -\frac{3}{4\pi^2} q^2 (m_i - m_j)^2 \left(-\frac{q^2}{4\pi}\right)^\epsilon \Gamma(-\epsilon) \cdot \left\{ 3I_2 - (3 + 2\mu_i^2 - 2\mu_j^2)I_1 \right.$$

$$\left. + (2\mu_i^2 + \mu_i \mu_j)I_0 + \frac{\epsilon}{6} (1 - 3\mu_i^2 - 3\mu_j^2) \right\} \quad (4)$$

$$T_{ij}(q^2) = + \frac{3}{2\pi^2} \left(-\frac{q^2}{4\pi} \right)^\epsilon \Gamma(-\epsilon) \{ I_1 - I_2 \}$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{ij}(q^2) = & - \frac{3}{2\pi^2} \left(-\frac{q^2}{4\pi} \right)^\epsilon \Gamma(-\epsilon) \left\{ -3I_2 + (3 + 2\mu_i^2 - 2\mu_j^2) I_1 \right. \\ & \left. + (2\mu_i^2 - 2\mu_i\mu_j) I_0 + \frac{\epsilon}{6} (2 - 3\mu_i^2 - 3\mu_j^2 + 6\mu_i\mu_j) \right\} \end{aligned} \quad (1)$$

Consideremos el comportamiento de estas cantidades cuando $\mu_i, \mu_j \ll 1$. Introduciremos $\mu_i^2 \equiv d$, $\mu_j^2 \equiv u$ y usaremos los desarrollos dados en (XII-B-11)

$$\begin{aligned} I_0 = & 1 + \epsilon \left\{ -2 + u \ln(-u) + d \ln(-d) - u - d + ud \ln(-u) + ud \ln(-d) \right. \\ & + \frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{2} d^2 + u^2 d \ln(-u) + u^2 d \ln(-d) + u d^2 \ln(-u) + u d^2 \ln(-d) \\ & \left. + \frac{1}{6} u^3 + \frac{3}{2} u^2 d + \frac{3}{2} u d^2 + \frac{1}{6} d^3 + \dots \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2I_1 = & 1 + \epsilon \left\{ -2 + 2u \ln(-u) - 2d - u^2 \ln(-u) + 2ud \ln(-u) + d^2 \ln(-d) \right. \\ & + \frac{3}{2} u^2 - \frac{1}{2} d^2 + 2ud^2 \ln(-u) + 2ud^2 \ln(-d) - \frac{1}{3} u^3 + 2u^2 d \\ & \left. + ud^2 + \frac{2}{3} d^3 + \dots \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3I_2 = & 1 + \epsilon \left\{ -\frac{13}{6} + 3u \ln(-u) + \frac{3}{2} u - \frac{3}{2} d - 3u^2 \ln(-u) + 3ud \ln(-u) \right. \\ & + \frac{3}{2} u^2 + 3ud - \frac{3}{2} d^2 + u^3 \ln(-u) - 3u^2 d \ln(-u) + 3ud^2 \ln(-u) \\ & \left. + d^3 \ln(-d) - \frac{11}{6} u^3 + 3u^2 d + \frac{3}{2} ud^2 - \frac{1}{3} d^3 + \dots \right\} \end{aligned} \quad (2)$$

Comprobado que $I_0(u, d) - 2I_1(u, d) + I_2(u, d) = I_2(d, u)$. De aquí

$$\begin{aligned} 3I_2 - (3 + 2d - 2u) I_1 + 2d I_0 = & -\frac{1}{2} + u + d + \epsilon \left\{ \frac{5}{6} - \frac{1}{2} u - \frac{1}{2} d \right. \\ & + \frac{1}{2} u^2 \ln(-u) + \frac{1}{2} d^2 \ln(-d) - \frac{3}{4} u^2 - ud - \frac{3}{4} d^2 + \frac{1}{6} u^3 - \\ & \left. - \frac{1}{2} u^2 d - \frac{1}{2} u d^2 + \frac{1}{6} d^3 + \dots \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 = & \frac{1}{6} + \epsilon \left\{ -\frac{5}{18} - \frac{1}{2} u - \frac{1}{2} d + \frac{1}{2} u^2 \ln(-u) + \frac{1}{2} d^2 \ln(-d) + \frac{1}{4} u^2 - ud \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} d^2 - \frac{1}{3} u^3 \ln(-u) + u^2 d \ln(-u) + u d^2 \ln(-d) - \frac{1}{3} d^3 \ln(-d) + \frac{4}{9} u^3 + \frac{4}{9} d^3 + \dots \right\} \end{aligned}$$

Recordando que

$$\left(-\frac{q^2}{4\pi}\right)^\epsilon \Gamma(-\epsilon) (A+B\epsilon) = v^{2\epsilon} \left\{ -A \left[\frac{1}{\epsilon} - \ln 4\pi + \gamma + \ln\left(-\frac{q^2}{v^2}\right) \right] - B \right\}$$

obtenemos en el límite $\mu_i^2, \mu_j^2 \ll 1$.

$$\begin{aligned} \psi_{ij}(q^2) = & -\frac{3}{4\pi^2} q^2 (m_i - m_j)^2 v^{2\epsilon} \left\{ \left[\frac{1}{2} - \mu_i^2 - \mu_j^2 - \mu_i \mu_j \right] \cdot \right. \\ & \left[\frac{1}{\epsilon} - \ln 4\pi + \gamma + \ln\left(-\frac{q^2}{v^2}\right) \right] - \left[1 - \mu_i^2 - 2\mu_i \mu_j + \mu_j^2 \right. \\ & + \frac{1}{2} \mu_i^4 \ln(-\mu_i^2) + \mu_i^3 \mu_j \ln(-\mu_i^2) + \mu_i \mu_j^3 \ln(-\mu_j^2) + \frac{1}{2} \mu_j^4 \ln(-\mu_j^2) \\ & \left. \left. - \frac{3}{4} \mu_i^4 - \mu_i^3 \mu_j - \mu_i^2 \mu_j^2 - \mu_i \mu_j^3 - \frac{3}{4} \mu_j^4 + \dots \right] \right\} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{ij}(q^2) = & +\frac{3}{2\pi^2} v^{2\epsilon} \left\{ -\frac{1}{6} \left[\frac{1}{\epsilon} - \ln 4\pi + \gamma + \ln\left(-\frac{q^2}{v^2}\right) \right] + \right. \\ & + \frac{5}{18} + \frac{1}{2} \mu_i^2 + \frac{1}{2} \mu_j^2 + \frac{1}{2} \mu_i^4 \ln(-\mu_i^2) - \frac{1}{2} \mu_j^4 \ln(-\mu_j^2) + \\ & \left. - \frac{1}{4} \mu_i^4 + \mu_i^2 \mu_j^2 - \frac{1}{4} \mu_j^4 + \dots \right\} \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{ij}(q^2) = & -\frac{3}{2\pi^2} v^{2\epsilon} \left\{ -\left[\frac{1}{2} + \mu_i^2 + 2\mu_i \mu_j + \mu_j^2 \right] \left[\frac{1}{\epsilon} - \ln 4\pi + \gamma + \ln\left(-\frac{q^2}{v^2}\right) \right] \right. \\ & - \left[-\frac{1}{2} - 3\mu_i \mu_j - \frac{1}{2} \mu_i^4 \ln(-\mu_i^2) + 2\mu_i^3 \mu_j \ln(-\mu_i^2) + 2\mu_i \mu_j^3 \ln(-\mu_j^2) \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{2} \mu_j^4 \ln(-\mu_j^2) + \frac{3}{4} \mu_i^4 - 2\mu_i^3 \mu_j + \mu_i^2 \mu_j^2 - 2\mu_i \mu_j^3 + \frac{3}{4} \mu_j^4 + \dots \right] \right\} \quad (3) \end{aligned}$$

deduce los términos en $1/\epsilon$ son polinomios en μ_i, μ_j como era de esperar
 [J. C. COLLINS y A. J. MAC FARLANE Phys. Rev. D10, 120 (1975)] [J. C. COLLINS
 Mod. Phys. B92, 477 (1975)] [P. BREITENLOHNER y P. HAIJON Commun. Math.
 Phys. 52, 39 (1977)].

Por otra parte de (2) y (3) se deduce que

$$T_{ij}^{(1)} = -\frac{3}{8\pi^2} v^{2\epsilon} \left\{ -\left[\frac{2}{3} - \mu_i^2 + 2\mu_i\mu_j - \mu_j^2 \right] \left[\frac{1}{\epsilon} - \ln 4\pi + \gamma + \ln\left(-\frac{q^2}{v^2}\right) \right] \right. \\ \left. + \frac{10}{9} + 4\mu_i\mu_j - 2\mu_i^3\mu_j \ln(-\mu_i^2) - 2\mu_i\mu_j^3 \ln(-\mu_j^2) - \mu_i^4 + 2\mu_i^3\mu_j \right. \\ \left. + 2\mu_i\mu_j^3 - \mu_j^4 + \dots \right\} \quad (1)$$

$$T_{ij}^{(2)} = -\frac{3}{8\pi^2} v^{2\epsilon} \left\{ [\mu_i^2 - 2\mu_i\mu_j + \mu_j^2] \left[\frac{1}{\epsilon} - \ln 4\pi + \gamma + \ln\left(-\frac{q^2}{v^2}\right) \right] \right. \\ \left. - 2\mu_i^2 + 4\mu_i\mu_j - 2\mu_j^2 + 2\mu_i^4 \ln(-\mu_i^2) - 2\mu_i^3\mu_j \ln(-\mu_i^2) - \right. \\ \left. - 2\mu_i\mu_j^3 \ln(-\mu_j^2) + 2\mu_j^4 \ln(-\mu_j^2) + 2\mu_i^3\mu_j - 4\mu_i^2\mu_j^2 + 2\mu_i\mu_j^3 + \dots \right\} \quad (2)$$

En el esquema de renormalización \overline{MS} los resultados deseados son

$$\psi_{ij}(q^2) = -\frac{3}{4\pi^2} q^2 (m_i - m_j)^2 \left\{ \left[\frac{1}{2} - \mu_i^2 - \mu_j^2 - \mu_i\mu_j \right] \ln\left(-\frac{q^2}{v^2}\right) \right. \\ \left. - 1 + \mu_i^2 + 2\mu_i\mu_j + \mu_j^2 - \frac{1}{2}\mu_i^4 \ln(-\mu_i^2) - \mu_i^3\mu_j \ln(-\mu_i^2) - \mu_i\mu_j^3 \ln(-\mu_j^2) \right. \\ \left. - \frac{1}{2}\mu_j^4 \ln(-\mu_j^2) + \frac{3}{4}\mu_i^4 + \mu_i^3\mu_j + \mu_i^2\mu_j^2 + \mu_i\mu_j^3 + \frac{3}{4}\mu_j^4 + \dots \right\} \quad (3)$$

$$T_{ij}^{(1)} = +\frac{3}{8\pi^2} \left\{ \left[\frac{2}{3} - \mu_i^2 + 2\mu_i\mu_j - \mu_j^2 \right] \ln\left(-\frac{q^2}{v^2}\right) - \frac{10}{9} - 4\mu_i\mu_j + 2\mu_i^3\mu_j \ln(-\mu_i^2) \right. \\ \left. + 2\mu_i\mu_j^3 \ln(-\mu_j^2) + \mu_i^4 - 2\mu_i^3\mu_j - 2\mu_i\mu_j^3 + \mu_j^4 + \dots \right\} \quad (4)$$

$$T_{ij}^{(2)} = -\frac{3}{8\pi^2} \left\{ [\mu_i^2 - 2\mu_i\mu_j + \mu_j^2] \ln\left(-\frac{q^2}{v^2}\right) - 2\mu_i^2 + 4\mu_i\mu_j - 2\mu_j^2 \right. \\ \left. + 2\mu_i^4 \ln(-\mu_i^2) - 2\mu_i^3\mu_j \ln(-\mu_i^2) - 2\mu_i\mu_j^3 \ln(-\mu_j^2) + 2\mu_j^4 \ln(-\mu_j^2) + \right. \\ \left. + 2\mu_i^3\mu_j - 4\mu_i^2\mu_j^2 + 2\mu_i\mu_j^3 + \dots \right\} \quad (5)$$

que son los resultados deseados. Recuerda $\mu_i^2 \equiv m_i^2/q^2$, $\mu_j^2 \equiv m_j^2/q^2$. Nótese más que $T_{ij}^{(2)} = 0$ si $\mu_i = \mu_j$ como debe suceder pues entonces las correcciones son canceladas.

casos particulares de especial interés son

$$\psi(q^2) \equiv \psi_{du}(q^2) = -\frac{3}{4\pi^2} q^2 (m_u - m_d)^2 \left\{ \left[\frac{1}{2} - \mu_u^2 - \mu_u \mu_d - \mu_d^2 \right] \ln\left(-\frac{q^2}{v^2}\right) \right. \\
- 1 + \mu_u^2 + 2\mu_u \mu_d + \mu_d^2 - \frac{1}{2} \mu_u^4 \ln(-\mu_u^2) - \mu_u^3 \mu_d \ln(-\mu_u^2) - \mu_u \mu_d^3 \ln(-\mu_d^2) \\
\left. - \frac{1}{2} \mu_d^4 \ln(-\mu_d^2) + \frac{3}{4} \mu_u^4 + \mu_u^3 \mu_d + \mu_u^2 \mu_d^2 + \mu_u \mu_d^3 + \frac{3}{4} \mu_d^4 + \dots \right\} \quad (1)$$

$$\psi_S(q^2) \equiv \psi_{Sdu}(q^2) = \text{Al anterior con } m_d \rightarrow -m_d, \mu_d \rightarrow -\mu_d \quad (2)$$

$$R^{\mu\nu}(q) \equiv T_{du}^{\mu\nu}(q) - T_{Sdu}^{\mu\nu}(q)$$

$$R^{(1)}(q^2) = R^{(2)}(q^2) = \frac{3}{2\pi^2} \left\{ \mu_u \mu_d \ln\left(-\frac{q^2}{v^2}\right) - 2\mu_u \mu_d + \mu_u^3 \mu_d \ln(-\mu_u^2) + \mu_u \mu_d^3 \ln(-\mu_d^2) \right. \\
\left. - \mu_u^3 \mu_d - \mu_u \mu_d^3 + \dots \right\} \quad (3)$$

$$\Pi^{\mu\nu}(q) \equiv \frac{1}{4} [T_{uu}^{\mu\nu} + T_{dd}^{\mu\nu}]$$

$$\Pi^{(1)}(q^2) = \frac{3}{16\pi^2} \left\{ \frac{2}{3} \ln\left(-\frac{q^2}{v^2}\right) - \frac{10}{9} - 2\mu_u^2 - 2\mu_d^2 + 2\mu_u^4 \ln(-\mu_u^2) + \right. \\
\left. + 2\mu_d^4 \ln(-\mu_d^2) - \mu_u^4 - \mu_d^4 \right\}$$

$$\Pi^{(2)}(q^2) = 0 \quad (4)$$

$$\Pi_S^{\mu\nu}(q) \equiv \frac{1}{4} [T_{Suu}^{\mu\nu} + T_{Sdd}^{\mu\nu}]$$

$$\Pi_S^{(1)}(q^2) = \frac{3}{16\pi^2} \left\{ \left[\frac{2}{3} - 2\mu_u^2 - 2\mu_d^2 \right] \ln\left(-\frac{q^2}{v^2}\right) - \frac{10}{9} + 2\mu_u^2 + 2\mu_d^2 - 2\mu_u^4 \ln(-\mu_u^2) \right. \\
\left. - 2\mu_d^4 \ln(-\mu_d^2) + 3\mu_u^4 + 3\mu_d^4 + \dots \right\}$$

$$\Pi_S^{(2)}(q^2) = -\frac{3}{8\pi^2} \left\{ [\mu_u^2 + \mu_d^2] \ln\left(-\frac{q^2}{v^2}\right) - 2\mu_u^2 - 2\mu_d^2 + 2\mu_u^4 \ln(-\mu_u^2) + 2\mu_d^4 \ln(-\mu_d^2) \right. \\
\left. + 2\mu_u^4 + 2\mu_d^4 + \dots \right\} \quad (5)$$

cc) Conexiones no perturbativas $\langle \bar{q} q \rangle$

Vamos ahora a proceder al cálculo, en el límite $q^2 \gg m_i^2, m_j^2$ de las conexiones no perturbativas del tipo $\langle \bar{q} q \rangle$. Consideremos de nuevo la expresión (2.4) y realicemos una única contracción

$$I_{ij} = i \int d^4x e^{iq \cdot x} \gamma_{ab}^A (\gamma^0 \gamma^{B+} \gamma^0)_{cd} \left\{ \underline{q_{jb}^\alpha(x)} \bar{q}_{jc}^B(0) \langle 0 | : \bar{q}_{ca}^\alpha(x) q_{ia}^\beta(0) : | 0 \rangle \right.$$

$$\left. + \underline{q_{ia}^\beta(0)} \bar{q}_{ia}^\alpha(x) \langle 0 | : \bar{q}_{jc}^B(0) q_{jb}^\alpha(x) : | 0 \rangle \right\}$$

y usando (2.1)

$$I_{ij}(A,B) = +i \int d^4x e^{iq \cdot x} \left\{ \langle 0 | : \bar{q}_{ca}^\alpha(x) q_{ia}^\alpha(0) : | 0 \rangle [\gamma^A S_{bc}^j(x-0) \gamma^0 \gamma^{B+} \gamma^0]_{ad} \right.$$

$$\left. + \langle 0 | : \bar{q}_{jc}^\beta(0) q_{jb}^\alpha(x) : | 0 \rangle [\gamma^0 \gamma^{B+} \gamma^0 S_{ca}^j(0-x) \gamma^A]_{cb} \right\} \Rightarrow$$

$$I_{ij}(A,B) = +i \int d^4x e^{iq \cdot x} \left\{ \langle 0 | : \bar{q}_{ca}^\alpha(x) q_{ib}^\alpha(0) : | 0 \rangle [\gamma^A S_{bc}^j(x) \gamma^0 \gamma^{B+} \gamma^0]_{ad} \right.$$

$$\left. + \langle 0 | : \bar{q}_{ja}^\alpha(x) q_{jb}^\alpha(0) : | 0 \rangle [\gamma^0 \gamma^{B+} \gamma^0 S_{ca}^j(x) \gamma^A]_{ab} \right\} \quad (1)$$

De donde

$$I_{ij}(A,B) = - \int d^4x \int \frac{d^4p}{(2\pi)^D} e^{-i(p-q) \cdot x} \left\{ \langle 0 | : \bar{q}_{ca}^\alpha(x) q_{ib}^\alpha(0) : | 0 \rangle [\gamma^A S_{bc}^j(p) \gamma^0 \gamma^{B+} \gamma^0]_{ad} \right.$$

$$\left. + \langle 0 | : \bar{q}_{ja}^\alpha(x) q_{jb}^\alpha(0) : | 0 \rangle [\gamma^0 \gamma^{B+} \gamma^0 S_{ca}^j(p) \gamma^A]_{ab} \right\} \quad (2)$$

Consideremos ahora el desarrollo en serie de Taylor alrededor del punto $x=0$.

$$\langle 0 | : \bar{q}_{ca}^\alpha(x) q_{ib}^\beta(0) : | 0 \rangle = \langle 0 | : \bar{q}_{ca}^\alpha(0) q_{ib}^\beta(0) : | 0 \rangle +$$

$$+ \langle 0 | : \bar{q}_\mu \bar{q}_{ca}^\alpha(0) q_{ib}^\beta(0) : | 0 \rangle x^\mu + \dots \quad (3)$$

Nota que no hay sumación respecto al índice i que indica el aroma del quark. Se tiene

$$\langle 0 | : \bar{q}_{ca}^\alpha(0) q_{ib}^\beta(0) : | 0 \rangle = A \delta_{ip} \delta_{ba} \Rightarrow$$

$$A.N. 4 = \langle 0 | : \bar{q}_{i\alpha}^{\alpha} (0) q_{i\beta}^{\beta} (0) : | 0 \rangle \equiv \langle \bar{q}_i q_i \rangle$$

$$\langle 0 | : \bar{q}_{i\alpha}^{\alpha} (0) q_{i\beta}^{\beta} (0) : | 0 \rangle = \frac{1}{4N} \langle \bar{q}_i q_i \rangle \delta_{\alpha\beta} \delta_{ab} \quad (4)$$

Además

$$\langle 0 | : \partial_{\mu} \bar{q}_{i\alpha}^{\alpha} (0) q_{i\beta}^{\beta} (0) : | 0 \rangle = B \delta_{\alpha\beta} (\gamma^{\mu})_{ba} \Rightarrow$$

$$\langle 0 | : \partial_{\mu} \bar{q}_{i\alpha}^{\alpha} (0) \gamma^{\mu}_{ac} q_{i\beta}^{\beta} (0) : | 0 \rangle = B \delta_{\alpha\beta} D \delta_{bc} \Rightarrow$$

$$\langle 0 | : i m_i \bar{q}_{i\alpha}^{\alpha} (0) q_{i\beta}^{\beta} (0) : | 0 \rangle = B \delta_{\alpha\beta} D \delta_{bc} \Rightarrow \delta_{bc} i m_i \frac{\delta_{\alpha\beta}}{4N} \langle \bar{q}_i q_i \rangle = B \delta_{\alpha\beta} D \delta_{bc}$$

$$\langle 0 | : \partial_{\mu} \bar{q}_{i\alpha}^{\alpha} (0) q_{i\beta}^{\beta} (0) : | 0 \rangle = \frac{i}{4DN} \langle \bar{q}_i q_i \rangle m_i \delta_{\alpha\beta} \delta_{ab} \quad (2)$$

y también

$$\begin{aligned} \langle 0 | : \bar{q}_{i\alpha}^{\alpha} (x) q_{i\beta}^{\beta} (0) : | 0 \rangle &= \frac{1}{4N} \delta_{ab} \delta_{\alpha\beta} \langle \bar{\psi}_i \psi_i \rangle + \\ &+ \frac{i}{4DN} m_i \delta_{\alpha\beta} (\gamma^{\mu})_{ba} x_{\mu} \langle \bar{\psi}_i \psi_i \rangle + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

y si se suma sobre los índices de color

$$\langle 0 | : \bar{q}_{i\alpha}^{\alpha} (x) q_{i\beta}^{\beta} (0) : | 0 \rangle = \frac{1}{4} \delta_{ab} \langle \bar{\psi}_i \psi_i \rangle + \frac{i}{4D} m_i (\gamma^{\mu})_{ba} x_{\mu} \langle \bar{\psi}_i \psi_i \rangle + \dots \quad (4)$$

Consideremos ahora

$$I \equiv \int a^D x \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \langle 0 | : \bar{\psi}_{i\alpha}^{\alpha} (x) q_{i\beta}^{\beta} (0) : | 0 \rangle F_{ab}(p) e^{-i(p-q) \cdot x} =$$

$$= \frac{1}{4N} \delta_{ab} \delta_{\alpha\beta} \langle \bar{\psi}_i \psi_i \rangle \int a^D x \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} F_{ab}(p) e^{-i(p-q) \cdot x} +$$

$$+ \frac{i}{4DN} m_i \delta_{\alpha\beta} (\gamma^{\mu})_{ba} \langle \bar{\psi}_i \psi_i \rangle \int a^D x \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} x_{\mu} F_{ab}(p) e^{-i(p-q) \cdot x} + \dots$$

$$= \frac{1}{4N} \delta_{\alpha\beta} \langle \bar{\psi}_i \psi_i \rangle \text{Tr} [F(q)] + \frac{m_i}{4DN} \delta_{\alpha\beta} \langle \bar{\psi}_i \psi_i \rangle \left[- \frac{\partial}{\partial p^{\mu}} \text{Tr} [F(p) \gamma^{\mu}] \right]_{p=q} + \dots \quad (5)$$

Entonces la expresión (10.2) se puede escribir

$$I_{ij}(A,B) = - \int d^D x \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{-i p \cdot x} \left\{ \langle 0 | : \bar{q}_{ia}^\alpha(x) q_{cb}^\alpha(0) : | 0 \rangle [\gamma^A S^j(p+q) \gamma^0 \gamma^{B+} \gamma^0]_{ab} \right. \\ \left. + \langle 0 | : \bar{q}_{ja}^\alpha(x) q_{ib}^\alpha(0) : | 0 \rangle [\gamma^0 \gamma^{B+} \gamma^0 S^i(p+q) \gamma^A]_{ab} \right\} \quad (1)$$

que se representa diagramáticamente como



y usando (11.5)

$$I_{ij}(A,B) = - \frac{1}{4} \langle \bar{q}_i q_i \rangle \text{Tr} [\gamma^A S^j(q) \gamma^0 \gamma^{B+} \gamma^0] + \frac{m_i}{4D} \langle \bar{q}_i q_i \rangle \left\{ - \frac{\partial}{\partial q^\lambda} \text{Tr} [\gamma^A S^i(q) \gamma^0 \gamma^{B+} \gamma^0] \right\} \\ - \frac{1}{4} \langle \bar{q}_j q_j \rangle \text{Tr} [\gamma^0 \gamma^{B+} \gamma^0 S^i(q) \gamma^A] + \frac{m_j}{4D} \langle \bar{q}_j q_j \rangle \left\{ - \frac{\partial}{\partial q^\lambda} \text{Tr} [\gamma^0 \gamma^{B+} \gamma^0 S^j(q) \gamma^A \gamma^\lambda] \right\} \quad (2)$$

Los segundos términos se obtienen de los primeros haciendo el cambio $i \leftrightarrow j$. Además

$$- \frac{\partial}{\partial q^\lambda} S^i(q) = S^i(q) \gamma^\lambda S^i(q) \quad (3)$$

por lo cual

$$I_{ij}(A,B) = - \frac{1}{4} \langle \bar{q}_i q_i \rangle \text{Tr} [\gamma^A S^j(q) \gamma^0 \gamma^{B+} \gamma^0] + \\ + \frac{m_i}{4D} \langle \bar{q}_i q_i \rangle \text{Tr} [\gamma^A S^j(q) \gamma^\lambda S^i(q) \gamma^0 \gamma^{B+} \gamma^0 \gamma^\lambda] + (i \leftrightarrow j) \quad (4)$$

que es la expresión deseada.

Entonces se obtiene inmediatamente de (2.3)

$$\psi_{ij}(q^2) = - (m_i - m_j)^2 \frac{1}{q^2} \left\{ \left[m_j + \frac{D-2}{D} m_i \right] \langle \bar{q}_i q_i \rangle + (i \leftrightarrow j) \right\} \quad (5)$$

$$\psi_{5ij}(q^2) = - (m_i + m_j)^2 \frac{1}{q^2} \left\{ \left[-m_j + \frac{D-2}{D} m_i \right] \langle \bar{q}_i q_i \rangle + (i \leftrightarrow j) \right\}$$

$$T_{ij}^{(0)}(q^2) = 4m_c \frac{1}{q^4} \frac{1}{D} \langle \bar{q}_c q_c \rangle + (i \leftrightarrow j)$$

$$\tilde{T}_{ij}^{(0)}(q^2) = \frac{1}{q^4} \left[\left(-D m_j + \frac{(D-2)^2}{D} m_c \right) \langle \bar{q}_c q_c \rangle + (i \leftrightarrow j) \right]$$

(1)

$$T_{Sij}^{(0)}(q^2) = 4m_c \frac{1}{q^4} \frac{1}{D} \langle \bar{q}_c q_c \rangle + (i \leftrightarrow j)$$

$$\tilde{T}_{Sij}^{(0)}(q^2) = \frac{1}{q^4} \left[\left(D m_j + \frac{(D-2)^2}{D} m_c \right) \langle \bar{q}_c q_c \rangle + (i \leftrightarrow j) \right]$$

y también

$$T_{ij}^{(1)}(q^2) = \frac{1}{q^4} \left[\left(-m_j + \frac{D-4}{D} m_c \right) \langle \bar{q}_c q_c \rangle + (i \leftrightarrow j) \right]$$

$$T_{ij}^{(2)}(q^2) = \frac{1}{q^4} \left[\left(-m_j + m_c \right) \langle \bar{q}_c q_c \rangle + (i \leftrightarrow j) \right]$$

(2)

$$T_{Sij}^{(1)}(q^2) = \frac{1}{q^4} \left[\left(+m_j + \frac{D-4}{D} m_c \right) \langle \bar{q}_c q_c \rangle + (i \leftrightarrow j) \right]$$

$$T_{Sij}^{(2)}(q^2) = \frac{1}{q^4} \left[\left(m_j + m_c \right) \langle \bar{q}_c q_c \rangle + (i \leftrightarrow j) \right]$$

De las definiciones dadas en XLV-9 se obtiene

$$\psi(q^2) = - (m_u - m_d)^2 \frac{1}{q^2} \left\{ \left(m_d + \frac{D-2}{D} m_u \right) \langle \bar{u} u \rangle + (u \leftrightarrow d) \right\}$$

$$\psi_S(q^2) = - (m_u + m_d)^2 \frac{1}{q^2} \left\{ \left(-m_d + \frac{D-2}{D} m_u \right) \langle \bar{u} u \rangle + (u \leftrightarrow d) \right\}$$

$$R^{(1)}(q^2) = R^{(2)}(q^2) = - \frac{2}{[q^2]^2} \left\{ m_d \langle \bar{u} u \rangle + (u \leftrightarrow d) \right\}$$

(3)

$$\Pi^{(1)}(q^2) = - \frac{2}{D[q^2]^2} \left\{ m_u \langle \bar{u} u \rangle + (u \leftrightarrow d) \right\}$$

$$\Pi^{(2)}(q^2) = 0$$

$$\Pi_S^{(1)}(q^2) = \frac{D-2}{D} \frac{1}{[q^2]^2} \left\{ m_u \langle \bar{u} u \rangle + (u \leftrightarrow d) \right\}$$

$$\Pi_S^{(2)}(q^2) = \frac{1}{[q^2]^2} \left\{ m_u \langle \bar{u} u \rangle + (u \leftrightarrow d) \right\}$$