

COSMOLOGIA FÍSICA

Pedro Pascual

Agosto, 1996

P. J. E. PEEBLES "Principles of Physical Cosmology" . Princeton Series in Physics. Princeton Univ. Press 1993 . ISBN- 0-691-01933-9

S. WEINBERG "Gravitation and Cosmology. Principles and Applications of the General Theory of Relativity" John Wiley and Sons. New York 1972.  
ISBN 0-471-72567-5

A. D. DOLGOV, M. V. SAZHIN, YA. B. ZELDOWICH "Basics of Modern Cosmology"  
Editions Frontières, France 1970 . ISBN 2-86332-084-X

J. N. ISLAM "An Introduction to Mathematical Cosmology" . Cambridge Univ. Press 1972  
ISBN - 0-521-37760-9.



## I - COSMOLOGÍAS IDEALIZADAS

La cosmología física es un intento de dar sentido a la estructura en gran escala del mundo material que nos rodea, mediante los métodos usuales de las ciencias de la naturaleza.

Supondremos un universo idealizado en el que desde las galaxias hasta los átomos se han esparido hasta forman un fluido cosmológico que llena todo el espacio como si fuera un fluido perfecto de densidad  $\rho(x)$  y presión  $p(x)$ .

Supondremos, además, que el universo es homogéneo, lo cual significa que por cada suceso en el universo pasa una hipersuperficie de tipo espacio de homogeneidad, esto es que las condiciones físicas son idénticas para cada suceso de esta hipersuperficie.

A escalas pequeñas es obvio que la distribución de materia en el universo no es uniforme. Sabemos que hay agrupaciones de átomos que llamamos estrellas; que las estrellas se agrupan en galaxias y que éstas forman cúmulos. En promedio los cúmulos de galaxias están separados por distancias del orden de 30 Mpc, es decir que sus separaciones son alrededor de 10 veces mayores que sus dimensiones. Hay aún condensaciones mayores: los supercúmulos de galaxias. Entonces por debajo de una escala de 30-100 Mpc el universo está formado por unidades estructurales individuales y no es homogéneo. Sin embargo, a escalas mucho mayores el universo es altamente uniforme. Hay día sabemos que para regiones del tamaño de unos  $4 \times 10^3$  Mpc las fluctuaciones en densidad son del orden de  $\delta\rho/\rho \lesssim 10^{-4}$ . Estas fluctuaciones se hacen grandes,  $\delta\rho/\rho \approx 1$ , si consideramos regiones de unos 40 Mpc.

Supondremos, también, que el universo es isotrópico, es decir que cualquier observador que se mueva con el fluido cosmológico no puede distinguir una de las direcciones espaciales de las otras mediante medidas locales. Es obvio que la isotropía implica la homogeneidad.



La isotropía garantiza que las líneas del universo del fluido cosmológico son ortogonales a toda superficie de homogeneidad. En efecto, un observador solidario con el fluido puede descubrir mediante medidas físicas cual de las hipersuperficies que pasan por un suceso es la de homogeneidad. Más aún, el observador puede medir su propia velocidad ordinaria relativa a esta hipersuperficie. Si esta velocidad no es nula, entonces ya tiene una forma de distinguir una dirección del espacio en su sistema en reposo de todas las otras, luego la isotropía es rotada. Entonces en un universo isotrópico, el observador solidario con el fluido cosmológico descubre que se halla en reposo con relación a la hipersuperficie de homogeneidad. Luego su línea de universo es ortogonal a la superficie de homogeneidad.

Este resultado permite elegir un sistema de coordenadas en nuestro universo ideal isotrópico. Elijase una hipersuperficie de homogeneidad  $\mathcal{S}_I$ . A todos los sucesos de esta les asignaremos la coordenada tiempo  $t_I$ . Establézcase, de la forma que se desee, un sistema de coordenadas espaciales  $(x^1, x^2, x^3)$  en  $\mathcal{S}_I$ . Ahora propagaremos estas coordenadas fuera de  $\mathcal{S}_I$  y en todo el espacio-tiempo mediante las líneas universo del fluido cosmológico. Para ello asignaremos a cada suceso de una línea de universo las coordenadas  $(x^1, x^2, x^3)$  en la que la línea de universo corta a  $\mathcal{S}_I$ . Esta elección tiene una consecuencia inmediata: El fluido cosmológico está siempre en reposo con relación a las coordenadas espaciales. En otras palabras, las coordenadas espaciales son solidarias con el fluido; son meramente etiquetas para las líneas universo del fluido. Para la coordenada temporal  $t$  de un suceso  $P$ , se usará el intervalo de tiempo propio  $\int d\tau$  de  $P$  a  $\mathcal{S}_I$ , medido a lo largo de la línea de universo del fluido que pasa por  $P$  y se le añadirá  $t_I$ , que es el tiempo standard asignado a la hipersuperficie  $\mathcal{S}_I$ .

$$t(P) = t_I + \left( \int_{\mathcal{S}_I}^P d\tau \right) \text{ a lo largo de la línea de universo del fluido} \quad (1)$$



Las hipersuperficies de  $t = \text{constante}$  de este sistema de coordenadas coinciden con las hipersuperficies de homogeneidad del universo. En efecto, consideremos dos observadores distintos A y B, que se mueven con el fluido siguiendo líneas de universo distintas. En el instante  $t_I$  (sobre  $\mathcal{S}_I$ ) el universo es idéntico para A y para B. Dejemos que A y B hagan de nuevo observaciones después de que sus relojes hayan marcado el mismo intervalo de tiempo  $\Delta\tau$ . Homogeneidad de la hipersuperficie inicial  $\mathcal{S}_I$ , más la naturaleza determinista de las ecuaciones de campo de Einstein, garantizan que A y B verán de nuevo la misma física. Por tanto, después del intervalo  $\Delta\tau$ , están en una nueva hipersuperficie de homogeneidad caracterizada por el tiempo  $t_I + \Delta\tau$ . Como A y B son arbitrarios, la nueva hipersuperficie de homogeneidad tiene un tiempo coordenado constante.

En general el elemento de línea es de la forma

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu \quad (1)$$

y nuestra elección de la coordenada temporal ( $x^0 \equiv ct$ ) garantiza que

$$ds^2 = (dx^0)^2 + 2g_{0i}(x) dx^0 dx^i + g_{ij}(x) dx^i dx^j \quad (2)$$

Como es bien sabido las ecuaciones de las geodésicas son

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\lambda}{ds} = 0 \quad (3)$$

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda} \equiv \frac{1}{2} g^{\mu\rho} \left\{ \frac{\partial g_{\rho\lambda}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\rho} \right\} \quad (4)$$

donde  $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$  son los llamados símbolos de Christoffel. Con nuestra elección de coordenadas las líneas  $x^i = \text{cte}$  ( $i=1,2,3$ ) son geodésicas y por tanto se debe tener que  $\Gamma^i_{00} = 0$  y (4) implica

$$\frac{\partial g_{0i}}{\partial x^0} = 0 \quad (5)$$

Por otra parte en cualquier punto de una hipersuperficie de homogeneidad los vectores  $(dx^0, d\vec{x})$  y  $(dx^0, -d\vec{x})$  deben ser equivalentes y



por tanto  $g_{0i} \equiv 0$  sobre la hipersuperficie de homogeneidad y por (3.5) se debe cumplir  $g_{0i} \equiv 0$  en todo el espacio. Entonces (3.2) se escribe en el sistema de coordenadas elegido en la forma

$$ds^2 = (dx^0)^2 + g_{ij}(x) dx^i dx^j \quad (1)$$

En una hipersuperficie de homogeneidad ( $t = t_0$ ), su métrica tri-dimensional viene descrita por

$$ds^2 \equiv -d\sigma^2 = g_{ij}(x) dx^i dx^j \quad (2)$$

y su conocimiento implica conocer  $ds^2$ . En principio

$$d\sigma^2 = -g_{ij}(t; x^k) dx^i dx^j \quad (3)$$

Supongamos que conocemos esta geometría en  $\mathcal{D}_I$ , es decir que conocemos las funciones

$$\gamma_{ij}(x^k) \equiv g_{ij}(t_I; x^k) \quad (4)$$

¿Cómo serán los coeficientes del tensor métrico en otras hipersuperficies de homogeneidad? Consideremos dos líneas de universo  $A$  y  $B$  del fluido cosmológico de coordenadas  $(x^1, x^2, x^3)$  y  $(x^1 + \Delta x^1, x^2 + \Delta x^2, x^3 + \Delta x^3)$ , respectivamente. En el instante  $t_I$  están separadas por la distancia

$$\Delta\sigma(t_I) = \left[ -\gamma_{ij}(x^k) \Delta x^i \Delta x^j \right]^{1/2} \quad (5)$$

En un tiempo posterior  $t > t_I$  (sobre  $\mathcal{D}$ ) estarán separadas por otra distancia  $\Delta\sigma(t)$ . La isotropía del espacio garantiza que  $\Delta\sigma(t)/\Delta\sigma(t_I)$  es independiente de la dirección relativa de  $A$  y  $B$ . Además para una dirección dada, la aditividad de pequeñas distancias garantiza que  $\Delta\sigma(t)/\Delta\sigma(t_I)$  no depende de  $\Delta\sigma(t_I)$ . Entonces  $\Delta\sigma(t)/\Delta\sigma(t_I)$  debe ser la misma para todo par de líneas de universo cercanas a una línea de universo dada. Finalmente, la homogeneidad garantiza que el cociente  $\Delta\sigma(t)/\Delta\sigma(t_I)$  será independiente de la posición inicial en  $\mathcal{D}_I$ , i.e.

$$\frac{\Delta\sigma(t)}{\Delta\sigma(t_I)} \equiv a(t) \quad (6)$$

Entonces  $a(t)$  es el factor en que se separan las líneas del universo



entre el tiempo  $t_E$  y el  $t$ . En otros palabras  $a(t)$  es un factor de escala universal. Tenemos por lo tanto que el elemento de línea en el sistema de coordenadas elegido es

$$ds^2 = dx^0 dx^0 + a^2(t) \gamma_{ij}(x^k) dx^i dx^j \quad (1)$$

Consideremos de nuevo la hipersuperficie de homogeneidad  $\mathcal{S}_t$ . Un observador situado en ella debe ver todas las direcciones como equivalentes. La isotropía implica, en particular, que las direcciones  $(0, dx^1, dx^2, dx^3)$  y  $(0, -dx^1, dx^2, dx^3)$  deben ser equivalentes y por tanto que  $\gamma_{12} = \gamma_{13} \equiv 0$ . De estos argumentos resulta

$$ds^2 = dx^0 dx^0 + a^2(t) \left\{ \gamma_{11}(x^k) dx^1 dx^1 + \gamma_{22}(x^k) dx^2 dx^2 + \gamma_{33}(x^k) dx^3 dx^3 \right\} \quad (2)$$

La isotropía implica también que las direcciones  $(0, dx^1, dx^2, 0)$  y  $(0, dx^2, dx^1, 0)$  deben ser equivalentes y usando este tipo de argumentos se obtiene que el elemento de línea es

$$ds^2 = dx^0 dx^0 - a^2(t) \gamma \left[ (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \right] \left[ (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \right] \quad (3)$$

e introduciendo coordenadas esféricas  $ds^2$  se puede escribir

$$ds^2 = (dx^0)^2 - e^{\alpha(r)} e^{\beta(x^0)} \left[ dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right] \quad (4)$$

donde hasta aquí  $\alpha(r)$  y  $\beta(x^0)$  son funciones arbitrarias. Tenemos pues que

$$g_{00} = 1, \quad g_{11} = -e^{\alpha(r)} e^{\beta(x^0)}, \quad g_{22} = -r^2 e^{\alpha(r)} e^{\beta(x^0)} \quad (5)$$

$$g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta e^{\alpha(r)} e^{\beta(x^0)}$$

son las únicas componentes del tensor métrico no nulas. Introduciendo

$$\alpha' \equiv \frac{d\alpha(r)}{dr}, \quad \dot{\beta} \equiv \frac{d\beta}{dx^0} \quad (6)$$

es fácil comprobar que los únicos símbolos de Christoffel no nulos son:

$$(\text{recordar } \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} = \Gamma^{\mu}_{\lambda\nu})$$



$$\Gamma^0_{11} = \frac{1}{2} e^{\alpha(r)} e^{\beta(x^0)} \ddot{\beta}(x^0), \quad \Gamma^0_{22} = \frac{1}{2} r^2 e^{\alpha(r)} e^{\beta(x^0)} \ddot{\beta}(x^0)$$

$$\Gamma^0_{33} = \frac{1}{2} r^2 \sin^2 \theta e^{\alpha(r)} e^{\beta(x^0)}$$

$$\Gamma^1_{10} = \Gamma^1_{01} = \Gamma^2_{20} = \Gamma^2_{02} = \Gamma^3_{30} = \Gamma^3_{03} = \frac{1}{2} \dot{\beta}(x^0)$$

(1)

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2} \alpha'(r), \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \alpha'(r)$$

$$\Gamma^1_{22} = -r - \frac{1}{2} r^2 \alpha'(r), \quad \Gamma^1_{33} = -r \sin^2 \theta \left(1 + \frac{1}{2} r \alpha'(r)\right)$$

$$\Gamma^2_{33} = -\sin \theta \cos \theta, \quad \Gamma^3_{32} = \Gamma^3_{23} = \cot \theta$$

Definamos el tensor de curvatura como

$$R^{\mu}_{\nu\lambda\rho} \equiv \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda,\rho} - \Gamma^{\mu}_{\nu\rho,\lambda} + \Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda} \Gamma^{\mu}_{\sigma\rho} - \Gamma^{\sigma}_{\nu\rho} \Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda} \quad (2)$$

y tensor de curvatura de Ricci-Einstein como

$$R_{\mu\nu} \equiv R^{\lambda}_{\mu\nu\lambda} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu,\lambda} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda,\nu} + \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} \Gamma^{\lambda}_{\sigma\lambda} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu} \quad (3)$$

También usaremos el escalar de curvatura

$$R \equiv R^{\mu}_{\mu} \quad (5)$$

y el tensor

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \quad (6)$$

que satisface

$$G^{\mu}_{\mu} = -R \quad (7)$$

Se prueba fácilmente que las únicas componentes no nulas del tensor  $G_{\mu\nu}$  son las siguientes.



$$G^0_0 = -e^{-\alpha(r)} e^{-\beta(x^0)} \left\{ \alpha''(r) + \frac{1}{4} \alpha'(r)^2 + \frac{2}{r} \alpha'(r) \right\} + \frac{3}{4} \dot{\beta}(x^0)^2$$

$$G^1_1 = -e^{-\alpha(r)} e^{-\beta(x^0)} \left\{ \frac{1}{4} \alpha'(r)^2 + \frac{1}{r} \alpha'(r) \right\} + \left\{ \ddot{\beta}(x^0) + \frac{3}{4} \dot{\beta}(x^0)^2 \right\} \quad (1)$$

$$G^2_2 = G^3_3 = -e^{-\alpha(r)} e^{-\beta(x^0)} \left\{ \frac{1}{2} \alpha''(r) + \frac{1}{2r} \alpha'(r) \right\} + \left\{ \ddot{\beta}(x^0) + \frac{3}{4} \dot{\beta}(x^0)^2 \right\}$$

De donde

$$R = -G^\mu_\mu = e^{-\alpha(r)} e^{-\beta(x^0)} \left\{ 2\alpha''(r) + \frac{4}{r} \alpha'(r) + \frac{1}{2} \alpha'(r)^2 \right\} - 3\ddot{\beta}(x^0) - 3\dot{\beta}(x^0)^2 \quad (2)$$

La condición de isotropía implica que  $G^1_1 = G^2_2 = G^3_3$  y por tanto

$$\alpha''(r) - \frac{1}{2} \alpha'(r)^2 - \frac{1}{r} \alpha'(r) = 0 \quad (3)$$

Multipliando esta ecuación por  $e^{-\alpha(r)/2}/r$  se puede escribir como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} e^{-\alpha(r)/2} \frac{d\alpha(r)}{dr} \right\} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{d\alpha(r)}{dr} &= C_1 r e^{-\alpha(r)/2} \\ \Rightarrow e^{\alpha(r)} &= C_2^{-2} \left\{ 1 - \frac{C_1 r^2}{4 C_2} \right\}^{-2} \end{aligned} \quad (4)$$

donde  $C_1$  y  $C_2$  son constantes de integración. Así obtenemos

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \frac{e^{\beta(x^0)}}{C_2^2 \left[ 1 - \frac{C_1 r^2}{4 C_2} \right]^2} [dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2] \quad (5)$$

Introduciendo

$$R^2(t) \equiv \frac{1}{C_2^2} e^{\beta(x^0)}, \quad k \equiv -\frac{C_1}{C_2} \quad (6)$$

se obtiene

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \frac{R^2(t)}{\left[ 1 + \frac{k}{4} r^2 \right]^2} [dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2] \quad (7)$$



Si hacemos el cambio

$$\bar{r} = \left\{ 1 + \frac{k}{c^2} r^2 \right\}^{-1} r \quad (1)$$

y eliminamos las barras obtenemos, finalmente,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left\{ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right\} \quad (2)$$

que es el llamado elemento de línea de Robertson-Walker.

Algunos resultados necesarios posteriormente son:

Tensor métrico (elementos no nulos):

$$g_{00} = 1, \quad g_{11} = -R^2(t) \frac{1}{1 - kr^2}, \quad g_{22} = -R^2(t) r^2, \quad g_{33} = -R^2(t) r^2 \sin^2 \theta \quad (3)$$

Símbolos de Christoffel (elementos no nulos):

$$\Gamma^0_{11} = \frac{R \dot{R}}{c(1 - kr^2)}, \quad \Gamma^0_{22} = \frac{1}{c} r^2 R \dot{R}, \quad \Gamma^0_{33} = \frac{1}{c} r^2 \sin^2 \theta R \dot{R}$$

$$\Gamma^1_{10} = \Gamma^1_{01} = \Gamma^2_{20} = \Gamma^2_{02} = \Gamma^3_{30} = \Gamma^3_{03} = \frac{1}{c} \frac{\dot{R}}{R}$$

$$\Gamma^1_{11} = \frac{kr}{1 - kr^2}, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r} \quad (4)$$

$$\Gamma^1_{22} = -r(1 - kr^2), \quad \Gamma^1_{33} = -r \sin^2 \theta (1 - kr^2)$$

$$\Gamma^2_{33} = -\sin \theta \cos \theta, \quad \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \cot \theta$$

Tensor de Ricci-Einstein (elementos no nulos)

$$R_{00} = -\frac{3}{c^2} \frac{\ddot{R}}{R}, \quad R_{11} = \frac{1}{c^2(1 - kr^2)} \left\{ R \ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2kc^2 \right\} \quad (5)$$

$$R_{22} = \frac{r^2}{c^2} \left\{ R \ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2kc^2 \right\}, \quad R_{33} = \frac{r^2 \sin^2 \theta}{c^2} \left\{ R \ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2kc^2 \right\}$$



Hemos pues demostrado que para un universo isotrópico, y por tanto homogéneo, el elemento de línea más general posible con una elección adecuada de coordenadas es el llamado elemento de línea de Robinson-Walker:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left\{ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right\} \quad (1)$$

donde  $k$  es una constante arbitraria y  $R(t)$  una función arbitraria del tiempo cosmológico. Notemos que siempre podemos elegir que  $R(t)$  tenga dimensiones de longitud y por tanto  $r$ ,  $\theta$  y  $\phi$  son variables adimensionales. Por otra parte siempre podemos re-escalar  $r$  de forma que los únicos valores posibles de  $k$  sean  $k = -1, 0, +1$ . Consideremos cada una de estas posibilidades:

i)  $k = 0$

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left\{ dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right\} \quad (2)$$

$$0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \theta < \pi, \quad 0 \leq \phi < 2\pi$$

En cada instante  $t$  el espacio es Euclídeo y por tanto de curvatura espacial es nula y su volumen infinito.

ii)  $k = +1$

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left\{ \frac{dr^2}{1 - r^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right\} \quad (3)$$

$$0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta < \pi, \quad 0 \leq \phi < 2\pi$$

Es útil, en este caso, introducir el cambio de coordenadas:

$$r = \sin \chi \quad 0 \leq \chi \leq \pi/2 \quad (4)$$

y entonces el elemento de línea es

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left\{ d\chi^2 + \sin^2 \chi d\theta^2 + \sin^4 \chi \sin^2 \theta d\phi^2 \right\} \quad (\text{Nota 9'}) \quad (5)$$

En el instante  $t$  el volumen del espacio viene dado por



Nota

Antes de continuar debemos hacer algunas consideraciones topológicas sobre el triespacio correspondiente al elemento de línea (9.1). Consideremos un espacio Euclideo 4 tridimensional e introduzcamos coordenadas cartesianas  $x, y, z, u$  ( $-\infty < x, y, z, u < \infty$ ). El elemento de línea es

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + du^2 \quad (1)$$

En este espacio y con estas coordenadas la ecuación de  $S^3$  es

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = R^2 \quad -R \leq x, y, z, u \leq R \quad (2)$$

donde  $R$  es el radio. Podemos introducir ahora coordenadas "polares"  $\chi, \theta, \phi$  definidas como

$$x = R \sin \chi \sin \theta \cos \phi, \quad y = R \sin \chi \sin \theta \sin \phi, \quad z = R \sin \chi \cos \theta, \quad u = R \cos \chi \quad (3)$$

$$0 \leq \chi, \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi$$

Entonces diferenciando (3) y sustituyendo en (1) obtenemos

$$ds^2 = R^2 \left\{ d\chi^2 + \sin^2 \chi d\theta^2 + \sin^2 \chi \sin^2 \theta d\phi^2 \right\} \quad (4)$$

$$0 \leq \chi, \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi$$

y así obtenemos todos los puntos de  $S^3$ . Si limitáramos  $0 \leq \chi \leq \pi/2$  solo cubriríamos más que la mitad de  $S^3$ . Sería el equivalente a considerar en  $S^2$  solo una superficie que está por encima del Ecuador. Las coordenadas  $\chi, \theta, \phi$  son buenas localmente pero no cubren todo  $S^3$ .



$$\begin{aligned}
 V(t) &= \int_0^{\pi} d\chi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \sqrt{-g_{11} g_{22} g_{33}} = R^3(t) \int_0^{\pi} d\chi \sin^2 \chi \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi \\
 &= R^3(t) \frac{\pi}{2} \cdot 2 \cdot 2\pi \Rightarrow V(t) = 2\pi^2 R^3(t)
 \end{aligned} \quad (1)$$

(ii)  $k = -1$

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left\{ \frac{dr^2}{1+r^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right\} \quad (2)$$

$$0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \theta < \pi, \quad 0 \leq \phi < 2\pi$$

Es útil, en este caso, introducir el cambio de coordenadas

$$r = \sinh \chi \quad 0 \leq \chi < \infty \quad (3)$$

y entonces el elemento de línea es

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left\{ d\chi^2 + \sinh^2 \chi d\theta^2 + \sinh^2 \chi \sin^2 \theta d\phi^2 \right\} \quad (4)$$

y como en el primer caso el volumen del espacio en un instante  $t$  es infinito.

En los tres casos es fácil calcular la curvatura del espacio tridimensional. Para ello basta tener en cuenta que

$$g_{11} = R^2(t) \frac{1}{1-r^2}, \quad g_{22} = R^2(t) r^2, \quad g_{33} = R^2(t) r^2 \sin^2 \theta \quad (5)$$

de donde los únicos símbolos de Christoffel no nulos son

$$\Gamma^1_{11} = \frac{kr}{1-kr^2}, \quad \Gamma^1_{22} = -r(1-kr^2), \quad \Gamma^1_{33} = -r(1-kr^2) \sin^2 \theta \quad (6)$$

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \Gamma^3_{31} = \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^2_{33} = -\sin^2 \theta, \quad \Gamma^3_{32} = \Gamma^3_{23} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

de donde

$$R^1_{11} = R^2_{22} = R^3_{33} = \frac{2k}{R^2(t)} \quad (7)$$

y por tanto

$$R = R^i_{ii} = \frac{6k}{R^2(t)} \quad (8)$$



Por lo tanto la curvatura espacial es positiva, nula o negativa según que  $k = +1, 0, -1$ , respectivamente.

Notar que en los tres casos si  $r \ll 1$  el elemento de línea de Robertson-Walker se aproxima a una métrica Minkowskiana.



## II - EL MODELO COSMOLÓGICO STANDARD

En el capítulo I hemos demostrado que para un universo isótropo, y por tanto homogéneo, el elemento de línea más general posible, con una elección adecuada del sistema de coordenadas, es el llamado elemento de línea de Robertson-Walker

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left\{ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right\} \quad (1)$$

donde  $k=0, \pm 1$  y  $R(t)$  es una función arbitraria del tiempo cosmológico  $t$ .

Para determinar  $k$  y  $R(t)$  supondremos la validez de las ecuaciones del campo gravitacional de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^2} T_{\mu\nu} \quad (2)$$

donde  $G$  es la constante de la gravitación universal de Newton y  $T_{\mu\nu}$  el tensor energía-momento. De la ecuación anterior se obtiene

$$R = - \frac{8\pi G}{c^2} T \quad T \equiv T^\mu{}_\mu \quad (3)$$

y por tanto una forma equivalente de (2) es

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^2} \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) \quad (4)$$

Supondremos que el fluido cosmológico se comporta como un fluido perfecto en cuyo caso

$$T^{\mu\nu} = \left( \rho + \frac{1}{c^2} p \right) u^\mu u^\nu - \frac{1}{c^2} p g^{\mu\nu} \quad , \quad u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{ds} \quad (5)$$

donde  $\rho$  y  $p$  son la presión y densidad del fluido, que en nuestro caso son funciones únicamente de  $t$ . Téngase en cuenta que

$$u^\mu u_\mu = \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx_\mu}{ds} = 1 \quad (6)$$



y por tanto

$$T = \rho - \frac{3}{c^2} p \quad (1)$$

En el sistema de coordenadas que usamos las partículas del fluido cósmico están en reposo y por consiguiente

$$u^0 = 1, \quad u^i = 0 \quad (2)$$

La simetría del problema implica que basta considerar (1.4) para  $\mu = \nu = 0$  y  $\mu = \nu = 1$ . Entonces teniendo en cuenta (I-8.5)

$$-\frac{\ddot{R}(t)}{R(t)} = \frac{4\pi G}{3c^2} \left\{ c^2 \rho(t) + 3p(t) \right\} \quad (3)$$

$$R(t) \ddot{R}(t) + 2\dot{R}^2(t) + 2kc^2 = \frac{4\pi G}{c^2} R^2(t) \left\{ c^2 \rho(t) - p(t) \right\}$$

o lo que es equivalente

$$\dot{R}^2(t) + kc^2 = \frac{8\pi G}{3} R^2(t) \rho(t) \quad (4)$$

$$2R(t) \ddot{R}(t) + \dot{R}^2(t) + kc^2 = - \frac{8\pi G}{c^2} R^2(t) p(t)$$

Si multiplicamos la primera de estas ecuaciones por  $R(t)$ , derivamos con respecto a  $t$  y usamos la segunda obtenemos

$$\frac{d}{dt} \left\{ \rho(t) c^2 R^3(t) \right\} = - p(t) \frac{d}{dt} R^3(t) \quad (5)$$

que no es más que la ley de conservación de la energía.

Si damos la ecuación de estado  $p = p(\rho)$  entonces (5) permite calcular  $\rho(t)$  en función de  $R(t)$ , entonces la primera de (4) permite calcular  $R(t)$ . Los modelos cosmológicos basados en la métrica de Robertson-Walker y en los que  $R(t)$  se determina de la forma indicada suelen llamarse modelos de Friedmann.

Como veremos más adelante del estudio del desplazamiento hacia el rojo de las líneas espectrales como función de la distancia, del número de fuentes (ópticas o radio) en función de la luminosidad aparente y de la



variación de los diámetros angulares de objetos lejanos con la distancia, se puede obtener información sobre:

$$\text{Función de Hubble} : H(t) \equiv \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} \quad (1)$$

$$\text{Función de desaceleración} : q(t) \equiv - \frac{\ddot{R}(t) R(t)}{\dot{R}^2(t)} \quad (2)$$

Los valores de estas funciones en el momento actual  $t_0$  que denotaremos como  $H_0 \equiv H(t_0)$  y  $q_0 \equiv q(t_0)$  no son fácilmente medibles. Sus valores actuales son

$$H_0 = 100 h_0 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \quad 0.5 < h_0 < 0.85 \quad (\text{Ver Nota}) \quad (3)$$

$$0.01 < q_0 < 1$$

Teniendo en cuenta la primera de las ecuaciones (2.3) se tiene que si

$$c^2 q(t) + 3 p(t) > 0 \quad \forall t, \quad (4)$$

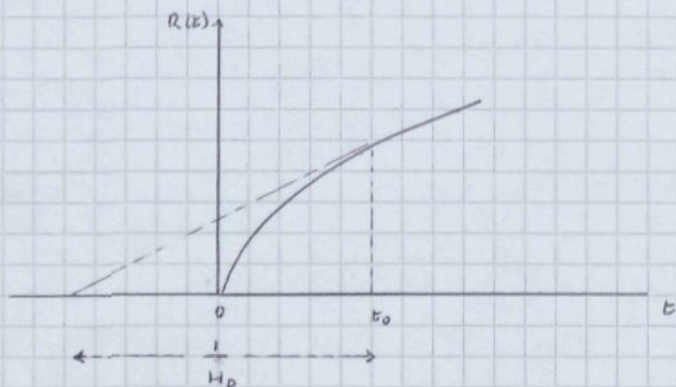
condición que se satisface en todos los modelos realistas de fluidos, entonces se obtiene que

$$\frac{\dot{R}(t_0)}{R(t_0)} > 0, \quad - \frac{\ddot{R}(t)}{R(t)} > 0 \quad \forall t \quad (5)$$

Estas condiciones implican que  $R(t)$  debió anularse en algún tiempo finito pasado que tomaremos como origen de tiempos

$$R(t_0) = 0 \quad (6)$$

Se puede representar  $R(t)$  versus  $t$





Nota

En estos últimos tiempos ha habido un gran debate sobre el valor de  $h_0$  y parece que, finalmente, la situación se va aclarando (Nature 381, 555 (1996)). La medida de  $H_0$  es difícil pues exige disponer de un buen patrón de distancias hasta unos 100 Mpc, y esto implica, en general, usar varios standard distintos de luminosidad. Allan Sandage, usando únicamente el brillo aparente de un cierto tipo de supernovas, da el valor  $h_0 = 0.55 - 0.61$ , que es algo mayor que un resultado previo  $h_0 = 0.43 - 0.53$ . Otros métodos daban hace unos años valores que llegaban a triplicar los anteriores pero se han ido reduciendo y hoy daban  $h_0 = 0.65 - 0.82$ , prácticamente compatibles con Sandage.

A medida que  $h_0$  se ha ido precisando se ha centrado su implicación en la edad del universo. Parece ser que los objetos más viejos que se conocen son cúmulos globulares galácticos con edades de  $13 - 17 \times 10^9$  años. En un modelo de universo dominado por materia, vemos, que si  $q_0 \geq 1/2$  esto implica  $0.38 < h_0 < 0.50$ . Un valor más alto para  $h_0$  se encuentra disminuyendo el valor de  $q_0$ . Con  $q_0 = 0.1$  obtenemos  $0.48 < h_0 < 0.63$ .



Se tiene, por tanto, que la edad actual del universo debe cumplir la condición

$$t_0 \leq \frac{1}{H_0} = 9.778 \times 10^9 \frac{1}{h_0} \text{ años} \quad (1)$$

Supongamos ahora que  $p(t) > 0$  y  $\dot{p}(t) > 0$  para todo instante de tiempo. Entonces las ecuaciones (2.3) y (2.4) implican

$$+ \frac{\ddot{R}(t)}{R(t)} < 0 \quad (2c)$$

$$\frac{\ddot{R}^2(t)}{R^2(t)} + k \frac{c^2}{R^2(t)} > 0 \quad (2c')$$

$$2 \frac{\ddot{R}(t)}{R(t)} + \frac{\ddot{R}^2(t)}{R^2(t)} + k \frac{c^2}{R^2(t)} < 0 \quad (2c'')$$

La primera ecuación implica que  $R(t)$  es cóncava. Si  $k \leq 0$  o  $k = -1$ , la ecuación (2c') implica que siempre  $\dot{R}(t) \neq 0$  y por tanto el universo continúa expandiéndose indefinidamente. Veamos lo que sucede para  $k = +1$ . Supongamos que el universo se expandiera indefinidamente, entonces (2c'') implica que para  $t \rightarrow \infty$  el comportamiento asintótico de  $R(t)$  viene dado por

$$R(t) \sim A t^\alpha \quad A > 0, 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (3)$$

y la ecuación (2c'') implica

$$\frac{\alpha(3\alpha-2)}{t^2} + \frac{c^2}{A^2 t^{2\alpha}} < 0 \quad (4)$$

y llegamos a una contradicción. Por tanto si  $k = +1$  el universo, después de la fase de expansión actual, alcanzará un momento en que  $\dot{R}(t) = 0$  y a continuación empezará a contraerse hasta llegar a una singularidad  $R(t_f) = 0$ .

En teoría es relativamente fácil conocer el valor de  $k$ . En efecto consideremos la primera de las ecuaciones (2.4) en el momento actual  $t = t_0$ . Usando para cualquier función la notación  $X(t_0) \equiv X_0$  se obtiene



$$k \frac{c^2}{R_0^2} = \frac{8\pi G}{3} (\rho_0 - \rho_c)$$

(1)

$$\rho_c \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 1.878 \cdot 10^{-29} h_0^2 \text{ g cm}^{-3}$$

donde  $\rho_c$  es la llamada densidad crítica del universo. Para determinar el valor de  $k$  basta comparar la densidad actual del universo  $\rho_0$  con la crítica  $\rho_c$ , esto es medir

$$\Omega_0 \equiv \frac{\rho_0}{\rho_c}$$

(2)

De la segunda ecuación de (2.4) resulta para el tiempo actual

$$k \frac{c^2}{R_0^2} = H_0^2 (2q_0 - 1) = \frac{8\pi G}{c^2} \rho_0$$

(3)

y usando (1) y (3)

$$\frac{1}{\rho_c} \left\{ \rho_0 + \frac{3\rho_0}{c^2} \right\} = 2q_0$$

(4)

Como en el universo actual  $\rho_0 \ll \rho_0 c^2$ , es decir está dominado por materia no relativista, se obtiene

$$\Omega_0 = 2q_0$$

(5)

y usando los valores de  $q_0$  dados antes

$$0.02 \leq \Omega_0 \leq 2$$

(6)

Se puede medir el valor de  $\Omega_{B0}$  es decir  $\rho_{B0}/\rho_c$  donde  $\rho_{B0}$  es la densidad de bariones en el momento actual. Medidas recientes dan para  $\Omega_{B0}$  valores parecidos al límite inferior de  $\Omega_0$  dado en (6). Si se tiene en cuenta el proceso de nucleosíntesis, del que hablaremos más adelante, el acuerdo con los datos experimentales implica que

$$h_0^2 \Omega_{B0} = 0.013 \pm 0.003$$

(7)

Puede suceder que  $\Omega_0 > \Omega_{B0}$  debido a la presencia de materia oscura en el universo.



Sabemos hoy día que el universo está lleno de una radiación electromagnética de fondo distribuida de acuerdo con las leyes del cuerpo negro con una temperatura

$$T_0 = 2.726 (15) \text{ K}$$

(1)

y por tanto el número de fotones por unidad de volumen y su contribución a la densidad vienen dados por

$$n_{\gamma 0} = 411.0 (23) \text{ cm}^{-3}, \quad \rho_{\gamma 0} = 6.649 (34) \times 10^{-34} \text{ g cm}^{-3}$$

(2)

El número de bariones en el universo actual es pues

$$n_{B0} = \Omega_{B0} \frac{\rho_c}{m_p} = 1.123 \times 10^{-5} \text{ cm}^{-3} \Omega_{B0} h_0^2$$

(3)

y teniendo en cuenta (5.7) y (2)

$$\frac{n_{B0}}{n_{\gamma 0}} = 2.732 \times 10^{-8} \Omega_{B0} h_0^2 \approx 3.6 \times 10^{-10}$$

(4)

Por otro parte

$$\frac{s_{\gamma 0} / R_B}{n_{B0}} = 1.318 \times 10^8 h_0^{-2} \Omega_{B0}^{-1} \approx 1.0 \times 10^{10}$$

(5)

Como veremos más adelante  $n_B / n_\gamma$  y  $(s_\gamma / R_B) / n_B$  no han cambiado sensiblemente desde el momento en que  $k_B T \approx 10 \text{ MeV}$ , hasta hoy día.



## III - GASES CUANTICOS

Sea  $p \equiv |\vec{p}|$  y designemos por  $m(p) \Delta p$  el número de estados posibles en el intervalo  $[p - \Delta p/2, p + \Delta p/2]$ , con  $\Delta p \ll p$ . Para un gas perfecto que se encuentra encerrado en una cantidad de volumen  $V$ , limitada por una superficie  $S$ , es posible probar que si  $\Delta p / h \gg S / V$ , y por tanto  $p / h \gg S / V$ , entonces

$$m(p) = g \frac{V}{(2\pi h)^3} 4\pi p^2 \quad (1)$$

donde  $g$ , el llamado factor estadístico, es el número de orientaciones del spin independientes.

Por otra parte sabemos que para un sistema de bosones o fermiones el número medio de partículas en el estado cuántico  $i$ -ésimo viene dado por

$$N_i = \left\{ e^{(E_i - \mu)/k_B T} \pm 1 \right\}^{-1} \quad \begin{array}{l} +1 \text{ para fermiones} \\ -1 \text{ para bosones} \end{array} \quad (2)$$

donde  $E_i$  es la energía del estado  $i$ -ésimo,  $k_B$  la constante de Boltzmann,  $T$  la temperatura absoluta y  $\mu$  es el llamado potencial químico. Esta distribución está normalizada de la forma

$$N = \sum_i N_i \quad (3)$$

donde  $N$  es el número total de partículas del sistema. Esta ecuación fija el valor del potencial químico.

Para el gas perfecto indiquemos por  $E(p)$  la energía de la partícula de momento  $p$ , entonces el número medio de partículas en el intervalo  $[p - \Delta p/2, p + \Delta p/2]$  viene dado por  $N(p) \Delta p$ , donde de acuerdo con lo dicho

$$N(p) = g \frac{V}{(2\pi h)^3} 4\pi p^2 \left\{ e^{[E(p) - \mu]/k_B T} \pm 1 \right\}^{-1} \quad (4)$$

y la condición de normalización (3) se escribe



$$\frac{N}{V} = g \frac{1}{2\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty dp p^2 \left\{ e^{\frac{[E(p) - \mu]}{k_B T}} \pm 1 \right\}^{-1} \quad (1)$$

que es la ecuación que permite determinar el potencial químico  $\mu$  en función de la densidad de partículas  $N/V$  y de la temperatura  $T$ .

De forma análoga la energía total del sistema  $E$  y el potencial termodinámico  $\Omega$  vienen dados por las expresiones

$$\frac{E}{V} = g \frac{1}{2\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty dp p^2 E(p) \left\{ e^{\frac{[E(p) - \mu]}{k_B T}} \pm 1 \right\}^{-1} \quad (2)$$

$$\frac{\Omega}{V} = \mp g \frac{k_B T}{2\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty dp p^2 \ln \left\{ 1 \pm e^{-\frac{[E(p) - \mu]}{k_B T}} \right\} \quad (3)$$

Debemos además recordar que

$$\Omega = -PV \quad (4)$$

$$d\Omega = -SdT - Nd\mu \quad (5)$$

donde  $S$  es la entropía y  $P$  la presión. Una propiedad importante del potencial químico es que es aditivamente conservado en todas las reacciones. Esta última propiedad implica que como los fotones pueden ser creados o destruidos en cualquier proceso, entonces

$$\mu_\gamma = 0 \quad (6)$$

También una partícula  $A$  y su correspondiente antipartícula  $\bar{A}$  pueden aniquilarse en fotones y por tanto

$$\mu_A + \mu_{\bar{A}} = 0 \quad (7)$$

Consideremos ahora distintas aplicaciones de todo lo expuesto.

#### 6) Sistemas con $\mu \equiv 0$ y partículas altamente relativistas $E = pc$

En este caso (1) implica que el número de partículas por unidad de volumen  $n \equiv N/V$  viene dado por



$$n = \frac{g}{2\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty dp p^2 \left\{ e^{pc/k_B T} \pm 1 \right\}^{-1} \Rightarrow$$

$$n = g \frac{1}{2\pi^2 \hbar^3} \left( \frac{k_B T}{c} \right)^3 \int_0^\infty dz \frac{z^2}{e^z \pm 1} \quad (1)$$

Se demuestra que

$$\int_0^\infty dz \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} = \Gamma(s) \zeta(s) \quad (2)$$

$$\int_0^\infty dz \frac{z^{s-1}}{e^z + 1} = (1 - 2^{1-s}) \Gamma(s) \zeta(s)$$

donde  $\Gamma(s)$  es la función  $\Gamma$  de Euler y  $\zeta(s)$  la de Riemann. De aquí

$$n = g \frac{\zeta(3)}{\pi^2} \left( \frac{k_B T}{\hbar c} \right)^3 \times \begin{cases} 1 & \text{bosones} \\ 3/4 & \text{fermiones} \end{cases} \quad (3)$$

$$\zeta(3) = 1.202056903 \dots$$

La densidad de energía viene dada por

$$p c^2 = g \frac{1}{2\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty dp p^2 p c \left\{ e^{pc/k_B T} \pm 1 \right\}^{-1} \Rightarrow$$

$$p c^2 = g \frac{(k_B T)^4}{2\pi^2 (\hbar c)^3} \int_0^\infty dz \frac{z^3}{e^z \pm 1} \quad (4)$$

Usando (2) y teniendo en cuenta que  $\zeta(4) = \pi^4/90$

$$p c^2 = g \frac{\pi^2}{30} \frac{(k_B T)^4}{(\hbar c)^3} \times \begin{cases} 1 & \text{bosones} \\ 7/8 & \text{fermiones} \end{cases} \quad (5)$$

Veamos ahora el potencial termodinámico

$$\frac{\Omega}{V} = \mp g \frac{k_B T}{2\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty dp p^2 \ln \left\{ 1 \pm e^{-pc/k_B T} \right\} \Rightarrow$$

$$\frac{\Omega}{V} = \mp g \frac{(k_B T)^4}{2\pi^2 (\hbar c)^3} \int_0^\infty dz z^2 \ln \left\{ 1 \pm e^{-z} \right\} \quad (6)$$



Integrando por partes

$$\frac{\Omega}{V} = -g \frac{(k_B T)^4}{6\pi^2 (\hbar c)^3} \int_0^\infty dz \frac{z^3}{e^z \pm 1} \quad (1)$$

de donde

$$\frac{\Omega}{V} = -g \frac{\pi^2}{90} \frac{(k_B T)^4}{(\hbar c)^3} \times \begin{cases} 1 & \text{bosones} \\ 7/8 & \text{fermiones} \end{cases} \quad (2)$$

Teniendo en cuenta (2.4) y (3.5) se encuentra que

$$g c^2 = 3 p \quad (3)$$

Finalmente, de (2.5) se encuentra que la entropía por unidad de volumen,  $s$ , viene dada por

$$\frac{s}{k_B} = g \frac{2\pi^2}{45} \left( \frac{k_B T}{\hbar c} \right)^3 \times \begin{cases} 1 & \text{bosones} \\ 7/8 & \text{fermiones} \end{cases} \quad (4)$$

De todo esto se obtiene

$$\rho = \frac{3p}{c^2} = g \cdot 4.209 \cdot 10^{11} (15) \times 10^{-36} \frac{g}{cm^3} \left( \frac{T}{K} \right)^4 \times \begin{cases} 1 & \text{bosones} \\ 7/8 & \text{fermiones} \end{cases} \quad (5)$$

$$s/k_B = g \cdot 36.5328 (10) \text{ cm}^{-3} \left( \frac{T}{K} \right)^3 \times \begin{cases} 1 & \text{bosones} \\ 7/8 & \text{fermiones} \end{cases} \quad (6)$$

$$n = g \cdot 10.14360 (29) \text{ cm}^{-3} \left( \frac{T}{K} \right)^3 \times \begin{cases} 1 & \text{bosones} \\ 3/4 & \text{fermiones} \end{cases} \quad (7)$$

ii) Sistemas no relativistas

Supondremos que  $E(p) = p^2/2m$  ( $m \neq 0$ ), lo cual es una buena aproximación siempre que

$$m c^2 \gg k_B T \quad (8)$$

Entonces de las expresiones generales se obtiene



$$N = g V \frac{(2m)^{3/2}}{4\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty dE E^{1/2} \left\{ e^{(E-\mu)/k_B T} \pm 1 \right\}^{-1} \quad (1)$$

$$E = g V \frac{(2m)^{3/2}}{4\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty dE E^{3/2} \left\{ e^{(E-\mu)/k_B T} \pm 1 \right\}^{-1} \quad (2)$$

$$\Omega = \mp g V \frac{k_B T (2m)^{3/2}}{4\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty dE E^{1/2} \ln \left\{ 1 \pm e^{-(E-\mu)/k_B T} \right\} \quad (3)$$

Integrando esta última por partes

$$\Omega = - \frac{2}{3} g V \frac{(2m)^{3/2}}{4\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty dE E^{3/2} \left\{ e^{(E-\mu)/k_B T} \pm 1 \right\}^{-1} \quad (4)$$

y como  $\Omega = -PV$  se obtiene de (2) y (4) que

$$PV = \frac{2}{3} E \quad (5)$$

Consideremos ahora estas expresiones en el caso en que

$$e^{\mu/k_B T} < 1 \quad (6)$$

Para ello consideremos las integrales

$$I_m \equiv \int_0^\infty dE E^m \left\{ e^{(E-\mu)/k_B T} \pm 1 \right\}^{-1} \quad (7)$$

Entonces

$$\begin{aligned} I_m &= (k_B T)^{m+1} \int_0^\infty dz z^m \left\{ e^{z - \mu/k_B T} \pm 1 \right\}^{-1} = \\ &= (k_B T)^{m+1} \int_0^\infty dz z^m e^{\mu/k_B T - z} \left\{ 1 \pm e^{\mu/k_B T} e^{-z} \right\}^{-1} \\ &= (k_B T)^{m+1} e^{\mu/k_B T} \int_0^\infty dz z^m e^{-z} \sum_{k=0}^{\infty} (\mp 1)^k e^{k\mu/k_B T} e^{-kz} \\ &= (k_B T)^{m+1} e^{\mu/k_B T} \sum_{k=0}^{\infty} (\mp 1)^k e^{k\mu/k_B T} \int_0^\infty dz z^m e^{-(1+k)z} \end{aligned}$$



y por tanto

$$I_m = \Gamma(m+1) (k_B T)^{m+1} e^{\mu/k_B T} \sum_{r=0}^{\infty} (\mp 1)^r \frac{1}{(1+r)^{m+1}} e^{r\mu/k_B T} \quad (1)$$

y por tanto

$$N = g V \frac{\sqrt{\pi}}{8 \pi^2 h^3} (2m k_B T)^{3/2} \sum_{m=0}^{\infty} (\mp 1)^m \frac{e^{(m+1)\mu/k_B T}}{(m+1)^{3/2}} \quad (2)$$

$$E = g V \frac{3\sqrt{\pi}}{16 \pi^2 h^3} (2m)^{3/2} (k_B T)^{5/2} \sum_{m=0}^{\infty} (\mp 1)^m \frac{e^{(m+1)\mu/k_B T}}{(m+1)^{5/2}} \quad (3)$$

$$PV = \frac{2}{3} E \quad (4)$$

La ecuación (2) nos sirve para determinar  $\mu$  y (4) es la ecuación generalizada de Clapeyron:

$$PV = N k_B T \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} (\mp 1)^m \frac{e^{m\mu/k_B T}}{(1+m)^{5/2}} \right\} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (\mp 1)^k \frac{e^{k\mu/k_B T}}{(1+k)^{3/2}} \right\}^{-1} \quad (5)$$

Quedándonos en primer orden

$$PV = N k_B T \left\{ 1 \pm \frac{e^{\mu/k_B T}}{2^{5/2}} \right\} \quad (6)$$

$$N = g V \frac{\sqrt{\pi}}{8 \pi^2 h^3} (2m k_B T)^{3/2} e^{\mu/k_B T}$$

de donde

$$PV = N k_B T \left\{ 1 \pm \frac{\pi^{3/2}}{2g} \frac{N}{V} \frac{k^3}{(m k_B T)^{3/2}} \right\} \quad (7)$$

La condición

$$\frac{N}{V} \left( \frac{k^2}{m k_B T} \right)^{3/2} \ll 1 \quad (8)$$

es la que indica que la estadística de Boltzmann es aplicable. Entonces, vemos que la variación de las propiedades de un gas perfecto con



relación a un gas perfecto clásico conducen, en el caso de fermiones, a un aumento de la presión y por tanto los efectos cuánticos conducen a repulsión entre las partículas. En el caso de bosones la presión es menor lo que refleja una atracción entre las partículas. Esta condición puede escribirse

$$T \gg \frac{\hbar^2}{k_B m^{5/3}} \rho^{2/3} \quad (1)$$

esto es

$$T \gg 34.18 \text{ K} \left( \rho \frac{\text{cm}^3}{\text{g}} \right)^{2/3} \left( \frac{m_p}{m} \right)^{5/3} \quad (2)$$

### iii) Gas de Bose

En este caso

$$\frac{N}{V} = g \frac{1}{2\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty dp p^2 \left\{ e^{\frac{E(p) - \mu}{k_B T}} - 1 \right\}^{-1} \quad (3)$$

Como los números de ocupación deben ser siempre positivos se obtiene que  $\mu \leq 0$ . Teniendo en cuenta que  $\mu$  es una función de  $T$  y derivando la expresión anterior con respecto a  $T$

$$\frac{d\mu}{dT} = - \frac{1}{T} \frac{\int_0^\infty dp p^2 \frac{E(p) - \mu}{k_B T} e^{\frac{E(p) - \mu}{k_B T}} \left\{ e^{\frac{E(p) - \mu}{k_B T}} - 1 \right\}^{-2}}{\int_0^\infty dp p^2 e^{\frac{E(p) - \mu}{k_B T}} \left\{ e^{\frac{E(p) - \mu}{k_B T}} - 1 \right\}^{-2}} \quad (4)$$

y como  $\mu \leq 0$  se tiene que  $d\mu/dT < 0$ , entonces el valor absoluto de  $\mu$  decrece al disminuir la temperatura. Alcanzará por tanto el valor  $\mu=0$  a una temperatura  $T_0$  determinada por

$$\frac{N}{V} = g \frac{1}{2\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty dp p^2 \left\{ e^{E(p)/k_B T_0} - 1 \right\}^{-1} \quad (5)$$

Si  $T_0$  es suficientemente baja para que podamos poner  $E(p) = p^2/2m$  ( $m \neq 0$ ) se tiene

$$\frac{N}{V} = g \frac{(2m)^{3/2}}{4\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty dE E^{1/2} \left\{ e^{E/k_B T_0} - 1 \right\}^{-1}$$



## GASES DE FERMÍ Y BOSE NO RELATIVISTAS

Si:

$$\frac{\mu}{k_B T} \ll 1$$

(1)

de Gine [ver Landau pag 159]

$$\Omega = -g \frac{V m^{3/2} (k_B T)^{5/2}}{(2\pi)^{3/2} \hbar^3} e^{\mu/k_B T} \left\{ 1 \mp \frac{1}{2^{5/2}} e^{\mu/k_B T} \right\} \quad (2)$$

donde el signo superior (inferior) corresponde a fermiones (bosones). Se sabe que

$$S = - \left( \frac{\partial \Omega}{\partial T} \right)_{V, \mu}, \quad N = - \left( \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \right)_{T, V} \quad (3)$$

De donde

$$N = g \frac{V m^{3/2} (k_B T)^{3/2}}{(2\pi)^{3/2} \hbar^3} \left\{ e^{\mu/k_B T} \mp \frac{1}{2^{3/2}} e^{2\mu/k_B T} \right\} \Rightarrow$$

$$e^{2\mu/k_B T} \mp 2^{3/2} e^{\mu/k_B T} \pm 2^{3/2} \frac{1}{g} \frac{N}{V} \frac{(2\pi)^{3/2} \hbar^3}{m^{3/2} (k_B T)^{3/2}} = 0 \quad (4)$$

Notar que

$$A \equiv 2^{3/2} \frac{1}{g} \frac{N}{V} \frac{(2\pi)^{3/2} \hbar^3}{m^{3/2} (k_B T)^{3/2}} = \frac{1}{g} 8\pi^{3/2} \frac{N}{(V/\text{um}^3) \text{um}^3} \frac{1}{1 \text{ MeV}^{3/2} \left( \frac{m c^2}{1 \text{ MeV}} \right)^{3/2} T^{3/2} [8.617385(73) \times 10^{-11}]^{3/2} \text{ MeV}^{3/2} \text{K}^{-3/2}} [147.327053(59) \times 10^{-13}] \text{ MeV}^3 \text{um}^3$$

$$A = \frac{1}{g} 4.278696(58) \times 10^{-16} \frac{N}{(V/\text{um}^3)} \frac{1}{(m c^2 / \text{MeV})^{3/2}} \frac{1}{(T/\text{K})^{3/2}} \quad (5)$$

La condición (4) implica que  $A \ll 1$  y en primera aproximación

$$\Omega = -g \frac{V m^{3/2} (k_B T)^{5/2}}{(2\pi)^{3/2} \hbar^3} e^{\mu/k_B T}$$

(6)

$$e^{\mu/k_B T} = \frac{A}{2^{3/2}}$$

En esta aproximación

$$S = - \left( \frac{\partial \Omega}{\partial T} \right)_{V, \mu} = g \frac{V m^{3/2} k_B T^{3/2}}{(2\pi)^{3/2} \hbar^3} \frac{5}{2} e^{\mu/k_B T} - \frac{\mu}{k_B T^2} g \frac{V m^{3/2} (k_B T)^{5/2}}{(2\pi)^{3/2} \hbar^3} e^{\mu/k_B T}$$



$$S = g \frac{V m^{3/2} k_B^{5/2} T^{3/2}}{(2\pi)^{3/2} h^3} e^{\mu/k_B T} \left\{ \frac{5}{2} - \frac{\mu}{k_B T} \right\}$$

de donde

$$S = N k_B \left\{ \frac{5}{2} - \ln \frac{A}{2^{3/2}} \right\}$$

y por tanto

$$\frac{S}{k_B} = N \left\{ \frac{5}{2} - \ln A + \frac{3}{2} \ln 2 \right\}$$



De donde, haciendo el cambio de variables  $z = E/k_B T_0$  y usando (3.2)

$$\frac{N}{V} = g_0 \frac{(2m k_B T_0)^{3/2}}{4\pi^2 \hbar^3} \frac{\Gamma}{2} \zeta(3/2) \quad (4)$$

de donde

$$T_0 = \frac{2m}{[\zeta(3/2)]^{2/3}} \frac{1}{g^{2/3}} \frac{\hbar^2}{m k_B} \left( \frac{N}{V} \right)^{2/3} \quad (2)$$

$$\zeta(3/2) = 2.612375$$

y por lo tanto

$$T_0 = \frac{1.496766(14) \times 10^{-11}}{g^{2/3} (m c^2 / \text{MeV})} \left( \frac{N}{V} \text{ cm}^{-3} \right) \cdot K \quad (3)$$

Notar que para  $T \leq T_0$  la ecuación (7.3) no tiene soluciones con  $\mu < 0$ , pero para un gas de Bose  $\mu$  debe cumplir  $\mu \leq 0$ . Esta contradicción aparente está conectada con el hecho de que en estas condiciones no está justificado reemplazar la suma (1.3) por la integral. En efecto, al hacer este cambio el primer término de la serie ( $E_0 = 0$ ) queda multiplicado por  $\sqrt{E}$ , es decir queda eliminado de la suma. Pero a medida que la temperatura desciende va aumentando el número de partículas en este estado hasta que para  $T=0$  todas las partículas están en él. Matemáticamente esto se ve por el hecho de que en la suma (2.3) cuando se hace el límite  $\mu \uparrow 0$  la suma de todos los términos de la serie, exceptuando el primero, tiende a un límite finito determinado por la integral (7.3) y el primer término, con  $E_0 = 0$ , tiende a infinito. Por tanto para  $T < T_0$  la situación es la siguiente. Las partículas con energía  $E > 0$  están distribuidas de acuerdo con (1.4) con  $\mu = 0$  y por tanto el número de partículas con  $E > 0$  será

$$N(E > 0) = g V \frac{(2m k_B T)^{3/2}}{4\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty dz \frac{z^{1/2}}{e^z - 1} \quad (4)$$

esto es

$$N(E > 0) = N (T/T_0)^{3/2} \quad T < T_0 \quad (5)$$

$$N(E=0) = N \left\{ 1 - (T/T_0)^{3/2} \right\}$$



que es el llamado fenómeno de condensación de Einstein y que ha sido observado experimentalmente.

#### iv) Gas de fermiones degenerado

Consideremos lo que sucede en un gas de fermiones cuando  $T \downarrow 0$ . En este caso (1.1) y (1.2) exigen que  $\mu > 0$  y de (1.4) se deduce

$$n(p) = g V \frac{4\pi p^2}{(2\pi\hbar)^3} \Theta(p_F - p) \quad (1)$$

donde  $p_F$  es el llamado momento de Fermi y viene determinado por la condición

$$E(p_F) = \mu \quad (2)$$

Esto corresponde a que todos los estados con  $p \leq p_F$  estén ocupados, constituyendo el llamado mar de Fermi, y aquellos con  $p > p_F$  están vacíos. Se habla en este caso de un mar de Fermi totalmente degenerado. La densidad de número de partículas

$$n = g \frac{1}{2\pi^2\hbar^3} \int_0^{p_F} 4\pi p^2 dp$$

de donde

$$p_F = \left( \frac{6\pi^2\hbar^3}{g} n \right)^{1/3} = 769.13570(23) \frac{1}{g^{1/3}} (n \text{ fm}^{-3})^{1/3} \frac{\text{MeV}}{c} \quad (3)$$

Consideremos ahora lo que sucede en dos situaciones extremas.

#### a) Partículas no relativistas

Supongamos que

$$E(p) = \frac{p^2}{2m} \quad (4)$$

para todo  $p \leq p_F$ , lo cual es válido si  $p_F c \ll mc^2$ . En este caso los resultados anteriores, en particular (5.4) y  $\Omega = -PV$ , conducen a



$$P = g \frac{1}{6\pi^2 \hbar^3 m} \int_0^{p_F} a p p^4 = g \frac{1}{30\pi^2 \hbar^3 m} p_F^5 =$$

$$= \frac{\hbar^2}{5m} \left( \frac{6\pi^2}{g} \right)^{2/3} m^{5/3} \quad (1)$$

Notemos que  $P \propto m^{5/3}$ , mientras que para un gas no degenerado  $P \propto m$ , de forma que a  $m$  suficientemente elevado el gas de fermiones acaba siempre en el estado degenerado. Para tener en cuenta de cuando los efectos de la degeneración son importantes podemos estudiar en que situación las dos presiones consideradas

$$\frac{\hbar^2}{5m} \left( \frac{6\pi^2}{g} \right)^{2/3} m^{5/3} = m c k_B T \Rightarrow$$

$$p_c = g \frac{5^{3/2}}{6\pi^2} \frac{m^{5/2}}{\hbar^3} (k_B T)^{3/2} = g \frac{5^{3/2}}{6\pi^2} \frac{m^{5/2}}{\hbar^3} (k_B T)^{3/2} = g \frac{5^{3/2}}{6\pi^2} \frac{m^{5/2}}{\hbar^3} (k_B T)^{3/2} \quad (2)$$

si  $p \gg p_c$  entonces los efectos de la degeneración son importantes, mientras que si  $p \ll p_c$  los efectos de degeneración carecen de interés.

#### b) Partículas relativistas

Consideraremos ahora

$$E(p) = (m^2 c^4 + c^2 p^2)^{1/2} \quad (3)$$

Entonces

$$P = g \frac{1}{6\pi^2 \hbar^3 m} \int_0^{p_F} a p \frac{p^4}{[1 + (p/mc)^2]^{1/2}} = \left| \begin{array}{l} \sinh \theta = p/mc \\ dp = mc \cosh \theta d\theta \end{array} \right| =$$

$$= g \frac{m^4 c^5}{6\pi^2 \hbar^3} \int_0^{\theta_F} d\theta \sinh^4 \theta \quad \sinh \theta_F \equiv p_F / mc$$

de donde

$$P = g \frac{m^4 c^5}{48\pi^2 \hbar^3} f(x) = g \frac{3.001167(12) \times 10^{-22}}{48\pi^2 \hbar^3} \left( \frac{m}{m_e} \right)^4 f(x) \frac{\text{dinas}}{\text{cm}^2} \quad (4)$$

donde

$$f(x) = x(2x^2 - 3)(x^2 + 1)^{1/2} + 3 \operatorname{arcsinh} x, \quad x \equiv p_F / mc \quad (5)$$



Con los comportamientos asintóticos

$$f(x) \sim_{x \rightarrow 0} \frac{8}{5} x^5 - \frac{4}{7} x^7 + \frac{1}{3} x^9 + \dots \quad (1)$$

$$f(x) \sim_{x \rightarrow \infty} 2x^4 - 2x^2 + 3 \ln 2x - \frac{7}{4} + \frac{5}{4} \frac{1}{x^2} + \dots \quad (2)$$

Para los límites  $x \ll 1$  y  $x \gg 1$  obtenemos

$$P = g \frac{1}{30 \pi^2 \hbar^3} P_F^5 \quad P_F \ll mc \quad (3)$$

$$P = g \frac{c}{24 \pi^2 \hbar^3} P_F^4 \quad P_F \gg mc$$

El primero de estos resultados coincide con (10.1) como debe ser.

Similarmente

$$\frac{E}{V} = g \frac{1}{2 \pi^2 \hbar^3} \int_0^{P_F} dp \, p^2 E(p) = g \frac{mc^2}{2 \pi^2 \hbar^3} \int_0^{P_F} dp \, p^2 \sqrt{1 + p^2/m^2 c^2}$$

y la energía cinética por unidad de volumen es

$$\begin{aligned} \frac{K}{V} &= g \frac{mc^2}{2 \pi^2 \hbar^3} \int_0^{P_F} dp \, p^2 \left\{ \left( 1 + \frac{p^2}{m^2 c^2} \right)^{1/2} - 1 \right\} = \\ &= g \frac{m^4 c^5}{2 \pi^2 \hbar^3} \int_0^{\theta_F} d\theta \left[ \sinh^4 \theta + \sinh^2 \theta - \sinh^2 \theta \cosh \theta \right] \end{aligned}$$

de donde

$$\frac{K}{V} = g \frac{m^4 c^5}{48 \pi^2 \hbar^3} \quad g(x) = g \cdot 3.001167(12) \cdot 10^{22} \left( \frac{m}{m_e} \right)^4 g(x) \text{ erg/cm}^3 \quad (4)$$

donde

$$g(x) = 8x^3 \left[ (x^2 + 1)^{1/2} - 1 \right] - f(x) \quad (5)$$

con los comportamientos asintóticos

$$g(x) \sim_{x \rightarrow 0} \frac{12}{5} x^5 - \frac{3}{7} x^7 + \frac{1}{6} x^9 + \dots \quad (6)$$

$$g(x) \sim_{x \rightarrow \infty} 6x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 3 \ln 2x + \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \frac{1}{x^2} + \dots$$



De aquí

$$\frac{K}{V} = g \frac{1}{20 \pi^2 \hbar^3 m} P_F^5 \quad p_F \ll mc \quad (1)$$

$$\frac{K}{V} = g \frac{c}{8 \pi^2 \hbar^3} P_F^4 \quad p_F \gg mc \quad (2)$$

v) Gas de fermiones parcialmente degenerado.

De acuerdo con lo dicho anteriormente, en este caso el potencial químico puede calcularse (2.1)

$$n = g \frac{1}{2 \pi^2 \hbar^3} \int_0^{\infty} dp p^2 \left\{ e^{[E(p) - \mu]/k_B T} + 1 \right\}^{-1} \quad (3)$$

Supondremos que

$$E(p) = \frac{p^2}{2m} \quad (4)$$

Introducimos

$$\alpha \equiv - \frac{\mu}{k_B T} \quad (5)$$

Haciendo el cambio de variables  $u = p^2 / 2m k_B T$  entonces

$$n = g \frac{(2m k_B T)^{3/2}}{4 \pi^2 \hbar^3} \int_0^{\infty} du \frac{u^{1/2}}{e^{\alpha+u} + 1} \quad (6)$$

mientras que la presión viene dada por

$$P = g k_B T \frac{(2m k_B T)^{3/2}}{6 \pi^2 \hbar^3} \int_0^{\infty} du \frac{u^{3/2}}{e^{\alpha+u} + 1} \quad (7)$$

Introduciendo

$$F_\beta(\alpha) \equiv \int_0^{\infty} du \frac{u^\beta}{e^{\alpha+u} + 1} \quad (8)$$

se obtiene



$$n = g \frac{(2\pi m k_B T)^{3/2}}{4\pi^2 h^3} F_{1/2}(\alpha)$$

(1)

$$P = \frac{2}{3} \frac{E}{V} = g (k_B T) \frac{(2\pi m k_B T)^{3/2}}{6\pi^2 h^3} F_{3/2}(\alpha)$$

Podemos ahora estudiar el comportamiento de  $F_\beta(\alpha)$  para distintos valores de  $\alpha$ .

i) Degeneración débil.

Los casos de degeneración débil se dan, de acuerdo con (1.4), si  $\alpha > 0$ . Entonces

$$\begin{aligned} F_\beta(\alpha) &= \int_0^\infty du \frac{u^\beta}{e^{\alpha+u} + 1} = \int_0^\infty du e^{-\alpha-u} u^\beta \frac{1}{1 + e^{-\alpha-u}} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-(1+n)\alpha} \int_0^\infty du u^\beta e^{-(n+1)u} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-(1+n)\alpha} \frac{\Gamma(\beta+1)}{(n+1)^{\beta+1}} \end{aligned}$$

y por tanto

$$F_\beta(\alpha) = \Gamma(\beta+1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{e^{-n\alpha}}{n^{\beta+1}} \quad (2)$$

y por tanto se obtiene

$$\begin{aligned} n &= g \frac{(2\pi m k_B T)^{3/2}}{(2\pi h)^3} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{e^{k\mu/k_B T}}{k^{3/2}} \\ P &= g (k_B T) \frac{(2\pi m k_B T)^{3/2}}{(2\pi h)^3} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{e^{k\mu/k_B T}}{k^{5/2}} \end{aligned} \quad (3)$$

Si sólo guardamos el primer término de cada serie entonces

$$PV = N k_B T \quad (4)$$

como era de esperar.

ii) Degeneración fuerte



Los casos de degeneración fuerte corresponden al límite  $\alpha < 0$ ,  $|\alpha| \gg 1$ . Comiencemos

$$I[f] = \int_0^{\infty} du \frac{f(u)}{e^{\alpha+u} + 1} \quad (1)$$

donde  $f(u)$  es una función suficientemente regular. Entonces

$$\begin{aligned} I[f] &= \int_{-|\alpha|}^{\infty} dz \frac{1}{e^z + 1} f(z + |\alpha|) = \\ &= \int_0^{|\alpha|} dz \frac{1}{e^{-z} + 1} f(|\alpha| - z) + \int_0^{\infty} dz \frac{1}{e^z + 1} f(z + |\alpha|) \end{aligned}$$

Como  $(e^{-z} + 1) = 1 - (e^z + 1)^{-1}$  se obtiene

$$\begin{aligned} I[f] &= \int_0^{|\alpha|} dz f(|\alpha| - z) - \int_0^{|\alpha|} dz \frac{1}{e^z + 1} f(|\alpha| - z) + \int_0^{\infty} dz \frac{1}{e^z + 1} f(z + |\alpha|) = \\ &= \int_0^{|\alpha|} dz f(u) + \int_0^{\infty} dz \frac{1}{e^z + 1} \{ f(|\alpha| + z) - f(|\alpha| - z) \} + \int_{|\alpha|}^{\infty} dz \frac{1}{e^z + 1} f(|\alpha| - z) \end{aligned}$$

Como  $|\alpha| \gg 1$ , la última integral da una contribución exponencialmente decreciente y puede despreciarse y se obtiene el desarrollo asintótico

$$I[f] \sim \int_0^{|\alpha|} du f(u) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)!} f^{(2n+1)}(|\alpha|) \int_0^{\infty} dz \frac{z^{2n+1}}{e^z + 1}$$

Como

$$\int_0^{\infty} dz \frac{z^{2m+1}}{e^z + 1} = \frac{\pi^{2m+2}}{2m+2} [2^{2m+1} - 1] B_{2m+1} \quad (2)$$

donde  $B_{2m}$  son los llamados números de Bernoulli:

$$B_0 = 1 \quad B_2 = \frac{1}{6} \quad B_4 = -\frac{1}{30} \quad B_6 = \frac{1}{42} \quad B_8 = -\frac{1}{30} \quad (3)$$

y por tanto



$$\begin{aligned}
 I[f] &\sim \int_0^{|\alpha|} du f(u) + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2[2^{2m+1} - 1]}{(2m+2)!} |B_{2m+2}| \pi^{2m+2} f^{(2m+1)}(|\alpha|) \\
 &\sim \int_0^{|\alpha|} du f(u) + \frac{\pi^2}{6} f^{(1)}(|\alpha|) + \frac{7\pi^4}{360} f^{(3)}(|\alpha|) + \\
 &\quad + \frac{31\pi^6}{15120} f^{(5)}(|\alpha|) + \frac{127\pi^8}{604800} f^{(7)}(|\alpha|) + \dots
 \end{aligned} \tag{1}$$

y así obtenemos para  $n$  y  $2$  los desarrollos asintóticos válidos para  $\mu > 0$  y  $\mu/k_B T \gg 1$

$$\begin{aligned}
 n &= g \frac{(2m\mu)^{3/2}}{6\pi^2 \hbar^3} \left\{ 1 + \frac{\pi^2}{8} \left( \frac{k_B T}{\mu} \right)^2 + \frac{7\pi^4}{640} \left( \frac{k_B T}{\mu} \right)^4 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{31\pi^6}{3072} \left( \frac{k_B T}{\mu} \right)^6 + \frac{4191\pi^8}{163840} \left( \frac{k_B T}{\mu} \right)^8 + \dots \right\}
 \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
 p &= g \mu \frac{(2m\mu)^{3/2}}{15\pi^2 \hbar^3} \left\{ 1 + \frac{5\pi^2}{8} \left( \frac{k_B T}{\mu} \right)^2 - \frac{7\pi^4}{384} \left( \frac{k_B T}{\mu} \right)^4 - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{155\pi^6}{21504} \left( \frac{k_B T}{\mu} \right)^6 - \frac{381\pi^8}{32768} \left( \frac{k_B T}{\mu} \right)^8 + \dots \right\}
 \end{aligned} \tag{3}$$

La primera ecuación puede ser usada para determinar  $\mu$

$$\mu = \frac{1}{2m} \left( \frac{6\pi^2 \hbar^3 n}{g} \right)^{2/3} \left\{ 1 - \frac{g^2}{54\pi^2} \left( \frac{m k_B T}{\hbar^2} \right) \frac{1}{n^2} + \dots \right\} \tag{4}$$



IV - MODELOS DE UNIVERSO

Queremos estudiar como evolucionaria un universo, como el actual, dominado por materia, es decir  $p(t) \equiv 0$ . Teniendo en cuenta (E.2.5) se obtiene

$$\frac{d}{dt} \left\{ \rho(t) c^2 R^3(t) \right\} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\rho(t) = \rho_0 \frac{R_0^3}{R^3(t)} \quad (1)$$

y la otra ecuación necesaria para determinar  $R(t)$  es la (E.2.4)

$$\ddot{R}^2(t) + Kc^2 = \frac{8\pi G}{3} R^2(t) \rho(t) \quad (2)$$

De las ecuaciones (E.4), (E.2) y (E.3) para  $p_0 \equiv 0$  se obtiene

$$K \frac{c^2}{R_0^2} = H_0^2 (2q_0 - 1)$$

(3)

$$2q_0 = \frac{\rho_0}{\rho_c} = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_0$$

Notemos que es precisamente  $q_0 = 1/2$  la división entre los distintos tipos de evolución del universo. Usando (2) y (3) podemos escribir

$$\ddot{R}^2(t) = H_0^2 R_0^2 \left\{ 1 - 2q_0 + 2q_0 \frac{R_0}{R(t)} \right\} \quad (4)$$

De donde

$$\left[ \frac{\dot{R}(t)}{R_0} \right]^2 = H_0^2 \left\{ 1 - 2q_0 + 2q_0 \frac{R_0}{R(t)} \right\} \Rightarrow$$

$$t = \frac{1}{H_0} \int_0^{R/R_0} dx \left\{ 1 - 2q_0 + 2q_0 \frac{1}{x} \right\}^{-1/2} \quad (5)$$

pues  $R(0) = 0$ . La edad actual del universo es

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \int_0^1 dx \left\{ 1 - 2q_0 + 2q_0 \frac{1}{x} \right\}^{-1/2} < \frac{1}{H_0}$$



i)  $q_0 > 1/2 \Rightarrow \beta_0 > \beta_c, k=+1$

De la ecuación (1.4) se obtiene

$$0 \leq R(t) \leq R_0 \frac{2q_0}{2q_0-1} \quad (1)$$

y es útil introducir el ángulo

$$1 - \cos \theta \equiv \frac{2q_0-1}{q_0} \frac{R(t)}{R_0} \quad (2)$$

con lo cual (1.5) se puede reescribir

$$\begin{aligned} H_0 t &= \frac{q_0}{(2q_0-1)^{3/2}} \int_0^\theta d\theta \sin \theta \left( \frac{1-\cos \theta}{1+\cos \theta} \right)^{1/2} \\ &= \frac{q_0}{(2q_0-1)^{3/2}} \int_0^\theta d\theta (1-\cos \theta) \end{aligned}$$

de donde

$$H_0 t = \frac{q_0}{(2q_0-1)^{3/2}} [\theta - \sin \theta] \quad (3)$$

$$\cos \theta = 1 - \frac{2q_0-1}{q_0} \frac{R(t)}{R_0}$$

Notemos que en este caso  $R(t)$  crece desde  $R(0)=0$  en  $t=0$  y  $\theta=0$ , hasta alcanzar un valor máximo para  $\theta=\pi$  lo cual ocurre en el instante

$$t = \frac{\pi q_0}{(2q_0-1)^{3/2}} \Rightarrow R(t) = \frac{2q_0 R_0}{2q_0-1} \quad (4)$$

Después  $R(t)$  irá decreciendo hasta que para

$$t = \frac{2\pi q_0}{(2q_0-1)^{3/2}} \Rightarrow R(t) = 0 \quad (5)$$

En el instante actual

$$\cos \theta_0 = \frac{1}{q_0} - 1 \quad (6)$$

y la edad del universo es



$$t_0 = \frac{1}{H_0} \frac{q_0}{(2q_0 - 1)^{3/2}} \left\{ \arccos \left( \frac{1}{q_0} - 1 \right) - \frac{1}{q_0} \sqrt{2q_0 - 1} \right\} \quad (1)$$

ii)  $q_0 = 1/2$  ( $\Rightarrow p_0 = p_c, k=0$ )

De (1.5) se obtiene inmediatamente

$$H_0 t = \frac{2}{3} \left( \frac{R(t)}{R_0} \right)^{3/2} \quad (2)$$

que conduce inmediatamente a

$$R(t) = R_0 \left( \frac{3 H_0 t}{2} \right)^{2/3} \quad (3)$$

y la edad actual del universo es

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \frac{2}{3} \quad (4)$$

iii)  $0 < q_0 < 1/2$  ( $\Rightarrow p_0 < p_c, k=-1$ )

Es conveniente introducir

$$\cosh \tilde{\Psi} \equiv 1 + \frac{1 - 2q_0}{q_0} \frac{R(t)}{R_0} \quad (5)$$

Entonces

$$\begin{aligned} H_0 t &= \frac{q_0}{(1 - 2q_0)^{3/2}} \int_0^{\tilde{\Psi}} d\tilde{\Psi} \sinh \tilde{\Psi} \left( \frac{\cosh \tilde{\Psi} - 1}{\cosh \tilde{\Psi} + 1} \right)^{1/2} \\ &= \frac{q_0}{(1 - 2q_0)^{3/2}} \int_0^{\tilde{\Psi}} d\tilde{\Psi} (\cosh \tilde{\Psi} - 1) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$H_0 t = \frac{q_0}{(1 - 2q_0)^{3/2}} [\sinh \tilde{\Psi} - \tilde{\Psi}] \quad (6)$$

$$\cosh \tilde{\Psi} = 1 + \frac{1 - 2q_0}{q_0} \frac{R(t)}{R_0}$$

El factor cosmológico de escala crece sin límite y asintóticamente



$$\frac{R(t)}{R_0} \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \frac{q_0}{2(1-2q_0)} e^{\tilde{q}} \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} (1-2q_0)^{1/2} H_0 t \quad (1)$$

En el momento presente

$$\cosh \tilde{\Psi}_0 = \frac{1}{q_0} - 1 \quad (2)$$

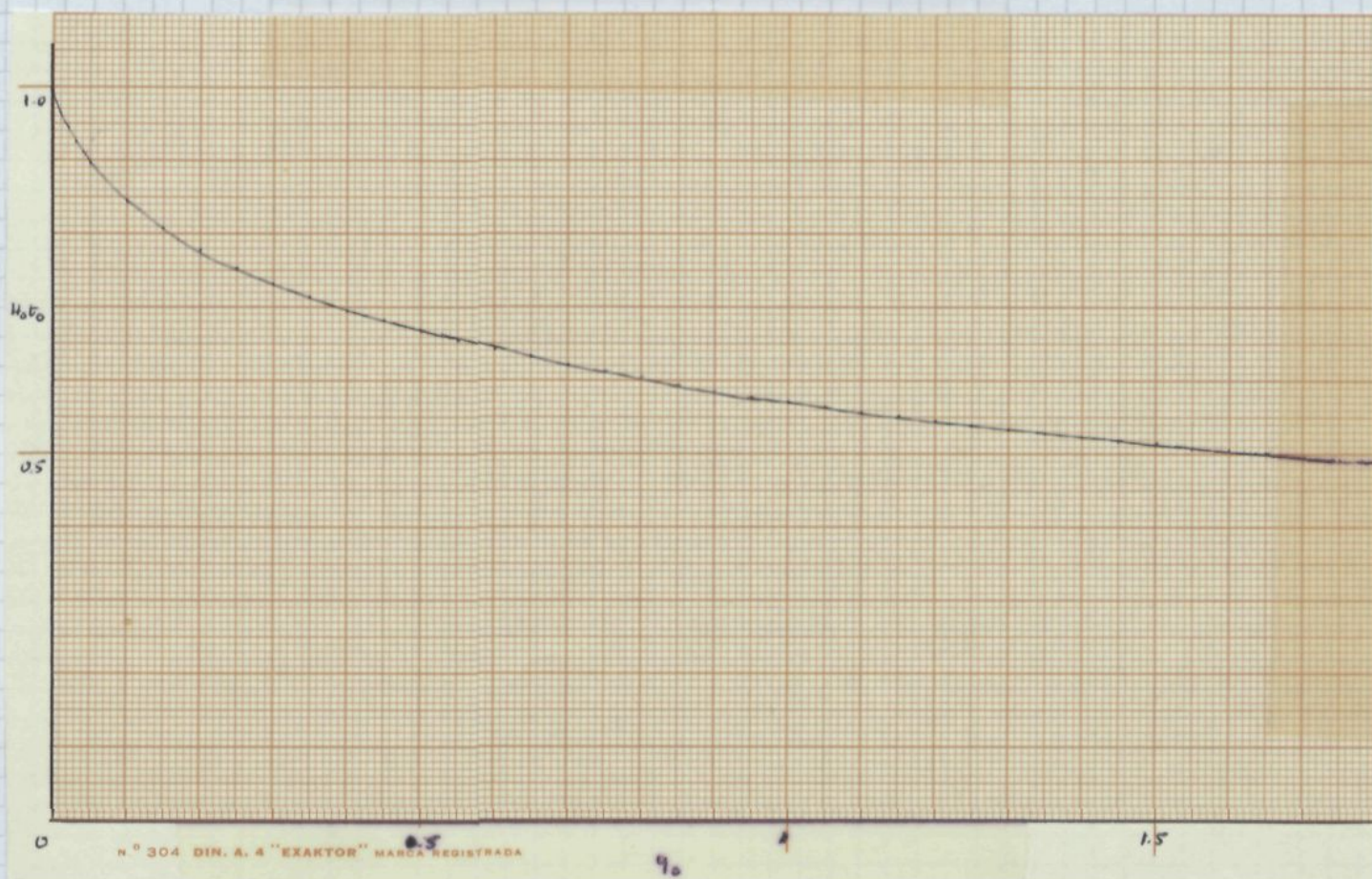
y por tanto la edad del universo es

$$H_0 t_0 = \frac{1}{(1-2q_0)} - \frac{q_0}{(1-2q_0)^{3/2}} \operatorname{arccosh} \left( \frac{1}{q_0} - 1 \right)$$

o equivalentemente

$$t_0 = \frac{1}{H_0 (1-2q_0)} \left\{ 1 - \frac{q_0}{(1-2q_0)^{1/2}} \ln \left[ \frac{1}{q_0} - 1 + \frac{1}{q_0} \sqrt{1-2q_0} \right] \right\} \quad (3)$$

De (3.1), (3.4) y (3) se obtiene





En el otro extremo tenemos un modelo de universo dominado por la radiación y en el que, por tanto, se tiene

$$p(t) = \frac{1}{3} \rho(t) c^2 \quad (1)$$

y por tanto las ecuaciones (1)-(2.3) se escriben

$$\ddot{R}^2(t) + kc^2 = \frac{8\pi G}{3} R^2(t) \rho(t) \quad (2)$$

$$2R(t)\ddot{R}(t) + \dot{R}^2(t) + kc^2 = -\frac{8\pi G}{3} R^2(t) \rho(t)$$

En este caso, sumando ambas ecuaciones, se obtiene

$$2R(t)\ddot{R}(t) + 2\dot{R}^2(t) + 2kc^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt} [R(t)\dot{R}(t)] = -kc^2 \quad (3)$$

De donde

$$R(t)\dot{R}(t) = -kc^2 t + \frac{1}{2} A \quad (4)$$

Siendo  $A$  una constante de integración. De aquí y teniendo en cuenta que  $R(0) = 0$

$$\int_0^{R(t)} dR \cdot R = \int_0^t dt \left( -kc^2 t + \frac{1}{2} A \right)$$

$$\Rightarrow R^2(t) = At - kc^2 t^2 \quad (5)$$

Venimos más adelante que este modelo solo es de interés para el caso  $k=0$  y entonces redefiniendo la constante de integración

$$R(t) = a t^{1/2} \quad (6)$$

con lo cual

$$H(t) = \frac{1}{2t} \quad (7)$$



Cuando Einstein formuló los primeros modelos cosmológicos se veía que el universo era estático y de acuerdo con la primera de las ecuaciones (II-2.3) se debía cumplir

$$c^2 \rho(t) + 3p(t) = 0, \quad \forall t \quad (1)$$

Esto implica que si  $p(t) > 0$ , entonces la presión  $p(t) < 0$ , lo cual es imposible para el fluido cosmológico. Para solventar este problema Einstein sugirió cambiar las ecuaciones (II-1.2), de la única forma posible, añadiendo un término que contiene la famosa constante cosmológica  $\Lambda$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^2} T_{\mu\nu} \quad (2)$$

donde la constante tiene dimensiones  $[\Lambda] = L^{-2}$ . Einstein consideró la introducción de  $\Lambda$  como una modificación de las ecuaciones de campo. La tendencia actual es poner el término de la constante cosmológica al segundo miembro de la ecuación (2). Entonces teniendo en cuenta la expresión de  $g_{\mu\nu}$  y la del tensor energía-momento para un fluido ideal en coordenadas localmente Minkowskianas, vemos que la constante cosmológica actúa como un fluido ideal con

$$\rho_{\Lambda}(t) = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}, \quad p_{\Lambda}(t) = -\frac{\Lambda c^4}{8\pi G} \quad (3)$$

y por tanto las ecuaciones (II.2-4) quedan ahora

$$\dot{R}^2(t) + kc^2 - \frac{1}{3} \Lambda c^2 R^2(t) = \frac{8\pi G}{3} R^2(t) \rho(t) \quad (4)$$

$$2R(t)\ddot{R}(t) + \dot{R}^2(t) + kc^2 - \Lambda c^2 R^2(t) = -\frac{8\pi G}{c^2} R^2(t) p(t)$$

Los datos experimentales implican que

$$-1 \leq \lambda_0 \equiv \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2} \leq 2 \quad (5)$$

o equivalentemente



$$-3.5 \times 10^{-56} h_0^2 \text{ cm}^{-2} < \Lambda < +7.0 \times 10^{-56} h_0^2 \text{ cm}^{-2} \quad (1)$$

Es inmediato comprobar que a partir de las ecuaciones (6.4) también recuperamos la ecuación (II-2.5):

$$\frac{d}{dt} \left\{ p(t) c^2 R^3(t) \right\} = -p(t) \frac{d}{dt} R^3(t) \quad (2)$$

Un modelo interesante por su gran simetría es el llamado modelo de de Sitter que viene caracterizado por el hecho de que

$$c^2 p(t) = p(t) \equiv 0, \quad \forall t \quad (3)$$

Entonces las ecuaciones (6.4) se reducen a

$$\ddot{R}^2(t) + R c^2 - \frac{1}{3} \Lambda c^2 R^2(t) = 0 \quad (4)$$

$$2R(t) \ddot{R}(t) + \dot{R}^2(t) + R c^2 - \Lambda c^2 R^2(t) = 0$$

o equivalentemente

$$\frac{\ddot{R}(t)}{R(t)} = \frac{1}{3} \Lambda c^2 \quad (5)$$

$$\frac{\ddot{R}^2(t)}{R^2(t)} = \frac{1}{3} \Lambda c^2 - \frac{R c^2}{R^2(t)}$$

La resolución de la primera de estas ecuaciones es trivial y requiere dos constantes de integración que quedan reducidas a una al imponer la segunda ecuación.

Consideremos para probar que  $\Lambda > 0$ , entonces introduzcamos

$$\alpha \equiv \left( \frac{1}{3} \Lambda c^2 \right)^{1/2} > 0 \quad (6)$$

Entonces la solución de la primera de (5) da

$$R(t) = A e^{\alpha t} + B e^{-\alpha t} \quad (7)$$

y la segunda implica que

$$AB = \frac{R c^2}{4 \alpha^2} = \frac{3k}{4\Lambda} \quad (8)$$



Se obtienen por tanto las soluciones

$$k=0, \quad R(t) = A e^{\alpha t} \quad \text{o} \quad R(t) = A e^{-\alpha t} \quad (2)$$

$$k=\pm 1, \quad R(t) = A \left( 1 + \frac{3k}{4\Lambda A^2} \right) \cosh \alpha t + A \left( 1 - \frac{3k}{4\Lambda A^2} \right) \sinh \alpha t$$

Notar que la solución  $R(t) \propto \cosh \alpha t$  es sólo posible si  $k=+1$  y la  $R(t) \propto \sinh \alpha t$  sólo si  $k=-1$ .

En realidad todas estas soluciones no son más que distintas partes de un mismo espacio-tiempo que puede ser incorporado en un espacio pentadimensional con coordenadas cartesianas  $a, b, c, u$  y  $v$  y con un elemento de línea

$$ds^2 = (-da^2 - db^2 - dc^2 + du^2 - dv^2) (3/\Lambda) \quad (2)$$

El espacio cuatridimensional de de Sitter es la superficie

$$a^2 + b^2 + c^2 - u^2 + v^2 = 1 \quad (3)$$

Podemos, por ejemplo, definir en el espacio pentadimensional coordenadas planas mediante las ecuaciones

$$\begin{aligned} u &= \sinh \alpha t & -\infty < t < \infty \\ v &= \cosh \alpha t \cos \chi & 0 \leq \chi < \pi \\ c &= \cosh \alpha t \sin \chi \cos \theta & 0 \leq \theta < \pi \\ a &= \cosh \alpha t \sin \chi \sin \theta \cos \phi & 0 \leq \phi < 2\pi \\ b &= \cosh \alpha t \sin \chi \sin \theta \sin \phi \end{aligned} \quad (4)$$

entonces

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \frac{3}{\Lambda} \cosh^2 \alpha t \left[ d\chi^2 + \sin^2 \chi d\theta^2 + \sin^2 \chi \sin^2 \theta d\phi^2 \right] \quad (5)$$

que corresponde a (I-9.5) con  $k=+1$  y  $R(t) = (3/\Lambda)^{1/2} \cosh \alpha t$ , que es la solución (8.1) con  $k=+1$  y  $A = (3/4\Lambda)^{1/2}$

Similarmemente se pueden introducir las coordenadas

$$u = \sinh \alpha t + r^2 e^{\alpha t}/2, \quad v = \cosh \alpha t - r^2 e^{\alpha t}/2 \quad (6)$$

$$a = x e^{\alpha t}, \quad b = y e^{\alpha t}, \quad c = z e^{\alpha t} \quad r^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2$$



Entonces

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \frac{3}{\Lambda} e^{2\alpha t} (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (1)$$

que corresponde a  $k=0$  con  $R(t) = (3/\Lambda)^{1/2} e^{\alpha t}$ .

Imaginemos una galaxia situada en  $(r, \theta, \phi) = (0, 0, 0)$  que en el instante  $t_e$  emite un paquete de luz en la dirección  $d\theta = d\phi = 0$ . La simetría del modelo de Robertson-Walker implica que el paquete de ondas se mueve a lo largo de una línea de ángulos polares  $\theta$  y  $\phi$  constantes. En el intervalo de tiempo cósmico  $dt$  el paquete se mueve una distancia propia

$$dl = c dt = R(t) \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \quad (2)$$

según se deduce de (II-1.1), teniendo en cuenta que los rayos de luz se mueven con  $ds^2 = 0$ . Entonces la coordenada posición  $r_0$ , en el instante  $t_0$ , de un rayo de luz emitido por el origen en el instante  $t_e$  viene determinado por la integración de la ecuación (2)

$$\int_0^{r_0} dr \frac{1}{\sqrt{1 - kr^2}} = c \int_{t_e}^{t_0} dt \frac{1}{R(t)} \quad (3)$$

Para un observador dado en el instante  $t$ , el horizonte de partículas, se define como la superficie en el espacio ordinario que separa las partículas que ya han sido vistas por el observador en el instante  $t$ , de aquellas que aún no han sido vistas. Para calcular la distancia al horizonte,  $d_H(t)$ , definimos la coordenada horizonte  $r_H(t)$  mediante (3) con  $t_e = 0$

$$\int_0^{r_H(t)} dr \frac{1}{\sqrt{1 - kr^2}} = c \int_0^t dt \frac{1}{R(t)} \quad (4)$$

Recuerden que  $r_H(t)$  es simplemente una coordenada distancia y para obtener la distancia propia al horizonte debemos tener en cuenta la métrica

$$d_H(t) = R(t) \int_0^{r_H(t)} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = c R(t) \int_0^t dt \frac{1}{R(t)} \quad (5)$$



Una discusión interesante sobre toda la problemática de los horizontes se encuentra en G.F.R. Peebles y T. Rathman *Am. J. Physics* 61, 883 (1993).

Consideremos algunos casos interesantes.

$$\underline{k=0}$$

Si suponemos que la historia del universo viene regida básicamente por la época dominada por la materia entonces (3.3)

$$R(t) = R_0 \left( \frac{3 H_0 t}{2} \right)^{2/3} \quad (1)$$

y de aquí

$$d_H(t) = 3ct \quad (\text{dominación materia, } k=0) \quad (2)$$

Similáramente si la radiación hubiera dominado entonces  $R(t) \propto t^{1/2}$  (IV-5.6) y

$$d_H(t) = 2ct \quad (\text{dominación radiación, } k=0) \quad (3)$$

Notan que (2) puede también escribirse como

$$d_H(t) = \frac{2c}{H_0} \left[ \frac{R(t)}{R_0} \right]^{3/2} \quad (\text{dominación materia, } k=0) \quad (4)$$

Notan que si arbitrariamente elegimos  $d_H(t_0) = R_0$  entonces se encuentra que

$$\frac{d_H(t)}{R(t)} = \left( \frac{t}{t_0} \right)^{1/3} \quad (5)$$

y vemos que el horizonte permea en cada vez una mayor parte del universo.

Dentro del caso  $k=0$  podríamos también considerar un universo de de Sitter con

$$R(t) = A e^{\alpha t}. \text{ Entonces}$$

$$d_H(t) = \frac{c}{\alpha} \left\{ e^{\alpha t} - 1 \right\} = \frac{c}{H_0} \left\{ e^{H_0 t} - 1 \right\} \quad (6)$$



$$\underline{k = \pm 1}$$

Como la mayor parte de la historia del Universo viene dominada por la materia nos limitaremos a considerar este caso. Teniendo en cuenta los resultados (2.3) y (3.6) podemos expresar  $dt$  en términos de  $dR(t)$  y llevar a cabo la integral (9.5) obteniendo

$$d_p(t) = \frac{c R(t)}{R_0 H_0 \sqrt{2q_0 - 1}} \operatorname{arccos} \left\{ 1 - \frac{(2q_0 - 1) R(t)}{q_0 R_0} \right\} \quad k = +1 \quad (1)$$

$$d_h(t) = \frac{c R(t)}{R_0 H_0 \sqrt{1 - 2q_0}} \operatorname{arccosh} \left\{ 1 + \frac{(1 - 2q_0) R(t)}{q_0 R_0} \right\} \quad k = -1$$



## V - HISTORIA DEL UNIVERSO

Se desea estudiar ahora la historia del universo suponiéndolo isotrópico y aceptando la teoría de la gravitación de Einstein. De acuerdo con lo discutido el universo empieza en un instante  $t=0$  caracterizado por  $R(0)=0$ , que se conoce como el "Big Bang". El hecho de que  $R(0)$  implica que en este instante el universo era infinitamente denso e infinitamente caliente. Esta singularidad matemática posiblemente no es real pues en los instantes iniciales los efectos de la teoría cuántica de la gravitación deben ser importantes. Estos efectos deben ser tenidos en cuenta si  $\rho \gtrsim \rho_p$ ,  $t \lesssim t_p$ ,  $T \gtrsim T_p$  y  $l \gtrsim l_p$  donde

$$\text{Densidad de Planck} \quad \rho_p \equiv \frac{c^5}{G^2 \hbar} = 5.1575(13) \times 10^{93} \text{ g cm}^{-3}$$

$$\text{tiempo de Planck} \quad t_p \equiv \left( \frac{G \hbar}{c^5} \right)^{1/2} = 5.39056(34) \times 10^{-44} \text{ s.}$$

$$\text{temperatura de Planck} \quad k_B T_p \equiv \left( \frac{c^5 \hbar}{G} \right)^{1/2} = 1.221047(79) \times 10^{22} \text{ MeV.}$$

$$\text{longitud de Planck} \quad l_p \equiv \left( \frac{G \hbar}{c^3} \right)^{1/2} = 1.61605(11) \times 10^{-33} \text{ cm}$$

Supondremos que lo dicho en los capítulos anteriores es válido para  $t \gtrsim t_p$  y que en estos instantes iniciales el universo era extraordinariamente denso y caliente. A densidades muy elevadas y temperaturas muy altas todas las reacciones entre las partículas elementales proceden muy rápidamente, mucho más rápidamente de lo que cambia la densidad de la materia debido al proceso de expansión, esto es que las condiciones bajo las que tienen lugar estas reacciones cambien. Así pues, todas las reacciones posibles tienen tiempo suficiente para alcanzar su nivel de equilibrio antes de que las condiciones físicas del entorno cambien de forma importante. En otras palabras en cada instante de tiempo la materia debe estar en un estado de equilibrio termodinámico. Esto significa que la composición de la materia en cualquier instante queda totalmen-



te determinada por las condiciones en este instante, tales como la densidad de materia, la temperatura, ... y no depende de los estados anteriores del proceso evolutivo.

Los potenciales químicos para las partículas existentes en el universo en un instante  $t$  deben determinarse a partir de consideraciones deducidas de las leyes de conservación. Recordemos la regla básica de que el potencial químico es aditivamente conservado en todas las reacciones. De momento vamos a suponer que todos los potenciales químicos son idénticamente nulos.

Una primera consecuencia de suponer que todos los potenciales químicos son idénticamente nulos es que si en un instante  $t$  el universo tiene una temperatura  $T$ , entonces todas aquellas partículas que tienen masas  $m_i$  tales que  $m_i c^2 \ll k_B T$  dan una contribución a la densidad de energía  $\rho c^2$ , de presión  $p$ , de densidad de entropía  $S$  y de número de partículas por unidad de volumen  $n$  que vienen dadas, de acuerdo con los resultados del capítulo III, por

$$\rho(T) c^2 = 3 p(T) = \frac{\pi^2 (k_B T)^4}{30 (\hbar c)^3} \mathcal{U}(T) = 4.20911(15) \times 10^{-36} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \left(\frac{T}{\text{K}}\right)^4 \mathcal{U}(T) c^2$$

$$S(T)/k_B = \frac{2\pi^2 (k_B T)^3}{45 (\hbar c)^3} \mathcal{U}(T) = 36.5328(10) \text{ cm}^{-3} \left(\frac{T}{\text{K}}\right)^3 \mathcal{U}(T) \quad (1)$$

$$n(T) = \frac{5(32) (k_B T)^3}{\pi^2 (\hbar c)^3} \mathcal{U}'(T) = 10.14360(28) \text{ cm}^{-3} \left(\frac{T}{\text{K}}\right)^3 \mathcal{U}'(T)$$

donde

$$\mathcal{U}(T) = N_b(T) + \frac{7}{8} N_f(T) \quad (2)$$

$$\mathcal{U}'(T) = N_b(T) + \frac{3}{4} N_f(T)$$

siendo  $N_b(T)$  [ $N_f(T)$ ] el número total de grados de libertad de spin independientes de todos los bosones [fermiones] que cumplen la condición  $m c^2 \ll k_B T$ .



Otra consecuencia importante de la hipótesis de que todos los potenciales químicos sean nulos es que en una situación de equilibrio tanto la densidad de energía como la presión son funciones únicamente de la temperatura. Entonces la entropía  $S$  de las partículas a temperatura  $T$  y contenidas en un volumen  $V$  viene dada por

$$dS(V, T) = \frac{1}{T} \left\{ d \left[ c^2 g_{eq}(T) V \right] + p_{eq}(T) dV \right\} \quad (1)$$

de donde

$$\frac{\partial S(V, T)}{\partial V} = \frac{1}{T} \left\{ c^2 g_{eq}(T) + p_{eq}(T) \right\}, \quad \frac{\partial S(V, T)}{\partial T} = \frac{V c^2}{T} \frac{d g_{eq}(T)}{dT} \quad (2)$$

y como  $dS(V, T)$  es una diferencial exacta (función de estado) entonces

$$\frac{\partial^2 S(V, T)}{\partial T \partial V} = \frac{\partial^2 S(V, T)}{\partial V \partial T} \Rightarrow$$

$$\frac{d p_{eq}(T)}{dT} = \frac{1}{T} \left\{ c^2 g_{eq}(T) + p_{eq}(T) \right\} \quad (3)$$

Además de (II-2.5) se obtiene inmediatamente que

$$R^3(t) \frac{d p_{eq}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left\{ \left[ g_{eq}(t) c^2 + p_{eq}(t) \right] R^3(t) \right\} \quad (5)$$

y de aquí

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{R^3(t)}{T} \left[ g_{eq}(T) c^2 + p_{eq}(T) \right] \right\} &= \\ &= - \frac{1}{T^2} \frac{dT}{dt} R^3(t) \left[ g_{eq}(T) c^2 + p_{eq}(T) \right] + \frac{1}{T} \frac{d}{dt} \left\{ R^3(t) \left[ g_{eq}(T) c^2 + p_{eq}(T) \right] \right\} \\ &= - \frac{1}{T^2} \frac{dT}{dt} R^3(t) \left[ g_{eq}(T) c^2 + p_{eq}(T) \right] + \frac{1}{T} R^3(t) \frac{d p_{eq}(T)}{dt} = \\ &= \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} R^3(t) \left\{ - \frac{1}{T} \left[ g_{eq}(T) c^2 + p_{eq}(T) \right] + \frac{d p_{eq}(T)}{dT} \right\} = 0 \end{aligned}$$

de acuerdo con (4). Tenemos pues que



$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{R^3(t)}{T} [p_{eq}(T) c^2 + p_{eq}(T)] \right\} = 0 \quad (1)$$

Esta ecuación se interpreta fácilmente en términos de la entropía. En efecto de (3.1)

$$\begin{aligned} dS(V, T) &= \frac{1}{T} \left\{ d [c^2 p_{eq}(T) V] + p_{eq}(T) dV \right\} = \\ &= \frac{1}{T} \left\{ d [c^2 p_{eq}(T) V + p_{eq}(T) V] - V \frac{d p_{eq}(T)}{dT} dT \right\} \end{aligned}$$

y usando (3.4)

$$dS(V, T) = \frac{1}{T} d \left\{ [c^2 p_{eq}(T) + p_{eq}(T)] V \right\} - \frac{V}{T^2} [c^2 p_{eq}(T) + p_{eq}(T)] dT$$

y por tanto, salvo una constante aditiva, se encuentra que

$$S(V, T) = \frac{V}{T} [p_{eq}(T) c^2 + p_{eq}(T)] \quad (2)$$

y por tanto (1) implica que la entropía  $S(V, T)$  es constante en la evolución del universo.

En la historia del universo se pueden considerar dos situaciones extremas

#### i) Época dominada por la radiación

Se denomina así la época en la que la historia del universo es tal que se puede considerar formado por partículas altamente relativistas en equilibrio termodinámico. Entonces

$$p_{rad}(T) = \frac{1}{3} c^2 p_{rad}(T) \propto T^4 \quad (3)$$

y teniendo en cuenta (2) y que la entropía es constante

$$T \propto \frac{1}{R(t)} \quad (4)$$

y de aquí

$$p_{rad}(T) \propto \frac{1}{R^4(t)} \quad (5)$$



### ii) Época dominada por la materia

Se denomina así la época en que la historia del universo en que la densidad viene dominada por partículas masivas con velocidades pequeñas. En este caso

$$p_{mat}(t) \ll c^2 \rho_{mat}(t) \quad (1)$$

y como para la materia  $V \rho_{mat}(t) = \text{cte}$ , se obtiene

$$\rho_{mat}(t) \propto \frac{1}{R^3(t)} \quad (2)$$

Teniendo en cuenta los resultados (4.5) y (2) se obtiene inmediatamente que en los primeros tiempos del universo, en los que  $R(t)$  es pequeño, es la radiación el efecto dominante. Tengamos también en cuenta que (II-2.2)

$$\ddot{R}^2(t) + kc^2 = \frac{8\pi G}{3} R^2(t) \rho(t) \quad (3)$$

y como en los primeros tiempos  $\rho(t) = \rho_{rad}(t) \propto 1/R^4(t)$ , entonces el término  $kc^2$  es despreciable y podemos poner  $k \equiv 0$ .

Ya hemos dicho que para  $t \lesssim 10^{-44}$  s desconocemos las leyes que describen el comportamiento y evolución del universo. Estos tiempos corresponden a temperaturas  $k_B T \gtrsim 10^{22}$  MeV. Incluso a temperaturas más bajas aun tenemos dudas sobre las leyes que rigen la historia del universo y vamos a empezar nuestro análisis a temperaturas mucho menores.

c)  $T = 10^{11}$  K ( $\Rightarrow k_B T = 8.617$  MeV)

En este estado el universo es muy simple. Está lleno de una sopa de materia y radiación, con partículas chocando continuamente entre sí. Entonces, a pesar de su rápida expansión, el universo está en un estado de casi perfecto equilibrio termodinámico. Las partículas más abundantes son

$$\gamma, e^\pm, \nu_e, \bar{\nu}_e \quad i = e, \mu, \tau \quad (4)$$



A la temperatura considerada todas estas partículas son ultrarelativistas y se pueden usar las expresiones (2.1) con

$$U(T) = 2 + \frac{7}{8} \{ 2 + 2 + 3(1+1) \} = \frac{43}{4} \quad (1)$$

$$U'(T) = 2 + \frac{3}{4} \{ 2 + 2 + 3(1+1) \} = \frac{19}{2}$$

Entonces la densidad es

$$\rho = 4 \cdot 525 \times 10^9 \text{ g cm}^{-3} \quad (2)$$

Veamos que en estas circunstancias incluso los neutrinos se hallan en equilibrio termodinámico. Los neutrinos interactúan con los electrones mediante las reacciones

$$e^- + e^+ \leftrightarrow \nu + \bar{\nu}, \quad e^\pm + \nu \leftrightarrow e^\pm + \nu, \quad e^\pm + \bar{\nu} \leftrightarrow e^\pm + \bar{\nu} \quad (3)$$

que son mediadas por las interacciones débiles, y cuyos secciones eficaces son, por razones puramente dimensionales,

$$\sigma \approx \frac{G_F^2}{c^4 \hbar^4} E^2 = \frac{G_F^2}{(c \hbar)^4} (k_B T)^2$$

donde la constante de Fermi es

$$G_F / (\hbar c)^3 = 1.16639(2) \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2} \quad (4)$$

Su número libre medio es

$$\lambda = \frac{1}{\sigma n}$$

donde  $n$  viene dado por (2.1) con  $U'(T) = 3/4$

$$\lambda \approx \frac{4\pi^2}{35(3)} \frac{(c \hbar)^7}{G_F^2 (k_B T)^5} \approx \frac{(c \hbar)^7}{G_F^2 (k_B T)^5} = 3.056 \times 10^{61} \text{ cm} \frac{1}{T^5} \quad (5)$$

Por otra parte de (5.3) con  $k=0$

$$H = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} = \left( \frac{8\pi G}{3} \rho(t) \right)^{1/2} = \left( \frac{4\pi^3 U(T)}{45} \right)^{1/2} \frac{G^{1/2}}{c (\hbar c)^{3/2}} (k_B T)^2 \approx \quad (6)$$



$$\approx \frac{G^{1/2}}{c (hc)^{3/2}} (k_B T)^2 = 9.240 \times 10^{-22} \text{ s}^{-1} \text{ T}^2 \quad (1)$$

y por tanto

$$\frac{\lambda_H}{c} \approx 9.4 \times 10^{29} \frac{1}{\text{T}^3} \quad (2)$$

y como para las temperaturas de interés  $\lambda_H/c \ll 1$  los neutrinos están en equilibrio termodinámico.

Coexisten con las partículas mencionadas un pequeño número de nucleones, aproximadamente 1 nucleón por cada  $10^9$  fotones (II-6.1). ¿Cuál es la proporción entre neutrones y protones? Recuerda que

$$(M_n - M_p) c^2 = 1.293 \, 318 \, 191 \text{ MeV} \quad (3)$$

y como  $(M_n - M_p) c^2 \ll k_B T$ , los procesos

$$\bar{\nu}_e + p \leftrightarrow n + e^+, \quad \nu_e + n \leftrightarrow p + e^- \quad (4)$$

producirán rápidas transiciones  $n \leftrightarrow p$ . Como hemos supuesto que todos los potenciales químicos son nulos hay tantos  $e^+$  como  $e^-$  y tantos  $\nu_e$  como  $\bar{\nu}_e$  y las transiciones  $n \rightarrow p$  son tan abundantes como las  $p \rightarrow n$ . Por tanto en este primer estado el número de protones y neutrones es muy parecido. Veremos que en esta etapa la escala de tiempos es muy corta y que el hecho de que el neutrón sea inestable carece de importancia. Evidentemente la temperatura es demasiado alta para que los nucleones se puedan ligar formando núcleos.

Consideremos ahora la escala de tiempos. En esta etapa el universo está dominado por la radiación y por tanto

$$\rho(t) c^2 = 3p(t) \quad (5)$$

y de las ecuaciones (II-2.4), con  $k=0$ , se deduce

$$R(t) \ddot{R}(t) + \dot{R}^2(t) = 0 \quad (6)$$

y por tanto

$$R^2(t) \dot{R}^2(t) = \text{cte} \quad (7)$$



Integrando esta ecuación se obtiene

$$R(t) = a t^{1/2} \quad (1)$$

siendo  $a$  la constante de integración. De (II-2.4) se obtiene

$$t^2 = \frac{3}{32 \pi G \rho} \quad (2)$$

y teniendo en cuenta (2.1)

$$t = \left\{ \frac{45 C^5 \hbar^3}{16 \pi^3 G k_B^4} \right\}^{1/2} \frac{1}{W(T)^{1/2}} \frac{1}{T^2} = \frac{3.25963(27) \times 10^{20} \text{ s}}{W(T)^{1/2}} \frac{1}{T^2} \quad (3)$$

Como  $W(T)$  es  $53/4$  y  $T = 10^{11} \text{ K}$  se obtiene que en este instante la edad del universo es

$$t = 9.942 \times 10^{-3} \text{ s} \quad (4)$$

(4)  $T = 3 \times 10^{10} \text{ K} (\Rightarrow k_B T = 2.585 \text{ MeV})$

Nada ha cambiado substancialmente; el universo se ha ido expansionándose y enfriándose y continúa dominado por  $\gamma$ ,  $e^+$ ,  $e^-$ ,  $\nu_e$  y  $\bar{\nu}_e$  ( $l, e, \mu, \tau$ ) en equilibrio térmico y altamente relativistas. La ecuación (3) da para la edad

$$t = 0.1105 \text{ s} \quad (5)$$

y su densidad según (2.1) es

$$\rho = 3.665 \times 10^{-7} \text{ g cm}^{-3} \quad (6)$$

El pequeño número de nucleones que existen no se han ligado aún formando núcleos, pero al ir disminuyendo la temperatura es ahora, significativamente, más simple que los neutrones se conviertan en protones que el proceso inverso. La abundancia de neutrones y protones viene dada por

$$\frac{x_n}{x_p} = \exp \left\{ - \frac{(m_n - m_p) c^2}{k_B T} \right\} \quad (7)$$

de donde



$$\frac{x_m}{x_p} = 0.6064 \quad (1)$$

es decir que hoy un 37.75% de neutrones y un 62.25% de protones.

Intentemos estudiar la validez de la ecuación (8.7). Según ya hemos dicho antes, el número relativo de ambos tipos de nucleones viene determinado por la presencia de los procesos

$$\nu_e + n \longleftrightarrow p + e^-, \quad e^+ + n \longleftrightarrow p + \bar{\nu}_e, \quad n \longrightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \quad (2)$$

que son bien descritos mediante la teoría de Fermi de las interacciones débiles. Así por ejemplo

$$\sigma(\nu_e + n \longrightarrow p + e^-) = \frac{G_F^2}{(\hbar c)^4} \frac{1 + 3g_A^2}{4} \frac{\nu_e}{c} E_e^2 \quad (3)$$

donde el acoplamiento axial vale

$$g_A = -1.2573 \quad (28) \quad (4)$$

Entonces teniendo en cuenta el principio de exclusión de Pauli el recuento libre medio asociado con  $\nu_e + n \longrightarrow p + e^-$  viene dado por

$$\lambda^{-1}(\nu_e + n \longrightarrow p + e^-) = \int_0^\infty \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{e^{E_\nu/k_B T} + 1} \sigma(\nu_e + n \longrightarrow p + e^-) \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{e^{E_e/k_B T} + 1} \right\} \quad (5)$$

que en principio puede estimarse usando (3). Para estimar de una forma simple (5) despreciamos  $M_n - M_p$  y  $M_e$  con lo que  $E_e = E_\nu = E_{pe} = E_{pn}$  y

$$\lambda^{-1}(\nu_e + n \longrightarrow p + e^-) = \frac{4\pi}{(2\pi\hbar)^3} \frac{G_F^2}{(\hbar c)^4} \frac{1 + 3g_A^2}{4} c^2 \cdot$$

$$\int_0^\infty dp \, p^4 \frac{1}{e^{pc/k_B T} + 1} \left\{ 1 - \frac{1}{e^{pc/k_B T} + 1} \right\} =$$

$$= \frac{4\pi}{(2\pi\hbar)^3} \frac{G_F^2}{(\hbar c)^4} \frac{1 + 3g_A^2}{4} c^2 \frac{(k_B T)^5}{c^5} \int_0^\infty dz \frac{z^4}{e^z + 1} \left\{ 1 - \frac{1}{e^z + 1} \right\}$$

Como la integral vale  $7\pi^4/30$  entonces



$$\lambda^{-1}(n_e + m \rightarrow p + e^+) = \lambda^{-1}(p + e^- \rightarrow n + \nu_e) =$$

$$= \frac{G_F^2}{(\hbar c)^7} (1 + 3g_A^2) \frac{7\pi}{60} (k_B T)^5 = 6.896 \times 10^{-62} \text{ cm}^{-1} (\text{T/K})^5 \quad (1)$$

y por tanto usando (8.6)

$$\frac{\lambda H}{c} = 2.433 \times 10^{30} \left(\frac{\text{K}}{\text{T}}\right)^3 \approx 0.09 \quad (2)$$

y como  $\lambda H/c$  continúa siendo mucho menor que la unidad aún hoy equilibrio térmico y la ecuación (8.7) puede ser usada. Sin embargo a temperaturas ligeramente más bajas la variación de  $x_n$  se tendrá que determinar usando ecuaciones del tipo

$$\dot{x}_n = -c \lambda^{-1}(n \rightarrow p) x_n + c \lambda^{-1}(p \rightarrow n) (1 - x_n) \quad (3)$$

integrada con las condiciones iniciales (9.1).

Obviamente (10.2) es la buena estimación, mientras que (7.2) es la misma cantidad usando argumentos puramente dimensionales.

iii)  $T = 10^{10} \text{ K}$  ( $\Rightarrow k_B T = 861.7 \text{ keV}$ )

De acuerdo con (8.3) ya ha transcurrido un tiempo  $t = 0.9942$  y la densidad es ahora  $\rho = 4.525 \times 10^5 \text{ g cm}^{-3}$ . La resolución de (3) conduce, aproximadamente a la existencia de un 24% de neutrones y un 76% de protones. Por otra parte de acuerdo con (2) los neutrones empiezan a comportarse como partículas libres y dejan de estar en equilibrio térmico con  $\gamma$ ,  $e^+$  y  $e^-$ . A partir de este momento los neutrones dejan de jugar un papel activo en la historia del universo, si bien continúan contribuyendo a su energía total.

Muy poco después los electrones y positrones empiezan a aniquilarse; la energía que se produce disminuye el ritmo a que se enfría el universo, pero como los neutrones ya están desacoplados no obtienen esta energía adicional y por tanto quedan más fríos. A partir de ahora el ho-



blan de temperatura del universo, entendemos la de los fotones. Veamos como calcular la relación entre ambas temperaturas. La ecuación (2.1) implica que en esta época, dominada por la radiación,  $\rho \propto T^4 N(T)$  y la conservación de la entropía (4.2) implica la conservación de  $R^3(t) T^3 N(T)$ . Comparamos esta cantidad para  $k_B T \gg M_e c^2$  y  $k_B T \ll M_e c^2$ . Antes de la aniquilación de los pares  $e^-, e^+$  el número efectivo de partículas era  $N(T) = 2 + \frac{7}{8} (2+2) = \frac{11}{2}$  pues los neutrinos ya se han desacoplado. Después de la aniquilación  $N(T) = 2$ . Se tiene pues

$$\frac{11}{2} (TR)^3_{\text{antes}} = 2 (TR)^3_{\text{después}} \quad (4)$$

Antes de la aniquilación de los pares  $e^+e^-$ , la temperatura de los neutrinos  $T_\nu$  coincide con la de los fotones  $T$ , es decir

$$(T_\nu R)_{\text{después}} = (T_\nu R)_{\text{antes}} = (TR)_{\text{antes}} \quad (2)$$

de donde

$$\left( \frac{T}{T_\nu} \right)_{\text{después}} = \left( \frac{11}{4} \right)^{1/3} \quad (3)$$

Así pues esperamos que la temperatura actual de los neutrinos sea

$$T_\nu = \left( \frac{4}{11} \right)^{1/3} 2.726 (5) \text{ K} = 1.946 (4) \text{ K} \quad (4)$$

Desgraciadamente, nadie sabe medir esta cantidad.

Como consecuencia de esto a partir del momento de la aniquilación de pares  $e^+e^-$  para calcular la densidad se debe usar la expresión (tres generaciones)

$$\rho(T) = \rho_\gamma(T) + 6 \rho_\nu(T_\nu) = \rho_\gamma(T) \left\{ 1 + \frac{1}{2} \cdot 6 \frac{7}{8} \left( \frac{4}{11} \right)^{4/3} \right\} =$$

$$\rho(T) = 1.681322 \rho_\gamma(T) \quad (5)$$

y a partir de este momento la edad del universo y su temperatura vienen relacionadas por

$$t = 1.77758 (15) \times 10^{26} \text{ s} \left( \frac{\text{K}}{T} \right)^2 \quad (6)$$



Para calcular  $t = f(T)$  en situaciones intermedias deben realizarse cálculos algo más complicados.

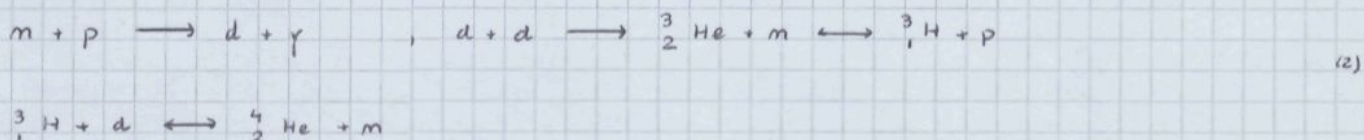
$$iv) \quad T = 10^9 \text{ K} \quad (\Rightarrow \quad k_B T = 86.17 \text{ keV})$$

De acuerdo con (11.6) la edad del universo es  $t = 178.5 \pm 3$  minutos. Este ha continuado su expansión y enfriamiento y su densidad es

$$\rho = 14.15 \text{ g cm}^{-3} \quad (1)$$

Los pares  $e^+$  y  $e^-$  han prácticamente desaparecido por aniquilación y solo quedan grandes cantidades de fotones y neutrinos. De la pequeña cantidad de nucleones presentes un 13.5% son neutrones y el resto protones.

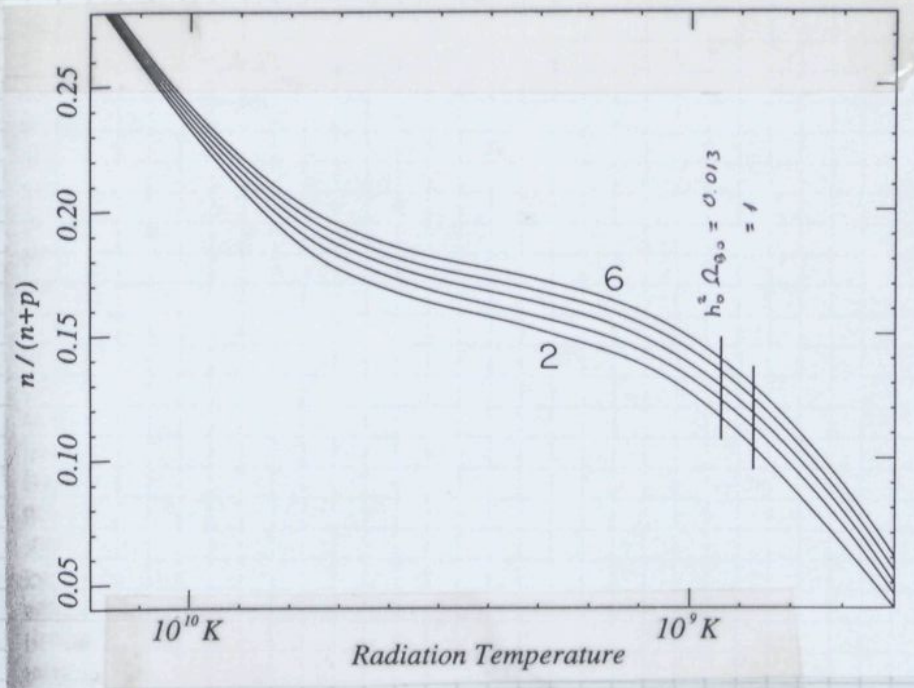
Incluso a temperaturas superiores a la considerada, núcleos muy estables, tales como el  ${}^4_2\text{He}$  podrían existir en equilibrio termodinámico, pero estos no se han podido formar aún. La razón es que la expansión del universo es suficientemente rápida para que la formación de un núcleo complejo deba producirse a partir de los nucleones por procesos de colisión de dos partículas tales como



y por ser el deuterio un núcleo muy poco ligado ( $B = 2.225 \text{ MeV}$ ) es difícil que la producción de helio pueda tener lugar. A temperaturas ligeramente más bajas  $T = 8 \times 10^8 \text{ K}$  es decir  $k_B T = 68.9 \text{ keV}$  el deuterio empieza a producirse y comienza el proceso de nucleosíntesis. En la práctica la inmensa mayoría de los neutrones quedan ligados en forma de  ${}^4_2\text{He}$ . Cálculos detallados permiten predecir que la abundancia de helio final es, en masa, de  $y = 0.22$ , lo cual está de acuerdo con los datos experimentales.

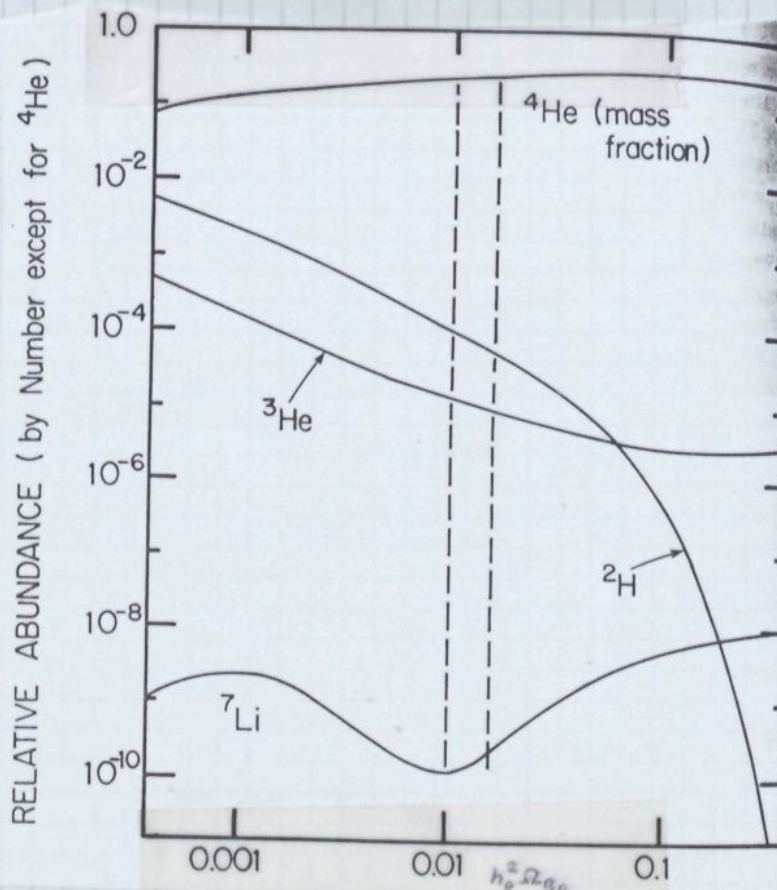
En la figura que sigue se da un cálculo reciente de la abundancia de neutrones como función de la temperatura de la radiación del universo. El parámetro que indica las distintas curvas es el número de familias de neutrinos  $N_\nu$ , que hoy





ahora sabemos que es  $N_p = 3$ . Las dos líneas verticales marcan las temperaturas críticas donde el deuterio puede aumentarse y dar origen a  ${}^4_2\text{He}$  para distintos valores del parámetro  $h_0^2 \Omega_{00}$ .

En la figura siguiente se dan los resultados de un cálculo de la producción de elementos ligeros en el modelo standard como función de  $h_0^2 \Omega_{00}$ . Los niveles





resúcales corresponden a la zona de núcleos de  $h_0^2 \Omega_{B0}$  corresponden a las abundancias observadas.

A continuación el universo ha continuado expandiéndose y enfriándose y nada dramático ocurre hasta que los electrones se ligan a los núcleos para formar átomos. Una primera estimación indica que los átomos no serían estables hasta que  $k_B T \lesssim 1 \text{ eV}$  es decir que  $T \lesssim 10^4 \text{ K}$ . Un cálculo más preciso se puede hacer a partir de la ecuación de Saha, aplicada a la ionización fraccional de equilibrio del hidrógeno ( $x \equiv n_p / (n_p + n_H)$ ), que se puede escribir, en buena aproximación, como

$$\frac{x^2}{1-x} = \frac{1}{n_B} \frac{(2\pi m_e c^2 k_B T)^{3/2}}{8\pi^3 (hc)^3} \exp \left\{ -\frac{1}{2} m_e c^2 \alpha^2 / k_B T \right\} \quad (1)$$

donde  $m_e$  es la masa del electrón,  $\alpha$  la constante de estructura fina y donde hemos sustituido  $m_p + m_H$  por  $m_B$ , pues ambos números son del mismo orden de magnitud. Usando (2.1) se obtiene

$$\frac{S_Y / k_B}{m_B} = \frac{x^2}{1-x} \frac{32\pi^5}{45} \left( \frac{k_B T}{2\pi m_e c^2} \right)^{3/2} \exp \left\{ \frac{1}{2} m_e c^2 \alpha^2 / k_B T \right\} \quad (2)$$

Tomando  $x = 1/2$  se obtiene

$$\frac{S_Y / k_B}{m_B} = 1.513 \times 10^{-14} \left( \frac{T}{K} \right)^{3/2} \exp \left\{ 1.579 \times 10^5 \left( \frac{K}{T} \right) \right\} \quad (3)$$

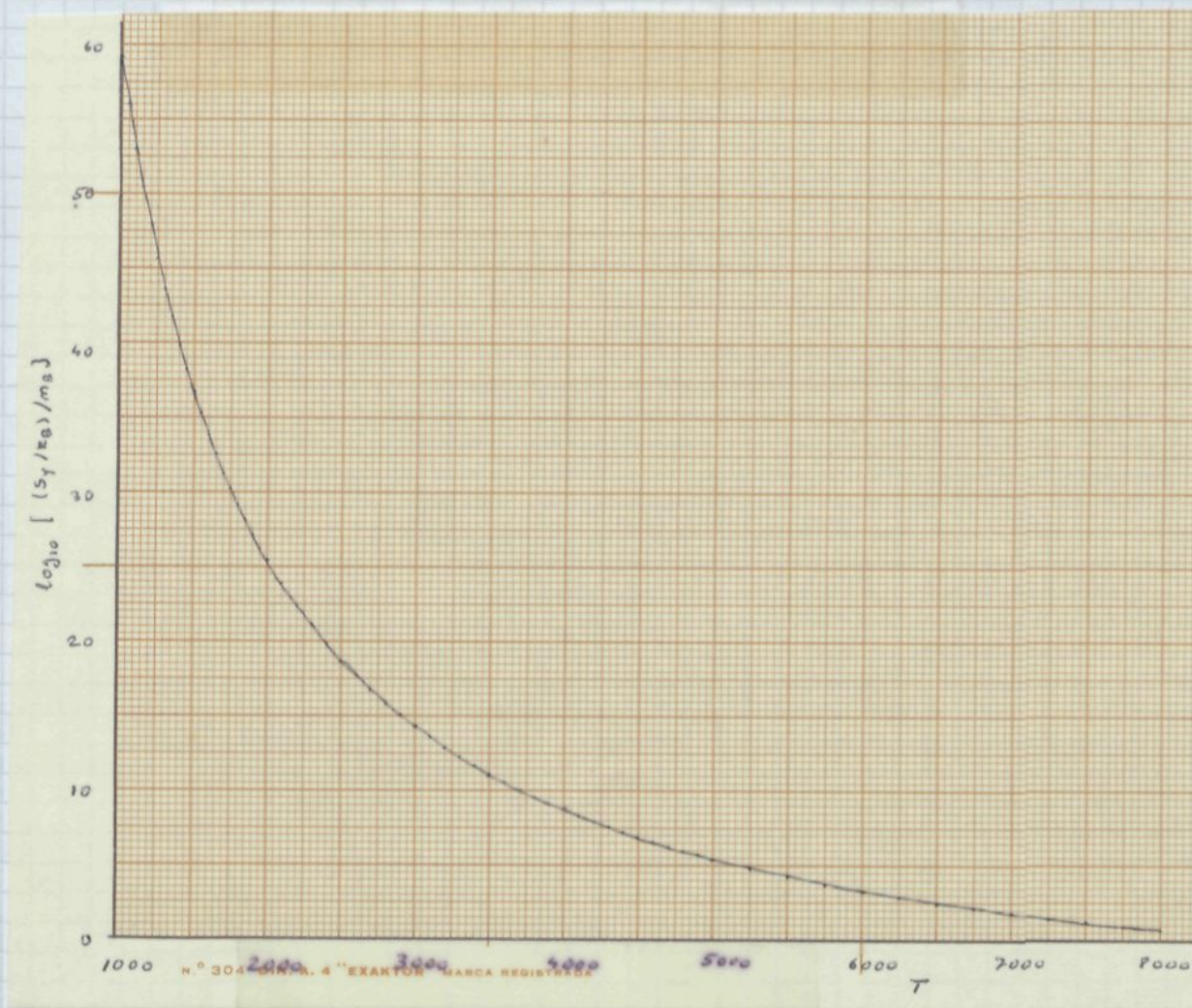
de aquí se puede construir la figura de la página siguiente. Teniendo en cuenta (II-6.5) vemos que para una temperatura de unos  $T = 4000 \text{ K}$  se producen de forma muy rápida los átomos y esto sucede por

$$t \approx 1.11 \times 10^{13} \text{ s} \approx 350.000 \text{ años} \quad (4)$$

El universo se hace transparente a la radiación. La materia y la radiación se han desacoplado y esto permite que por procesos no totalmente comprendidos se formen galaxias y estrellas.

Como ya hemos dicho en el momento actual la radiación electromagnética de fondo tiene una temperatura





$$T_0 = 2.726 (15) \text{ K}$$

(4)

Esto implica que en el presente el número de fotones por unidad de volumen y su densidad son

$$n_{\gamma_0} = 411.0 (23) \text{ cm}^{-3}, \quad \rho_{\gamma_0} = 6.649 (34) \times 10^{-34} \text{ g cm}^{-3} \quad (2)$$

Además de estos fotones existe un mar de neutrinos a una temperatura

$$T_{\nu_0} = 1.946 (4) \text{ K.}$$

(3)

Si la masa de los neutrinos es nula o sus masas son menores que  $m_{\nu} c^2 \ll 2 \times 10^{-4} \text{ eV}$  entonces (V-2.1) da

$$n_{\nu_0} = 56.06 (35) \text{ cm}^{-3}, \quad \rho_{\nu_0} = 5.282 (44) \times 10^{-35} \text{ g cm}^{-3} \quad (5)$$



Teniendo en cuenta que existen tres generaciones y que hoy neutrinos y anti-neutrinos el número total de estas partículas es del orden de  $336 \text{ cm}^{-3}$ , es decir un número parecido al de fotones. El cálculo del número de neutrinos no depende de su masa y si fueran masivos con  $m_\nu c^2 \gg 2 \times 10^{-4} \text{ eV}$  su contribución a la densidad del universo sería

$$\rho_{\nu,0} = 2m_{\nu,0} \sum_{i=1}^3 m_{\nu,i} \quad (1)$$

Para que  $\rho_{\nu,0} \equiv \rho_c$  bastaría que

$$\sum_{i=1}^3 m_{\nu,i} c^2 = 94 h_0^2 \text{ eV} \quad (2)$$

lo cual no está en contradicción con lo que sabemos sobre las cotas de masa de los neutrinos

$$m_{\nu_e} c^2 < 5.1 \text{ eV}, \quad m_{\nu_\mu} c^2 < 0.27 \text{ MeV}, \quad m_{\nu_\tau} c^2 < 31 \text{ MeV} \quad (3)$$

Hemos dicho repetidamente que al principio del universo era una etapa dominada por la radiación y que hoy día el universo está dominado por la materia. Se desea saber en que instante de su evolución hubo este cambio de panorama. Hoy día sabemos que la densidad de radiación  $\rho_{r,0}$  y que la densidad de materia  $\rho_{m,0}$ , respectivamente

$$\rho_{r,0} = 6.649 (34) \times 10^{-34} \text{ g cm}^{-3}, \quad \rho_0 = x \rho_c = 1.87882 (24) \times 10^{-29} h_0^2 x \text{ g cm}^{-3} \quad (4)$$

donde  $x$  es un número del orden de la unidad. En instantes anteriores

$$\rho_r(t) = \rho_{r,0} \left( \frac{R_0}{R(t)} \right)^4, \quad \rho(t) = \rho_0 \left( \frac{R_0}{R(t)} \right)^3 \quad (5)$$

y por tanto  $\rho_r(t) = \rho(t)$  sucedió cuando

$$\frac{R_0}{R(t)} = \frac{\rho_0}{\rho_{r,0}} = 2.826 (15) \times 10^4 h_0^2 x \quad (6)$$

y por tanto en este instante

$$\rho_r(t) = 4.239 (67) \times 10^{-16} h_0^8 x^4 \quad (7)$$



Esto sucedió cuando la temperatura era

$$T = 8.424 (33) \times 10^4 h_0^2 x \quad (1)$$

y por tanto cuando la edad del universo era

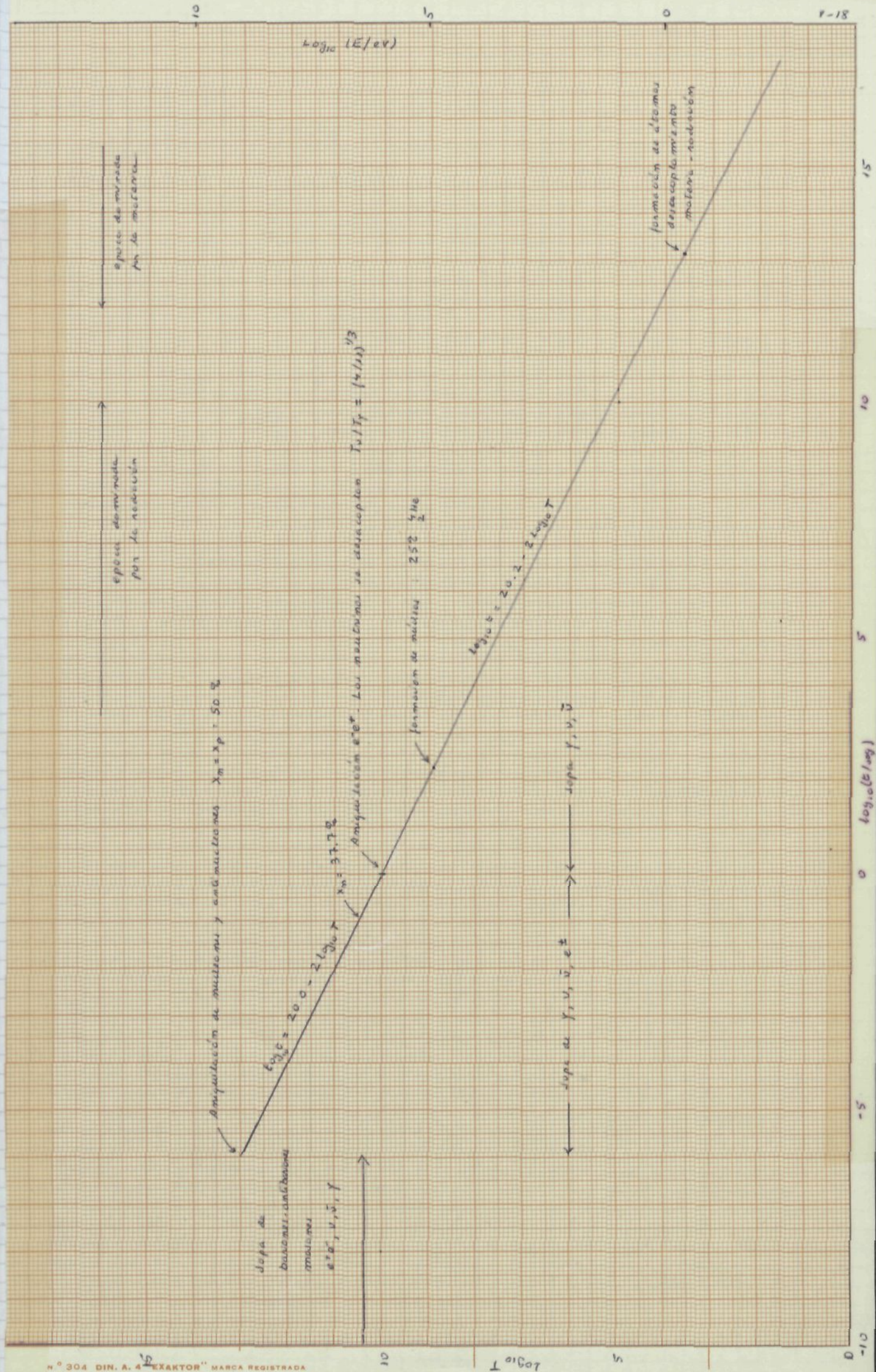
$$t = 2.505 (20) \times 10^{10} s \frac{1}{h_0^2 x^2} \quad (2)$$

y por tanto

$$1520/x^2 \leq t \leq 12700/x^2 \text{ años} \quad (3)$$

Um resumo de todo lo dicho se da en la figura de la próxima página.







VI - DESAFIOS DEL MODELO STANDARD

Los éxitos del modelo standard han sido considerables y este modelo ha superado la explicación de múltiples hechos experimentales, de tal forma que hoy día no hay alternativas creíbles entre las cosmologías razonablemente bien especificadas. Sin embargo esto no significa que dentro del modelo standard no haya posibilidades de mejora y de entender más profundamente algunos hechos que puedan hacer que el modelo standard sea más completo. Vamos a analizar, a continuación, algunos de los hechos paradójicos.

De (II-5.6) se deduce que en el momento actual

$$-1 \leq \frac{\rho_0 - \rho_c}{\rho_c} \leq 1 \quad (1)$$

donde  $\rho_0 = \rho(t_0)$  y  $\rho_c = 3H_0^2/8\pi G$ . Por otra parte de la primera de las ecuaciones (II-2.4) se tiene

$$\frac{kc^2}{R^2(t)} = \frac{8\pi G}{3} \left\{ \rho(t) - \frac{3H^2(t)}{8\pi G} \right\} \quad (2)$$

e introduciendo ( $\rho_c(t_0) = \rho_c$ )

$$\rho_c(t) = \frac{3H^2(t)}{8\pi G} \quad (3)$$

se obtiene

$$\frac{\rho(t) - \rho_c(t)}{\rho_c(t)} = k \frac{c^2}{R^2(t) H^2(t)} \quad (4)$$

de donde si  $k \neq 0$

$$\frac{\rho(t) - \rho_c(t)}{\rho_c(t)} = \frac{R^2(t_0) H^2(t_0)}{R^2(t) H^2(t)} \frac{\rho(t_0) - \rho_c(t_0)}{\rho_c(t_0)} \quad (5)$$

En un universo dominado por la radiación hemos probado que  $R(t) \propto t^{1/2}$  y  $H(t) \propto 1/t$  de donde  $R^2(t) H^2(t) \propto 1/t$  y por tanto.

$$\frac{\rho(t) - \rho_c(t)}{\rho_c(t)} = \frac{t_0}{t} \frac{\rho(t_0) - \rho_c(t_0)}{\rho_c(t_0)} \quad (6)$$



Se ve que en el tiempo de Planck  $t_p = 5.39 \times 10^{-44}$  s (V-1.1) se establecieron las condiciones que caracterizaron la evolución cósmica posterior. De la expresión anterior y tomando como edad actual del universo  $t_0 = 1.5 \times 10^{10}$  años  $= 4.73 \times 10^{17}$  s se obtiene

$$\left| \frac{\rho(t_p) - \rho_c(t_p)}{\rho_c(t_p)} \right| = \left( 8.8 \times 10^{60} \right) \left| \frac{\rho(t_0) - \rho_c(t_0)}{\rho_c(t_0)} \right|, \quad k \neq 0 \quad (1)$$

y teniendo en cuenta (1.1) vemos que en el tiempo de Planck  $\rho(t_p)$  no puede diferir de  $\rho_c(t_p)$  en más de una parte en  $10^{60}$ , aproximadamente. Esta mesetaria conspiración cósmica se conoce como el problema de la planaridad ("flatness"). La salida más lógica a este problema es que hubiera alguna razón que exigiera que  $k=0$ , es decir que el espacio tiempo fuera plano. Se ha intentado, sin demasiado éxito, explicar  $k=0$  basándose en el principio de Mach, que dice que los sistemas inerciales de referencia vienen determinados por la distribución y el movimiento de la materia en el universo.

Notar que si  $k=+1$  y esta conspiración cósmica no hubiera tenido lugar entonces  $\rho(t) \gg \rho_c(t)$  y el universo hubiera colapsado en un tiempo muy breve. Si por el contrario  $k=-1$  entonces  $\rho(t) \ll \rho_c(t)$  y definitivamente se hubieran podido formar las galaxias.

Otras dos cantidades que juegan un papel importante en la evolución del universo son (II-6.4) y (II-6.5)

$$N \equiv \frac{m_{B0}}{m_{\gamma 0}} = 2.732 \times 10^{-8} \Omega_{B0} h_0^2 \quad (2)$$

$$S \equiv \frac{S_{\gamma 0}/R_B}{m_{B0}} = 1.318 \times 10^8 \Omega_{B0}^{-1} h_0^{-2}$$

cantidades que no han cambiado sensiblemente en la mayor parte de la historia del universo, y que obviamente no son independientes. Si  $S$  hubiera sido muy distinto de este valor habríamos tenido serios problemas en la evolución del universo. Si en los argumentos de (V-16) hacemos que  $x \ll 1$ , esto es  $N$  mucho



mayor que el número dado en (2.2) entonces la época dominada por la materia habría empezado a tiempos muchísimo mayores que los dados en (17.3) y podrían no haber aparecido aún las galaxias. Por otra parte si  $S$  fuera muchísimo menor que el observado, el desarrollo de la materia y la radiación hubiera tenido lugar a temperaturas mucho más altas e incluso antes de que se iniciara la nucleosíntesis y no sabríamos explicar la abundancia primordial de los elementos ligeros.

¿Por qué por cada nucleón del universo hoy del orden de  $4 \times 10^7 \rho_{B0}^{-1} h_0^{-2} \approx 10^9$  fotones? En realidad este misterio forma parte de un misterio mayor que es el de como se usaron los nucleones. Si consideramos el universo cuando  $k_B T = 2 \text{ GeV}$  entonces este era una sopa de partículas formada por fotones, neutrinos,  $e^\pm$ ,  $\mu^\pm$ , algunos mesones ligeros y como únicos bariones:  $p, \bar{p}, n$  y  $\bar{n}$ . Cuando la temperatura disminuye la energía ya no será suficiente para crear parejas  $(p, \bar{p})$  o  $(n, \bar{n})$  y estas partículas se aniquilarán dando origen a fotones. Lo más lógico sería esperar que no quedaran nucleones en el universo actual. Sabemos que esto no es así. Una posibilidad sería que por motivos no bien entendidos no todos los nucleones se hubieran aniquilado con los correspondientes antinucleones. Nuestra galaxia está formada por materia y nos debemos preguntar donde se encuentra la antimateria correspondiente.

Se han dado dos contestaciones a esta pregunta:

i) La antimateria se encuentra en algún lugar del universo. La más seria objeción a esta solución es que una tal mezcla sería altamente inestable, pues el encuentro de materia y antimateria conduce a una aniquilación explosiva. Si esto sucediera frecuentemente en nuestra galaxia se produciría un fondo de radiación gamma que no ha sido observado. Gary Steigman ha deducido de la ausencia de este fondo una cota superior de una parte en  $10^9$  de que haya antimateria en nuestra galaxia. Este problema podría ser evitado si ocurrió una separación materia-antimateria en instantes primitivos y se formaron galaxias de materia y fo-



laxios de antimateria. Sin embargo, incluso de vez en cuando ocurren colisiones entre galaxias y los datos experimentales implican que tal separación debió ocurrir a escala de cúmulos de galaxias. Si tal separación tuvo lugar debió suceder a  $k_B T \gtrsim 50 \text{ MeV}$  para entrar la completa aniquilación. Según hemos visto entonces la edad del universo era  $t \lesssim 0.01 \text{ s}$ , pero a estos tiempos los procesos de separación no podían haberse extendido a regiones de tamaño mayor que unos  $10^9 \text{ cm}$ , que puedan contener unos  $10^{56}$  nucleones ( $\sim 0.1 M_\odot$ ). Un universo simétrico de materia y antimateria, que es estáticamente atractivo, parece difícil de justificar, especialmente cuando no se ha propuesto ningún mecanismo para explicar esta separación a tan gran escala.

La otra alternativa es, sin embargo, igualmente poco satisfactoria. Es aceptan serenamente que el universo es asimétrico y que no existen cantidades subatómicas de antimateria. El universo fue hecho ligeramente asimétrico; el universo tenía inicialmente un exceso de materia y, al aniquilarse los nucleones con los antinucleones, este exceso es el que ha dado origen a la materia presente en el universo. De acuerdo con este escenario, el contenido de bariones y leptones de nuestro universo es simplemente una condición inicial; algo impuesto en el cosmos desde su creación y está más allá de una explicación racional basada en una teoría física.

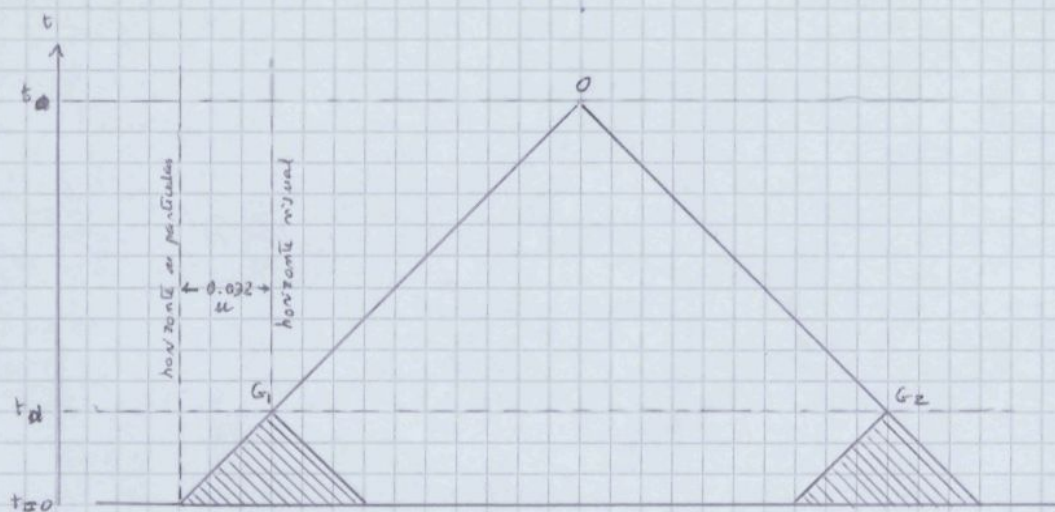
Ninguna de las dos soluciones es agradable. En 1967 Sakharov (Sov. Phys. JETP Lett. 5, 24 (1967)) (vease también E. W. Kolb y S. Wolfram Nucl. Phys. B172, 225 (1980)) propuso una solución a este dilema basándose en el hecho de que teorías en las que los quarks y los leptones son tratados de forma unificada (GUTS) frecuentemente conducen a interacciones en las que se viola el número leptónico y el bariónico. El hecho de que la vida media del protón sea mayor que unos  $10^{31}$  años sugiere que tales interacciones, si existen, deben ser mediadas por bosones intermedios muy masivos ( $\gtrsim 10^{14} \text{ GeV}$ ). Si interacciones que violan el número bariónico  $B$  ocurren a energías muy elevadas, el número bariónico actual del universo no queda especificado únicamente como una condición inicial y podemos pensar que el universo inicial tenía número bariónico nulo. De hecho, la presencia de tales inter-



acciones se puede ver que serviría para destruir prácticamente cualquier exceso de bariones original y que habrían sobrevivido un número insuficiente de bariones para explicar el número que hoy día observamos. Si no hay otros efectos, modelos que impliquen una violación apreciable de  $B$  a muy altas energías estarían, presumiblemente, en desacuerdo con el modelo cosmológico standard. Sin embargo, si la conjugación de carga  $C$  y  $CP$  no son buenas simetrías para las reacciones en las que se viola  $B$ , es posible que un exceso de bariones ~~posible~~ pueda ser generado después de que cualquier exceso de bariones originales haya desaparecido, permitiendo entonces una violación grande de  $B$  a altas temperaturas sin inconsistencia con el modelo standard. Sin embargo, como la invariancia  $CPT$  debe ser mantenida, la violación de  $CP$  no puede tener efecto a no ser que una dirección privilegiada en el tiempo exista. En situaciones de equilibrio térmico no existe una dirección privilegiada en el tiempo. Sin embargo, la expansión del universo puede resultar en pequeñas desviaciones del equilibrio térmico, que permitan explicar un exceso de bariones sobre antibariones generado por la acción de interacciones que violan  $B$  y  $CP$ . El tiempo de relajación necesario para llegar al equilibrio en el que la asimetría bariónica es de nuevo destruida puede ser más rápidamente que la edad del universo congelando así la asimetría. Cálculos numéricos detallados basados en modelos de teorías GUTs son abundantes en la literatura y demasiado complejos para discutirlos aquí. En general los incertidumbres en el cálculo son muchas empujando por el modelo de GUTs a utilizar y los resultados firmados indican que esta es una salida al dilema planteado.

Otro problema que aparece en el modelo standard tal como lo hemos planteado es el llamado problema del horizonte. Este problema es fácil de entender considerando la radiación de fondo. Los resultados del COBE (Cosmic Background Explorer) demuestran que la radiación cósmica de fondo es extraordinariamente isotrópica siendo la falta de inhomogeneidad de una parte en un millón, aproximadamente. La pregunta es ¿por qué esta radiación es tan isotrópica? Consideremos la figura de la página siguiente. Un observador  $O$ , en el tiempo actual  $t_0$ , ve una radiación de fondo extraordinariamente uniforme





que se originó en el instante  $t_d \approx 10^{13} s$  en que se desacoplaron la materia y la radiación. Si hoy observamos una gran homogeneidad esto debería de existir en el instante  $t_d$ , pues a partir de este instante la falta de interacciones no ha podido dar lugar a la homogeneidad. En la figura las escalas se han elegido arbitrariamente y los líneas a  $45^\circ$  de la vertical representan trayectorias de rayos luminosos. Evidentemente como ninguna señal puede viajar más rápido que la luz solo podemos ver objetos que están en el cono de luz pasado de O. En particular podemos ver la radiación que proviene de los puntos  $G_1$  y  $G_2$  diametralmente opuestos en el firmamento y que ha viajado por el cono de luz hasta llegar a O. Hemos sombreado los conos de luz pasados de  $G_1$  y  $G_2$  correspondientes al tiempo  $t_d$ . Estos dos conos no se cortan y por tanto no ha podido existir en el tiempo  $0 \leq t \leq t_d$  un proceso de termalización que nos permita explicar la igualdad de temperatura de la luz procedente de  $G_1$  y de  $G_2$ .

Proveamos un poco más todo esto. Consideremos la longitud

$$l(t; t_e) \equiv R(t_e) \int_{t_e}^t dt \frac{c}{R(t)} = R(t_e) u(t, t_e) \quad (1)$$

que representa la distancia propia correspondiente a un tiempo  $t_e$  cuando fue emitida una señal luminosa que nos llega en el instante  $t$ . En otras palabras  $l(t; t_e)$  para todos los  $t_e < t$  es el lugar de los puntos que están en el pasado de nuestro cono de luz. Si suponemos que  $k=0$ , que el universo está dominado



por materia,  $R(t) \propto t^{2/3}$ , entonces

$$l(t, t_e) = 3c(t_e^{2/3} t^{1/3} - t_e) \quad (1)$$

Para relacionar la idea de horizonte con las observaciones reales debemos introducir otro tipo de horizonte, el llamado horizonte visual. El horizonte visual es meramente la distancia que nos separa de la luz que fue emitida en el tiempo  $t_d$  en que materia y radiación se desacoplan. Si tenemos en cuenta que aproximadamente

$$t_d = (1100)^{-3/2} t_0 \quad (2)$$

entonces la distancia propia (1) de la luz emitida en este momento es ahora

$$l(t_0, t_d) = 3c(t_d^{2/3} t_0^{1/3} - t_d) = \frac{0.968}{1000} 3ct_0 \quad (3)$$

Esta era la posición de la materia emisora en el instante  $t_d$ . Puesto que desde entonces la distancia al horizonte ha incrementado por un factor mil, su posición es ahora

$$h_{vh}(t_0) = 0.968(3ct_0) = 0.968 h(t_0) \quad (h = \text{visual horizon}) \quad (4)$$

donde  $h(t_0)$  es la distancia al horizonte de partículas como tanto  $h$  como  $h_{vh}$  ambas escalan con  $R$ , la relación  $h_{vh}(t_0) = 0.968 h(t_0)$  es válida en todo instante y en particular en el momento del desacople. En la figura tenemos que  $u(t_0) = u_v(t_0) \approx 0.032u \approx (1/30)u$  era la distancia al horizonte en el momento del desacople. vemos pues que las regiones  $U_1$  y  $U_2$  estaban separadas del orden de 60 veces la distancia horizonte en el momento en que la radiación de fondo quedó desacoplada.

Siendo esto así, la interacción causal entre las distintas regiones del cielo era imposible. ¿Por qué es pues la radiación de fondo tan uniforme? Esto es el problema del horizonte.

Existe también un problema en la explicación del origen y naturaleza de las perturbaciones de la densidad primordial que dieron origen a las galaxias y a la estructura del universo tal como existe hoy día. Los modelos inflacionarios, el primero de los cuales fue propuesto por A. Guth (Phys. Rev. D 23, 357 (1981)) intentan resolver estas dificultades.



Vamos a intentar presentar una descripción cualitativa de los modelos inflacionarios, seguida por algunos resultados cuantitativos. Sin embargo, aquí no podemos dar todos los aspectos cuantitativos, ya que para ello es necesario conocer bien las teorías de gran unificación (GUTs).

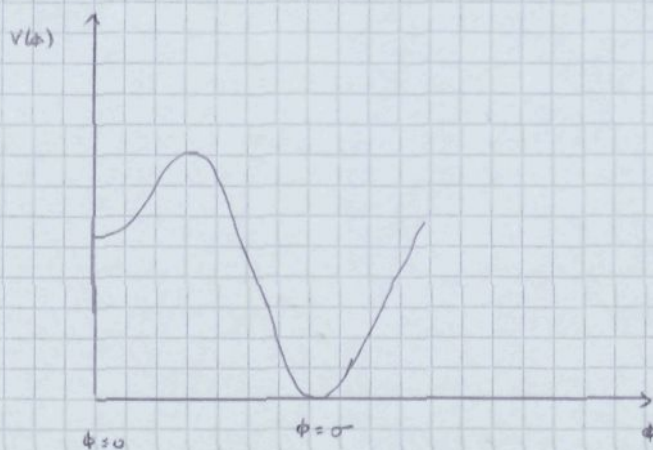
De acuerdo con la teoría electrodébil de Glashow-Weinberg-Salam, que unifica las interacciones débiles y electromagnéticas, ambas interacciones se comportan de una manera similar, y por consiguiente hay una transición de fase en el universo primitivo, asociada con una temperatura crítica de unos  $T = 3 \times 10^{15} \text{ K}$  ( $k_B T \approx 250 \text{ GeV}$ ). Las teorías de gran unificación intentan encontrar una descripción unificada de la teoría electrodébil con la cromodinámica cuántica. Estas teorías de gran unificación predicen que hay una transición de fase en el universo con una temperatura crítica de unos  $T = 10^{27} \text{ K}$  ( $k_B T \approx 10^{14} \text{ GeV}$ ), por encima de la cual había una simetría entre todas las interacciones. Consideremos una analogía con el agua. En el estado líquido esta presenta una simetría rotacional en cualquier punto del líquido; la simetría se pierde, o queda rota, cuando se forma hielo, ya que los cristales de hielo tienen direcciones privilegiadas. En segundo lugar, las distintas partes del líquido empiezan a congelarse de forma independiente las unas de las otras con orientaciones distintas de los ejes cristalinos, de forma que cuando toda la masa de agua se ha convertido en hielo aparecen ciertos defectos en las fronteras de las zonas que se han congelado de forma independiente. De forma análoga en el universo primitivo para temperaturas superiores a  $10^{27} \text{ K}$  la simetría entre las tres interacciones era manifiesta, y por debajo de esta temperatura la simetría queda rota. En el agua la forma en que se rompe la simetría rotacional en las distintas porciones del líquido puede caracterizarse por los parámetros que describen la orientación de los ejes de los cristales. Entonces estos parámetros toman distintos valores en las distintas porciones del líquido y por tanto hay una rotura de la simetría. De forma análoga, la manera en que la manifiesta simetría entre las tres interacciones queda rota puede ser caracterizada por adquirir ciertos valores no nulos unos parámetros conocidos como campos de Higgs; técnicamente esto se conoce con el nombre de rotura espontánea de la simetría. La simetría es manifiesta cuando los campos de Higgs tienen un valor



esperado nulo; queda rota espontáneamente cuando uno al menos de los campos de Higgs adquiere un valor esperado no nulo. Como en el caso del agua, ciertos defectos aparecen en las fronteras de las distintas regiones en las que la simetría es rota de forma distinta, esto es, adquiriendo valores distintos de los valores esperados de los campos de Higgs. Hay defectos puntuales que corresponden a monopolos magnéticos y defectos bidimensionales llamados paredes de dominios. Una región en la que la simetría es rota de una forma determinada no puede ser significativamente mayor que la distancia al horizonte en este instante y por tanto se puede calcular el número mínimo de defectos que aparecerían en la transición de fase. Los defectos se espera que sean muy estables y muy masivos. Por ejemplo, se encuentran que los monopolos tienen del orden de  $10^{16}$  veces la masa del protón. El resultado es que hoy tal cantidad de defectos que la densidad de masa habría acelerado muchísimo la evolución del universo, de forma que la radiación de fondo habría alcanzado la temperatura actual en pocos  $10^4$  años. Entonces esta predicción de las GUTs parece estar en conflicto grave con el modelo standard.

Ninguno de los éxitos del modelo standard viene afectado por los modelos inflacionarios pues después de los  $10^{-34}$  s, o algo parecido, coinciden los dos modelos con exactamente el mismo en cuanto se refiere al universo observable. El modelo original de Guth tenía dificultades que han sido resueltas con los nuevos modelos inflacionarios propuestos, independientemente por A. Linde (Phys. Lett. 108B, 389 (1982)) y A. Albrecht y P. Steinhardt (Phys. Rev. Lett. 58, 1220 (1982)).

Por simplicidad consideraremos un solo campo de Higgs que supondremos que es un escalar  $\phi$ . Las formas posibles de la energía potencial correspondiente a este campo vienen dadas en las figuras siguientes:







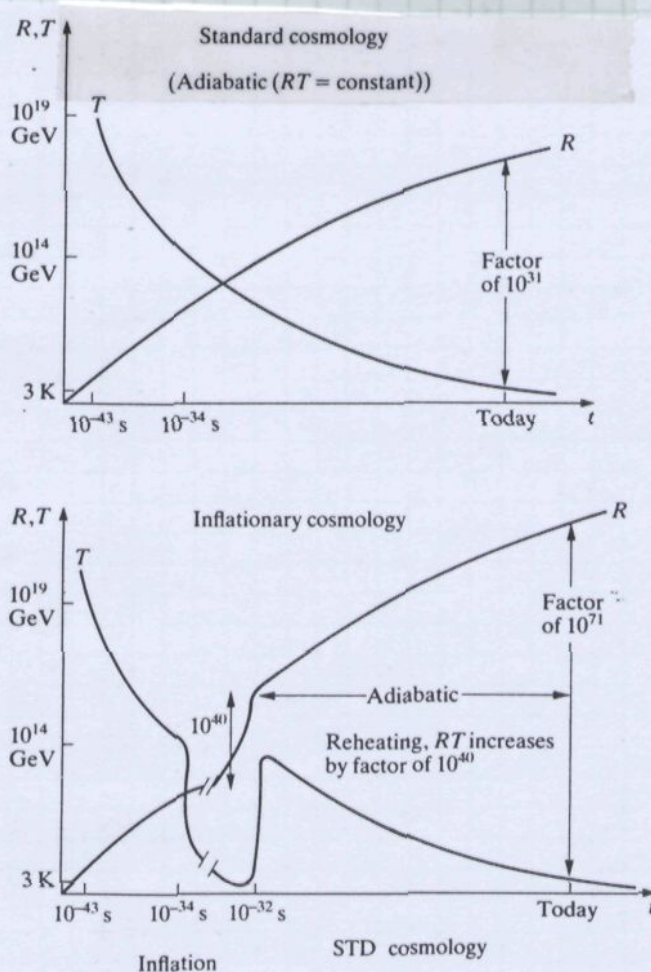
En ambos casos el potencial tiene puntos estacionarios para  $\phi=0$  y  $\phi=\sigma$ . En estos puntos el sistema está en equilibrio. Los estados que son estados estacionarios del potencial se denominan estados de vacío. Consideremos en primer lugar la figura de la página anterior. La energía del estado estacionario con  $\phi=0$  es más elevada que la de  $\phi=\sigma$ . Puede encontrarse una situación en que el sistema queda atrapado en el estado  $\phi=0$  y no puede hacer una transición al estado  $\phi=\sigma$ , debido a la barrera de potencial, a pesar de que  $\phi=\sigma$  tiene menor energía. En esta situación el estado  $\phi=0$  se le llama "falso vacío", mientras que el  $\phi=\sigma$  es el "verdadero vacío". ¿Por qué esto tiene algo que ver con la historia primitiva del universo?

Supongamos que en el universo muy primitivo había regiones más calientes que  $10^{27}$  K y que estuvieran expandiéndose. La simetría entre las interacciones era evidente y el campo de Higgs, que representamos por  $\phi$ , era nulo. Uno puede imaginar esta situación como si las fluctuaciones térmicas condujeran al campo de Higgs al valor de equilibrio  $\phi=0$ . Cuando la expansión provocara una caída de la temperatura, por debajo de la temperatura crítica sería termodinámicamente más favorable que el campo de Higgs adquiriera un valor no nulo. Sin embargo, para algunos valores de los parámetros de las GUTs esta transición de fase ocurre muy lentamente comparada con el ritmo de enfriamiento. Esto puede provocar que la temperatura descienda por debajo de  $10^{27}$  K, la temperatura crítica, pero que el campo de Higgs permanezca en su valor nulo. Esto es equivalente al fenómeno de superenfriamiento; por ejemplo, el agua se puede superenfriar a menos  $20^\circ$  y continuar líquida. Esta es la situación del falso vacío considerado antes, en el que el campo de Higgs permanece cero a pesar de que energéticamente es más favorable el valor  $\phi=\sigma$ . Resulta que esta situación



conduce a que la región se enfría considerablemente y que tiene un ritmo muy rápido de expansión. La situación, representada en la figura de la página 9, conduce a dificultades que pueden ser evitadas en la situación representada en la figura de la página 10 y ésta es la que consideraremos a partir de ahora.

Antes de considerar una descripción más cuantitativa de los modelos inflacionarios, es útil dar una idea de los efectos generales de estos modelos en el modelo standard.

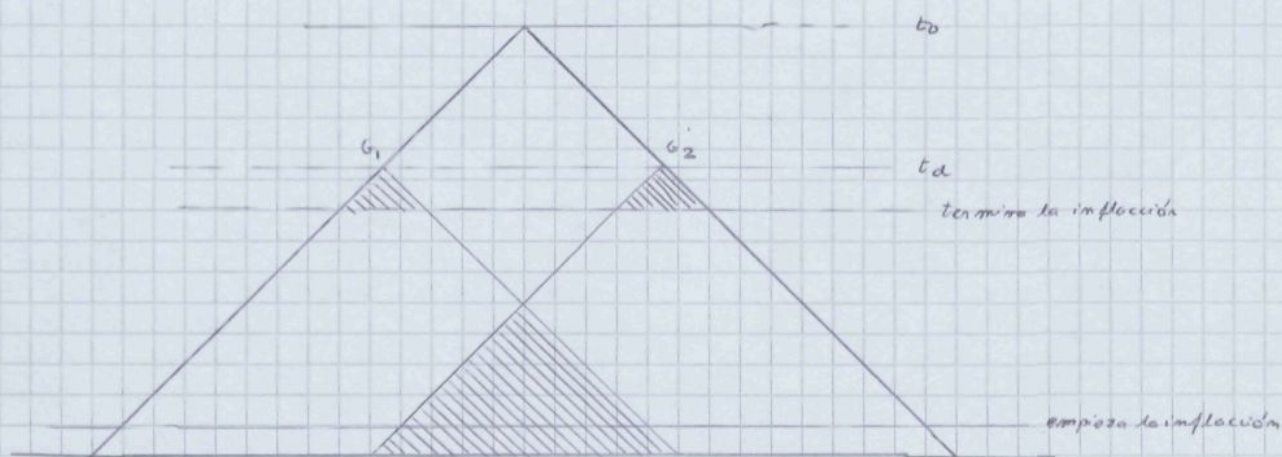


**Fig. 8.4.** This figure depicts the evolution of the scale factor  $R$  and temperature  $T$  of the universe in the standard model and in the inflationary models. The standard model is always adiabatic ( $RT \approx \text{constant}$ ), except for minor deviations when particle-antiparticle pairs annihilate, whereas inflationary models undergo a highly non-adiabatic event (at  $10^{-34}$  s or so), after which it is adiabatic. (Turner, 1985.)

En esta figura vemos que los modelos inflacionarios incorporan todas las predicciones del modelo standard para el universo observable, porque ambos tienen el mismo comportamiento para  $t \gtrsim 10^{-32}$  s. Entre  $10^{-34}$  s y  $10^{-32}$  s, aproximadamente, los modelos inflacionarios son totalmente distintos. Una región del universo sufre una expansión y un enfriamiento exponencial. Después de esta expansión y enfriamiento la región es re calentada hasta prácticamente la temperatura crítica. Después de esto



la historia es la misma que en modelo standard, la diferencia importante, pero con la importante diferencia que la región inicial que estaba dentro de la distancia horizonte ha tenido tiempo de homogeneizarse y alcanzan toda ella la misma temperatura y después de la inflación todo el universo observable está en esta región y así el problema del horizonte desaparece. Cualitativamente la situación se puede representar de la siguiente forma:



Consideremos esto en más detalle teniendo en cuenta el potencial representado en la página 10. Consideremos una región del universo muy primitivo que era más caliente que los  $10^{27}$  K o algo parecido. La razón de que la evolución de esta región sea diferente que la del modelo standard es la presencia del campo de Higgs, que, como hemos dicho antes, describe la transición de fase que el universo sufre a esta temperatura. La presencia del campo de Higgs altera radicalmente la evolución del factor de escala  $R(t)$  en las épocas muy primitivas, como se ve en la figura de la página 11 y la evolución es la misma después de unos  $t \approx 10^{-32}$  s. Después daremos la descripción cuantitativa. Ahora nos limitaremos a una descripción cualitativa. Como hemos dicho antes, por encima de los  $10^{27}$  K las fluctuaciones térmicas llevan a un valor cero los campos de Higgs y la simetría es manifiesta. Cuando la temperatura desciende el sistema sufre una transición de fase y al menos uno de los campos de Higgs adquiere un valor no nulo (aquí consideraremos un único  $\phi$ ), resultando en una fase de simetría rota. Sin embargo, para ciertos valores de los parámetros y supondremos que este es el caso, el ritmo de la transición de fase es muy lento comparado con



el ritmo de enfriamiento. Esto conduce a que el sistema se subenfriara hasta una temperatura despreciable con el campo de Higgs permaneciendo nulo, quedándose en un falso vacío. Esto corresponde al pozo de la curva  $T$  de la figura de la página 11. Ahora las fluctuaciones cuánticas o pequeñas fluctuaciones térmicas residuales hacen que el campo de Higgs se desvía del valor cero. En el caso que consideramos (Fig. pag. 10) no hay barrera de potencial, de forma que el campo de Higgs empieza a crecer uniformemente. El ritmo de crecimiento es, en realidad, como la velocidad de una bola que se hubiera colocado en la parte superior de la figura de la página 10 y empezando a caer; al principio la velocidad es muy pequeña, aumentando gradualmente hasta que tiene una velocidad grande al llegar a los valores más bajos de  $V$  y finalmente oscila alrededor de  $\phi = 0$  hasta quedarse en  $\phi = 0$ . En las regiones más altas de  $V(\phi)$ , como veremos más adelante, la región sufre una expansión acelerada, duplicándose su diámetro cada  $10^{-34}$  s o algo así. Cuando el valor del campo de Higgs alcanza las partes de mayor pendiente de  $V(\phi)$ , la expansión cesa. Un factor de expansión de  $10^{50}$  o más puede lograrse mediante este mecanismo para la región que consideramos.

Esta discusión es muy esquemática y simplificada. Como ya hemos dicho pueden existir muchos estados distintos de simetría rota (dependiendo de los valores no nulos adquiridos por los campos de Higgs), de la misma manera de las posibles direcciones de los ejes cristalográficos en el caso del agua. Entonces distintas regiones del universo primitivo adquirirían distintos estados de ruptura de simetría, cada una de estas regiones siendo de aproximadamente del tamaño del horizonte en aquel momento. La distancia del horizonte en el instante  $t$  es del orden de  $ct$ ; si  $t \approx 10^{-34}$  entonces la distancia al horizonte es del orden de  $10^{-26}$  m. Una vez se hubiera formado un dominio con un conjunto determinado de valores no nulos de los campos de Higgs, gradualmente alcanzaría uno de los estados de simetría rota y se inflaría por un factor del orden de  $10^{50}$ . Entonces este dominio después de la inflación tendría un tamaño del orden de  $10^{26}$  m. En aquel momento todo el universo observable medía solo unos 10 m y cabía perfectamente en un solo dominio. Puesto que el universo observable está en una región que, a su vez, empezó en una región contenida en la distancia al horizonte, habría tenido tiempo de homogeneizarse y alcanzar una temperatura uniforme. Esto soluciona el problema del horizonte.



A causa de la enorme inflación, cualquier partícula con una cierta densidad que hubiera existido antes de la inflación, habría visto reducida su densidad casi a zero después de la inflación. La mayor parte de la densidad de energía habría sido incorporada al campo de Higgs después de la inflación. Después de que el Higgs ha abandonado la posición más llana de la Figura de la página 10 y se ha ido hacia las zonas de alta pendiente y han empezado las oscilaciones alrededor de  $\phi = \sigma$ , estamos en la situación que corresponde en teoría cuántica de campos a una elevada densidad de partículas de Higgs. (Recordar que un nivel elevado de un oscilador armónico corresponde a un gran número de excitaciones del campo electromagnético, esto es, a un elevado número de fotones). Las partículas de Higgs serían inestables y se desintegrarían en partículas más ligeras, y el sistema alcanzaría rápidamente la condición de un gas caliente de partículas elementales en equilibrio, en condiciones análogas a las que se han supuesto para el modelo standard. El sistema se recalentaría a una temperatura  $2-10$  veces menor que la temperatura de la transición de fase  $10^{27}$  K. La historia después de esto sería la misma que la del modelo standard y todos los éxitos de éste se mantienen.

Como hemos dicho antes, no es posible dar aquí los detalles técnicos de la teoría de partículas elementales y de teoría cuántica de campos. En segundo lugar, aun en tratamientos clásicos o semiclásicos, soluciones exactas adecuadas no se conocen y por tanto incluso cuando se dispone de las ecuaciones es necesario llevar a cabo una cierta cantidad de análisis cualitativo.

Recordemos las ecuaciones de Einstein (II.-1.2)

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^2} T_{\mu\nu} \quad (1)$$

donde  $T_{\mu\nu}$  es el tensor energía momento. Para un gas perfecto su expresión es (II.-15)

$$T^{\mu\nu} = \left( \rho + \frac{1}{c^2} p \right) u^\mu u^\nu - \frac{1}{c^2} p g^{\mu\nu} \quad u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{ds} \quad (2)$$

Como  $u^0 = 1$ ,  $u^i = 0$  entonces  $T^{\mu\nu}$  tiene la forma diagonal

$$T^{\mu}_{\nu} = \begin{vmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ -p/c^2 & & & \\ 0 & -p/c^2 & & \\ 0 & 0 & -p/c^2 & \end{vmatrix} \quad (3)$$



Si bien (14.2) es todo lo necesario para el modelo standard, en realidad  $T^{\mu\nu}$  debe contener la contribución de todos los campos posibles. Consideremos en este modelo muy simplificado que hay un único campo de Higgs  $\phi(x)$  que es un escalar autoadjunto. La densidad Lagrangiana correspondiente es ( $c = \hbar = 1$ )

$$L(x) = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi(x) \partial_\mu \phi(x) - V(\phi) \quad (1)$$

donde  $V(\phi)$  es el potencial. El tensor energía momento es

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} L \quad (2)$$

esto es

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \left\{ \frac{1}{2} \partial^\lambda \phi \partial_\lambda \phi - V(\phi) \right\} \quad (3)$$

Supongamos ahora que el campo escalar es solo función del tiempo, entonces  $T^{\mu\nu}$  es diagonal con

$$T^{\mu}_{\nu} = \begin{vmatrix} \rho' & & 0 \\ & -p' & \\ 0 & & -p' \\ & & & -p' \end{vmatrix} \quad \begin{aligned} \rho' &\equiv \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \\ p' &\equiv \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \end{aligned} \quad (4)$$

con  $\dot{\phi} = \partial\phi/\partial t$ . Entonces las ecuaciones de Einstein en presencia de un campo de Higgs son las obtenidas antes con  $\rho \rightarrow \rho + \rho'$  y  $p \rightarrow p + p'$ .

Hay algunas cuestiones básicas en este análisis que deben ser clarificadas. En primer lugar estamos considerando una región que está dentro del horizonte en el tiempo considerado. Este región, de acuerdo con el esquema presentado, sufre una rápida expansión, enfriamiento, etc de forma más o menos independiente del resto del universo. Sin embargo estamos usando para esta región una métrica de Robertson-Walker que se ha deducido suponiendo todo el universo homogéneo e isotrópico. Por tanto hacemos la hipótesis de que todo el espacio-tiempo se comporta de forma que la métrica de Robertson-Walker está justificada localmente. En segundo lugar, ignoramos la variación espacial de  $\phi$ , de forma que en toda la región considerada  $\phi$  tiene el mismo valor. Una tercera hipótesis, que no es una restricción importante es que supondremos  $k=0$ , es decir una geometría plana. Entonces las ecuaciones de Einstein ( $\epsilon=1$ ) son (II.2-4)



$$\frac{\ddot{R}^2(t)}{R^2(t)} = H^2(t) = \frac{8\pi G}{3} [p(t) + p'(t)] \quad (1)$$

$$2 \frac{\ddot{R}(t)}{R(t)} + H^2(t) = -8\pi G [p(t) + p'(t)] \quad (2)$$

con

$$p(t) = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad p'(t) = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \quad (3)$$

Consideremos ahora la situación en un universo muy primitivo en el que  $T > 10^{27} K$ . Como hemos dicho antes  $\phi=0$  y vemos que  $p'$  tiene un valor constante  $p' = +V(0)$ . Por otra parte si suponemos dominación de radiación sabemos que  $R(t) \propto t^{1/2}$  mientras que  $p(t) \propto t^{-2}$ . Por lo tanto en (1) domina  $p(t)$  en el término de la derecha de (1) y por tanto la evolución de  $R(t)$  es como si el término  $p'$  no existiera, esto es,  $p(t)$  decrece como  $t^{-2}$  cuando  $t$  aumenta. Como para algunos de los valores de los parámetros de los GUTs resulta que la evolución de  $R(t)$  es más rápida que la transición de fase,  $\phi$  permanece en el valor cero mientras que la temperatura se hace menor que la crítica. El término  $p$  en (1) es hoy mucho menor que  $p'$ , es decir la evolución viene dominada por  $V(0)$ .

$$\frac{\ddot{R}(t)}{R^2(t)} = \frac{8\pi G}{3} V(0) \quad (4)$$

y si  $V(0) > 0$  tiene una solución

$$R(t) = e^{\xi t} \quad \xi^2 = \frac{8\pi G}{3} V(0) \quad (5)$$

Entonces  $R(t)$  sufre una expansión exponencial. Recordemos que esto es análogo a lo que sucedía en un universo de de Sitter con  $k=0$  ( $\dot{p}(t)=p(t)=0$  y con constante cosmológica  $\Lambda$ ). Entonces

$$\Lambda = 8\pi G V(0) \quad (6)$$

Vemos pues reaparecer la constante cosmológica en un contexto muy distinto.

Consideremos de nuevo la situación en que el campo escalar aún domina pero ha comenzado a separarse del valor  $\phi=0$ . Entonces

$$\frac{\ddot{R}^2(t)}{R^2(t)} = H^2(t) = \frac{8\pi G}{3} \left\{ \frac{1}{2} \dot{\phi}^2(t) + V(\phi(t)) \right\} \quad (7)$$



Recordemos la ecuación (II-2.5) que puede reescribirse como

$$\ddot{\phi}(t) + 3[\rho(t) + p(t)] \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} = 0 \quad (1)$$

y que no es más que la conservación del tensor energía momento. En la situación presente, cuando el campo escalar domina, la ecuación (1) es válida con  $\rho$  y  $p$  sustituidas por  $\rho'$  y  $p'$ . Teniendo en cuenta (16.3) se obtiene

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V' = 0, \quad V' \equiv dV/d\phi \quad (2)$$

Las ecuaciones (16.7) y (2) representan las ecuaciones que rigen la evolución del factor de escala  $R(t)$  y del campo escalar  $\phi(t)$ , cuando este último es el agente dominante en la evolución. En general es difícil encontrar soluciones exactas de estas ecuaciones para cualquier forma razonable de  $V(\phi)$ . Por ejemplo las formas representadas en las figuras de las páginas 9 y 10 corresponden respectivamente a

$$V(\phi) = \lambda_0 \phi^2 + \lambda_1 \phi^3 + \lambda_2 \phi^4 + V_0 \quad (3)$$

$$V(\phi) = \lambda (\phi^2 - \sigma^2)^2 \quad (4)$$

para valores apropiados de las constantes  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, V_0, \lambda, \sigma$ . Sin embargo es muy difícil encontrar soluciones exactas de (16.7) y (2) para los potenciales (3) o (4). Hoy una cierta polémica en las aproximaciones mesocósmas para resolver estas ecuaciones y por tanto una imagen totalmente clara del proceso de inflación aun no existe.

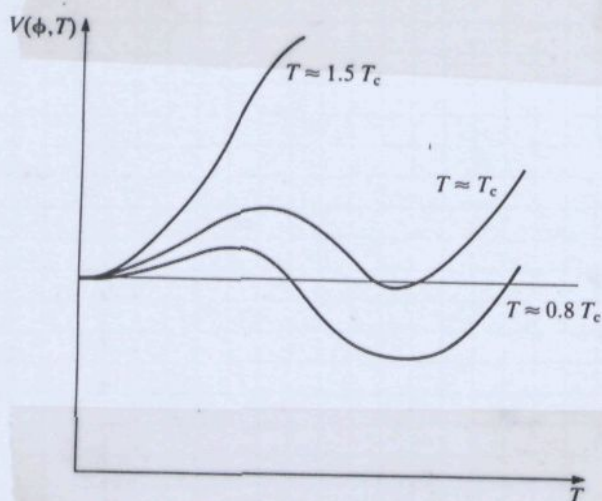
En realidad las cosas son algo más complicadas pues para discutir las transiciones de fase en el universo primitivo se debe conocer el llamado potencial efectivo  $V(\phi, T)$  que debe obtenerse mediante teoría cuántica de campos y usando métodos aproximados. El potencial efectivo usado por Linde y por Albrecht y Steinhardt está basado en el mecanismo de Coleman-Weinberg y viene dado por

$$V(\phi, T) = \alpha \phi^2 - A \phi^4 + B \phi^4 \ln(\phi^2/\phi_0^2) + 18 \left( \frac{g^4}{16\pi^2} \right) \int_0^\infty dy y^2 \ln \left\{ 1 - e^{-[y^2 + 25g^2\phi^2/(8T^2)]^{1/2}} \right\} \quad (5)$$

donde  $\alpha, A, B, \phi_0$  y  $g$  son constantes. En la figura de la próxima página se da la forma de  $V(\phi, T)$  para tres valores típicos de  $T$ , conamos a la temperatura crítica  $T_c$ .

Antes de terminar intentaremos dar algunas respuestas a los problemas planteados antes





En relación al problema de los monopolos, los nuevos modelos inflacionarios intentan resolver el problema del horizonte, el de los monopolos y el de las paredes de dominio de forma conjunta, exigiendo que antes de la transición de fase la región del espacio de la que se ha originado el universo observable sea mucho menor que la distancia al horizonte, de forma que esta región pueda quedar bien homogeneizada, y la inflación de esta pequeña región conduzca a un universo observable en la que hay pocos monopolos, fronteras de dominio, de acuerdo con los datos experimentales. Con relación a la asimetría materia-antimateria ya hemos comentado que en algunas formas de teorías GUT es posible explicar este hecho experimental.

En la forma original de GUT el modelo tenía una dificultad importante pues la misma transición de fase creaba inhomogeneidades inconsistentes con los datos experimentales actuales. Las dificultades de los modelos actuales de universos inflacionarios se centran en que no hay aun cálculos detallados fiables y que la forma del potencial se deben ajustar muy bien lo cual no es demasiado convincente.