

ENTROPÍA

Consideremos un universo de Robertson - Walker (I-9.1)

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left\{ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right\} \quad (1)$$

$$[R(t)] = L, \quad [r] = [\theta] = [\phi] = 1, \quad k = 0, \pm 1.$$

Las ecuaciones de Einstein son ahora (IV-6.4)

$$\ddot{R}^2(t) + kc^2 - \frac{1}{3} \Lambda c^2 R^2(t) = \frac{8\pi G}{3} R^2(t) \rho(t) \quad (2)$$

$$2R(t)\ddot{R}(t) + \dot{R}^2(t) + kc^2 - \Lambda c^2 R^2(t) = - \frac{8\pi G}{c^2} R^2(t) p(t)$$

donde Λ , $\rho(t)$, $p(t)$ son, respectivamente, la constante cosmológica, la densidad y la presión. G es la constante de Newton.

$$[c] = L T^{-1}, \quad [G] = M^{-1} L^3 T^{-2}, \quad [\Lambda] = L^{-2} \quad (3)$$

$$[\rho(t)] = M L^{-3}, \quad [p(t)] = M L^{-1} T^{-2}$$

La denominada horizonte $r_H(t)$ viene determinada por

$$\int_0^{r_H(t)} dr \frac{1}{\sqrt{1 - kr^2}} = c \int_0^t dt \frac{1}{R(t)} \quad (4)$$

De aquí

$$k = +1 \quad \arcsin r_H(t) = c \int_0^t dt \frac{1}{R(t)} \quad (5)$$

$$k = 0 \quad r_H(t) = c \int_0^t dt \frac{1}{R(t)} \quad (6)$$

$$k = -1 \quad \ln [r_H(t) + \sqrt{1 + r_H^2(t)}] = c \int_0^t dt \frac{1}{R(t)} \quad (7)$$

La distancia al horizonte $d_H(t)$ viene dada por

$$d_H(t) = R(t) r_H(t)$$

El elemento de volumen espacial de (1.1) es

$$dV = R^3(t) \frac{1}{\sqrt{1 - kr^2}} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (1)$$

y por tanto el volumen encerrado en $r < r_H(t)$ es

$$k = +1 \quad V[r_H(t)] = 2\pi R^3(t) \left\{ -r_H(t) \sqrt{1 - r_H^2(t)} + \arccos r_H(t) \right\}$$

$$k = 0 \quad V[r_H(t)] = \frac{4\pi}{3} R^3(t) r_H^3(t) \quad (2)$$

$$k = -1 \quad V[r_H(t)] = 2\pi R^3(t) \left\{ r_H(t) \sqrt{1 + r_H^2(t)} + \ln \left[r_H(t) + \sqrt{1 + r_H^2(t)} \right] \right\}$$

De aquí se obtienen los volúmenes

$$k = \pm 1, 0 \quad S[r_H(t)] = 4\pi R^2(t) r_H^2(t) \quad (3)$$

De las ecuaciones (1.2) multiplicando la primera por $c^2 R(t)$ y derivando con respecto a t y usando la segunda

$$\frac{d}{dt} \left\{ p(t) c^2 R^3(t) \right\} = -p(t) \frac{d}{dt} R^3(t) \quad (4)$$

Nota que esta ecuación implica

$$R^3(t) \frac{d p(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left\{ [p(t) c^2 + p(t)] R^3(t) \right\} \quad (5)$$

En la evolución del universo la temperatura y el tiempo están relacionados de tal forma para la entropía

$$dS(V, T) = \frac{1}{T} \left\{ d [c^2 p_{eq}(T) V] + p_{eq}(T) dV \right\} \quad (6)$$

de donde

$$\frac{\partial S(V, T)}{\partial V} = \frac{1}{T} \left\{ c^2 p_{eq}(T) + p_{eq}(T) \right\}, \quad \frac{\partial S(V, T)}{\partial T} = \frac{V c^2}{T} \frac{d p_{eq}(T)}{dT} \quad (7)$$

Como $S(V, T)$ es una función de estado

$$\frac{\partial^2 S(V, T)}{\partial T \partial V} = \frac{\partial^2 S(V, T)}{\partial V \partial T} \quad (8)$$

de donde

$$\frac{d p_{eq}(T)}{dT} = \frac{1}{T} \left\{ c^2 p_{eq}(T) + p_{eq}(T) \right\} \quad (1)$$

se tiene

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{R^3(t)}{T} \left[p_{eq}(T) c^2 + p_{eq}(T) \right] \right\} =$$

$$= - \frac{1}{T^2} \frac{dT}{dt} R^3(t) \left[p_{eq}(T) c^2 + p_{eq}(T) \right] + \frac{1}{T} \frac{d}{dt} \left\{ R^3(t) \left[p_{eq}(T) c^2 + p_{eq}(T) \right] \right\}$$

$$= - \frac{1}{T^2} \frac{dT}{dt} R^3(t) \left[p_{eq}(T) c^2 + p_{eq}(T) \right] + \frac{1}{T} R^3(t) \frac{d p_{eq}(T)}{dt} =$$

$$= \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} R^3(t) \left\{ - \frac{1}{T} \left[p_{eq}(T) c^2 + p_{eq}(T) \right] + \frac{d p_{eq}(T)}{dT} \right\} = 0$$

esto es

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{R^3(t)}{T} \left[p_{eq}(T) c^2 + p_{eq}(T) \right] \right\} = 0 \quad (2)$$

Esta ecuación implica

$$dS(V, T) = \frac{1}{T} \left\{ d \left[c^2 p_{eq}(T) V \right] + p_{eq}(T) dV \right\} =$$

$$= \frac{1}{T} \left\{ d \left[c^2 p_{eq}(T) V + p_{eq}(T) V \right] - V \frac{d p_{eq}(T)}{dT} dT \right\}$$

y usando (1)

$$dS(V, T) = \frac{1}{T} d \left\{ \left[c^2 p_{eq}(T) + p_{eq}(T) \right] V \right\} - \frac{V}{T^2} \left[c^2 p_{eq}(T) + p_{eq}(T) \right] dT \quad (3)$$

y por tanto salvo una constante aditiva

$$S(V, T) = \frac{V}{T} \left\{ c^2 p_{eq}(T) + p_{eq}(T) \right\} \quad (4)$$

y por tanto (2) implica que la entropía por unidad de volumen medida por un observador solidario con el sistema de coordenadas es constante en el transcurso del tiempo.

Notar que $S(V, T) \propto R^3(t)$. Indicaremos por σ esta "densidad" de entropía.

W. FISCHLER, L. SUSSKIND. "Holography and cosmology" (hep-th/9806039) y

J. D. BEKENSTEIN "Do we understand black hole entropy?" (gr-qc/9609015 v2)

Estos y otros autores creen que

$$\frac{V[r_H(t)]}{R^3(t)} \sigma < \frac{1}{4} \frac{k_B c^3}{\hbar G} S[r_H(t)] \quad (1)$$

donde el primer miembro es la entropía del universo en el instante t , y el segundo es la entropía de un agujero negro cuya área es la del universo

Introducamos las unidades de Planck

Longitud $l_p \equiv \left(\frac{\hbar G}{c^3} \right)^{1/2} = 1.61605(11) \times 10^{-33} \text{ m}$

Tiempo $t_p \equiv \left(\frac{\hbar G}{c^5} \right)^{1/2} = 5.39056(24) \times 10^{-44} \text{ s} \quad (2)$

Temperatura $T_{pK} \equiv \left(\frac{c^5 \hbar}{G} \right)^{1/2} = 1.221047(74) \times 10^{22} \text{ K}$

Noten que $V[r_H(t)]/R^3(t)$ es una cantidad adimensional y midiendo las otras en unidades de Planck $[\tilde{x} \equiv x/\delta_p]$ tenemos

$$\frac{V[r_H(t)]}{R^3(t)} \tilde{\sigma} < \frac{1}{4} \tilde{S}[r_H(t)] \quad (3)$$

Podemos introducir

$$p(t) \equiv \frac{[V[r_H(t)]/R^3(t)] \tilde{\sigma}}{\frac{1}{4} \tilde{S}[r_H(t)]} < 1 \quad (4)$$

Recordemos que la contribución a la entropía para un gas perfecto de partículas tales que $m_i c^2 \ll k_B T$ viene dada por

$$\frac{S(T)}{k_B} = \frac{2\pi^2 (k_B T)^3}{45 (\hbar c)^3} \mathcal{N}(T) = 36.5328(10) \text{ cm}^{-3} \left(\frac{T}{\text{K}} \right)^3 \mathcal{N}(T) \quad (5)$$

$$\mathcal{N}(T) = N_b(T) + \frac{7}{8} N_f(T)$$

donde $N_b(T)$ [$N_f(T)$] es el número total de grados de libertad de spin independientes de todos los bosones [fermiones] que cumplen la condición $m_i c^2 \ll k_B T$.

Consideremos el caso de $k=0$, entonces

$$p(t) = \frac{4}{3} \frac{[S(t)/k_B] d_H^3(t)}{d_H^2(t)} = \frac{4}{3} \ell_p^2 [S(t)/k_B] d_H(t) \quad (1)$$

Consideremos

i) El instante presente $t_0 = x \cdot 10^{10} \text{ años} = x \cdot 3.154 \times 10^{17} \text{ s}$ donde $1 \leq x \leq 2$.

$$T_f = 2.726 (5) \text{ K}, \quad W(T_f) = 2, \quad S_f(T_f)/k_B = 1480 (8) \text{ cm}^{-3}$$

$$T_v = 1.946 (4) \text{ K}, \quad W(T_v) = \frac{21}{4}, \quad S_p(T_v)/k_B = 1513 (9) \text{ cm}^{-3}$$

$$S(T_0)/k_B = 2893 (12) \text{ cm}^{-3} \quad (2)$$

La distancia al horizonte es

$$d_H(t_0) = y(t_0) = xy \cdot 9.471 \times 10^{27} \text{ cm} \quad 1 \leq y \leq 3 \quad (3)$$

Por tanto

$$p(t_0) = xy \cdot 9.54 \times 10^{-35} \quad (4)$$

y por tanto $p(t_0) \ll 1$.

Veamos lo que sucede en el instante en que la radiación se desacopla de la materia

$$t_D = 350.000 \text{ y} = 1.106 \times 10^{13} \text{ s} \quad T_D^Y = 4000 \text{ K} \quad T_D^V = 2855 \text{ K}$$

$$S(t_D)/k_B = 9.140 \times 10^{12} \text{ cm}^{-3} \quad d_H(t_D) = y \cdot 3.315 \times 10^{23} \text{ cm.}$$

$$p(t_D) = y \cdot 1.055 \times 10^{-29} \quad (5)$$

y por tanto $p(t_D) \ll 1$.

Entre el tiempo de Planck y t_D el universo está dominado por la radiación y $R(t) \sim t^{1/2}$

$r_H(t) \sim t^{1/2}$, $d_H(t) \sim t$, $p(t) \sim t^{-1/2}$ y por tanto

$$p(t) = p(t_D) \left(\frac{t_D}{t} \right)^{1/2} \quad (6)$$

$$p(t) = 1.055 \times 10^{-29} y \left(\frac{t_D}{t} \right)^{1/2} \quad t_p \leq t \leq t_D \quad (7)$$

y $p(t_D) = y \cdot 0.151$, es decir que en $p(t_D) \sim 1$.

Continuando con $k=0$ y suponiendo

$$R(t) = A t^p \Rightarrow r_H(t) = \frac{c}{A(1-p)} t^{1-p}, \quad d_H(t) = \frac{c}{1-p} t \quad p < 1 \quad (1)$$

entonces (1.3) en un espacio D dimensional implica

$$t^{D(1-p)} < \text{cte } t^{D-1}$$

$$\Rightarrow p > \frac{1}{D} \quad (2)$$

Por otra parte para una ecuación de estado $p = \gamma c^2 \rho$ y $D=3$, las ecuaciones (1.2) con $\Lambda=0$ implican

$$2R(t)\ddot{R}(t) + (3\gamma+1)\dot{R}^2(t) = 0 \Rightarrow R(t) \sim t^{\frac{2}{3(1+\gamma)}}$$

i.e.

$$p = \frac{2}{3(1+\gamma)} > \frac{1}{3} \Rightarrow \gamma < 1 \quad (3)$$

Si $\gamma > 1$ las ondas sonoras serían más rápidas que las de la luz. En D dimensiones el resultado es $p = 2/D(1+\gamma)$ y $p > 1/D$ implica de nuevo $\gamma < 1$. Recordad que la velocidad del sonido es

$$v_s = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \quad (4)$$