

Consideremos el scattering elástico de dos partículas sin spin. Sea $T(s, t)$ la amplitud invariante para este proceso. En el plano complejo s y para t fijo esta amplitud tiene dos cortes: El de la derecha $[(m_1 + m_2)^2, \infty)$ y el de la izquierda $(-\infty, (m_1 - m_2)^2 - t]$, cuando no hay umbrales anormales. La amplitud puede tener también polos asociados con los términos de Born en el canal directo. Si estos no son tenidos en cuenta podemos escribir la relación de dispersión

$$T(s, t) = \frac{1}{\pi} \int_{(m_1 + m_2)^2}^{\infty} ds' \frac{\text{Im} T(s', t)}{s' - s} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{(m_1 - m_2)^2 - t} ds' \frac{\text{Im} T(s', t)}{s' - s} \quad (1)$$

Por razones de simetría es útil introducir

$$v \equiv \frac{s - u}{2m_1} \quad (2)$$

y entonces

$$T(v, t) = \frac{1}{\pi} \int_{v_0}^{\infty} dv' \frac{\text{Im} T(v', t)}{v' - v} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-v_0} dv' \frac{\text{Im} T(v', t)}{v' - v} \quad (3)$$

$$v_0 \equiv \frac{t + 4m_1 m_2}{2m_1}$$

Si introducimos ahora

$$T^{(\pm)}(v, t) \equiv T(v, t) \pm T(-v, t) \quad (4)$$

y entonces

$$T^{(\pm)}(v, t) = \frac{1}{\pi} \int_{v_0}^{\infty} dv' \text{Im} T^{(\pm)}(v', t) \left[\frac{1}{v' - v} \pm \frac{1}{v' + v} \right] \quad (5)$$

Estas relaciones se han escrito sin sustracciones en la hipótesis que $T(v, t)$ tiende hacia cero cuando $v \rightarrow \infty$. Si este no fuera el caso, entonces deberíamos escribir una relación de dispersión sustraída tantas veces como fuera necesario. Para que los términos de Born puedan quedar incluidos pondremos $v_0 = 0$ y si hay polos estos aparecerán como funciones delta en $\text{Im} T^{(\pm)}$.

Si la integral $\int_0^{\infty} dv' \text{Im} T^{(\pm)}(v', t)$ converge entonces (5) es cierta sin sub-

tracciones y $T^{(-)}(v, t)$ se comporta asintóticamente como

$$T^{(-)}(v, t) \underset{v \rightarrow \infty}{\sim} - \frac{2\pi}{v\pi} \int_0^{\infty} dv' \operatorname{Im} T^{(-)}(v', t) + O(v^{-2}) \quad (1)$$

Esto no es un teorema riguroso y puede fallar para algunas formas oscilatorias de $\operatorname{Im} T^{(-)}$. Sin embargo es cierto si la forma asintótica de $\operatorname{Im} T^{(-)}$ se comporta a la forma v^{α} , lo cual supondremos, si ahora $T^{(-)}$ decrece más rápidamente que $1/v$ asintóticamente entonces (1) implica

$$\int_0^{\infty} dv \operatorname{Im} T^{(-)}(v, t) = 0 \quad (2)$$

Se dice entonces que $T^{(-)}$ satisface una relación de superconvergencia. Es una consecuencia de analiticidad y del comportamiento asintótico supuesto. En lo que sigue supondremos un comportamiento del tipo v^{α} , con $\alpha < -1$ y entonces (2) es una consecuencia de las relaciones de dispersión.

Veamos lo que nos proponemos hacer: Muchas de la sucesiones físicas no tienen un descenso tan rápido con la energía como el postulado. Sin embargo, el comportamiento observado a altas energías sugiere que la amplitud se comporta como la suma de unas pocas potencias fraccionarias. También se espera esto si la amplitud se aproxima en términos de unos pocos polos de Regge. Si este es el caso, se puede restar de la amplitud su comportamiento dominante a altas energías representado por una suma finita de contribuciones de polos de Regge. La diferencia ya puede decrecer como $1/v$ y por tanto satisfacer una relación de superconvergencia. Formulando el comportamiento a altas energías en términos de un número finito de polos de Regge, la relación de superconvergencia es un condicionamiento sobre la amplitud a energías bajas e intermedias, antes de que aparezca el régimen de Regge. Esto permite relacionar las amplitudes a bajas energías, descriptibles en términos de movimientos de fase, con las amplitudes a altas energías, descriptibles en términos de polos de Regge.

La contribución a la amplitud de un polo de Regge $\alpha_i(t)$ puede escribirse como

$$T_i^{(+)}(v, t) = \beta_i(t) \frac{\xi - e^{-i\pi\alpha_i(t)}}{\sin\pi\alpha_i(t)} v^{\alpha_i(t)} \quad (1)$$

donde $\xi = \pm 1$ correspondiendo a que el término sea par (+1) o impar (-1) bajo $u \leftrightarrow s$.

de donde

$$\text{Im } T_c^{(-)}(v, t) = \beta_c(t) v^{\alpha_c(t)} \quad (1)$$

clasifiquemos estos polos en dos grupos:

$$\alpha_c(t) > -1, \quad \alpha_j(t) < -1 \quad (2)$$

En el caso en que existan polos del primer tipo (2.2) no es válida, pero podemos sustraer la contribución de los polos $\alpha_c(t) > -1$ y establecer así una amplitud que ya satisfaga la regla de superconvergencia

$$\int_0^\infty dv [\text{Im } T^{(-)}(v, t) - \sum_c \beta_c(t) v^{\alpha_c(t)}] = 0 \quad (3)$$

Consideremos ahora el intervalo de integración dividido en dos partes $[0, N]$ y $[N, \infty]$ y dejemos N suficientemente grande para que en la región $[N, \infty)$ la amplitud pueda escribirse como suma de todos los polos de Regge; entonces

$$\int_0^N dv [\text{Im } T^{(-)}(v, t) - \sum_c \beta_c(t) v^{\alpha_c(t)}] + \int_N^\infty dv \sum_j \beta_j(t) v^{\alpha_j(t)} = 0 \quad (4)$$

llevando a cabo la integración

$$\int_0^N dv \text{Im } T^{(-)}(v, t) = \sum_k \frac{\beta_k(t)}{\alpha_k(t) + 1} N^{\alpha_k(t) + 1} \quad k = c, y j \quad (5)$$

de donde

$$S_0(N) \equiv \frac{1}{N} \int_0^N dv \text{Im } T^{(-)}(v, t) = \sum_k \frac{\beta_k(t)}{\alpha_k(t) + 1} N^{\alpha_k(t)} \quad (5)$$

que es la llamada regla de suma a energía finita. Noten que todos los polos de Regge son tomados en cuenta en el miembro de la derecha incluso si hubiera alguno con $\alpha_k(t) = -1$.

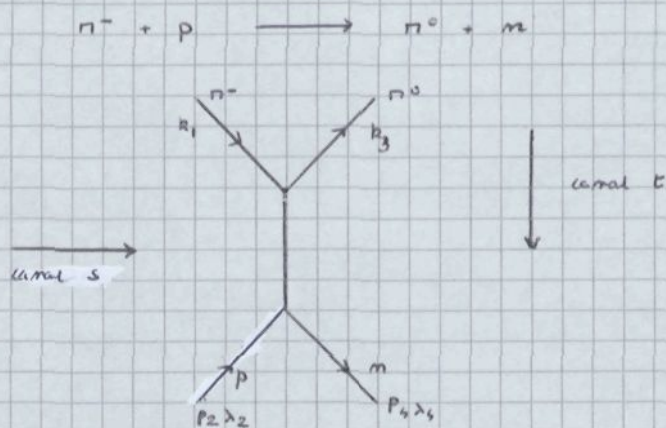
Esta regla se puede generalizar fácilmente a momentos mayores y escribir

$$S_m(N) \equiv \frac{1}{N} \int_0^N dv v^m \text{Im } T(v, t) = \sum_k \beta_k(t) \frac{N^{\alpha_k(t)}}{\alpha_k(t) + m + 1} \quad (6)$$

donde m es un entero que se elige par (impar) cuando $T(v, t)$ es impar (par) bajo el cambio $v \rightarrow -v$. De la expresion anterior es evidente que no conviene tomar m grande pues en el termino de la derecha pesa mas la region cercana a $v=N$ que es la peor conocida y en el termino de la derecha no produce ningun efecto notable. Si bien la relacion es general, su utilidad implica que se puede elegir N relativamente bajo y a pesar de ello usar un pequeño número de polos de Regge. Estas reglas de suma se pueden generalizar a valores de m no enteros, si bien se debe hacer con un cierto cuidado para no violar las propiedades de analiticidad y cruz.

Una posible aplicación de las FESR (Finite Energy Sum Rules) es elegir N de tal forma que entre 0 y N la amplitud de scattering se pueda describir en términos de unas pocas resonancias y que de N a ∞ la amplitud pueda aproximarse mediante unos pocos polos de Regge. Utilizando como "input" los parametros de Regge y dejando como integrales las constantes de acoplamiento de las resonancias se pueden determinar relaciones entre las mismas. Las FESR se pueden tambien usar tambien como condiciones de consistencia entre los datos a bajas energias y a altas energias, o tambien para determinar las trayectorias de Regge a partir de datos de bajas energias.

Consideremos el proceso



Los números cuánticos en el canal t son: $B=0$, $S=0$, $T=1$, $J=\text{entero impar}$, $P=-1$, $G=+1$ y la única partícula con estos números cuánticos es la ρ . y por tanto es de esperar que en el canal S el comportamiento asintótico venga dominado por el intercambio de la trayectoria de la ρ . Para este proceso

$$T(s, t) = \bar{u}(p_4, \lambda_4) [A(s, t) + B(s, t) \gamma \cdot Q] u(p_2, \lambda_2) \quad , \quad Q \equiv \frac{1}{2} (k_1 + k_3) \quad (1)$$

donde $A(s, t)$ y $B(s, t)$ son las dos amplitudes invariantes para describir este proceso. La sección eficaz diferencial es $(M_p = M_n = M, m_{n^+} = m_{n^0} = m)$

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{16\pi \lambda^{1/2}(s, M^2, m^2)} \sum_{\lambda_2} \sum_{\lambda_4} |T(s, t)|^2 \quad (1)$$

$$\sum_{\lambda_2} \sum_{\lambda_4} |T(s, t)|^2 = 2 \left\{ |A|^2 [(p_2 p_4) + M^2] + [AB^* + A^*B] M (Q \cdot (p_2 + p_4)) + |B|^2 [2(p_2 \cdot Q)(p_4 \cdot Q) - (p_2 p_4)Q^2 - M^2 Q^2] \right\} \quad (2)$$

Baro

$$p_2 \cdot p_4 = M^2 - t/2 \quad Q \cdot (p_2 + p_4) = K_1 (p_2 + p_4) = \frac{1}{2} (s - u)$$

$$Q^2 = m^2 - t/2 \quad (p_2 \cdot Q) = \frac{1}{4} (s - u)$$

Introduciendo

$$A'(s, t) \equiv A(s, t) + \frac{s - u}{4M^2 - t} M B(s, t) \quad (3)$$

Se obtiene

$$\sum_{\lambda_2} \sum_{\lambda_4} |T(s, t)|^2 = 4M^2 \left\{ \left(1 - \frac{t}{4M^2}\right) |A'(s, t)|^2 - \frac{1}{4M^2} \frac{t}{1 - \frac{t}{4M^2}} \left\{ \lambda(s, M^2, m^2) + s t \right\} |B(s, t)|^2 \right\} \quad (4)$$

Se puede probar que en el límite de grandes energías y suponiendo la dominancia del ρ

$$A'(s, t) = C(t) [\alpha(t) + 1] \frac{1 - e^{-i\pi\alpha(t)}}{\sin \pi\alpha(t)} \left(\frac{w}{w_0} \right)^{\alpha(t)} \quad (5)$$

$$B(s, t) = D(t) [\alpha(t) + 1] \alpha(t) \frac{1 - e^{-i\pi\alpha(t)}}{\sin \pi\alpha(t)} \left(\frac{w}{w_0} \right)^{\alpha(t)-1}$$

donde w es la energía del pión en el sistema laboratorio. Anbad y Chiu [Phys. Rev. 157, 1045 (1966)] han intentado ajustar los datos de $\pi^- p \rightarrow \pi^0 n$ a altas energías suponiendo para $\alpha(t) = \alpha_0 + \alpha' t$ y $C(t) = C_0 e^{c_1 t}$, $D(t) = D_0 e^{d_1 t}$. Sus resultados son compatibles con $C_1 = D_1 = 0$ y encuentran $\alpha(t) = 0.56 + 1.08 t$ en buen acuerdo con la trayectoria de la ρ para $t > 0$. En $t \approx -0.5 \text{ GeV}^2$ aparece un dip en la sección eficaz $d\sigma/dt$. Notar que $\alpha(-0.5) \approx 0$ y en tanto $B = 0$ y ahí es el origen del dip. En otra parte aparece un dip en $t=0$ que es debido a la anulación del término en $|B|^2$ en (4). El ajuste es muy bueno. Sin embargo surgen problemas

La polarización del neutrón normal al plano de scattering viene dada por

$$P \approx \text{Im} [A'(s) B^*(s)]$$

y como A' y B^* tienen la misma fase $P=0$, mientras que experimentalmente $P \approx 15\%$ para momentos entre 6 y 11 GeV/c. La única forma de explicar esto es suponiendo la existencia de otra trayectoria en los mismos números cuánticos, que desconocemos que exista, que al ser menos dominante no produce efectos importantes en $d\sigma/dt$ pero sí en P . Otra posible explicación es suponer la existencia de un anteo a la trayectoria de la p' .

Volviendo a las reglas de suma se puede probar que $A'(v, t)$ y $v B(v, t)$ son ambas antisimétricas. Se puede entonces escribir

$$\begin{aligned} S_0(N) &\equiv \frac{1}{N} \int_0^N dv \, v \, \text{Im} B(v, t) = \frac{\beta(t) \alpha(t)}{\alpha(t) + 1} N^{\alpha(t)} \\ S_2(N) &\equiv \frac{1}{N} \int_0^N dv \, v^3 \, \text{Im} B(v, t) = \frac{\beta(t) \alpha(t)}{\alpha(t) + 3} N^{\alpha(t)} \end{aligned} \quad (1)$$

Hemos usado la amplitud $B(v, t)$ pues en ella todas las resonancias aparecen con el mismo signo, lo cual no sucede con $A'(v, t)$, y así se reduce el error. Para calcular el miembro de la izquierda se pueden usar los comentarios de fase de Bureyre et al [Phys. Lett. 18, 342 (1965)] que van hasta $v = 1.13 \text{ GeV}$ y en tanto digiremos $N = 1.13 \text{ GeV}$. Notar que si hacemos para $B(v, t)$ un desarrollo en ondas parciales toda la dependencia en t viene dada a través de polinomios de Legendre y los coeficientes del desarrollo son conocidos para $v < 1.13 \text{ GeV}$. Entonces podemos continuar a $t > 0$. Notar que aquí aparece una dificultad de principio ya que la convergencia de esta serie de ondas parciales solo está asegurada dentro de la elipse de Lehmann. En la práctica sin embargo la serie termina y un polinomio siempre es prolongable y los resultados son buenos. Este es el método usado por Dolen, Horn y Schmid [Phys. Rev. 166, 1768 (1968)] y calculando $S_0(N)$ y $S_2(N)$ en la región $-1 \text{ GeV}^2 \leq t \leq 1 \text{ GeV}^2$. De (1)

$$\alpha(t) = \frac{3 S_2(t) - S_0(t)}{S_0(t) - S_2(t)} \quad (2)$$

y así encuentran

$$\alpha(t = m_p^2) = 1.0 \pm 0.3, \quad \alpha(0) = 0.4 \pm 0.2, \quad \alpha(-0.2) = 0.3 \pm 0.3$$

De los ajustes de la trayectoria con las masas $\alpha(t = m_p^2) = 1$, $\alpha(0) = 0.48$, $\alpha(-0.2) = 0.30$

Veamos ahora como construir la amplitud a distintas energías. A bajas energías los procesos de formación de resonancias en el canal directo son dominantes y la amplitud puede representarse como

$$T_1 = T_{\text{Res}} + T_{\text{B.G.}} \quad (1)$$

donde $T_{\text{B.G.}}$ (término background) expresa la diferencia entre la suma de las resonancias y la amplitud real. Se espera que sea una función lentamente cambiante con la energía. A altas energías los procesos de intercambio de trayectorias de Regge en el canal cruzado son dominante y podemos escribir

$$T_2 = T_{\text{Regge}} + T_{\text{B.G.2.}} \quad (2)$$

donde $T_{\text{B.G.2.}}$ es la integral de background. Sabemos que esto se hace menor y menos importante cuando la energía crece y se la ignora en los ajustes fenomenológicos.

Durante un cierto tiempo la relación entre T_{Res} y T_{Regge} no era clara. Se suponía que T_{Regge} era pequeño a bajas energías y por tanto ignorable, mientras se suponía que T_{Res} era despreciable a altas energías. En este caso la prescripción correcta para formar T a energías intermedias sería

$$T = T_{\text{Res}} + T_{\text{Regge}} \quad (3)$$

Esta es la prescripción del modelo de interferencia de resonancias (R.I.H. model) de V. Barger y M. Olsson [Phys. Rev. 151, 1123 (1966)]

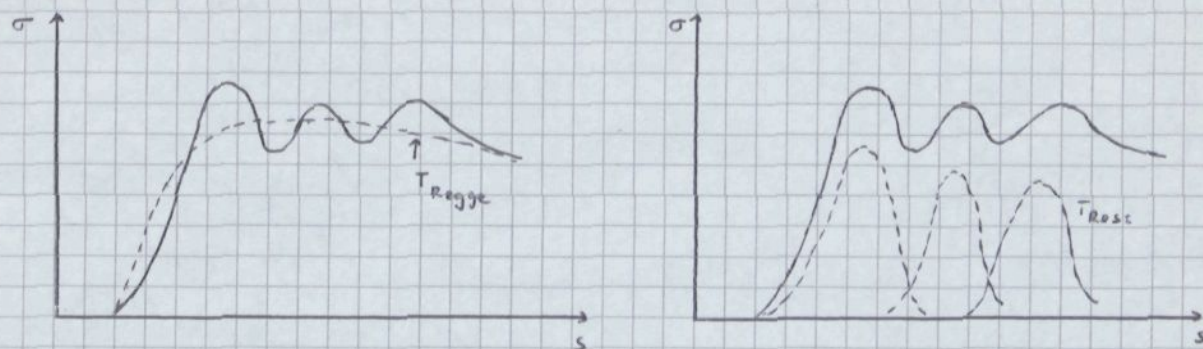
Se ha demostrado que las reglas F.E.S.R. conducen a relaciones definidas entre las descripciones del canal directo y del canal cruzado de la amplitud. Estas relaciones no son consistentes con el R.I.H., pero lo son con el modelo de dualidad que vamos a describir.

La dualidad se basa en la observación de que $T = T_1 = T_2$, es decir que en principio tanto T_1 como T_2 forman representaciones completas de la amplitud, y se puede usar la una o la otra de acuerdo con la que sea mas apropiada en una situación dada. En particular en la región intermedia

$$T \approx T_{\text{Regge}} \approx T_{\text{Res}} \quad (4)$$

En esta interpretación los procesos directos a bajas energías se pueden también considerar como procesos en el canal cruzado. En este término el "promedio" lentamente variante

es debido a T_{Regge} , mientras que las fluctuaciones alrededor de la media son debidas a T_{Boz} . Surgen así las siguientes representaciones



A altas energías T_{Boz} es pequeña y las secciones eficaces son pequeñas. Esto significa en el canal directo que muchas resonancias de superfuerza dando origen a un comportamiento suave a la Regge. Este hecho es consistente con la situación experimental.

Las FESR pueden reescribirse de forma en que sea aparente la dualidad. En efecto consideremos de nuevo (3.4). Como la suma $\sum_j \beta_j(t) v^{\alpha_j(t)}$ debe también satisfacer una relación de superconvergencia podemos escribir

$$\int_0^N dv \left[\text{Im } T(v, t) - \sum_j \beta_j(t) v^{\alpha_j(t)} \right] = \int_0^N dv \sum_j \beta_j(t) v^{\alpha_j(t)} \quad (1)$$

y por tanto

$$\int_0^N dv \text{Im } T(v, t) = \int_0^N dv \text{Im } T_{\text{Regge}}(v, t) \quad (2)$$

lo cual nos permite afirmar que la integral de la amplitud física desde 0 a N es igual a la integral de la expresión Regge en el mismo intervalo. Usando FESR de orden superior obtenemos

$$\int_0^N dv v^m \text{Im } T(v, t) = \int_0^N dv v^m \text{Im } T_{\text{Regge}}(v, t) \quad (3)$$

Como esto debe ser válido para distintos valores de m y cada m da un peso distinto a los diferentes valores de v entonces (3) solo puede ser válido si $T_{\text{Regge}}(v, t)$ da un "promedio semilocal" de $T(v, t)$, esto es la integral de $T_{\text{Regge}}(v, t)$ sobre un intervalo más restringido es también igual a la integral de $T(v, t)$. El tamaño de la región de integración permítete no puede ser especificado exactamente ya que viene limitado por la precisión de las FESR, que dependen de la precisión de la representación de la amplitud a altas energías mediante términos de Regge.

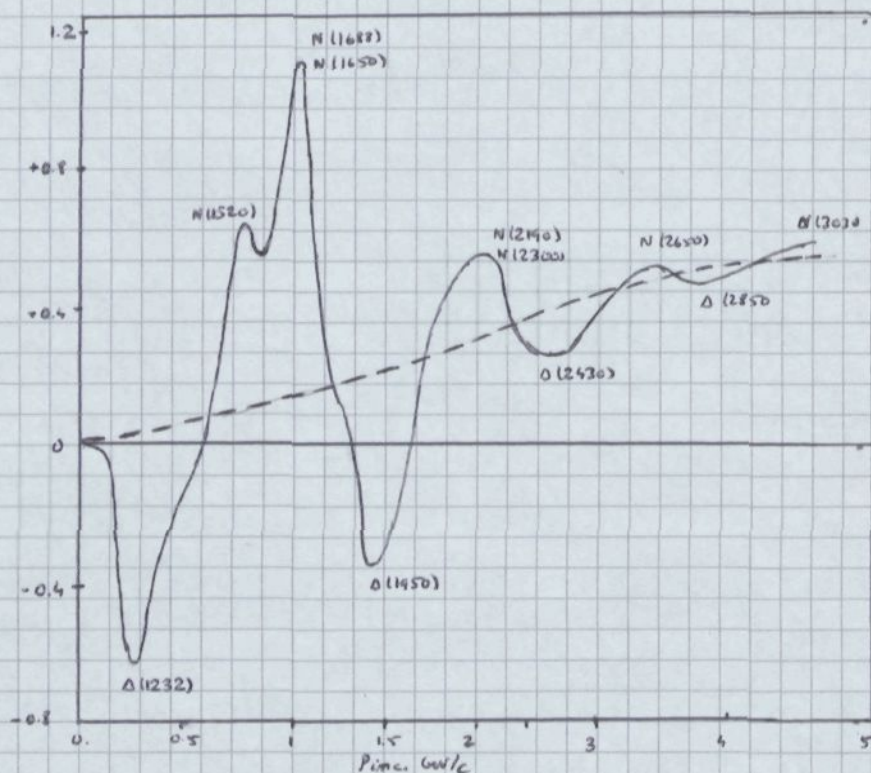
Alternativamente la regla $S_0(N)$ puede utilizarse para demostrar la equivalencia semilocal a energías intermedias, integrando S_0 hasta N_1 y hasta N_2 y usando

$$\int_{N_1}^{N_2} dv \operatorname{Im} T(v, \epsilon) = \int_{N_1}^{N_2} dv \operatorname{Im} T_{\text{Regge}}(v, \epsilon) \quad (1)$$

Para ser hasta que punto todo esto funciona consideremos $A'(v, 0)$ en la reacción antes considerada. Se puede probar que

$$\operatorname{Im} A'(v, 0) = \frac{i}{2} k_n [\sigma_{\text{tot}}(\pi^- p) - \sigma_{\text{tot}}(\pi^+ p)]$$

donde k_n es el momento del pión en el sistema laboratorio. Entonces



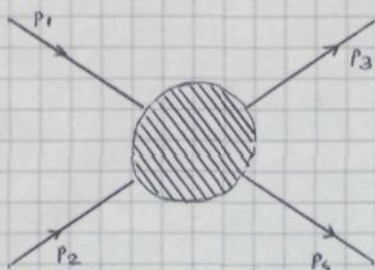
Lo dicho también es cierto para las partes reales utilizando FESR para momentos continuos [A. de la Serna et al. *Nucl. Phys. B* 55A, 479 (1968)].

De acuerdo con todo esto la amplitud puede escribirse

$$T = T_{\text{Regge}} + [T_{\text{Res}} - \langle T_{\text{Res}} \rangle] \quad (1)$$

en contraposición a (7.3). Evidentemente cuando hay resonancias consecutivas son tales que $\langle T_{\text{Res}} \rangle \approx 0$ entonces los dos modelos coinciden. En muchos casos las contribuciones de las resonancias únicamente consisten en una buena aproximación en el intervalo de bajas energías (saturación por resonancias) $T \approx T_{\text{Res}}$ y entonces $T_{\text{Regge}} \approx \langle T_{\text{Res}} \rangle$. A altas energías $T_{\text{Res}} = \langle T_{\text{Res}} \rangle$ y por lo tanto $T = T_{\text{Regge}}$.

Consideremos un proceso de colisión de partículas sin spin



$$s \equiv (p_1 + p_2)^2, \quad t \equiv (p_1 - p_3)^2$$

$$u \equiv (p_1 - p_4)^2, \quad s + t + u = \sum_{i=1}^4 m_i^2 \equiv h$$

(1)

Consideremos el sistema de referencia CM: sean

$\hat{q}$ y $\hat{q}'$ los triángulos de las partículas 1 y 3 y $z_s \equiv \cos \theta = \hat{q} \cdot \hat{q}'$, entonces

$$q = \frac{1}{2\sqrt{s}} \lambda^{1/2}(s, m_1^2, m_2^2), \quad q' = \frac{1}{2\sqrt{s}} \lambda^{1/2}(s, m_3^2, m_4^2)$$

(2)

$$z_s(s, t) = \frac{1}{4sq q'} [s^2 + s(2t - h) + (m_1^2 - m_2^2)(m_3^2 - m_4^2)]$$

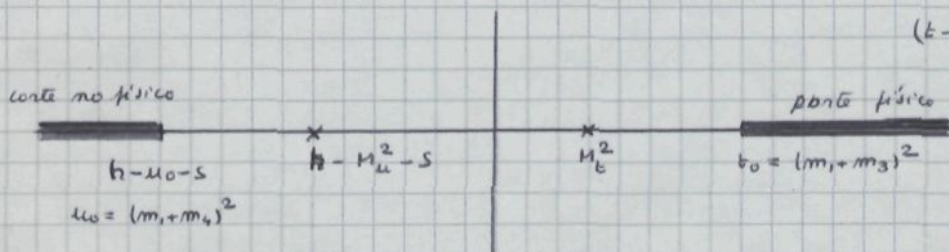
Indiquemos por $T(s, t)$ la amplitud de scattering para este proceso y consideremos el desarrollo en ondas parciales

$$T(s, t) = 16\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) T_{\ell}(s) P_{\ell}(z_s)$$

(3)

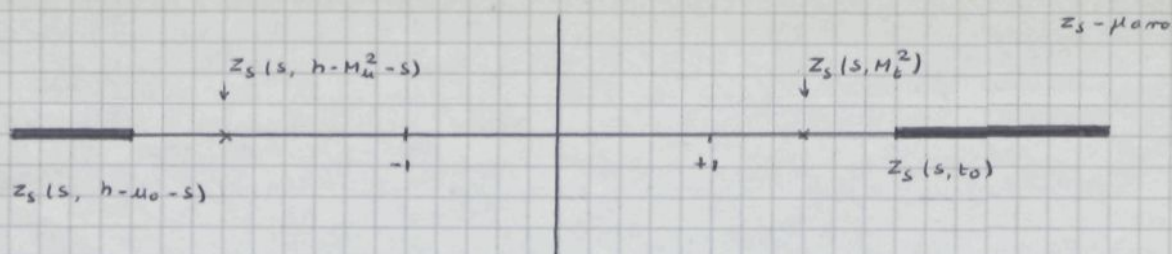
$$T_{\ell}(s) = \frac{1}{32\pi} \int_{-1}^{+1} dz_s P_{\ell}(z_s) T[s, t(s, z_s)]$$

Evidentemente este desarrollo no puede converger, para s fijo, para todos los valores de t , pues $P_{\ell}(z_s)$ es, para ℓ entero no negativo, una función entera de z_s , y por tanto de t , mientras que es bien sabido que $T(s, t)$ tiene singularidades en el plano complejo t . Estas singularidades son



en una situación simple en que hemos supuesto que en el canal t solo aparece una partícula de masa M_t y en el u una partícula de masa M_u y los cortes empiezan en t_0 y $h - u_0 - s$.

Evidentemente se puede ver también lo que sucede en el plano complejo z_s , en el que las singularidades del canal t aparecen en $z_s > 1$ y las del canal u en $z_s < -1$. Entonces



Sea $Z_m = \min [Z_s(s, M_b^2), Z_s(s, h - M_u^2 - s)]$, entonces la serie es convergente sobre el eje real para $Z_s < Z_m$. Mas aún es posible probar, bajo condiciones muy generales que la serie de ondas parciales converge en el plano complejo $Z_s \equiv \cos \theta$ si:

$$|\operatorname{Im} \theta| < \ln [Z_m + \sqrt{Z_m^2 - 1}] \quad (1)$$

lo cual representa el interior de una elipse de focos ± 1 y es la llamada elipse de Lehmann.

Por motivo que mas adelante quedaran claros es necesario escribir

$$T(s, t) \equiv T_R(s, t) + T_L(s, t) \quad (2)$$

donde T_R [T_L] contiene únicamente las singularidades del canal t [u], esto es aquellas en $Z_s > 1$ [$Z_s < -1$]. A partir de estas definamos las amplitudes de sigmatúras bien definidas

$$T_{\pm}[s, t(s, z_s)] \equiv T_R[s, t(s, z_s)] \pm T_L[s, t(s, -z_s)] \quad (3)$$

las cuales solo tienen singularidades en $Z_s > 1$. Notar que

$$\begin{aligned} T[s, t(s, z_s)] &= \frac{1}{2} \left\{ T[s, t(s, z_s)] + T[s, t(s, -z_s)] + T[s, t(s, z_s)] - T[s, t(s, -z_s)] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ T_R[s, t(s, z_s)] + T_L[s, t(s, z_s)] + T_R[s, t(s, -z_s)] + T_L[s, t(s, -z_s)] \right. \\ &\quad \left. + T_R[s, t(s, z_s)] + T_L[s, t(s, z_s)] - T_R[s, t(s, -z_s)] - T_L[s, t(s, -z_s)] \right\} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T[s, t(s, z_s)] &= \frac{1}{2} \left\{ T_+[s, t(s, z_s)] + T_+[s, t(s, -z_s)] \right. \\ &\quad \left. + T_-[s, t(s, z_s)] - T_-[s, t(s, -z_s)] \right\} \quad (4) \end{aligned}$$

De donde se deduce que si bien $T_{\pm}[s, t(s, z_s)]$ no tienen que ser pares

o impar bajo el cambio $z_s \rightarrow -z_s$; por el contrario es cierto que T_+ [T-] contiene la parte par [impar] de T bajo el cambio anterior. Podemos ahora analizar en ondas parciales las amplitudes de signature bien definida:

$$T_{\pm}(s, t) = 16\pi \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) T_{\pm, l}(s) P_l(z_s)$$

(1)

$$T_{\pm, l}(s) = \frac{1}{32\pi} \int_{-1}^{+1} dz_s P_l(z_s) T_{\pm}(s, t(s, z_s))$$

y usando (2.4) se obtiene

$$T_{+, l}(s) = T_l(s) \quad \text{si } l = \text{par}$$

(2)

$$T_{-, l}(s) = T_l(s) \quad \text{si } l = \text{impar}$$

Nos gustaría ahora encontrar una fórmula análoga a (1) pero válida incluso fuera de la elipse de Lehmann. En primer lugar se puede demostrar que dados $T_{\pm, l}(s)$ es posible encontrar una prolongación analítica de la misma al plano complejo l , que designaremos por $T_{\pm}(l, s)$ y que cumple:

$$i) \quad T_{\pm}(l, s) = T_{\pm, l}(s) \quad \text{si } l = \text{entero} > L_{\pm}(s)$$

$$ii) \quad T_{\pm}(l, s) \text{ es una función analítica de } l \text{ para } \text{Re } l > L_{\pm}(s)$$

iii) Se tiene que

$$T_{\pm}(l, s) = O\left(e^{-l \ln |z_m + \sqrt{z_m^2 - 1}|\right)} \quad (3)$$

El primer problema que surge es el de si esta prolongación analítica es única. Para ello es necesario el

Teorema de Carlson. - "Si $f(z)$ es una función tal que

$$i) \quad f(z) \text{ es regular para } \text{Re } z > C, \text{ donde } C \text{ es alguna constante real finita.}$$

$$ii) \quad f(z) = O(e^{k|z|}) \text{ donde } k < \pi \text{ en } \text{Re } z > C$$

$$iii) \quad f(z) = 0 \text{ en alguna sucesión infinita de enteros positivos entonces la función } f(z) \text{ es idénticamente nula.}$$

Supongamos ahora que existiera otra prolongación analítica $\tilde{T}_{\pm}(l, s)$ y que cumpliera las condiciones (i) y (ii) del teorema de Carlson entonces $\tilde{T}_{\pm}(l, s) - T_{\pm}(l, s)$ cumple todas las condiciones de dicho teorema y por tanto es idénticamente nula. Se tiene pues que con condiciones adecuadas para $l \rightarrow \infty$ la prolongación analítica es única. Evidentemente las condiciones son necesarias pues de lo contrario otra prolongación posible es

$$\hat{T}_{\pm}(l, s) = T_{\pm}(l, s) + g(s) \sin \pi l \quad (1)$$

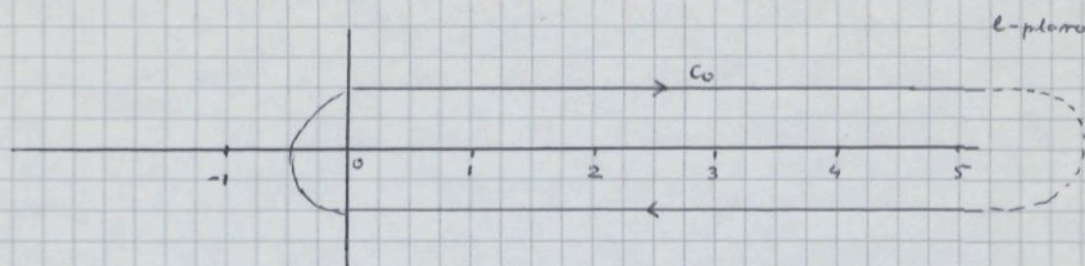
pero esta función oscila rápidamente en $l \rightarrow \infty$ y no cumple la condición (ii) del teorema de Carlson.

Es precisamente este punto de la existencia de una prolongación analítica única lo que hace necesario la introducción de las amplitudes de signature bien definida. En efecto intentemos proceder de la misma forma a partir de la amplitud total $T(s, t)$. Consideremos la reacción $\pi^- + \pi^0 \rightarrow \bar{p} + n$ (canal s). El estado inicial tiene isospin $T=1$ $T_3=-1$, pues las interacciones fuertes conservan el isospin, que es antisimétrico bajo el intercambio de los dos piones. La estadística de Bose implica que la parte espacial de la función de ondas que describe el sistema inicial debe ser impar y por tanto $T_{2m+1}(s) \neq 0$. Entonces no puede existir ninguna prolongación analítica de $T_{\ell}(s)$ que tenga un buen comportamiento para $l \rightarrow \infty$.

Hemos probado que $T_{\pm, \ell}(s)$ tiene una continuación analítica única, $T_{\pm}(l, s)$, que cumple las condiciones (3.3). Haremos ahora una hipótesis mucho más fuerte y supondremos que $T_{\pm}(l, s)$ es una función analítica de l para $\text{Re } l > -1/2$ que contiene sólo singularidades aisladas, de forma que podamos continuar $T_{\pm}(l, s)$ incluso por la izquierda de $\text{Re } l = -1/2$ y aun obtener los valores $T_{\pm, \ell}(s)$ físicos para todo valor de $\ell = 0, 1, 2, \dots$. Para la teoría de colisiones no relativista T. Regge [Nuevo firmamento] demostró, que para una amplia familia de potenciales, las amplitudes $T_{\pm}(l, s)$ son meromorfas para $\text{Re } l > -1/2$ y que todos los polos, llamados polos de Regge, están en el semiplano superior. Podríamos también suponer que para el caso presente $T_{\pm}(l, s)$ son meromorfas en $\text{Re } l > -1/2$, sin embargo para colisiones relativistas Mandelstam ha demostrado que también deben aparecer singularidades aisladas que dan origen a cortes.

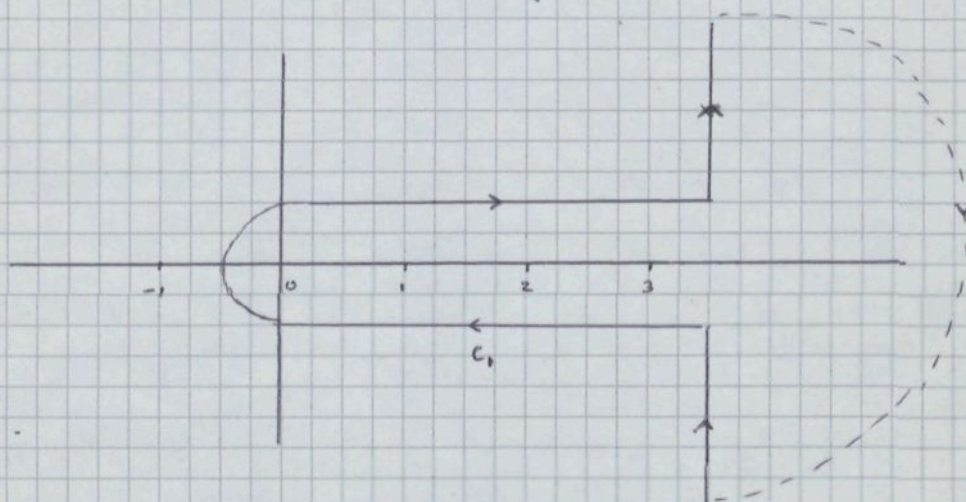
Con la hipótesis realizada podemos reemplazar (3.4) por

$$T_{\pm}(s, t) = 8i\pi \int_{C_0} dl \frac{(2l+1) T_{\pm}(l, s) P_e(-z_s)}{\sin \pi l} \quad (1)$$



donde C_0 contiene en su interior únicamente todos los polos simples del integrando que provienen de los ceros simples de $\sin \pi l$. Estos polos aparecen a valores de l enteros no negativos y para ver la equivalencia de (1) y (3.4) basta recordar que $1/\sin \pi l$ tiene como residuo $(-1)^l/\pi$.

Desplacemos ahora el contorno de integración a



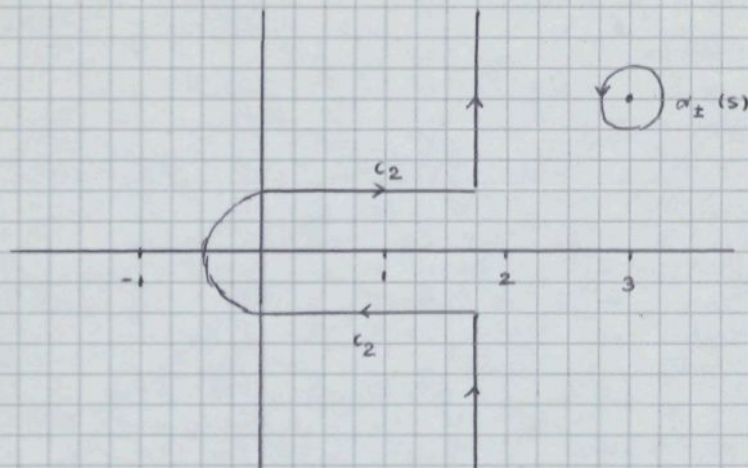
con una línea paralela al eje imaginario en $\text{Re } l = L_{\pm,1} > L_{\pm}(s)$ y un semicírculo en el infinito. Sabemos que podemos hacer esto pues no hay singularidades de $T_{\pm}(l, s)$ en esta región. Se puede ahora probar rigurosamente que la contribución del semicírculo del infinito es nula. Intentemos ahora desplazar la recta paralela al eje imaginario del contorno C_1 hacia valores menores de L_1 , entonces encontraremos singularidades. Imaginemos que la singularidad dominante, esto es la singularidad mas a la derecha en el plano complejo l , es un polo en $l = \alpha_{\pm}(s)$ con residuo $\beta_{\pm}(s)$, es decir que

$$T_{\pm}(l, s) \sim \frac{\beta_{\pm}(s)}{l - \alpha_{\pm}(s)} \quad l \rightarrow \alpha_{\pm}(s) \quad (2)$$

Entonces podemos reemplazar (5.1) por

$$T_{\pm}(s, t) = 8i\pi \int_{c_2} dl \frac{(2l+1) T_{\pm}(l, s) P_e(-z_s)}{\sin \pi l} \quad (1)$$

$$- 16\pi^2 [2\alpha_{\pm}(s) + 1] \beta_{\pm}(s) \frac{P_{\alpha_{\pm}(s)}(-z_s)}{\sin \pi \alpha_{\pm}(s)}$$



donde el segundo término de (1) proviene de la contribución del polo. Nos interesa conocer el comportamiento asintótico de (1) para z_s grandes. Se puede probar que

$$P_{\alpha}(z) = \frac{\Gamma(-\alpha - 1/2)}{\Gamma(-\alpha)} \frac{(2z)^{-\alpha-1}}{\sqrt{\pi}} F\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}, \frac{\alpha}{2} + 1, \alpha + \frac{3}{2}; \frac{1}{z^2}\right) + \frac{\Gamma(\alpha + 1/2)}{\Gamma(\alpha + 1)} \frac{(2z)^{\alpha}}{\sqrt{\pi}} F\left(-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}, -\alpha + 1/2; \frac{1}{z^2}\right), \quad |z^{-2}| < 1 \quad (2)$$

Recordar que en el límite $z \rightarrow \infty$ las funciones hipergeométricas que aquí aparecen tienden hacia 1, entonces

$$|P_{\alpha}(z)| \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} |z|^{|\operatorname{Re} \alpha + 1/2| - 1/2} \quad (3)$$

Entonces de la figura anterior es claro que para $z_s \rightarrow \infty$, el segundo término de (1) dominará sobre el primero y

$$|T_{\pm}(s, t)| \underset{z_s \rightarrow \infty}{\sim} |z_s|^{\operatorname{Re}[\alpha_{\pm}(s)]} \quad (4)$$

Consideraremos por el momento que solo existen polos en la región $\operatorname{Re} l \geq -1/2$ y entonces podemos ir desplazando el contorno c_2 y acabar escribiendo

$$T_{\pm}(s, t) = 8i\pi \int_{-1/2 - i\infty}^{-1/2 + i\infty} dl \frac{(2l+1) T_{\pm}(l, s) P_e(-z_s)}{\sin \pi l} \\ - \sum_i 16\pi^2 [2\alpha_{\pm, i}(s) + 1] \beta_{\pm, i}(s) \frac{P_{\alpha_{\pm, i}(s)}(-z_s)}{\sin \pi \alpha_{\pm, i}(s)} \quad (1)$$

El primer término se llama el término de fondo y debido a que $\text{Re } l = -1/2$ la ecuación (6.3) no dice que se anula para $z_s \rightarrow \infty$.

De todo esto y usando (2.4) obtenemos

$$T(s, t) = 4i\pi \int_{-1/2 - i\infty}^{-1/2 + i\infty} dl \frac{2l+1}{\sin \pi l} \left\{ T_+(l, s) [P_e(-z_s) + P_e(z_s)] + \right. \\ \left. + T_-(l, s) [P_e(-z_s) - P_e(z_s)] \right\} \\ - \sum_i 8\pi^2 \frac{[2\alpha_{+, i}(s) + 1]}{\sin \pi \alpha_{+, i}(s)} \beta_{+, i}(s) [P_{\alpha_{+, i}(s)}(-z_s) + P_{\alpha_{+, i}(s)}(z_s)] \\ - \sum_i 8\pi^2 \frac{[2\alpha_{-, i}(s) + 1]}{\sin \pi \alpha_{-, i}(s)} \beta_{-, i}(s) [P_{\alpha_{-, i}(s)}(-z_s) - P_{\alpha_{-, i}(s)}(z_s)] \quad (2)$$

que es la expresión deseada, donde como antes la integral de fondo tiende hacia cero para $z_s \rightarrow \infty$ y en tanto la amplitud de scattering viene dominada en este límite por la contribución de los polos de Regge.

Notar que los polos $\alpha_{\pm, i}(s)$ en el plano l dan origen a polos de $T_{\pm}(s, t)$ en el plano s a valores de $s = s_R$ tales que $\alpha_{\pm, i}(s_R) = \text{entero}$ pues entonces $\sin \pi \alpha_{\pm, i}(s) \rightarrow 0$ cuando $s \rightarrow s_R$. Las funciones $\alpha_{\pm, i}(s)$ se llaman trayectorias de Regge. Queremos ahora considerar la contribución de un polo de Regge a una amplitud de onda parcial. Sea el polo *

$$T_{\text{polo}}(s, t) = -8\pi^2 \frac{[2\alpha_{\pm}(s) + 1]}{\sin \pi \alpha_{\pm}(s)} \beta_{\pm}(s) [P_{\alpha_{\pm}(s)}(-z_s) \pm P_{\alpha_{\pm}(s)}(z_s)] \quad (3)$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} dz P_e(z) P_{\alpha}(-z) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin \pi \alpha}{(\alpha - l)(\alpha + l + 1)} \quad (5)$$

y (1.3)

4g/001

* Una forma equivalente de escribir este resultado se obtiene usando

$$P_{\alpha}(-z) = e^{-i\pi\alpha} P_{\alpha}(z) - \frac{2}{\pi} \sin \pi\alpha Q_{\alpha}(z) \quad (1)$$

y entonces

$$T_{\text{poa}}(s, t) = -8\pi^2 \frac{[2\alpha_{\pm}(s) + 1]}{\sin \pi\alpha_{\pm}(s)} \beta_{\pm}(s) \left\{ [1 \pm e^{-i\pi\alpha_{\pm}(s)}] P_{\alpha_{\pm}(s)}(-z_s) \mp \frac{2}{\pi} Q_{\alpha_{\pm}(s)}(-z_s) \right\}$$

Para $z \rightarrow \infty$ se puede probar que $Q_{\alpha}(z) \sim z^{-\nu-1}$ y el último término es despreciable, luego

$$T_{\text{poa}}(s, t) = -8\pi^2 \beta_{\pm}(s) \frac{[2\alpha_{\pm}(s) + 1]}{\sin \pi\alpha_{\pm}(s)} [1 \pm e^{-i\pi\alpha_{\pm}(s)}] P_{\alpha_{\pm}(s)}(-z_s) \quad (6)$$

$$T_{e,pole}(s) = \frac{1}{32\pi} \int_{-1}^{+1} dz_s \rho_e(z_s) T_{pole}(s, t) =$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{[1 \pm (-1)^l] \beta_{\pm}(s)}{[\alpha_{\pm}(s) - l][\alpha_{\pm}(s) + l + 1]} \frac{2\alpha_{\pm}(s) + 1}{1} \quad (1)$$

El factor $[1 \pm (-1)^l]/2$ se suele llamar factor de *signature*.

Descompongamos ahora $\alpha_{\pm}(s)$ en sus partes real e imaginaria

$$\alpha_{\pm}(s) = \alpha_{\pm}^{(R)}(s) + i \alpha_{\pm}^{(I)}(s) \quad (2)$$

y para s real esperamos que suceda algo análogo a lo que sucede en colisión con un potencial *

$$\alpha_{\pm}^{(I)}(s) = 0, \quad s < s_0$$

$$\alpha_{\pm}^{(I)}(s) \geq 0, \quad s \geq s_0 \quad (3)$$

donde s_0 es la energía umbral para el proceso considerado. Supongamos ahora que para algún $s = s_{R\pm}$ se tiene que $\alpha_{\pm}^{(R)}(s_{R\pm}) = l = \text{entero} \geq 0$, entonces para s próximas a este valor podemos escribir

$$\alpha_{\pm}(s) \approx l + i \alpha_{\pm}^{(I)}(s_{R\pm}) + \alpha_{\pm}^{(R)'}(s_{R\pm})(s - s_{R\pm}) \quad (4)$$

y entonces en esta región

$$T_{e,pole}(s) \approx -\frac{1}{2} \frac{[1 \pm (-1)^l] \beta_{\pm}(s_{R\pm})}{\alpha_{\pm}(s_{R\pm}) + l + 1} \frac{2\alpha_{\pm}(s_{R\pm}) + 1}{(s - s_{R\pm}) + i \alpha_{\pm}^{(I)}(s_{R\pm}) / \alpha_{\pm}^{(R)'}(s_{R\pm})} \quad (5)$$

Supongamos que $s_{R\pm} < s_0$ entonces $T_{e,pole}(s)$ tiene el típico comportamiento cerca de un estado ligado, mientras que si $s_{R\pm} \geq s_0$ y $\alpha_{\pm}^{(I)}(s_{R\pm})$ no es demasiado grande este es el típico comportamiento de Breit-Wigner para una resonancia.

Notemos que si la trayectoria de Regge es de *signature* positiva, es decir proviene de T_+ , entonces aparece el estado ligado o la resonancia solo si $l = \text{par}$. Por el contrario si la *signature* es negativa solo aparecen para $l = \text{impar}$.

En las figuras adjuntas damos las representaciones de Chew-Frautschi para algunas trayectorias de Regge. En una determinada trayectoria todas las partículas tienen la misma paridad y *isospin*, extrañeza, etc.

49/001

* De propiedades de unitariedad y de analiticidad de $T(s, t)$ se puede deducir algo sobre el comportamiento de $\alpha(s)$ y $\beta(s)$;

i) Es razonable suponer que $\alpha(s)$ y $\beta(s)/q^{2\alpha(s)}$ son funciones reales en el plano cortado de s_0 a $+\infty$

ii) Una trayectoria de Regge no puede cruzar el eje real para valores de s finitos a menos que $\beta(s)$ se anule en el punto de cruce

iii) De la cota de Froissart se deduce $\text{Re } \alpha(s) < 1$ para $s \rightarrow \infty$.

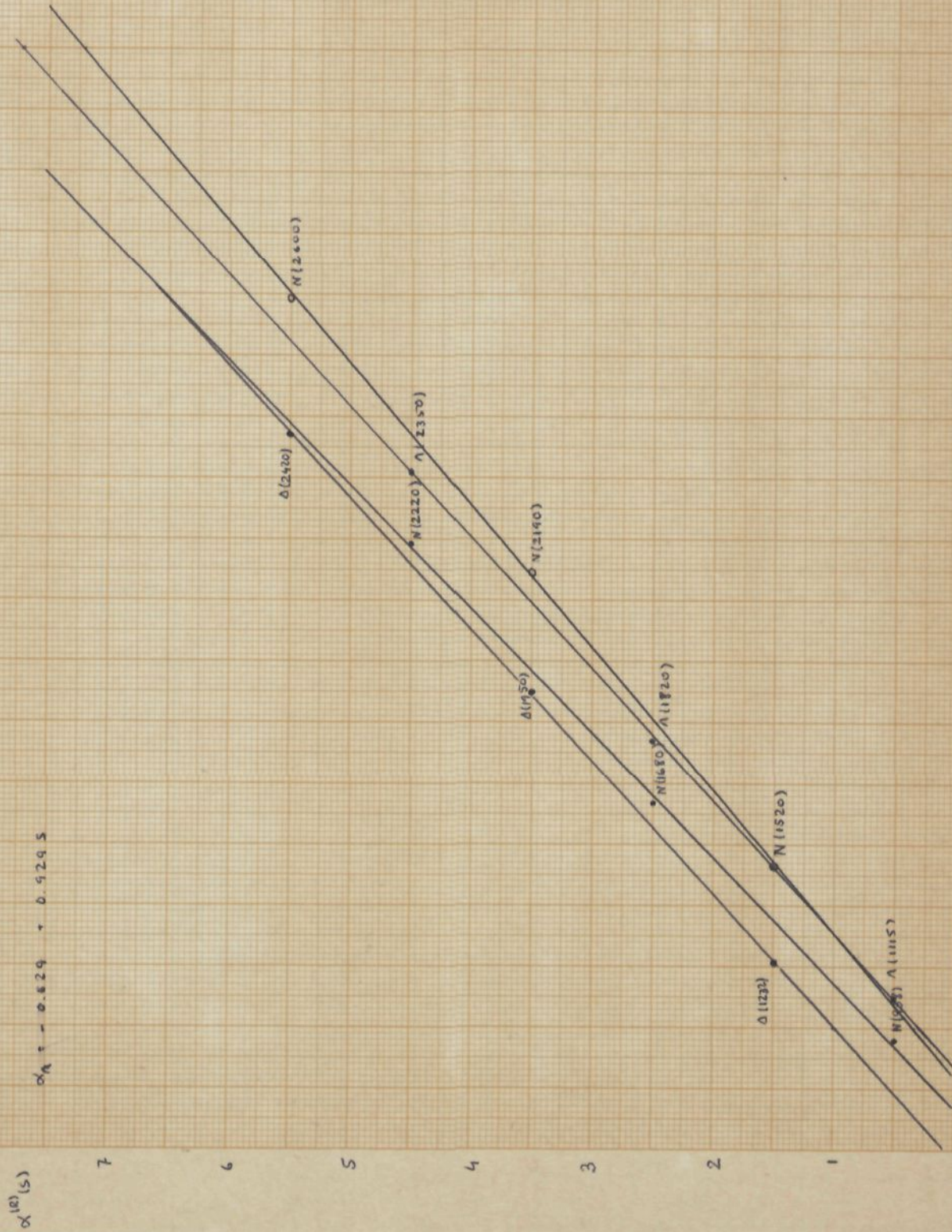
$$\alpha_N = -0.336 + 0.983 S$$

$$\alpha_{N'} = -0.507 + 0.858 S$$

$$\alpha_0 = +0.073 + 0.927 S$$

$$\alpha_A = -0.829 + 0.929 S$$

• positive parity
○ negative parity

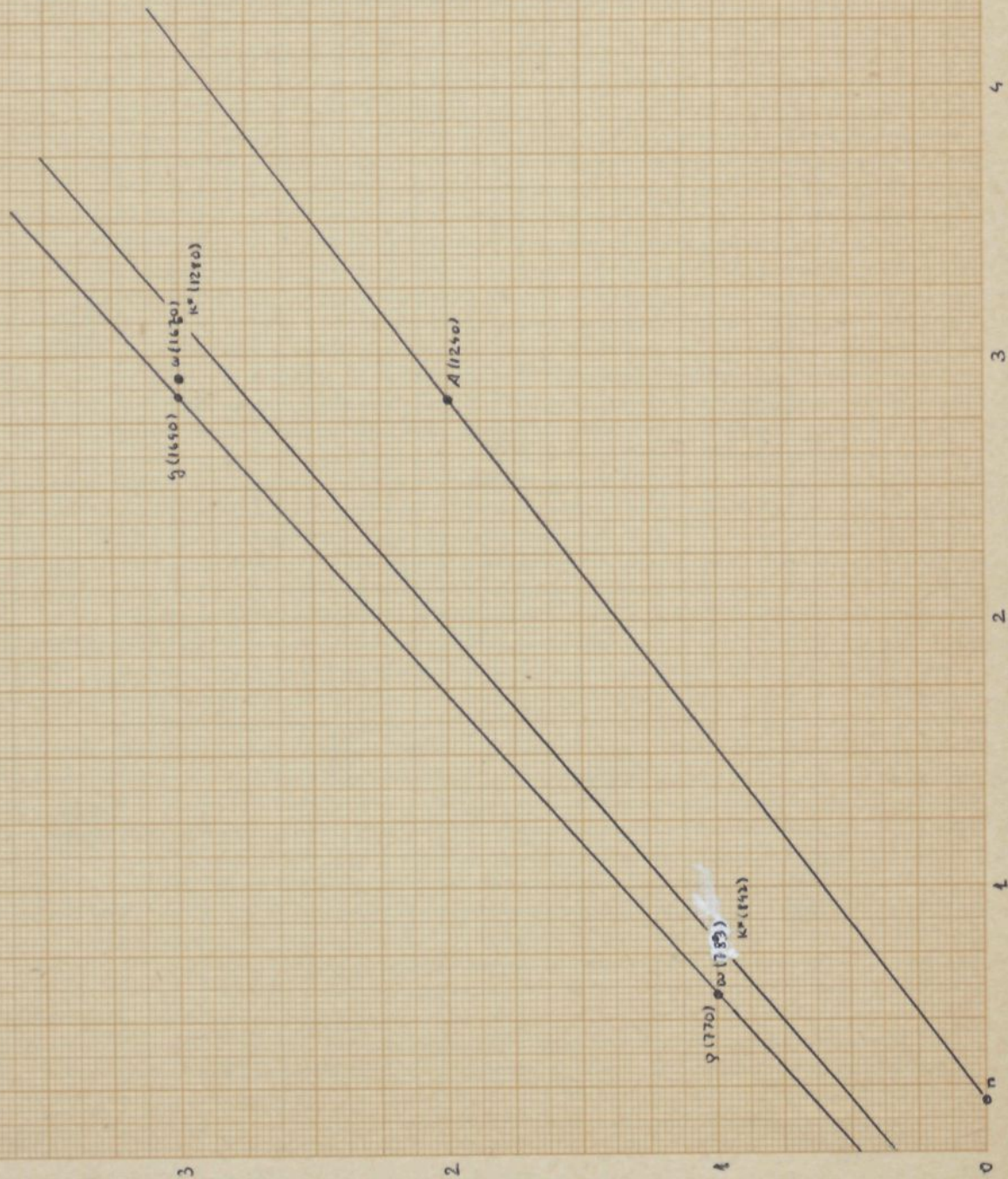


$$\alpha_M = -0.014 + 0.713 S$$

$$\alpha_S = 4.0579 \pm 0.882 S$$

$$\alpha_{K^*} = +0.329 + 0.843 S$$

$\alpha^{(S)}$



$M^2/\mu\mu^2$

De las partículas y resonancias existentes vemos que

$$\alpha^{(R)}(s) = \alpha_0 + \alpha' s \quad (1)$$

para $s > 0$, donde $\alpha_0 = \alpha^{(R)}(s=0)$ y la pendiente α' es $\alpha' \approx 0.9 \text{ GeV}^{-2}$, para todas las trayectorias.

Consideremos ahora la ecuación (7.2) para $z_s \rightarrow \infty$ y supongamos que $\alpha(s)$ sea la trayectoria dominante y que z_s es suficientemente elevado para que solo esta debe ser tomada en cuenta, entonces

$$T(s, t) \underset{s=\text{fijo}, z_s \rightarrow \infty}{\sim} \phi(s) t^{\alpha(s)} \quad (2)$$

y entonces en el canal t y a grandes energías ($t \rightarrow \infty \Rightarrow z_s \rightarrow \infty$) la ecuación diferencial es

$$\frac{d\sigma}{ds} \sim \hat{\phi}(s) t^{2[\alpha(s)-1]} \quad (3)$$

En general en la zona física del canal t se tiene que $s \leq 0$ y esto no permite comprobar que la ecuación (4) es también válida para $s \leq 0$, con los mismos parámetros α_0 y α' . Además la alta rigurosidad de Froissart no permite afirmar que

$$\text{Re } \alpha(s) \leq 1 \quad s = \text{físico en el canal } t \quad (4)$$

Hasta aquí hemos considerado las amplitudes por el canal s pero podríamos escribir en el canal t una fórmula análoga a (7.3) con solo intercambiar las variables s y t en el segundo miembro. Entonces la propiedad de cruzamiento permite escribir

$$\begin{aligned} [T^{(s)}(s, t)]^* &= T^{(t)}(s, t) \Big|_{\text{continuada a } s \rightarrow \infty \text{ y } t \leq 0 \text{ fijo}} = \\ &= \left\{ -8\pi^2 \frac{[2\alpha_{\pm}(t)+1]}{\sin \pi \alpha_{\pm}(t)} \beta_{\pm}(t) [P_{\alpha_{\pm}(t)}(-z_t) \pm P_{\alpha_{\pm}(t)}(z_t)] \right\}_{\substack{s \rightarrow \infty \\ t \leq 0 \text{ fijo}}} \end{aligned} \quad (5)$$

y por tanto

$$T^{(s)}(s, t) \underset{s \rightarrow \infty, t \leq 0 \text{ fijo}}{\sim} \phi(t) s^{\alpha(t)} \quad (6)$$

y por tanto las trayectorias dominantes en el canal t determinan el comportamiento de las secciones eficaces en el canal s a grandes energías. De la expresión anterior

$$\frac{d\sigma(s, t)}{dt} = \hat{\phi}(t) s^{2[\alpha(t) - 1]} \quad (1)$$

y usando el teorema óptico

$$\sigma_T(s) \propto s^{\alpha(0) - 1} \quad (2)$$

Recordar que la cota de Froissart implica $\alpha(0) \leq 1$.

Un hecho sorprendente es que, salvo logaritmos, las secciones eficaces totales parecen tender a límites constantes no nulos a altas energías. Entonces debe existir una trayectoria de Regge con $\alpha(0) = 1$ que es la llamada trayectoria de Pomeronchuk. Esta trayectoria debe tener signatura positiva pues, entre otras razones, no existe ninguna partícula de $J=1$, masa nula e interactuando fuertemente.

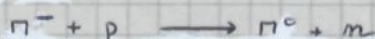
Una consecuencia importante de (1) es que

$$\frac{d\sigma(s, t)}{dt} = \hat{\phi}(t) e^{2[(\alpha_0 - 1) + t\alpha'] \ln s} \quad (3)$$

Como para las trayectorias usuales $\alpha' \approx 0.9 \text{ GeV}^{-2}$ y $\alpha_0 < 1$ y si suponemos que $\hat{\phi}(t)$ no depende fuertemente de t para $t < 0$, entonces tiene que aparecer un fuerte pico de difracción para $t=0$ y la anchura del pico tiende a hacerse mas pronunciada al crecer s ("shrinkage" del pico difractivo). Todo esto está de acuerdo con los datos experimentales. En procesos elásticos se puede intercambiar una trayectoria de Pomeronchuk y entonces el "shrinkage" del pico difractivo no existe o es poco notable lo cual implica que $\alpha' \ll 0.9 \text{ GeV}^{-2}$. A esta trayectoria podría pertenecer el $f(1270)$ con $M=1274(5) \text{ MeV}$ o el $f'(1525)$ con $M=1525(5)$ que ambos tienen $T^G(J^P)_{cm} = 0^+(2^+) +$, con $S=0$. Las pendientes deberían ser $\alpha' = 0.616 \text{ GeV}^{-2}$ y $\alpha' = 0.630 \text{ GeV}^{-2}$.

Consideremos un único ejemplo muy clásico de la forma de proceder

Sea la reacción



es decir la colisión pión-núcleo con intercambio de carga. La reacción es interesante porque los números cuánticos que pueden aparecer en el canal t , $\pi^- + \pi^0 \rightarrow \bar{p} + n$ son $T=1$, $G=1$, $l=\text{impar}$, esto deben tener signatura impar. La única partícula conocida que tiene estos números cuánticos es la ρ y por tanto es de esperar que a grandes energías

$$\frac{d\sigma}{dt} = \hat{\phi}(t) s^{\frac{2[\alpha(t)-1]}{2}} \quad (1)$$

entonces usando datos experimentales de momentos entre 6 GeV/c y 18 GeV/c se obtiene:

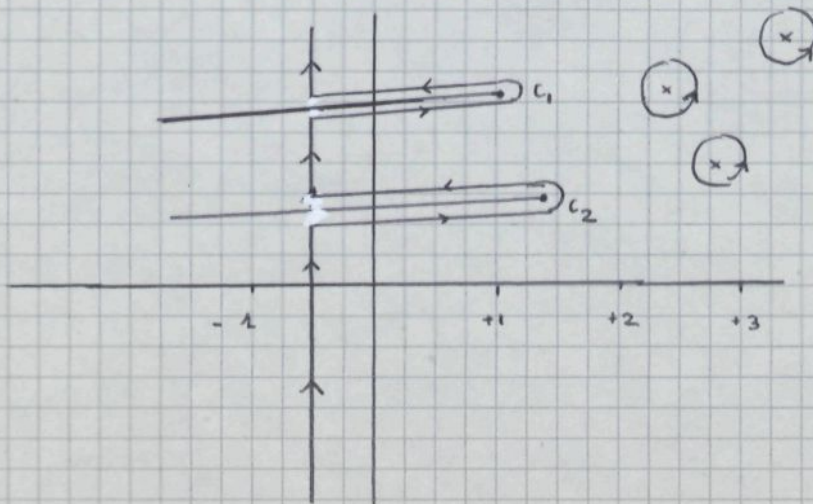
i) De la dependencia en la energía de $(d\sigma/dt)_{t=0}$ se deduce que $\alpha_p(0) \approx 0.52$ con un error de alrededor del 10%.

ii) De $d\sigma/dt / (d\sigma/dt)_0$ se puede determinar $\alpha_p(t)$ para $t < 0$, estudiando la dependencia en s para t fijo y se obtiene que los datos experimentales son bien ajustados con una recta de $\alpha' \approx 1.6 \text{ GeV}$.

Estas condiciones eran satisfactorias, dentro de los errores experimentales, por la trayectoria de la ρ determinada a partir de las masas de la ρ (770) y la γ (4690).

Antes hemos comentado que en la teoría relativista deben aparecer cortes. Entonces se tiene en lugar de (7.1)

$$\begin{aligned} T_{\pm}(s, t) &= 8\pi i \int_{-1/2 - i\infty}^{-1/2 + i\infty} dl \frac{(2l+1) T_{\pm}(l, s) P_l(-z_s)}{\sin \pi l} \\ &= \sum_i 16\pi^2 [2\alpha_{\pm, i}(s) + 1] \beta_{\pm, i}(s) \frac{P_{\alpha_{\pm, i}(s)}(-z_s)}{\sin \pi \alpha_{\pm, i}(s)} \\ &+ 8\pi i \sum_j \int_{C_j} dl \frac{(2l+1) T_{\pm}(l, s) P_l(-z_s)}{\sin \pi l} \end{aligned} \quad (2)$$



Entonces es posible probar que la contribución a un corte es de la forma

$$T^{(s)}(s, t) \underset{\substack{s \rightarrow \infty \\ t < 0 \text{ fijo}}}{\sim} \phi(t) \frac{s^{\alpha(t)}}{[\ln s]^r} \quad (1)$$

donde $\alpha(t)$ es la posición del punto de ramificación y r es una constante que depende de la naturaleza de este.