## IX - Q.E.D.

Vamos ahora a construir el ejemplo mas simple de una teoría gauge empleando el principio de gauge local. Consideremos un fermión sin masa de spin 1/2. Entonces la densidad Lagrangiana libre es

$$L_0(x) = \frac{i}{2} :\bar{\psi}(x)\,\gamma^\mu\,\partial_\mu\,\psi(x): - \frac{i}{2} :\partial_\mu\,\bar{\psi}(x)\,\gamma^\mu\,\psi(x): \qquad (1)$$

Evidentemente $L_0(x)$ es invariante bajo la transformación de gauge global

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = e^{i\Lambda}\,\psi(x) \qquad \Lambda = \text{cte} \qquad (2)$$

Esta transformación se llama global porque $\Lambda$ es una constante universal, independiente del espacio y el tiempo. El principio en las teorías de gauge es que la invariancia anterior debe ser mantenida localmente, esto es para $\Lambda = \Lambda(x)$, donde $\Lambda(x)$ es una función real del espacio-tiempo. En otras palabras la fase de $\psi(x)$ no es observable y podemos elegirla como deseemos. Si aceptamos este principio debemos modificar el Lagrangiano, pues bajo

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = e^{i\Lambda(x)}\,\psi(x) \qquad (3)$$

tenemos

$$L_0(x) \longrightarrow L_0'(x) = \frac{i}{2} :\bar{\psi}(x)\,\gamma^\mu\,[\partial_\mu + i\,\partial_\mu\Lambda(x)]\,\psi(x): -$$

$$- \frac{i}{2} :[\partial_\mu - i\,\partial_\mu\Lambda(x)]\,\bar{\psi}(x)\,\gamma^\mu\,\psi(x): \qquad (4)$$

y por tanto el Lagrangiano no es invariante, y la fase es observable. Como el término adicional es un vector, introduciremos un campo vectorial $A_\mu(x)$ y reemplazaremos $L_0(x)$ por $L_1(x)$ dado por

$$L_1(x) = \frac{i}{2} :\bar{\psi}(x)\,\gamma^\mu[\partial_\mu - i c A_\mu(x)]\,\psi(x): - \frac{i}{2} :[\partial_\mu + i c A_\mu(x)]\,\bar{\psi}(x) \,.\, \gamma^\mu\,\psi(x): \qquad (5)$$

donde $c$ es una constante real arbitraria. La transformación de gauge local que deja $L_1(x)$ invariante es

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = e^{i\Lambda(x)} \qquad (6)$$

$$A_\mu(x) \longrightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{c}\,\partial_\mu\,\Lambda(x)$$

Este sencillo ejemplo ilustra las características más importantes de las teorías de gauge: el exigir invariancia bajo un grupo de transformaciones de gauge locales (en este caso U(1)) implica la existencia de bosones intermedios (en este caso $A_\mu(x)$). El campo $A_\mu(x)$ puede interpretarse como el campo del fotón y $c = e\,Q$ donde $e$ es la carga unidad y $Q$ la carga del campo fermiónico en unidades de $e$.

Para tener una teoría completa es necesario añadir a (73.5) un término correspondiente a la energía cinética del campo $A_\mu(x)$. Definimos la intensidad de campo como

$$F_{\mu\nu}(x) \equiv -\frac{1}{ic}\left[\partial_\mu + ic\,A_\mu(x),\ \partial_\nu - ic\,A_\nu(x)\right] = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) \tag{1}$$

Evidentemente bajo una transformación de gauge $F_{\mu\nu}(x)$ es invariante y por tanto obtenemos la densidad Lagrangiana

$$L(x) = -\frac{1}{4} : F_{\mu\nu}(x)\, F^{\mu\nu}(x) : + \frac{i}{2} : \bar{\psi}(x)\, \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) : - \frac{i}{2} : \partial_\mu \bar{\psi}(x)\, \gamma^\mu \psi(x) :$$

$$- m : \bar{\psi}(x)\, \psi(x) : - e : \bar{\psi}(x)\, \gamma^\mu \psi(x)\, A_\mu(x) : \tag{2}$$

que describe la interacción de los electrones con el campo electromagnético. Hemos añadido un término con la masa del electrón sin necesidad de romper la invariancia gauge local. Sin embargo no podemos añadir un término de masa para el fotón pues esto implicaría la rotura de la invariancia gauge de la teoría.

Es usual escribir la densidad Lagrangiana que describe la interacción de electrones y fotones como

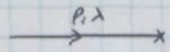
$$L(x) = -\frac{1}{4} : F_{\mu\nu}(x)\, F^{\mu\nu}(x) : + \frac{i}{2} : \bar{\psi}(x)\, \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi(x) : - m : \bar{\psi}(x)\, \psi(x) :$$

$$+ \frac{1}{2}\lambda^2 : A^\mu(x)\, A_\mu(x) : - \frac{1}{2a} : (\partial_\mu A^\mu(x))^2 : - e : \bar{\psi}(x)\, \gamma^\mu \psi(x)\, A_\mu(x) : \tag{3}$$

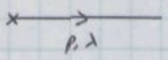
El primer término es la densidad Lagrangiana para el campo electromagnético libre, el segundo y tercer término corresponden a la densidad Lagrangiana para el campo del electrón libre, donde $m$ es el parámetro masa. El último término describe la interacción entre el electrón y el fotón. Se puede ver que en los cálculos intermedios aparecen no sólo las divergencias ultravioletas sino también las infrarrojas, que son debidas a que el fotón no tiene masa. Un término másico, como el cuarto, es una forma útil de regular estas divergencias infrarrojas. Por supuesto el límite $\lambda \to 0$, al final, debe estar siempre bien definido. El quinto término es el que fija el gauge y todos los resultados físicos deben ser independientes del valor de $a$. Es interesante introducir estos términos pues su presencia nos permite realizar una cuantificación covariante.

Se puede probar que las reglas de Feynman son

Electrón

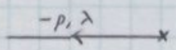
Entrante 

$u(\vec{p}, \lambda)$

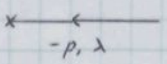
Saliente 

$\bar{u}(\vec{p}, \lambda)$

Positrón

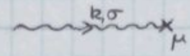
Entrante 

$\bar{v}(\vec{p}, \lambda)$

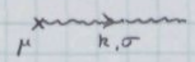
Saliente 

$v(\vec{p}, \lambda)$

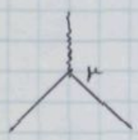
Fotón

Entrante 

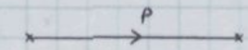
$\epsilon_\mu(\vec{k}, \sigma)$

Saliente 

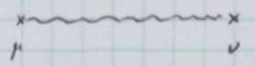
$\epsilon^*_\mu(\vec{k}, \sigma)$

Vértice 

$-e\gamma^\mu$

Propagador fermión 

$$+\frac{i}{(2\pi)^4}\frac{1}{\not{p} - m + i\epsilon}$$

Propagador fotón 

$$-\frac{i}{(2\pi)^4}\frac{g^{\mu\nu} - (1-a)\frac{k^\mu k^\nu}{k^2 - a\lambda^2 + i\epsilon}}{k^2 - \lambda^2 + i\epsilon}$$

i) Para cada vértice un factor $(2\pi)^4\,\delta\left(\sum_{inc} p - \sum_{sal} p\right)$

ii) Un factor $(2\pi)^{-4}\, i^{n+1}$, donde $n$ es el número de vértices

iii) Integrar sobre todos los momentos internos y extraer una $\delta$ que expresa la conservación total de energía - momento

iv) Multiplicar por $(-1)$ por cada loop fermiónico interno con un número par de vértices. Aquellos con número impar de vértices dan una contribución nula (teorema de Furry)

v) El signo relativo entre diagramas del mismo orden que contribuyen a un proceso dado se obtiene exigiendo la antisimetría de $T$ bajo el intercambio de dos líneas fermiónicas externas

vi) Cuando uno integra sobre partículas idénticas en el estado final la sección eficaz lleva un factor $1/N!$ donde $N$ es el número de partículas idénticas.