A.- MATRICES DE DIRAC

Las matrices de Dirac forman un conjunto de cuatro matrices γ^μ que satisfacen las ecuaciones

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2 g^{\mu\nu} \tag{1}$$

Como es bien sabido el álgebra generada por γ^μ es un algebra de Clifford definida en un espacio cuadridimensional y por tanto la única representación irreducible de las matrices de Dirac es de orden cuatro. A partir de ahora supondremos que las γ^μ son matrices 4×4 definidas, salvo equivalencias, por la ecuación (1).

Para estudiar las propiedades de las matrices γ^μ consideraremos los 16 elementos $\Gamma^{(A)}$ $A = 1, 2, \ldots 16$:

$$I$$

$$i\gamma^1 \ , \ i\gamma^2 \ , \ i\gamma^3 \ , \ \gamma^0$$

$$i\gamma^2\gamma^3 \ , \ i\gamma^3\gamma^1 \ , \ i\gamma^1\gamma^2 \ , \ -\gamma^0\gamma^1 \ , \ -\gamma^0\gamma^2 \ , \ -\gamma^0\gamma^3 \ .$$

$$\gamma^1\gamma_5 \ , \ \gamma^2\gamma_5 \ , \ \gamma^3\gamma_5 \ , \ i\gamma^0\gamma_5$$

$$\gamma_5 \tag{2}$$

donde la γ_5 es definida como

$$\gamma_5 \equiv \frac{i}{4!} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \tag{3}$$

donde $\epsilon^{0123} = +1$. De su definición es fácil comprobar que

$$\gamma_5 \gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma_5 = 0 \tag{4}$$

i) Un cálculo directo da

$$\left[\Gamma^{(A)}\right]^2 = I \qquad \forall A = 1, \ldots, 16 \tag{5}$$

ii) Un cálculo directo permite probar que

$$\Gamma^{(A)}\Gamma^{(B)} = \eta\, \Gamma^{(C)} \qquad |\eta| = 1 \tag{6}$$

para todo par de matrices $\Gamma^{(A)}$ y $\Gamma^{(B)}$. Fijado A al recorrer B los números de 1 al 16 lo mismo hace C.

iii) Para cada matriz $\Gamma^{(A)}$ $(A \neq 1)$ es posible encontrar una $\Gamma^{(B)}$ tal que

$$\Gamma^{(A)} = - \Gamma^{(B)} \Gamma^{(A)} \Gamma^{(B)} \qquad A \neq 1 \tag{1}$$

es decir que $\Gamma^{(A)}$ y $\Gamma^{(B)}$ anticonmutan.

iv) De (1) se deduce inmediatamente que

$$Tr \left(\Gamma^{(A)} \right) = 0 \qquad A \neq 1 \tag{2}$$

v) Las dieciséis matrices $\Gamma^{(A)}$ son linealmente independientes. En efecto supongamos que $\sum a_A \Gamma^{(A)} = 0$ entonces

$$a_B \Gamma^{(B)} + \sum_{A \neq B} a_A \Gamma^{(A)} = 0$$

$$\Rightarrow \quad a_B + \sum_{A \neq B} a_A \Gamma^{(A)} \Gamma^{(B)} = 0$$

y $\Gamma^{(A)} \Gamma^{(B)}$ es salvo un factor de modulo uno una matriz $\Gamma^{(C)}$ $(C \neq 1)$. Tomando trazas se encuentra $a_B = 0$. Q.E.D.

vi) Toda matriz X de orden 4 puede escribirse como.

$$X = \frac{1}{4} \sum_A Tr \left(X \Gamma^{(A)} \right) \Gamma^{(A)} \tag{3}$$

En efecto como las matrices $\Gamma^{(A)}$ son linealmente independientes

$$X = \sum_A c_A \Gamma^{(A)} = c_B \Gamma^{(B)} + \sum_{A \neq B} c_A \Gamma^{(A)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad X \Gamma^{(B)} = c_B I + \sum_{A \neq B} c_A \Gamma^{(A)} \Gamma^{(B)}$$

y teniendo en cuenta que $\Gamma^{(A)} \Gamma^{(B)}$ no es proporcional a $\Gamma^{(1)}$ al tomar trazas encontramos el resultado deseado.

vi) Si F y G son dos matrices cualesquiera 4×4 entonces

$$F_{\alpha\sigma} G_{\rho\beta} = \frac{1}{4} \sum_A \Gamma^{(A)}_{\rho\sigma} \left(F \Gamma^{(A)} G \right)_{\alpha\beta} \tag{4}$$

En efecto, de (3) se tiene

$$X_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} \sum_A X_{\gamma\lambda} \Gamma^{(A)}_{\lambda\gamma} \Gamma^{(A)}_{\alpha\beta}$$

Tomemos X como una matriz con elementos $X_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\sigma} \delta_{\rho\beta}$, entonces

$$\delta_{\alpha\sigma} \delta_{\rho\beta} = \frac{1}{4} \sum_A \Gamma^{(A)}_{\alpha\beta} \Gamma^{(A)}_{\rho\sigma}$$

y por tanto

$$F_{\alpha\sigma} G_{\rho\beta} = F_{\alpha\alpha'} G_{\beta'\beta} \delta_{\alpha'\sigma} \delta_{\rho\beta'} = \frac{1}{4} \sum_A F_{\alpha\alpha'} G_{\beta'\beta} \Gamma^{(A)}_{\alpha'\beta'} \Gamma^{(A)}_{\rho\sigma} = \frac{1}{4} \sum_A \left(F \Gamma^{(A)} G \right)_{\alpha\beta} \Gamma^{(A)}_{\rho\sigma}.$$

Ya hemos dicho antes que hay una única representación irreducible de las γ^μ, lo cual significa que todas las representaciones 4×4 de las matrices γ^μ están relacionadas por una transformación de equivalencia. Obviamente todos los resultados físicos son independientes de la representación usada, pero algunas veces es útil introducir una determinada representación. Las dos más usuales son

$$\gamma^0 = \begin{vmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{vmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{vmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{vmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{vmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{Representación A}$$

(1)

$$\gamma^0 = \begin{vmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{vmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{vmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{vmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{vmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{vmatrix} \qquad \text{Representación B}$$

donde las σ_k son la matrices de Pauli en la representación usual. Notemos que en ambas representaciones se cumple

$$\gamma^\mu = \gamma^0 \gamma^{\mu +} \gamma^0 \tag{2}$$

$$\gamma^\mu = \gamma^2 \gamma^{\mu *} \gamma^2 \tag{3}$$

$$\gamma^\mu = - (\gamma^0 \gamma^2) \gamma^{\mu T} (\gamma^0 \gamma^2) \tag{4}$$

Usaremos en ocasiones

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu) \tag{5}$$

cuya representación explícita es

$$\sigma^{0k} = i \begin{vmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{vmatrix}, \quad \sigma^{k\ell} = \epsilon_{k\ell r} \begin{vmatrix} \sigma_r & 0 \\ 0 & \sigma_r \end{vmatrix} \qquad \text{Representación A}$$

$$\sigma^{0k} = -i \begin{vmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & -\sigma_k \end{vmatrix}, \quad \sigma^{k\ell} = \epsilon_{k\ell r} \begin{vmatrix} \sigma_r & 0 \\ 0 & \sigma_r \end{vmatrix} \qquad \text{Representación B}$$

Relaciones útiles

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = +4$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = -2\gamma^\nu$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu = +4 g^{\nu\rho}$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\lambda \gamma_\mu = -2 \gamma^\lambda \gamma^\rho \gamma^\nu$$

$$\mathrm{Tr}(\not a_1 \not a_2 \cdots \not a_{2n+1}) = 0$$

$$\mathrm{Tr}(\not a_1 \not a_2 \cdots \not a_{2n}) = (a_1 . a_2)\,\mathrm{Tr}(\not a_3 \cdots \not a_{2n}) - (a_1 a_3)\,\mathrm{Tr}(\not a_2 \cdots \not a_n) +$$

$$+ (a_1 a_4)\,\mathrm{Tr}(\not a_2 \cdots \not a_n) \cdots + (a_1 . a_n)\,\mathrm{Tr}(\not a_2 \cdots \not a_{n-1}) \qquad n = \text{par}$$

$$\mathrm{Tr}(\not a_1 \not a_2) = 4(a_1 a_2)$$

$$\mathrm{Tr}(\not a_1 \not a_2 \not a_3 \not a_4) = 4\left[(a_1 . a_2)(a_3 . a_4) - (a_1 a_3)(a_2 . a_4) + (a_1 a_4)(a_2 a_3)\right]$$

$$\mathrm{Tr}(\not a_1 \not a_2 \cdots \not a_n) = \mathrm{Tr}(\not a_n \not a_{n-1} \cdots \not a_2 \not a_1)$$

$$\mathrm{Tr}(\not a_1 \not a_2 \gamma_5) = 0$$

$$\mathrm{Tr}(\not a_1 \not a_2 \not a_3 \not a_4 \gamma_5) = 4i\, \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\, a_1^\mu a_2^\nu a_3^\lambda a_4^\rho .$$