

¿ QUE SABEMOS SOBRE LAS PARTICULAS ELEMENTALES ?

1 - Nota preliminar

Consideremos en mecánica clásica un sistema de punto cuyas coordenadas generalizadas son $q_i(t)$ ($i=1,2,\dots,N$) y que viene descrito por un Lagrangiano $L[q_i(t), \dot{q}_i(t)]$, cuyas dimensiones son ML^2T^{-2} . A partir de él se define la acción como

$$J = \int dt L[q_i(t), \dot{q}_i(t)] \quad [J] = ML^2T^{-1} \quad (1)$$

A partir de ella y mediante el principio variacional de Hamilton se obtienen las ecuaciones del movimiento en forma Lagrangiana:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad i=1,2,\dots,N \quad (2)$$

Recordemos que un campo se define asignando a cada punto del espacio tiempo (\vec{x}, t) un conjunto de valores $\phi_\alpha(\vec{x}, t)$ ($\alpha=1,2,\dots,S$) ; pensemos por ejemplo en el campo eléctrico $E_i(\vec{x}, t)$ ($i=1,2,3$) o en la función de ondas de la Mecánica Cuántica en la representación de posiciones $\Psi(\vec{x}, t)$. Estas cantidades satisfacen unas ecuaciones de campo que, por ejemplo, en el caso de la Mecánica Cuántica y para una partícula de masa M bajo la acción de un potencial $V(\vec{x})$ es la conocida ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{x}, t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + V(\vec{x}) \right] \Psi(\vec{x}, t) \quad (3)$$

Fijemos que en todos los casos los ϕ_α juegan el papel de las q_i , pero en lugar de depender sólo del tiempo dependen de las cuatro variables (\vec{x}, t) .

En total analogía con la mecánica clásica se pueden obtener las ecuaciones del movimiento mediante un principio variacional. Para

ello se define una densidad Lagrangiana

$$L(\vec{x}, t) \equiv L[\phi_\alpha(\vec{x}, t), \partial_t \phi_\alpha(\vec{x}, t), \vec{\nabla} \phi_\alpha(\vec{x}, t)] \quad (1)$$

con dimensiones $[L(\vec{x}, t)] = ML^2T^{-2}/L^3 = ML^{-1}T^{-2}$. A partir de ella se define la acción como

$$J = \int dt \int d^3x L(\vec{x}, t) \quad [J] = ML^2T^{-1} \quad (2)$$

y mediante una generalización del principio variacional de Hamilton se obtienen las ecuaciones de Lagrange del movimiento que ahora son

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial (\partial_t \phi_\alpha)} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial L}{\partial (\partial_k \phi_\alpha)} - \frac{\partial L}{\partial \phi_\alpha} = 0 \quad \alpha = 1, 2, \dots, S \quad (3)$$

Veamos como aplicación de esto la formulación Lagrangiana de la ecuación de Schrödinger para una partícula de masa M bajo la acción de un potencial $V(\vec{x})$. Supongamos que la densidad Lagrangiana sea

$$L(\vec{x}, t) = \frac{i\hbar}{2} \left[\Psi^*(\vec{x}, t) \frac{\partial \Psi(\vec{x}, t)}{\partial t} - \frac{\partial \Psi^*(\vec{x}, t)}{\partial t} \Psi(\vec{x}, t) \right] - \frac{\hbar^2}{2M} \vec{\nabla} \Psi^*(\vec{x}, t) \cdot \vec{\nabla} \Psi(\vec{x}, t) - V(\vec{x}) \Psi^*(\vec{x}, t) \Psi(\vec{x}, t) \quad (4)$$

Como $[\Psi(\vec{x}, t)] = L^{-3/2}$ es fácil comprobar que esta densidad Lagrangiana tiene las dimensiones deseadas. Para deducir las ecuaciones del movimiento debemos tener en cuenta que $\Psi(\vec{x}, t)$ tiene dos componentes independientes: su parte real y su parte imaginaria. Es fácil darse cuenta que esto equivale a considerar como variables independientes $\Psi(\vec{x}, t)$ y $\Psi^*(\vec{x}, t)$. Se tiene por tanto

$$\frac{\partial L}{\partial (\partial_t \Psi^*)} = -\frac{i\hbar}{2} \Psi(\vec{x}, t) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial (\partial_t \Psi^*)} = -\frac{i\hbar}{2} \frac{\partial \Psi(\vec{x}, t)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial L}{\partial (\partial_k \Psi^*)} = -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{\partial \Psi(\vec{x}, t)}{\partial x_k} \Rightarrow \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial L}{\partial (\partial_k \Psi^*)} = -\frac{\hbar^2}{2M} \Delta \Psi(\vec{x}, t)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Psi^*} = + \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial \Psi(\vec{x}, t)}{\partial t} - V(\vec{x}) \Psi(\vec{x}, t)$$

de donde usando (2.3)

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{x}, t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{x}) \right] \Psi(\vec{x}, t) \quad (1)$$

que no es más que la ecuación de Schrödinger. Si repetimos el mismo proceso para $\Psi(\vec{x}, t)$ llegaremos a la ecuación satisfecha por $\Psi^*(\vec{x}, t)$, que no es más que la compleja conjugada de (1).

Como otro ejemplo consideremos las ecuaciones del campo electromagnético libre, para el cual queremos hacer una formulación totalmente relativista. En el lenguaje usual las ecuaciones de Maxwell se escriben ($x \equiv (ct, \vec{x})$)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(x) = 0 \quad \vec{\nabla} \times \vec{E}(x) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}(x)}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(x) = 0 \quad \vec{\nabla} \times \vec{B}(x) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}(x)}{\partial t} = 0$$

de las cuales sólo el segundo par queda modificado en presencia de cargas y corrientes. Es bien sabido que todo campo electromagnético permite una descripción alternativa en términos de un potencial escalar $\phi(x)$ y un potencial vector $\vec{A}(x)$ a partir de los cuales los campos vienen dados por las ecuaciones

$$\vec{E}(x) = -\vec{\nabla} \phi(x) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}(x)}{\partial t}, \quad \vec{B}(x) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(x) \quad (3)$$

Las dos primeras ecuaciones de (2) garantizan la posibilidad de la descripción (3) y son ahora automáticamente satisfechas. El segundo par da origen a las ecuaciones que deben satisfacer $\phi(x)$ y $\vec{A}(x)$ que resultan ser

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(x) - \Delta \phi(x) = 0 \quad (4)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}(x)}{\partial t^2} - \Delta \vec{A}(x) + \vec{\nabla} \left[\frac{1}{c} \frac{\partial \phi(x)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(x) \right] = 0$$

donde hemos tenido en cuenta que $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}$.

Por otra parte es bien sabido que dados unos $\vec{E}(x)$ y $\vec{B}(x)$ existen infinitas posibilidades de elegir $\phi(x)$ y $\vec{A}(x)$, los cuales están relacionados entre sí a través de las llamadas transformaciones de gauge

$$\begin{aligned} \phi(x) &\longrightarrow \phi'(x) = \phi(x) - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda(x)}{\partial t} \\ \vec{A}(x) &\longrightarrow \vec{A}'(x) = \vec{A}(x) + \vec{\nabla} \Lambda(x) \end{aligned} \quad (1)$$

siendo $\Lambda(x)$ una función arbitraria univaluada de las coordenadas espaciales y temporales. Siempre es posible elegir un gauge tal que

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \phi(x)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(x) = 0 \quad (2)$$

que es la llamada condición de Lorentz. Entonces las ecuaciones (3.4) pueden escribirse

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial t^2} - \Delta \phi(x) &= 0 \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}(x)}{\partial t^2} - \Delta \vec{A}(x) &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Noten que (2) no fija totalmente $\phi(x)$ y $\vec{A}(x)$ pues las transformaciones (1) son aún posibles pues con $\Lambda(x)$ que sea solución de la ecuación

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Lambda(x)}{\partial t^2} - \Delta \Lambda(x) = 0 \quad (4)$$

Veamos ahora como formular todo esto en una notación manifiestamente covariante. Un punto del espacio-tiempo viene caracterizado por el univector cuyas componentes contravariantes son

$$x^\mu \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (ct, \vec{x}) \quad (5)$$

y al que se dota de una métrica pseudo-euclídea definida por la distancia

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1)$$

donde $g_{\mu\nu}$ es un tensor simétrico de segundo orden, llamado tensor métrico, que en nuestro caso es

$$g_{00} = +1, \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1, \quad g_{\mu\nu} = 0 \text{ si } \mu \neq \nu \quad (2)$$

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\vec{x}^2.$$

Las componentes covariantes del cuadrado de la posición vienen definidas por

$$x_\mu \equiv g_{\mu\nu} x^\nu = (x^0 = ct, -\vec{x}) \quad (3)$$

Finalmente la distancia del punto de coordenadas x^μ al origen de coordenadas espacio-temporales es

$$s^2 = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = x_\mu x^\mu = c^2 t^2 - \vec{x}^2 \quad (4)$$

Las transformaciones de Lorentz son las que conectan las coordenadas que asignan a un determinado suceso espacio-temporal dos observadores inerciales distintos. Según sabemos son transformaciones lineales

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad (5)$$

que deben ser reales

$$\Lambda^{\mu\nu*} = \Lambda^\mu{}_\nu \quad (6)$$

pues las coordenadas de un suceso son reales para todos los observadores inerciales. Por otra parte todos los observadores deben ver la misma medida de distancia entre dos sucesos, es decir

$$x^\mu x_\mu = x'^\mu x'_\mu \quad (7)$$

Teniendo en cuenta (7) y (5) vemos que las $\Lambda^\mu{}_\nu$ deben satisfacer lo con-

dicción

$$g_{\mu\nu} x'^{\mu} x'^{\nu} = g_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\rho} \Lambda^{\nu}_{\lambda} x^{\rho} x^{\lambda} = g_{\rho\lambda} x^{\rho} x^{\lambda} \Rightarrow$$

$$g_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\rho} \Lambda^{\nu}_{\lambda} = g_{\rho\lambda} \tag{1}$$

A veces es útil introducir una notación matricial en la que

$$x \equiv \{x^{\mu}\}, \quad \Lambda \equiv \{\Lambda^{\mu}_{\nu}\}, \quad G \equiv \{g_{\mu\nu}\} \tag{2}$$

entonces teniendo en cuenta que (5.4) se puede escribir como

$$s^2 = x^T G x \tag{3}$$

entonces las condiciones (5.5), (5.6) y (1) se pueden escribir

$$x' = \Lambda x, \quad \Lambda = \Lambda^*, \quad \Lambda^T G \Lambda = G \tag{4}$$

De la última ecuación es evidente que

$$[\det \Lambda]^2 = +1 \quad \implies \quad \det \Lambda = \pm 1 \tag{5}$$

Se denominan transformaciones de Lorentz propias a las que están conectadas con la identidad, es decir que pueden obtenerse haciendo un conjunto infinito de transformaciones infinitesimales sucesivas y para ellas obviamente $\det \Lambda = +1$. Se puede demostrar que toda transformación de Lorentz es o bien propia o es el producto de una propia por una de las transformaciones siguientes:

Inversión espacial : $x^{\mu} \longrightarrow x'^{\mu} \equiv P x^{\mu} \equiv (x^0, -\vec{x})$

Inversión temporal : $x^{\mu} \longrightarrow x'^{\mu} \equiv T x^{\mu} \equiv (-x^0, \vec{x}) \tag{6}$

Inversión total : $x^{\mu} \longrightarrow x'^{\mu} \equiv PT x^{\mu} \equiv (-x^0, -\vec{x})$

Si queremos formular una teoría física de una forma manifestamente covariante debemos usar únicamente escalares S , vectores V^μ , tensores de segundo orden $T^{\mu\nu}$ u otros entes más complicados que bajo las transformaciones propias de Lorentz se transformen de forma irreducible, es decir que las componentes de tales objetos se mezclen todos ellos entre sí bajo las transformaciones propias de Lorentz. Para los objetos mencionados las leyes de transformación son

$$\begin{aligned} x^\mu &\longrightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \\ S(x) &\longrightarrow S'(x') = S(x) \\ V^\mu(x) &\longrightarrow V'^\mu(x') = \Lambda^\mu_\nu V^\nu(x) \\ T^{\mu\nu}(x) &\longrightarrow T'^{\mu\nu}(x') = \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\lambda T^{\rho\lambda}(x) \end{aligned} \quad (1)$$

Al formular las ecuaciones de Maxwell introducimos un cuadrivector potencial

$$A^\mu(x) \equiv (\phi(x), \vec{A}(x)) \quad (2)$$

a partir del cual definimos un tensor de segundo orden antisimétrico

$$F^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x) \quad (3)$$

donde $\partial^\mu \equiv \partial/\partial x_\mu = g^{\mu\nu} \partial_\nu = g^{\mu\nu} \partial/\partial x^\nu$. Este tensor tiene 6 componentes independientes que se relacionan con los componentes de los campos eléctricos y magnéticos de la siguiente forma

$$\begin{aligned} F^{0i}(x) &= \partial^0 A^i(x) - \partial^i A^0(x) = -\frac{\partial \phi(x)}{\partial x^i} - \frac{1}{c} \frac{\partial A^i(x)}{\partial t} = E^i(x) \\ -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F^{jk} &= -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} [\partial^j A^k(x) - \partial^k A^j(x)] = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \left[\frac{\partial A^k(x)}{\partial x^j} - \frac{\partial A^j(x)}{\partial x^k} \right] = \\ &= B^i(x) \end{aligned}$$

donde $\epsilon_{123} = +1$, es decir

$$F^{10}(x) = E^1(x) \quad , \quad F^{20}(x) = E^2(x) \quad , \quad F^{30}(x) = E^3(x) \quad (1)$$

$$F^{12}(x) = -B^3(x) \quad , \quad F^{23}(x) = -B^1(x) \quad , \quad F^{31}(x) = -B^2(x)$$

De la definición (3) es evidente que

$$\partial^\lambda F^{\mu\nu}(x) + \partial^\mu F^{\nu\lambda}(x) + \partial^\nu F^{\lambda\mu}(x) = 0 \quad (2)$$

y estas ecuaciones no son más que el primer par de las ecuaciones de Maxwell. En efecto

$$\lambda=0, \mu=1, \nu=2 : \partial^0 F^{12}(x) + \partial^1 F^{20}(x) + \partial^2 F^{01}(x) = 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial B^3(x)}{\partial t} - \frac{\partial E^2(x)}{\partial x^1} + \frac{\partial E^1(x)}{\partial x^2} = 0$$

$$[\vec{\nabla} \times \vec{E}(x)]^3 + \frac{1}{c} \frac{\partial B^3(x)}{\partial t} = 0$$

$$\lambda=1, \mu=2, \nu=3 : \partial^1 F^{23}(x) + \partial^2 F^{31}(x) + \partial^3 F^{12}(x) = 0 \Rightarrow$$

$$+ \frac{\partial B^1(x)}{\partial x^1} + \frac{\partial B^2(x)}{\partial x^2} + \frac{\partial B^3(x)}{\partial x^3} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(x) = 0$$

que es lo que queríamos comprobar.

En su forma covariante el segundo par de las ecuaciones de Maxwell se escriben de forma manifiestamente covariante como

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = 0 \quad (3)$$

En efecto

$$\nu=0 : \partial_0 F^{00}(x) + \partial_1 F^{10}(x) + \partial_2 F^{20}(x) + \partial_3 F^{30}(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial E^1(x)}{\partial x^1} + \frac{\partial E^2(x)}{\partial x^2} + \frac{\partial E^3(x)}{\partial x^3} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(x) = 0$$

$$\nu=1 : \partial_0 F^{01}(x) + \partial_1 F^{11}(x) + \partial_2 F^{21}(x) + \partial_3 F^{31}(x) = 0$$

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial E^1(x)}{\partial t} + \frac{\partial B^3(x)}{\partial x^2} - \frac{\partial B^2(x)}{\partial x^3} = 0 \Rightarrow [\vec{\nabla} \times \vec{B}(x)]^1 - \frac{1}{c} \frac{\partial E^1(x)}{\partial t} = 0$$

Las transformaciones de gauge son

$$A^\mu(x) \longrightarrow A'^\mu(x) = A^\mu(x) - \partial^\mu \Lambda(x) \quad (1)$$

donde $\Lambda(x)$ es un escalar univaluado arbitrario. La condición de Lorentz es

$$\partial_\mu A'^\mu(x) = 0 \quad (2)$$

y las ecuaciones del movimiento (3.3) se pueden escribir

$$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu(x) - \partial^\mu \partial_\nu A^\nu(x) = 0 \quad (3)$$

que no es más que (8.3). Si se impone la condición de Lorentz (2) entonces

$$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu(x) = 0 \quad (4)$$

Veamos como usar ahora el formalismo Lagrangiano. Las ecuaciones de Lagrange (2.3) se pueden escribir

$$\partial^\mu \frac{\partial L(x)}{\partial (\partial_\mu \phi_\alpha)} - \frac{\partial L(x)}{\partial \phi_\alpha} = 0 \quad (5)$$

Si tomamos como Lagrangiano para el campo electromagnético libre

$$L(x) = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) \quad (6)$$

veamos como al usar (5) obtenemos las ecuaciones del movimiento

$$L(x) = -\frac{1}{16\pi} [\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha] [\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha]$$

$$\frac{\partial L(x)}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = -\frac{1}{16\pi} [g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} - g_{\beta\mu} g_{\alpha\nu}] [\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha] =$$

$$-\frac{1}{16\pi} [\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha] [g_\mu^\alpha g_\nu^\beta - g_\mu^\beta g_\nu^\alpha] =$$

$$= -\frac{1}{16\pi} [\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \partial_\nu A_\mu + \partial_\mu A_\nu + \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \partial_\nu A_\mu + \partial_\mu A_\nu] =$$

$$= \frac{1}{4\pi} (-\partial_\mu A_\nu + \partial_\nu A_\mu)$$

$$\partial^\mu \frac{\partial L(x)}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = (-\partial^\mu \partial_\mu A_\nu + \partial_\nu \partial^\mu A_\mu) \frac{1}{4\pi}$$

$$\frac{\partial L(x)}{\partial A_\nu} = 0$$

y por tanto obtenemos las ecuaciones de movimiento (9.3).

2.- ¿Qué es una teoría gauge?

Volvamos al estudio de la ecuación de Schrödinger. Según hemos visto la densidad Lagrangiana es

$$L(\vec{x}, t) = \frac{i\hbar}{2} \left[\Psi^*(\vec{x}, t) \frac{\partial \Psi(\vec{x}, t)}{\partial t} - \frac{\partial \Psi^*(\vec{x}, t)}{\partial t} \Psi(\vec{x}, t) \right] - \frac{\hbar^2}{2M} \vec{\nabla} \Psi^*(\vec{x}, t) \cdot \vec{\nabla} \Psi(\vec{x}, t) - \Psi^*(\vec{x}, t) V(\vec{x}) \Psi(\vec{x}, t) \quad (1)$$

Consideremos la transformación de gauge global

$$\Psi(\vec{x}, t) \longrightarrow \Psi'(\vec{x}, t) = e^{+i \frac{q}{\hbar c} \Lambda} \Psi(\vec{x}, t) \quad (2)$$

donde Λ es una constante real, lo mismo que q . Esta transformación expresa el hecho de que la fase global de la función de ondas puede cambiarse arbitrariamente pues no es ningún observable físico. Esto se traduce en que bajo (2) el Lagrangiano no cambia, lo cual es evidente de (1). Notemos que las transformaciones (2) para q fijo y Λ variable forman un grupo continuo uniparamétrico con ley de multiplicación

$$e^{i \frac{q}{\hbar c} \Lambda_1} e^{i \frac{q}{\hbar c} \Lambda_2} = e^{i \frac{q}{\hbar c} (\Lambda_1 + \Lambda_2)} \quad (3)$$

que los matemáticos designan con la nomenclatura $U(1)$. Existe un teorema, debido a Noether, que dice que si el Lagrangiano es invariante bajo un grupo continuo que depende de N parámetros, hay N cantidades que se conservan

De acuerdo con este teorema el hecho de que la densidad Lagrangiana (10.1) sea invariante bajo (10.2) implica que hay una cantidad conservada en el transcurso del movimiento y es fácil ver que esta es

$$q \int d^3x \Psi^*(\vec{x}, t) \Psi(\vec{x}, t) \quad (1)$$

Si interpretamos q como la carga de la partícula, esto no es más que la ley de conservación de la carga eléctrica.

En un mundo donde todas las interacciones se propagan con velocidad finita es imposible implementar experimentalmente las transformaciones de gauge globales que corresponden a cambiar la fase de la función de ondas en una misma cantidad en todos los puntos del espacio en un instante dado. Sin embargo es fácil imaginar como implementar una transformación de gauge local

$$\Psi(\vec{x}, t) \longrightarrow \Psi'(\vec{x}, t) = e^{+i \frac{q}{\hbar c} \Lambda(\vec{x}, t)} \Psi(\vec{x}, t) \quad (2)$$

en la que el cambio de fase, en un instante dado, depende del punto del espacio considerado. ¿Es aún la densidad Lagrangiana (10.1) invariante bajo (2)? La contestación es claramente negativa pues

$$\begin{aligned} L(x) \longrightarrow L'(x) &= \frac{i\hbar}{2} \left\{ \Psi^*(\vec{x}, t) \left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{iq}{\hbar c} \frac{\partial \Lambda(\vec{x}, t)}{\partial t} \right] \Psi(\vec{x}, t) - \right. \\ &- \left. \left(\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{iq}{\hbar c} \frac{\partial \Lambda(\vec{x}, t)}{\partial t} \right] \Psi'(\vec{x}, t) \right)^* \Psi(\vec{x}, t) \right\} - \frac{\hbar^2}{2M} \left(\left[\vec{\nabla} + \frac{iq}{\hbar c} \vec{\nabla} \Lambda(\vec{x}, t) \right] \Psi(\vec{x}, t) \right)^* \\ &\cdot \left(\left[\vec{\nabla} + \frac{iq}{\hbar c} \vec{\nabla} \Lambda(\vec{x}, t) \right] \Psi(\vec{x}, t) \right) - \Psi^*(\vec{x}, t) V(\vec{x}) \Psi(\vec{x}, t) \end{aligned} \quad (3)$$

Impongamos ahora un principio de gauge local por el cual entendemos que la teoría debe ser invariante bajo las transformaciones de gauge locales (11.2). Obviamente esto no lo lograremos sin modificar de alguna forma la densidad Lagrangiana original. Fijémosnos que si comparamos (3) con (10.1) nos damos cuenta que la no invariancia del Lagrangiano original es debida

a que bajo transformaciones de gauge locales

$$\frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial t} + \frac{i q}{\hbar c} \frac{\partial \Lambda(\vec{x}, t)}{\partial t} \tag{1}$$

$$\vec{\nabla} \longrightarrow \vec{\nabla} + \frac{i q}{\hbar c} \vec{\nabla} \Lambda(\vec{x}, t)$$

La forma obvia de implementar el principio de gauge local es sustituir en (10.1) las derivadas que allí figuran por unas derivadas covariantes

$$\frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow D_t \equiv \frac{\partial}{\partial t} + i \frac{q}{\hbar} \phi(\vec{x}, t) \tag{2}$$

$$\vec{\nabla} \longrightarrow \vec{D} \equiv \vec{\nabla} - i \frac{q}{\hbar c} \vec{A}(\vec{x}, t)$$

donde elegiremos las leyes de transformación de los campos $\phi(\vec{x}, t)$ y $\vec{A}(\vec{x}, t)$ bajo una transformación de gauge de forma que las derivadas covariantes no cambien bajo transformaciones de gauge. Imponiendo esta condición

$$\frac{\partial}{\partial t} + i \frac{q}{\hbar} \phi(\vec{x}, t) \longrightarrow \frac{\partial}{\partial t} + \frac{i q}{\hbar c} \frac{\partial \Lambda(\vec{x}, t)}{\partial t} + i \frac{q}{\hbar} \phi'(\vec{x}, t) \equiv \frac{\partial}{\partial t} + i \frac{q}{\hbar} \phi(\vec{x}, t)$$

$$\vec{\nabla} - i \frac{q}{\hbar c} \vec{A}(\vec{x}, t) \longrightarrow \vec{\nabla} + \frac{i q}{\hbar c} \vec{\nabla} \Lambda(\vec{x}, t) - i \frac{q}{\hbar c} \vec{A}'(\vec{x}, t) \equiv \vec{\nabla} - i \frac{q}{\hbar c} \vec{A}(\vec{x}, t)$$

de donde las leyes de transformación de los campos auxiliares introducidos son

$$\phi(\vec{x}, t) \longrightarrow \phi'(\vec{x}, t) = \phi(\vec{x}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda(\vec{x}, t)}{\partial t} \tag{3}$$

$$\vec{A}(\vec{x}, t) \longrightarrow \vec{A}'(\vec{x}, t) = \vec{A}(\vec{x}, t) + \vec{\nabla} \Lambda(\vec{x}, t)$$

que no son más que las leyes de transformación de los potenciales escalares y vectoriales usados antes para describir el campo electromagnético.

Si identificamos estos campos auxiliares con los potenciales del electromagnetismo vemos que hemos llegado a un resultado interesante: El principio de invariancia gauge bajo las transformaciones locales $U(1)$ implica la existencia del campo electromagnético y nos dice explícitamente como se acoplan las partículas con el campo electromagnético según su carga.

Según lo que acabamos de discutir la densidad Lagrangiana que describe una partícula en interacción con un campo electromagnético es

$$L(x) = \frac{i\hbar}{2} \left\{ \Psi^*(\vec{x}, t) \left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{iq}{\hbar} \phi(\vec{x}, t) \right] \Psi(\vec{x}, t) - \left(\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{iq}{\hbar} \phi(\vec{x}, t) \right] \Psi(\vec{x}, t) \right)^* \Psi^*(\vec{x}, t) \right\} \\ - \frac{\hbar^2}{2M} \left(\left[\vec{\nabla} - i \frac{q}{\hbar c} \vec{A}(\vec{x}, t) \right] \Psi(\vec{x}, t) \right)^* \left(\left[\vec{\nabla} - i \frac{q}{\hbar c} \vec{A}(\vec{x}, t) \right] \Psi(\vec{x}, t) \right) - \Psi^*(\vec{x}, t) V(\vec{x}) \Psi(\vec{x}, t) \quad (1)$$

de donde podemos deducir las ecuaciones del movimiento para la partícula

$$\frac{\partial L(x)}{\partial (\partial_t \Psi^*)} = - \frac{i\hbar}{2} \Psi(\vec{x}, t) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L(x)}{\partial (\partial_t \Psi^*)} = - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial \Psi(\vec{x}, t)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial L(x)}{\partial (\partial_k \Psi^*)} = - \frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{\partial \Psi(\vec{x}, t)}{\partial x_k} - \frac{iq}{\hbar c} \vec{A}_k(\vec{x}, t) \Psi(\vec{x}, t) \right)$$

$$\sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial L(x)}{\partial (\partial_k \Psi^*)} = - \frac{\hbar^2}{2M} \left[\Delta \Psi(\vec{x}, t) - \frac{iq}{\hbar c} \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{x}, t) \Psi(\vec{x}, t) - \frac{iq}{\hbar c} \vec{A}(\vec{x}, t) \cdot \vec{\nabla} \Psi(\vec{x}, t) \right]$$

$$\frac{\partial L(x)}{\partial \Psi^*} = \frac{i\hbar}{2} \left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{iq}{\hbar} \phi(\vec{x}, t) \right] \Psi(\vec{x}, t) + \frac{i\hbar i q}{2\hbar} \phi(\vec{x}, t) \Psi(\vec{x}, t) + \\ - \frac{\hbar^2}{2M} \frac{iq}{\hbar c} \vec{A}(\vec{x}, t) \left[\vec{\nabla} - \frac{iq}{\hbar c} \vec{A}(\vec{x}, t) \right] \Psi(\vec{x}, t) - V(\vec{x}) \Psi(\vec{x}, t)$$

de donde

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{x}, t)}{\partial t} = \left\{ - \frac{\hbar^2}{2M} \Delta + \frac{iq\hbar}{2Mc} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{x}, t)) + \frac{iq\hbar}{Mc} \vec{A}(\vec{x}, t) \cdot \vec{\nabla} \right. \\ \left. + q\phi(\vec{x}, t) + \frac{q^2}{2Mc^2} \vec{A}(\vec{x}, t) \cdot \vec{A}(\vec{x}, t) + V(\vec{x}) \right\} \Psi(\vec{x}, t) \quad (4)$$

que es el resultado que habríamos obtenido sustituyendo en la ecuación de Schrödinger (1.3) las derivadas por las derivadas covariantes (12.2), es decir introduciendo el campo electromagnético mediante la llamada prescripción mínima. Esta es la ecuación que describe la interacción de una partícula de spin cero y carga q en presencia de un campo electromagnético y un potencial externo $V(\vec{x})$.

Consideremos por ejemplo el caso de un campo electrostático y magnetostático uniforme, eligiendo

$$\phi(\vec{x}, t) \equiv \phi(\vec{x}) \quad , \quad \vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{x} \quad (1)$$

y teniendo en cuenta que con esta elección

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{x}, t) = 0 \quad (\text{Condición de Lorentz})$$

$$\vec{A}(\vec{x}, t) \cdot \vec{\nabla} = \frac{1}{2} (\vec{B} \times \vec{x}) \cdot \vec{\nabla} = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot (\vec{x} \times \vec{\nabla}) = \frac{q}{2\hbar} \vec{B} \cdot \vec{L} \quad (2)$$

la ecuación de Schrödinger puede escribirse

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{x}, t)}{\partial t} = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2M} \Delta - \frac{q}{2Mc} \vec{B} \cdot \vec{L} + \frac{q^2}{2Mc^2} \left[\frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{x} \right]^2 + q\phi(\vec{x}) + V(\vec{x}) \right\} \Psi(\vec{x}, t) \quad (3)$$

El término cuadrático en \vec{B} es el llamado término diamagnético, mientras que el término proporcional a \vec{B} se llama paramagnético, pues dan origen al dia- y paramagnetismo respectivamente. Notar que el orden relativo de la magnitud de ambos es

$$\xi \equiv \left| \frac{q^2}{2Mc^2} \frac{1}{4} B^2 r^2 \right| \frac{2Mc}{qB\hbar(L/\hbar)} \approx \left| \frac{qB r^2}{4\hbar c} \right| \approx 3.8 \times 10^6 \frac{B}{\text{Gauss}} \left(\frac{r}{\text{nm}} \right)^2 \quad (4)$$

donde hemos tomado para q la carga del electrón y $L/\hbar \approx 1$. Si el momento del electrón está confinado (estados ligados) entonces para los campos magnéticos posibles en el laboratorio $\xi \ll 1$. Sin embargo, el término diamagnético es muy importante cuando el momento no está confinado (por ejemplo, en el caso de colisiones), o cuando actúan reglas de selección que anulan la contribución paramagnética en primer orden.

En realidad las ecuaciones (13.1) o (3) no son adecuadas para describir el comportamiento de un electrón en un campo electromagnético. Fue precisamente este desacuerdo lo que obligó a introducir el concepto de spin. Para una partícula de spin $1/2$ $\Psi(\vec{x}, t)$ debe considerarse como un vector columna de dos componentes y añadir al segundo miembro de las ecuaciones (13.1) o (3) un término

$$- \beta \frac{1}{\hbar} \vec{S} \cdot \vec{B}(\vec{x}, t) \quad (5)$$

donde \vec{S} es el operador que representa el spin

$$\vec{S} = \hbar \frac{1}{2} \vec{\sigma} \quad (1)$$

donde $\vec{\sigma}$ son las matrices de spin de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \quad (2)$$

que cumplen

$$\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2 \delta_{ij} I, \quad \sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} I + i \epsilon_{ijk} \sigma_k \quad (3)$$

La cantidad β vale

$$\beta \equiv \frac{\hbar q}{2Mc} g \quad (4)$$

y g es el llamado factor giromagnético. La modificación a hacer en (4.3) es pues

$$- \frac{q}{2Mc} \vec{B} \cdot \vec{L} \longrightarrow - \frac{q}{2Mc} \vec{B} \cdot (\vec{L} + g \vec{S}) \quad (5)$$

Pauli tomó $g \equiv 2$ y con ello logró dar una explicación satisfactoria del comportamiento de los electrones en el seno de un campo electromagnético, en particular del efecto Zeeman. Medidas cuidadosas de g dan

$$g_e = 2 \times [1.001\ 159\ 652\ 41\ (20)] \quad (6)$$

La electrodinámica cuántica (Q.E.D.) que es una teoría análoga a la anterior pero en que también el electrón es descrito de forma totalmente relativista y en la que se le llamo a cabo una segunda cuantización para poder explicar procesos de creación y aniquilación de partículas permite calcular

$$g_e = 2 \times [1.001\ 159\ 655\ 7\ (35)] \quad (7)$$

en un acuerdo asombroso con el resultado experimental. Lo cual, junto con otros resultados análogos, permite decir que la Q.E.D. es la teoría más precisa de toda la física.

Se nos plantea aún un problema: la densidad Lagrangiana (13.1) describe una partícula escalar (spin cero) de masa M en interacción con un campo electromagnético externo. Desearíamos ahora introducir nuevos términos en $L(x)$ que describieran un campo electromagnético de forma que dispusiéramos de una densidad Lagrangiana que describa no solo el comportamiento de una partícula cargada en el seno de un campo electromagnético sino también el comportamiento de un campo electromagnético cuya fuente sea la partícula escalar considerada. Vamos a intentar añadir a (13.1) un término que dependa de $A_\mu(x)$ y que sea de tal forma que no se rompa la invariancia gauge local. En una notación $4D$ -dimensional la derivada covariante introducida en (12.2) es

$$D_\mu = \partial_\mu + \frac{i q}{c} A_\mu(x) \quad (1)$$

que es invariante bajo las transformaciones de gauge. Entonces definamos el campo como

$$F_{\mu\nu}(x) = \frac{c}{iq} [D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) \quad (2)$$

El cual bajo transformaciones de gauge es invariante

$$F_{\mu\nu}(x) \longrightarrow F'_{\mu\nu}(x) = F_{\mu\nu}(x) \quad (3)$$

Como por otra parte la densidad Lagrangiana debe ser un escalar bajo transformaciones de Lorentz el término adecuado debe ser proporcional a $F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x)$ y lo tomaremos como

$$\begin{aligned} -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) &= \frac{1}{8\pi} [\vec{E}^2(x) - \vec{B}^2(x)] = \\ &= \frac{1}{8\pi} \left[\left(\vec{\nabla} \phi(x) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}(x)}{\partial t} \right)^2 - (\vec{\nabla} \times \vec{A}(x))^2 \right] \\ &= \frac{1}{8\pi} \left[\left(\vec{\nabla} \phi(x) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}(x)}{\partial t} \right)^2 - \nabla_i A_j(x) \nabla_i A_j(x) + \nabla_i A_j(x) \nabla_j A_i(x) \right] \quad (4) \end{aligned}$$

Veamos ahora como añadiendo (16.4) a (13.1) obtenemos las ecuaciones del campo electromagnético

$$\frac{\partial L}{\partial (\partial_t \phi)} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial (\partial_k \phi)} = \frac{1}{4\pi} \left[\partial_k \phi(x) + \frac{1}{c} \frac{\partial A_k(x)}{\partial t} \right] \Rightarrow \sum_{k=1}^3 \partial_k \frac{\partial L}{\partial (\partial_k \phi)} = \frac{1}{4\pi} \left[\Delta \phi(x) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(x) \right]$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = -q \Psi^*(x) \Psi(x)$$

$$\frac{\partial L}{\partial (\partial_t A_i)} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial A_i(x)}{\partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_i} \right] \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial (\partial_t A_i)} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_i(x)}{\partial t^2} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \phi(x)}{\partial t} \right]$$

$$\frac{\partial L}{\partial (\partial_k A_i)} = \frac{1}{4\pi} \left[-\partial_k A_i(x) + \partial_i A_k(x) \right] \Rightarrow \sum_{k=1}^3 \partial_k \frac{\partial L}{\partial (\partial_k A_i)} = \frac{1}{4\pi} \left[-\Delta A_i(x) + \partial_i (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(x)) \right]$$

$$\frac{\partial L}{\partial A_i} = -i \frac{q \hbar}{2Mc} \left[\Psi^*(x) \partial_i \Psi(x) - \partial_i \Psi^*(x) \cdot \Psi(x) \right] - \frac{q^2}{Mc^2} A_i \Psi^*(x) \Psi(x)$$

En el gauge de Lorentz obtenemos como ecuaciones

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial t^2} - \Delta \phi(x) = 4\pi q \Psi^*(x) \Psi(x)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}(x)}{\partial t^2} - \Delta \vec{A}(x) = 4\pi \frac{q}{2Mc} \left\{ \Psi^*(x) \left(\left[-i \hbar \vec{\nabla} - \frac{q}{c} \vec{A}(x) \right] \Psi(x) \right) + \left(\left[-i \hbar \vec{\nabla} - \frac{q}{c} \vec{A}(x) \right] \Psi(x) \right)^* \Psi(x) \right\} \quad (1)$$

El miembro de la derecha de la primera ecuación puede interpretarse como la densidad de carga eléctrica

$$\rho(\vec{x}, t) \equiv q \Psi^*(\vec{x}, t) \Psi(\vec{x}, t) \quad (2)$$

Para interpretar el miembro de la derecha de la segunda ecuación debemos tener en cuenta que en presencia de un campo electromagnético el operador momento es

$$\vec{p} \equiv \frac{1}{\hbar} \left[-i \hbar \vec{\nabla} - \frac{q}{c} \vec{A}(x) \right]$$

y por tanto

$$\vec{j}(x) \equiv \frac{q}{2} \left\{ \Psi^*(\vec{x}, t) \vec{\nabla} \Psi(\vec{x}, t) + [\vec{\nabla} \Psi(\vec{x}, t)]^* \Psi(\vec{x}, t) \right\} \quad (2)$$

no es más que la densidad de corriente. Introduciendo el cuadrivector corriente mediante

$$j^\mu(x) \equiv \left(\rho(x), \frac{1}{c} \vec{j}(x) \right) \quad (2)$$

Las ecuaciones (18.1) se pueden escribir

$$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu(x) = 4\pi j^\mu(x) \quad (3)$$

Enidénticamente podemos comprobar la ley de conservación de la carga eléctrica

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0 \quad \iff \quad \frac{\partial \rho(x)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(x) = 0$$

En efecto

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} &= q \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \Psi + q \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{q}{2M} \left\{ -i\hbar (\vec{\nabla} \Psi^*) (\vec{\nabla} \Psi) - i\hbar \Psi^* (\Delta \Psi) + \frac{q}{c} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \Psi^* \Psi \right. \\ &+ \frac{q}{c} \vec{A} (\vec{\nabla} \Psi^*) \Psi + \frac{q}{c} \vec{A} \Psi^* (\vec{\nabla} \Psi) + i\hbar (\Delta \Psi^*) \Psi + i\hbar (\vec{\nabla} \Psi^*) (\vec{\nabla} \Psi) + \frac{q}{c} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \Psi^* \Psi + \\ &+ \left. \frac{q}{c} \vec{A} (\vec{\nabla} \Psi^*) \Psi + \frac{q}{c} \vec{A} \Psi^* (\vec{\nabla} \Psi) \right\} = q \left\{ \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \Psi + \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} - i\hbar \frac{1}{2M} \Psi^* (\Delta \Psi) \right. \\ &+ \left. i\hbar \frac{1}{2M} (\Delta \Psi^*) \Psi + \frac{q}{Mc} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \Psi^* \Psi + \frac{q}{Mc} \vec{A} (\vec{\nabla} \Psi^*) \Psi + \frac{q}{Mc} \vec{A} \Psi^* (\vec{\nabla} \Psi) \right\} = \\ &= q \left\{ \frac{i\hbar}{2M} \Psi^* (\Delta \Psi) - \frac{i\hbar}{2M} (\Delta \Psi^*) \Psi + \frac{q}{Mc} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \Psi^* \Psi + \frac{q}{Mc} \vec{A} \Psi^* (\vec{\nabla} \Psi) + \frac{q}{Mc} \vec{A} (\vec{\nabla} \Psi^*) \Psi \right. \\ &- \frac{i}{\hbar} \frac{q}{2M} \Psi^* \Psi + \frac{i}{\hbar} \frac{q}{2M} \Psi \Psi^* - \frac{i}{2Mc^2} \frac{q^2 \hbar}{2Mc^2} \vec{A}^2 \Psi^* \Psi + \frac{i}{2Mc^2} \frac{q^2 \hbar}{2Mc^2} \vec{A}^2 \Psi \Psi^* - \frac{i}{\hbar} \Psi^* \nabla \Psi + \frac{i}{\hbar} \Psi \nabla \Psi^* \\ &- \left. \frac{i\hbar}{2M} \Psi^* (\Delta \Psi) + \frac{i\hbar}{2M} (\Delta \Psi^*) \Psi + \frac{q}{Mc} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \Psi^* \Psi + \frac{q}{Mc} \vec{A} (\Delta \Psi^*) \Psi + \frac{q}{Mc} \vec{A} \Psi^* (\Delta \Psi) \right\} = 0 \end{aligned}$$

donde hemos usado (13.4)

¿ Que sucedería si permitiéramos que se rompiera la invariancia gauge local? Evidentemente podríamos añadir nuevos términos al Lagrangiano y en particular podríamos añadir un término de la forma

$$\frac{1}{8\pi} \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} A^\mu(x) A_\mu(x) \quad (1)$$

donde la constante m tiene dimensiones de masa. Vamos a ver que esto sería equivalente a dotar al fotón de una masa m . Notemos en primer lugar que la ecuación (13.1) no cambia mientras que las (12.1) sin tener en cuenta la condición de Lorentz se escriban ahora como

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(x) - \Delta \phi(x) + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \phi(x) = 4\pi \rho(x) \quad (1)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}(x)}{\partial t^2} - \Delta \vec{A}(x) + \vec{\nabla} \left\{ \frac{1}{c} \frac{\partial \phi(x)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(x) \right\} + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \vec{A}(x) = 4\pi \frac{1}{c} \vec{j}(x)$$

Aplicando a la primera el operador $\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}$ y a la segunda $\vec{\nabla}$ y sumándolas se encuentra teniendo en cuenta la ecuación de continuidad que

$$\frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \left[\frac{1}{c} \frac{\partial \phi(x)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(x) \right] = 0 \quad (2)$$

y como $m \neq 0$ la condición de Lorentz es una consecuencia de las ecuaciones del movimiento y no una condición suplementaria como sucedía antes. Entonces usando (2) las ecuaciones (1) pueden escribirse

$$\left[\partial^\nu \partial_\nu + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right] A^\mu(x) = 4\pi j^\mu(x). \quad (3)$$

Consideremos una región del espacio muy alejada de todas las cargas, en ella es válida la ecuación (3) en $j^\mu(x)$ y sea solución son ondas planas

$$A^\mu(x) \propto e^{-i p \cdot x / \hbar} = e^{-\frac{i}{\hbar} (E t - \vec{p} \cdot \vec{x})} \quad (5)$$

Sustituyendo en (3)

$$p^2 = m^2 c^2 \iff E = (m^2 c^4 + c^2 \vec{p}^2)^{1/2} \quad (5)$$

Es decir las partículas que intermedian las interacciones electromagnéticas, los fotones, deberían tener masa m . Experimentalmente se sabe que

$$m_\gamma c^2 \leq 6 \times 10^{-22} \text{ MeV} \quad (1)$$

es decir

$$\frac{m_\gamma}{m_e} < 1.2 \times 10^{-21} \quad (2)$$

Vemos pues que la invariancia gauge local implica $m_\gamma = 0$ lo cual está en perfecto acuerdo con los datos experimentales. Antes de continuar vamos a dar algunas ideas de como se ha medido la masa del fotón.

Para los fotones se cumplen simultáneamente

$$E = (m^2 c^4 + c^2 \vec{p}^2)^{1/2}, \quad E = h\nu \quad (3)$$

de donde la frecuencia de cualquier radiación electromagnética debe cumplir

$$\nu > \frac{m c^2}{2\pi \hbar} \quad (4)$$

y por tanto si en una radiación electromagnética observamos una frecuencia ν_{obs} sabemos que

$$m c^2 < 2\pi \hbar \nu_{\text{obs}} = 4.135701(44) \times 10^{-21} \left(\frac{\nu_{\text{obs}}}{\text{Hertz}} \right) \text{ KeV} \quad (5)$$

En la cavidad resonante formada por la superficie de la Tierra y la atmósfera se observan unas ondas de baja frecuencia llamadas ondas de Schumann.

Las más bajas observadas corresponden a $\nu_{\text{obs}} = 8 \text{ Hertz}$, de donde $m c^2 < 2.5 \times 10^{-20} \text{ KeV}$

Consideremos una carga estacionaria situada en el origen de coordenadas, el campo electromagnético engendrado es puramente electrostático y puede ser descrito mediante $\vec{A}(x) \equiv 0$ y $\phi(\vec{x})$ debe satisfacer la ecuación

$$\left[-\Delta + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right] \phi(\vec{x}) = 4\pi q \delta(\vec{x}) \quad (6)$$

Veamos a hallar la solución de esta ecuación. Escribamos

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \hat{\phi}(\vec{k}), \quad \delta(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \quad (1)$$

y sustituyendo en la ecuación anterior

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \left\{ \left[\vec{k}^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right] \hat{\phi}(\vec{k}) - \frac{4\pi q}{(2\pi)^{3/2}} \right\} = 0$$

$$\Rightarrow \hat{\phi}(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{4\pi q}{\left[\vec{k}^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right]} \quad (2)$$

y por tanto

$$\phi(\vec{x}) = \frac{4\pi q}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{\vec{k}^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}} \quad (2)$$

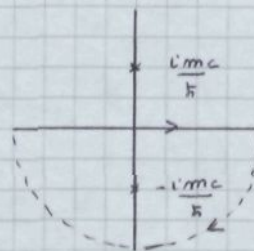
de donde

$$\phi(\vec{x}) = \frac{4\pi q}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk k^2 \frac{1}{k^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}} \int_{-1}^{+1} d\mu e^{-i k r \mu} \int_0^{2\pi} d\phi = \quad r \equiv |\vec{x}|$$

$$= \frac{4\pi q}{4\pi^2} \frac{i}{\hbar} \int_0^\infty dk \frac{k}{k^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}} \left[e^{-i k r} - e^{+i k r} \right] =$$

$$= \frac{i 4\pi q}{4\pi^2 r} \int_{-\infty}^\infty dk \frac{k}{k^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}} e^{-i k r} =$$

$$= \frac{4\pi i q}{4\pi^2 r} 2\pi i (-1) \frac{-i \frac{mc}{\hbar}}{-2i \frac{mc}{\hbar}} e^{-i r (-i \frac{mc}{\hbar})}$$



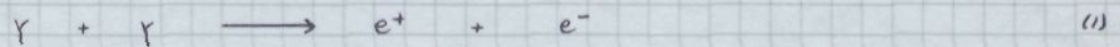
de donde

$$\phi(\vec{x}) = q \frac{1}{r} e^{-m c r / \hbar} \quad (3)$$

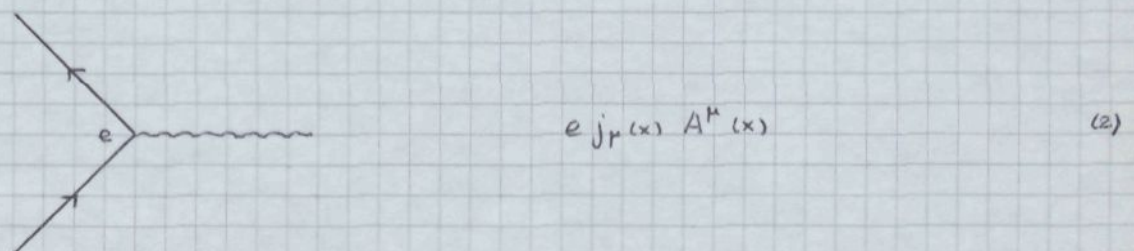
Se sabe, de múltiples pruebas experimentales, que la ley de Coulomb, $\phi = q/r$, es válida para valores de r que cubren una escala de 24 ordines de magnitud y por tanto $m=0$ en muy buena aproximación. Se denomina longitud Compton asociada a una masa m a la cantidad

$$\lambda \equiv \frac{\hbar}{mc} = 197.32858 (51) \left(\frac{\text{MeV}}{mc^2} \right) \text{ fermi} \quad (4)$$

En resumen mediante el principio de invariancia gauge local hemos logrado construir una teoría que explica bien la interacción de una partícula escalar cargada mediada por el campo electromagnético y hemos dado una explicación natural de la ausencia de masa para las partículas asociadas con dicho campo: los fotones. Hasta aquí hemos tratado la materia como partículas no relativistas de spin cero. Sin embargo no hay ninguna dificultad conceptual, pero sí una mayor complicación matemática, en seguir los mismos pasos para describir la interacción totalmente covariante relativista de los electrones con el campo electromagnético. El campo electromagnético, que ya hemos descrito de forma relativista, continúa siendo representado por una función $A^\mu(x)$, y para describir el electrón es necesario usar un objeto $\psi(x)$ que se llama *espinor* y que se transforma de una manera inusual bajo las transformaciones de Lorentz. Cuando los electrones y fotones son muy energéticos aparecen de forma natural procesos de creación y destrucción de partículas, tales como el bien conocido proceso de creación de pares



los cuales deben ser incorporados a nuestro esquema. Esto se logra convirtiendo las funciones $A^\mu(x)$ y $\psi(x)$ en operadores capaces de crear y destruir partículas. El campo $A^\mu(x)$ crea y destruye fotones; el campo $\psi(x)$ destruye electrones y crea antielectrones, mientras que $\psi^\dagger(x)$ crea electrones y destruye positrones. Esta densidad Lagrangiana es la que corresponde a la Electrodinámica Cuántica (Q.E.D) que como ya hemos dicho es la teoría más precisa de toda la física. La densidad Lagrangiana es la suma de tres términos: uno que describe el campo de los electrones libres, otro que describe el campo electromagnético libre y un término de interacción, que se representa pictorialmente por

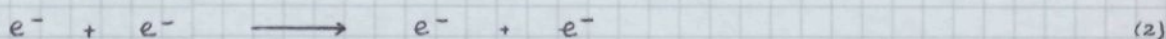


donde la línea $\sim\sim\sim$ es un fotón y las líneas continuas son electrones o positrones.

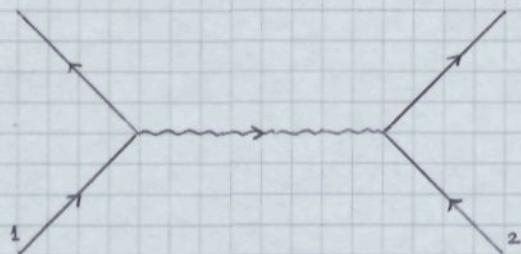
La Q.E.D. fue formulada S. Tomonaga, J. Schwinger y R.P. Feynman durante la década de los cuarenta. La teoría es complicada y no se conocen soluciones exactas; todo lo que sabemos es como calcular cualquier proceso entre electrones y fotones en serie de potencias de la constante de acoplamiento e o mejor dicho en serie de potencias de la constante de estructura fina

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137.03604111} \quad (1)$$

En general se asocia a cada término de la serie una representación gráfica, llamada diagrama de Feynman, a partir de lo cual se calcula su contribución al proceso deseado. Veamos algunos ejemplos: tomaremos el proceso



En el orden más bajo en teoría de perturbaciones un diagrama que contribuye a este proceso es



que puede interpretarse diciendo que el electrón 1 en su propagación emite un fotón que es absorbido por el segundo electrón. De acuerdo con el dibujo la amplitud de probabilidad para este proceso es proporcional a $e^2 \propto \alpha$. El fotón emitido por 1 y absorbido por 2 no puede ser un fotón real, pues la ley de conservación de energía-momento, que se cumple en cada vértice, impide el proceso $e^- \rightarrow e^- + \gamma$; tales fotones se llaman virtuales. En este sentido decimos que el fotón es el mediador de las interacciones electromagnéticas.

Ya hemos visto que el hecho de que el fotón tenga masa nula es lo que hace que la interacción electromagnética disminuya muy lentamente con la distancia y su alcance es infinito. Volvamos sobre

este punto: tomaremos dos partículas de masa M que interactúan debido al intercambio de una partícula de masa m . Supongamos inicialmente las dos partículas interactuantes en reposo en lo cual la energía del sistema es $E_i = 2Mc^2$; supongamos ahora que una de las partículas emite una partícula mediadora, entonces antes de que ésta sea absorbida por la otra la energía del sistema es al menos $E_{int} = 2Mc^2 + mc^2$, es decir ha habido una violación de la ley de conservación de la energía de al menos $\Delta E = mc^2$. De acuerdo con la mecánica cuántica tal violación puede subsistir a lo sumo durante un tiempo $\Delta t \approx \hbar / \Delta E = \hbar / mc^2$. Esto significa que la distancia a que se puede propagar la partícula mediadora es $d \approx c \Delta t$

$$d = \frac{\hbar}{mc} \tag{1}$$

y esta cantidad suele llamarse el alcance de la interacción. Si $mc^2 = 100 \text{ MeV}$ se encuentra que $d \approx 2 \text{ fm}$ y si $mc^2 = 100 \text{ GeV}$ entonces $d \approx 0.002 \text{ fm}$.

En el siguiente orden de teoría de perturbaciones contribuyen varios diagramas uno de los cuales es



Es de esperar que este diagrama de una pequeña corrección (de orden α) al diagrama dominante. Si bien es así las cosas se complican extraordinariamente pues cuando se calculan las contribuciones de todos los diagramas de orden α^2 a la amplitud de probabilidad de transmisión se encuentra un resultado infinito. Sin embargo una redefinición de la carga y de la masa del electrón, así como un cambio de normalización adecuado de $A^\mu(x)$ y $\psi(x)$ permite eliminar los infinitos de la teoría en cualquier orden de teoría de perturbaciones. Este proceso se denomina renormalización y una teoría que en cualquier orden de teoría de perturbaciones los resultados físicos puedan ser expresados en términos de un número finito de constantes a determinar experimentalmente (en la Q.E.D. éstas son la masa y carga del electrón) se dice

que es una teoría renormalizable. La Q.E.D. es una teoría renormalizable y creemos que solo las teorías de campos renormalizables juegan un papel en la descripción de los fenómenos físicos.

Queremos también decir algo sobre el carácter de la serie de perturbaciones así obtenida. En la práctica se calculan solo unos pocos términos de la serie (a lo sumo tres o cuatro) y al calcular nuevos términos se logra un acuerdo cada vez mejor con los datos experimentales. Si la serie fuese convergente sería de esperar que los resultados teóricos mejoraran al calcular ordines más y más elevados en la serie perturbativa. Sin embargo probablemente esto no sucede pues se ve que la serie de la electrodinámica cuántica es una serie asintótica. ¿Qué es una serie asintótica? Consideremos para comenzar un problema físico más simple que da origen a una serie asintótica. Se trata de calcular la energía del estado fundamental del Hamiltoniano

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + \lambda x^4 \quad (1)$$

Esta energía viene dada en teoría de perturbaciones por la serie

$$\tilde{E}_0(\lambda) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \lambda^k \quad (2)$$

donde los B_k pueden ser calculados. Indiquemos por $E_0(\lambda)$ el valor exacto que sobemos calcular numéricamente. Sea $E_0(\lambda, m) = 1 + \sum_{k=1}^m B_k \lambda^k$, entonces si

$$R(m, \lambda) \equiv \lambda^{-m} [E_0(\lambda) - E_0(\lambda, m)] \quad (3)$$

se puede probar que

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} R(m, \lambda) = 0 \quad \forall m \geq 1 \quad (4)$$

aun cuando

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |R(m, \lambda)| = \infty \quad (5)$$

Así se puede lograr que

$$|\lambda^{-m} [E_0(\lambda) - E_0(\lambda, m)]| < \epsilon \quad (6)$$

para $\epsilon > 0$ arbitrario, tomando λ suficientemente pequeño

Para $\lambda = 0.1$ se tiene que $E_0(\lambda = 0.1) = 1.065285 \dots$ y los sucesivos valores de $E_0(\lambda, m)$ son

m	$E_0(\lambda, m)$	m	$E_0(\lambda, m)$	m	$E_0(\lambda, m)$
1	1.075000	8	1.063921	15	1.145532
2	1.061875	9	1.067178	16	0.873556
3	1.067078	10	1.062396	17	1.551436
4	1.064062	11	1.070105	18	-0.238774
5	1.066300	12	1.056560	19	+4.755238
6	1.064301	13	1.082333	20	-9.919902
7	1.066378	14	1.029516		

El hecho de que el electrón pueda emitir fotones virtuales y que éstos a su vez puedan usar pares virtuales electrón-positrón hacen que en la Q.E.D el electrón tenga una estructura relativamente compleja: En el interior del electrón hay una carga negativa, llamada la carga desnuda, de gran tamaño, que pudiera ser muy bien infinita. Esta carga incluye en el radio que la rodea un halo de carga positiva, que así cancela la carga desnuda. La carga efectiva del electrón, cuando se mide desde lejos (muy bajas energías) es simplemente la diferencia entre estas dos cargas. Una partícula de prueba dotada de gran energía podría penetrar la pantalla de carga positiva y empezaría a notar la gran carga desnuda. Si q^k es la transferencia de momento relevante al proceso considerado y definimos $Q^2 = -q^2$ entonces la constante de estructura fina efectiva viene dada, en la aproximación de un loop, por

$$\alpha(Q^2) = \frac{\alpha}{1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{Q^2}{m^2}} \quad (1)$$

donde m es la masa del electrón y α es la constante de estructura fina medida a bajas energías y cuyo valor hemos dado antes. Noten que la variación es muy lenta y que para $Q^2 = (100 \text{ GeV})^2$ se tiene

$$\alpha[Q^2 = (100 \text{ GeV})^2] = 1.0192 \alpha$$

Todo esto nos hace ver que las interacciones electromagnéticas, cuya intensidad viene básicamente dada por $\alpha (\alpha^2)$, se hacen más y más intensas a medida que tratamos energías más y más elevadas. En Q.E.D. pura y a energías suficientemente altas las soluciones perturbativas pueden carecer de todo significado.

Notemos finalmente que si bien la Q.E.D., el ejemplo más simple de teoría gauge, da un acuerdo extraordinariamente satisfactorio entre los cálculos teóricos y los resultados experimentales a las energías habituales en los laboratorios, no da ninguna explicación del hecho de que la carga eléctrica está cuantificada.

3 - Grupos continuos

En Física juegan un papel extraordinariamente importante los llamados grupos continuos y necesitamos considerar algunas propiedades de los mismos. Vamos a introducir el lenguaje de los grupos continuos mediante un ejemplo.

Empezamos recordando algunas propiedades de las matrices de Pauli. Denotemos estas matrices por τ_i y una representación de las mismas es

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Estas son matrices autoadjuntas ($\tau_i^\dagger = \tau_i$) que satisfacen las siguientes propiedades

$$\tau_i \tau_j + \tau_j \tau_i = 2 \delta_{ij} I \quad \Rightarrow \quad \tau_i^2 = I$$

$$\tau_i \tau_j = \delta_{ij} I + i \epsilon_{ijk} \tau_k \quad (2)$$

$$\text{Tr}(\tau_i) = 0$$

Por otra parte si $\vec{\alpha}$ es un vector

$$(\vec{\alpha} \cdot \vec{\tau})^2 = \vec{\alpha}^2 I = \alpha^2 I \quad (3)$$

Por otra parte las matrices $\{I, \tau_1, \tau_2, \tau_3\}$ forman una base en el sentido que toda matriz 2×2 puede ser escrita como combinación lineal de las mismas. Si A es una matriz arbitraria 2×2 se tiene prueba fácilmente que

$$A = \frac{1}{2} \left\{ \text{Tr}[A] + \sum_{i=1}^3 \text{Tr}[A \tau_i] \tau_i \right\} \tag{1}$$

Recordemos un bien conocido teorema: La condición necesaria y suficiente para que una matriz U sea unitaria y unimodular (es decir de determinante uno) es que

$$U = e^{iA}, \quad A = A^\dagger, \quad \text{Tr}[A] = 0 \tag{2}$$

Teniendo en cuenta esto es inmediato probar que para matrices de orden N , una matriz unitaria unimodular queda fijada dando $(N^2 - 1)$ números reales. En efecto una matriz A arbitraria queda determinada dando $2N^2$ números reales; si $A^\dagger = A$, entonces dicha matriz queda determinada con solo N^2 números reales y si además $\text{Tr}[A] = 0$ el número de cantidades reales que la determinan se reduce a $(N^2 - 1)$.

Teniendo en cuenta lo que acabamos de decir y la expresión (2) es evidente que en un espacio bidimensional toda matriz unitaria unimodular puede ser escrita de la forma

$$S[\vec{\alpha}] \equiv \exp \left\{ \frac{i}{2} \vec{\alpha} \cdot \vec{e} \right\} \tag{3}$$

donde $\vec{\alpha}$ es un vector real arbitrario. Evidentemente toda matriz de la forma (3) da origen a una matriz unitaria y unimodular. En este caso particular se puede escribir (3) en la forma

$$S[\vec{\alpha}] = \cos \frac{\alpha}{2} + i (\hat{\alpha} \cdot \vec{e}) \sin \frac{\alpha}{2} \tag{4}$$

donde $\alpha^2 \equiv \vec{\alpha}^2$ y $\hat{\alpha} \equiv \vec{\alpha} / \alpha$. En efecto

$$\begin{aligned} S[\vec{\alpha}] &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!} \frac{i^{2m}}{2^{2m}} (\vec{\alpha} \cdot \vec{e})^{2m} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!} \frac{i^{2m+1}}{2^{2m+1}} (\vec{\alpha} \cdot \vec{e})^{2m+1} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2m} + i (\hat{\alpha} \cdot \vec{e}) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2m+1} \end{aligned}$$

de donde se deduce inmediatamente el resultado deseado

Es inmediato comprobar que el conjunto de todas las matrices unitarias unimodulares bidimensionales forman un grupo cuya ley de multiplicación es la ley de multiplicación de matrices. Los matemáticos designan este grupo con la notación $SU(2)$. Fijémonos que este grupo tiene infinitos elementos y que para especificar un elemento del grupo son necesarios tres parámetros reales que pueden tomar un conjunto continuo de valores, por esta razón se dice que $SU(2)$ es un grupo continuo de orden tres. Fijémonos que los parámetros han sido elegidos de forma que

$$S[\vec{\alpha} \equiv 0] = I \quad (1)$$

De (28.4) es inmediato ver que $S[\vec{\alpha}/2] S[\vec{\alpha}/2] = S[\vec{\alpha}]$ lo cual garantiza que todas estas transformaciones están conectadas con la identidad, es decir que cualquier transformación finita puede obtenerse por iteración de transformaciones infinitesimales, es decir aquellas para las cuales $\vec{\alpha}$ es un función infinitesimal $\delta\vec{\alpha}$. Para una transformación infinitesimal

$$S[\delta\vec{\alpha}] = I + i \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \delta\vec{\alpha} \quad (2)$$

y las matrices $\vec{\tau} \equiv \vec{\tau}/2$ son los llamados generadores del grupo. De (27.2)

$$[T_i, T_j] = i \epsilon_{ijk} T_k \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (3)$$

y estas reglas de conmutación de los generadores se las llama el álgebra de Lie del grupo, siendo ϵ_{ijk} las llamadas constantes de estructura del grupo. Se puede probar que el álgebra de Lie del grupo define completamente las propiedades locales del mismo.

Consideremos ahora el álgebra de Lie de $SU(2)$ dado en (3). No preguntamos ahora si existen matrices invertibles de orden n que cumplan (3). Es evidente que si logramos encontrar un conjunto de tres matrices T_i que cumplan (3) también cumplirán (3) las matrices $T'_i = A T_i A^{-1}$ donde A es una matriz no singular arbitraria. Estos dos conjuntos se dicen equivalentes. Al decir que las

T_i sean irreducibles significa que las tres T_i (ni matrices equivalentes a ellas) no pueden ser escritas simultáneamente en la forma

$$T_i = \begin{array}{c|c} A_i & 0 \\ \hline 0 & B_i \end{array}$$

Si somos capaces de hallar estas matrices diremos que hemos hallado una representación irreducible de orden n del álgebra de Lie. Es evidente que existe una representación irreducible de orden 2 en la que

$$T_i = \frac{1}{2} \tau_i \quad (1)$$

que es la llamada representación fundamental. Existe también una representación trivial $T_i = 0$ de orden uno. Finalmente es también evidente que existe una representación, llamada regular o adjunta, de orden tres y en la que

$$(T_i)_{j k} = -i \epsilon_{i j k} \quad (2)$$

En efecto

$$\begin{aligned} ([T_i, T_j])_{em} &= (T_i T_j)_{em} - (T_j T_i)_{em} = (T_i)_{er} (T_j)_{rm} - (T_j)_{er} (T_i)_{rm} = \\ &= -\epsilon_{ier} \epsilon_{jrm} + \epsilon_{jer} \epsilon_{irm} = \epsilon_{ier} \epsilon_{jmr} - \epsilon_{jer} \epsilon_{imr} = \\ &= \cancel{\delta_{ij} \delta_{em}} - \delta_{im} \delta_{ej} - \cancel{\delta_{je} \delta_{em}} + \delta_{jm} \delta_{ei} = \delta_{ie} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{je} = \\ &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{emk} = i \epsilon_{ijk} (T_k)_{em} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que no se consideran como representaciones distintas las equivalentes se puede probar en este caso o puede probar que existe una y una sola representación irreducible para cada valor de $n = 0, 1, 2, \dots$

Supongamos que hemos hallado una representación irreducible de orden n y que son $T_i^{(n)}$ las matrices correspondientes. Si se tiene un

objeto de m componentes $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ que bajo la acción del grupo se transforma como

$$x_i \longrightarrow x'_i = \left\{ \exp [i \vec{\alpha} \cdot \vec{T}^{(m)}] \right\}_{ij} x_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, m \quad (1)$$

entonces decimos que este objeto se transforma de acuerdo con la representación irreducible dada. La importancia de tratar con representaciones irreducibles estriba en el hecho de que si la representación fuera reducible podríamos considerar un subconjunto de los elementos $\{x_1, \dots, x_m\}$ que bajo la acción del grupo se transformarían todos ellos entre sí.

Mucho de lo dicho hasta aquí es válido para gran cantidad de grupos continuos. En particular las matrices unitarias unimodulares de dimensión N forman un grupo $SU(N)$ continuo y que es de orden $N^2 - 1$. Las transformaciones infinitesimales se pueden escribir en la forma

$$S [i \delta \alpha_1, \dots, i \delta \alpha_{N^2-1}] = 1 + i \sum_{\alpha=1}^{N^2-1} T_\alpha \delta \alpha_\alpha \quad (2)$$

donde las T_α son $(N^2 - 1)$ matrices autoadjuntas de traza nula y de orden N . Satisfacen el álgebra de Lie

$$[T_i, T_j] = i f_{ijk} T_k \quad i, j, k = 1, 2, \dots, N^2 - 1 \quad (3)$$

donde las cantidades f_{ijk} reales y totalmente antisimétricas son las constantes de estructura. Existe, evidentemente la representación trivial $T_i \equiv 0$ de orden uno, la dada por las mismas T_i de (2) que es la fundamental y es de orden n y también la adjunta dada por

$$(T_i)_{jk} = -i f_{ijk} \quad (4)$$

que es de orden $N^2 - 1$. Ya no es cierto sin embargo que para toda dimensión se pueda hallar una representación irreducible. Así por ejemplo para $SU(3)$ las representaciones irreducibles de ordenes más bajos son: $1, 3, 3^*, 6, 6^*, 8, 10, 10^*, \dots$ donde $*$ indica que es una segunda representación del mismo orden y no equivalente a la primera.

4.- Teoría de gauge no abeliana

La razón por la que la Q.E.D no incluye la multiplicación de la carga eléctrica es que el grupo de gauge es el grupo $U(1)$ que es abeliano. Vamos a ver lo que sucede cuando el grupo gauge es no abeliano. A partir de ahora y para abrigar la notación usaremos un sistema de unidades en el que $\hbar = c = 1$. Consideremos dos partículas de spin cero y masa M cuyas funciones de onda indicaremos por $\Psi_1(x)$ y $\Psi_2(x)$; si introducimos una rotación matricial

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \Psi_1(x) \\ \Psi_2(x) \end{pmatrix} \quad (1)$$

la ecuación de Schrödinger para las partículas libres es

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x) = - \frac{1}{2M} \Delta \Psi(x) \quad (2)$$

que es deducible de la densidad Lagrangiana

$$L(x) = \frac{i}{2} \left[\Psi^\dagger(x) \frac{\partial \Psi(x)}{\partial t} - \frac{\partial \Psi^\dagger(x)}{\partial t} \Psi(x) \right] - \frac{1}{2M} \vec{\nabla} \Psi^\dagger(x) \cdot \vec{\nabla} \Psi(x) \quad (3)$$

Notar que la densidad Lagrangiana es invariante bajo las transformaciones de gauge globales

$$\Psi(x) \longrightarrow \Psi'(x) = S[\vec{\alpha}] \Psi(x) \quad (4)$$

$$S[\vec{\alpha}] = \exp \left\{ \frac{i}{2} \vec{\epsilon} \cdot \vec{\alpha} \right\}$$

es decir que la densidad Lagrangiana es invariante bajo el grupo $SU(2)$ y $\Psi(x)$ se transforma de acuerdo con la representación irreducible de orden 2 de este grupo. Es interesante hacer notar que como se trata de un grupo continuo basta probar la invariancia (o dar las leyes de transformación) bajo transformaciones infinitesimales para tener probada la invariancia (o conocer las leyes de transformación) bajo transformaciones finitas. A partir de ahora usaremos frecuentemente esta propiedad para abrigar la notación matemática.

La invariancia de (32.2) bajo (32.4) implica que la elección de lo que es la partícula 1 o la partícula 2 es artificial, si bien una vez en un punto del espacio-tiempo se haya hecho una elección ésta queda fijada por doquier. Queremos ahora ver lo que sucede si convertimos la transformación de gauge global (32.4) en una local

$$S[\vec{\alpha}(x)] \equiv \exp \left\{ \frac{i}{2} \vec{c} \cdot \vec{\alpha}(x) \right\} \quad (1)$$

donde $\vec{\alpha}(x)$ es un campo vectorial que depende de t y \vec{x} . Es decir que si bien la elección de la partícula 1 es artificial, esta elección puede hacerse independientemente en cada punto del espacio para un tiempo dado. Evidentemente $L(x)$ ya no es invariante bajo transformaciones locales pues

$$\begin{aligned} L(x) \longrightarrow L'(x) &= \frac{i}{2} \left\{ \Psi^\dagger(x) \left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{i}{2} \vec{c} \cdot \frac{\partial \delta \vec{\alpha}(x)}{\partial t} \right] \Psi(x) - \right. \\ &- \left. \left(\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{i}{2} \vec{c} \cdot \frac{\partial \delta \vec{\alpha}(x)}{\partial t} \right] \Psi(x) \right)^\dagger \Psi(x) \right\} - \frac{1}{2M} \left(\left[\vec{\nabla} + \frac{i}{2} \vec{\nabla} (\vec{c} \cdot \delta \vec{\alpha}(x)) \right] \Psi(x) \right)^\dagger \\ &- \left[\vec{\nabla} + \frac{i}{2} \vec{\nabla} (\vec{c} \cdot \delta \vec{\alpha}(x)) \right] \Psi(x) \end{aligned}$$

Como antes nos damos cuenta que la no invariancia es debida a que bajo las leyes de transformación de gauge locales

$$\partial_\mu \longrightarrow \partial_\mu + \frac{i}{2} \vec{c} \cdot \partial_\mu \delta \vec{\alpha}(x) \quad (2)$$

La forma obvia de conseguir la invariancia gauge local es, como antes, sustituir en la densidad Lagrangiana original las derivadas que allí figuran por unas derivadas covariantes

$$\partial_\mu \longrightarrow D_\mu \equiv \partial_\mu - ig \vec{c} \cdot \vec{B}_\mu(x) \quad (3)$$

Fijémosnos que hemos necesitado introducir tres campos vectoriales pues este es el número de parámetros del grupo. Para lograr la invariancia debemos imponer la ley de transformación

$$S^\dagger [\delta \vec{\alpha}(x)] [\partial_\mu - i g \vec{E} \cdot \vec{B}'_\mu(x)] S [\delta \vec{\alpha}(x)] = \partial_\mu - i g \vec{E} \cdot \vec{B}_\mu(x) \quad (1)$$

o equivalentemente

$$\partial_\mu - i g \vec{E} \cdot \vec{B}'_\mu(x) = S [\delta \vec{\alpha}(x)] [\partial_\mu - i g \vec{E} \cdot \vec{B}_\mu(x)] S^\dagger [\delta \vec{\alpha}(x)] \quad (2)$$

de aquí

$$\begin{aligned} \partial_\mu - i g \vec{E} \cdot \vec{B}'_\mu &= \left[1 + \frac{i}{2} \tau_i \delta \alpha_i \right] [\partial_\mu - i g \tau_j B_\mu^j] \left[1 - \frac{i}{2} \tau_k \delta \alpha_k \right] = \\ &= \left[1 + \frac{i}{2} \tau_i \delta \alpha_i \right] \left[\partial_\mu - \frac{i}{2} \tau_k \partial_\mu \alpha_k - \frac{i}{2} \tau_k \delta \alpha_k \partial_\mu - i g \tau_j B_\mu^j - \frac{1}{2} g \tau_j \tau_k B_\mu^j \delta \alpha_k \right] = \\ &= \cancel{\partial_\mu} - \frac{i}{2} \tau_k \partial_\mu \delta \alpha_k - \cancel{\frac{i}{2} \tau_k \delta \alpha_k \partial_\mu} - i g \tau_j B_\mu^j - \frac{1}{2} g \tau_j \tau_k B_\mu^j \delta \alpha_k + \cancel{\frac{i}{2} \tau_i \delta \alpha_i \partial_\mu} \\ &+ \frac{1}{2} g \tau_i \tau_j \delta \alpha_i B_\mu^j = \partial_\mu - i g \tau_j B_\mu^j - \frac{i}{2} \tau_j \partial_\mu \delta \alpha_j - \frac{1}{2} g [\tau_i, \tau_k] B_\mu^i \delta \alpha_k = \\ &= \partial_\mu - i g \tau_j B_\mu^j - \frac{i}{2} \tau_j \partial_\mu \delta \alpha_j - i g \epsilon_{ijk} \tau_j B_\mu^j \delta \alpha_k \end{aligned}$$

de donde la ley de transformación infinitesimal es

$$B_\mu^{i'}(x) = B_\mu^i(x) + \epsilon_{ijk} B_\mu^j(x) \delta \alpha_k(x) + \frac{1}{2g} \partial_\mu \delta \alpha_i(x) \quad (3)$$

Notar que teniendo en cuenta $L(x)$ dado en (32.31) y (33.3) la densidad Lagrangiana es invariante bajo las transformaciones de gauge locales es

$$\begin{aligned} L(x) &= \frac{i}{2} \left[\bar{\Psi}^+(x) \frac{\partial \Psi(x)}{\partial t} - \frac{\partial \bar{\Psi}^+(x)}{\partial t} \Psi(x) \right] - \frac{1}{2M} \vec{\nabla} \bar{\Psi}^+(x) \cdot \vec{\nabla} \Psi(x) \\ &+ g \bar{\Psi}^+(x) \vec{E} \cdot \vec{\Phi}(x) + \frac{ig}{2M} (\nabla_i \Psi(x))^+ \vec{E} \cdot \vec{A}_i(x) \Psi(x) \\ &- \frac{ig}{2M} \bar{\Psi}^+(x) \vec{E} \cdot \vec{A}_i(x) \nabla_i \Psi(x) - \frac{g^2}{2M} \bar{\Psi}^+(x) \vec{A}_i(x) \cdot \vec{A}_j(x) \Psi(x) \quad (4) \end{aligned}$$

donde $\vec{B}_\mu(x) \equiv (\vec{\Phi}(x), \vec{A}_i(x))$. Vemos que para lograr nuestro propósito hemos necesitado tres campos vectoriales y una sola constante de acoplamiento g , la cual caracteriza todos los acoplamientos que aquí aparecen.

Tenemos que hacer énfasis en un punto extraordinariamente importante. Imaginemos que hubiéramos temido en lugar de la situación original otras partículas un función de ondas $\Psi(x)$ que también se transformarían de acuerdo con la representación fundamental de $SU(2)$. Debido a que en la ley de transformación (34.3) aparece explícitamente g , estas partículas se deben acoplar como las anteriores. Más aún si $\Psi(x)$ se transforma de acuerdo con una representación irreducible de orden m , cuyos generadores terían en lugar de $\tau_i/2$ unas matrices $T_i^{(m)}$ de orden m , podríamos repetir los mismos razonamientos sustituyendo $\tau_i/2$ por $T_i^{(m)}$ y llegaríamos de nuevo a (34.3) pues en la deducción solo hemos utilizado (29.3) y por tanto todas las partículas quedan acopladas con intensidades caracterizadas por g . Esta unidad de la constante de acoplamiento es debida al carácter no abeliano de $SU(2)$.

Veamos ahora como introducir, sin romper la invariancia gauge local, los términos que describen solo el campo $\vec{B}_\mu(x)$. Definiremos como antes

$$F_{\mu\nu}(x) \equiv \frac{c}{g} [D_\mu, D_\nu] = \tau_i [\partial_\mu B_\nu^i(x) - \partial_\nu B_\mu^i(x)] + 2g \epsilon_{ijk} B_\mu^i(x) B_\nu^j(x) \tau_k \equiv \tau_i B_{\mu\nu}^i(x) \quad (1)$$

de donde

$$B_{\mu\nu}^i(x) = \partial_\mu B_\nu^i(x) - \partial_\nu B_\mu^i(x) + 2g \epsilon_{ijk} B_\mu^j(x) B_\nu^k(x) \quad (2)$$

Veamos cual es su ley de transformación. De (34.1)

$$F_{\mu\nu}(x) \longrightarrow F'_{\mu\nu}(x) = S[\vec{\alpha}(x)] F_{\mu\nu}(x) S^\dagger[\vec{\alpha}(x)] \quad (3)$$

de donde para transformaciones infinitesimales

$$\begin{aligned} \tau_i B'_{\mu\nu}{}^i &= \left[1 + \frac{c}{2} \tau_i \delta\alpha_i \right] \tau_j B_{\mu\nu}^j \left[1 + \frac{c}{2} \tau_k \delta\alpha_k \right] = \\ &= \tau_j B_{\mu\nu}^j = \frac{c}{2} [\tau_j, \tau_k] B_{\mu\nu}^j \delta\alpha_k = \tau_j B_{\mu\nu}^j - \tau_j \epsilon_{jck} \delta\alpha^c B_{\mu\nu}^k \Rightarrow \end{aligned}$$

$$B_{\mu\nu}^{i\bar{i}}(x) = B_{\mu\nu}^i(x) - \epsilon_{cjk} \delta\alpha^j(x) B_{\mu\nu}^R(x) \quad (1)$$

es decir que las intensidades de campo $\vec{B}_{\mu\nu}(x)$ se transforman de acuerdo con la representación adjunta de $SU(2)$. Entonces el término a añadir a la densidad Lagrangiana sin romper la invariancia es

$$-\frac{1}{4} \vec{B}_{\mu\nu}(x) \cdot \vec{B}^{\mu\nu}(x) \quad (2)$$

(El factor $16\pi \rightarrow 4$ porque a partir de ahora, y como es usual en teoría cuántica de campos usaremos un sistema racionalizado). El nuevo término no solo contiene para cada uno de los tres campos un término idéntico al que aparecería en el caso de la QED sino también términos de autoacoplamiento de los campos $\vec{B}_\mu(x)$ de orden cúbico y cuártico y ambos de intensidades caracterizadas por g . Como antes, somos incapaces de añadir términos másicos sin romper la simetría.

Todo lo que acabamos de hacer puede también realizarse tratando los campos de materia de forma relativista y usando grupos de invariancia más generales, mientras estos sean grupos de Lie semi-simples. Si por ejemplo se trata de $SU(N)$ entonces deben introducirse campos vectoriales $B_\mu^i(x)$ con $i=1, 2, \dots, N^2-1$ tales que los $B_\mu^i(x)$ que originan se transformen de acuerdo con la representación regular o adjunta. Existe siempre una única constante de acoplamiento g que describe el acoplamiento de los campos gauge con los campos de materia y los de los autoacoplamientos de orden cúbico y cuártico de los campos gauge. Los N^2-1 campos gauge son libres masa.

Frecuentemente estas teorías se llaman de Yang-Hills pues fueron C.N. YANG y R.L. HILLS [Phys. Rev. 86, 494 (1955)] los primeros que se dieron cuenta de la extraordinaria importancia de las teorías de gauge no abelianas si bien hasta muy al final de la década de los sesenta no fueron su inserción en las teorías de las partículas elementales.

5. - Las interacciones

Para poder dar una explicación a los fenómenos físicos del mundo que nos rodea los científicos se han visto en la necesidad de introducir interacciones o fuerzas entre las partículas elementales o compuestas que forman la materia. A lo largo de la historia de la Física el número y la naturaleza de estas interacciones ha ido variando. Newton fue el primero en darse cuenta que la misma interacción que explicaba la caída de las manzanas explicaba los movimientos de los planetas. Durante muchos siglos la electricidad y el magnetismo fueron consideradas ramas distintas de la Física. A principios del S. XIX Oersted se dio cuenta que ambos fenómenos estaban relacionados y fue Maxwell el que dio una teoría unificadora de la electricidad y el magnetismo al formular las famosas ecuaciones que hoy día llamamos de Maxwell.

A la gravitación y al electromagnetismo se han añadido durante nuestro siglo dos nuevas interacciones: las fuertes y las débiles y por tanto vemos que los fenómenos normales en el mundo que nos rodea son debidos a la acción sola o combinada de cuatro interacciones:

- i) Interacciones gravitacionales
- ii) Interacciones electromagnéticas
- iii) Interacciones fuertes
- iv) Interacciones débiles

Pasemos a describir muy sucintamente cada una de estas interacciones

i) En las interacciones gravitacionales la energía de interacción viene dada por la famosa ley de Newton

$$V(r) = - G \frac{M_1 M_2}{r} \tag{1}$$

donde $G = 6.6720(41) \times 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ seg}^{-2}$. La intensidad de las mismas viene medida por G , es decir la constante de la gravitación universal. Para poder comparar su intensidad con la de las otras interacciones es necesario introducir

una constante adimensional que la caracteriza y que suele tomarse como

$$\frac{G M_p^2}{\hbar c} = 5.9042 (37) \times 10^{-39} \quad (1)$$

donde hemos usado $M_p = 1.6726485 (93) \times 10^{-24}$ gr, $\hbar = 1.0545887 (57) \times 10^{-27}$ erg seg y $c = 2.99792458 (1.2) \times 10^{10}$ cm μg^{-1} . Como veremos más adelante este número es muchos órdenes de magnitud menor que los correspondientes a todas las otras interacciones, lo cual implica que, al menos fenomenológicamente, si alguna de las otras interacciones actúa la gravitación pueda despreciarse. Como sabemos su importancia es enorme en el macrocosmos debido no sólo a que su alcance es infinito, sino también que actúa de forma siempre atractiva entre dos cuerpos con masa. El hecho de que esta interacción sea tan extraordinariamente débil hace muy difícil su estudio. Saber que la interacción gravitacional satisface la ley de Newton es muy poco y es equivalente a que todo lo que superamos de las interacciones electromagnéticas fuera la ley de Coulomb. Einstein en su teoría del campo gravitacional (relatividad general) dio el equivalente gravitacional de las ecuaciones de Maxwell y si bien su teoría ha tenido varios éxitos aun cuando lejos de haber comprobado experimentalmente las distintas predicciones de la misma.

(i) Las interacciones electromagnéticas vienen dadas a nivel clásico por las ecuaciones de Maxwell complementadas por la ley de fuerza de Lorentz

$$\vec{F} = e \left[\vec{E}(\vec{x}, t) + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B}(\vec{x}, t) \right] \quad (2)$$

Su intensidad viene determinada por la constante de estructura fina

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137.03604 (14)} \quad (3)$$

Estas interacciones son las que ligan los electrones a los núcleos atómicos para formar átomos, los átomos entre sí para formar moléculas y son los responsables de toda la química y la biología.

(ii) En 1911 Rutherford llevó a cabo su celebre análisis de las experimentos de colisión de partículas α sobre láminas delgadas de oro y plata.

Los resultados experimentales favorecían, sin lugar a dudas, un modelo atómico en el que toda la carga eléctrica positiva, y prácticamente toda la masa estaban concentradas en una pequeña región del espacio, llamado núcleo, alrededor del cual, y a grandes distancias en comparación a su tamaño, se movían de alguna forma los electrones. Sin embargo el misterio de la constitución del núcleo atómico no fue resuelto hasta 1932, año en que Chadwick descubrió el neutrón.

Hoy día sabemos que el átomo (A, Z) está formado por un núcleo cuyo radio es $R \approx 1.2 A^{1/3} \text{ fm}$, que contiene Z protones y $(A-Z)$ neutrones. A distancias grandes, en promedio, se mueven Z electrones, de forma que el átomo resultante resultante es eléctricamente neutro pues la carga del protón y la del electrón son iguales en módulo y de signo opuesto, mientras que el neutrón tiene carga nula. Experimentalmente sabemos que

$$\left| \frac{q_e}{q_p} + 1 \right| \leq 10^{-21} \quad (1)$$

Vemos pues que toda la estructura atómica y nuclear puede explicarse mediante tres partículas: e , p y n .

La existencia de núcleos estables no puede ser entendida si las únicas interacciones existentes son las electromagnéticas y las gravitacionales. Las fuerzas gravitacionales son totalmente despreciables y la repulsión electrostática entre protones haría que todos los núcleos fueran inestables, contra toda evidencia experimental. Para explicar la estabilidad nuclear es necesario suponer que existen unas nuevas fuerzas, que llamaremos interacciones fuertes, que ligan los neutrones y los protones y que son suficientemente intensas para compensar la repulsión electrostática. No hay gran diferencia entre la energía media de ligadura de los protones y de los neutrones en el núcleo y por tanto es de esperar que las fuerzas $p-p$, $p-n$ y $n-n$ tengan intensidades parecidas.

Evidentemente el alcance de estas fuerzas no puede ser infinito, ni siquiera muy grande pues entonces dominarían la estructura de los átomos y moléculas contra toda evidencia experimental. En 1935 Yukawa consideró que estas fuerzas eran también debidas al intercambio de una partícula y como estimó que el alcance de estas fuerzas era del orden de algo más de 1 fm , llegó a la conclusión de que su masa debía ser algo superior a 100 MeV . Esta partícula fue descubierta en 1947 por Powell, Occhiallini y Lattes, en la radiación cósmica y se la conoce

con el nombre de pión. Hay tres tipos de piones π^+ , π^- , π^0 y sus masas son a cau. 140 MeV.

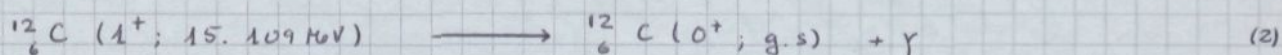
La fuerza nucleón-nucleón es muy complicada y no sabemos deducirla de primeros principios. Hoy día disponemos de potenciales fenomenológicos que se producen bien las secciones eficaces nucleón-nucleón y los datos de la estructura nuclear. Sabemos que para $r \lesssim 0.4$ fm el potencial nucleón-nucleón es altamente repulsivo; tiene después una zona intermedia de estructura muy complicada y que es debida no sólo al intercambio de piones sino al de otras partículas más pesadas. Finalmente existe una zona exterior $r \gtrsim 1$ fm donde las fuerzas debidas al intercambio de piones son dominantes. En esta zona y para nucleones en estado singlete el potencial queda bien aproximado por

$$V(r) = - \frac{g^2}{4\pi} \frac{1}{r} e^{-r/\mu} \tag{1}$$

$$\mu = \frac{\hbar}{M\pi c} \approx 1.43 \text{ fm}, \quad \frac{g^2}{4\pi\hbar c} \approx 14.8$$

Es decir que el parámetro sin dimensiones que caracteriza estas interacciones es del orden de 1000 veces superior al correspondiente electromagnético. Cuando las interacciones fuertes actúan, las interacciones electromagnéticas pueden tratarse como pequeñas correcciones.

(v) Es de un sabido que hay núcleos que son inestables y que se desintegran, generalmente, mediante la emisión de los tres tipos de rayos α , β y γ . Las desintegraciones γ son simplemente transiciones de un núcleo desde un estado excitado a otro estado del mismo núcleo de menor energía con la emisión de un fotón y es un proceso puramente electromagnético. Una transición típica típica es



cuya vida media es

$$\tau \approx \frac{\hbar}{\Gamma} = \frac{\hbar}{(36.22 \pm 0.68) \text{ eV}} = 1.817(35) \times 10^{-17} \text{ seg} \tag{3}$$

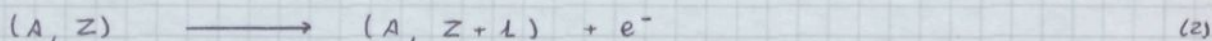
La desintegración α corresponde al proceso típico



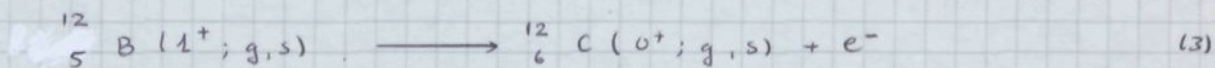
donde α es un núcleo de ${}^4_2\text{He}$. y es debida a las fuerzas fuertes bancamente.

Un ejemplo típico es la desintegración ${}^{238}_{92}\text{U} \rightarrow {}^{234}_{90}\text{Th} + \alpha$. y es muy usual en núcleos pesados y en estados muy excitados de cualquier núcleo.

Existen finalmente las desintegraciones β en las que se observa



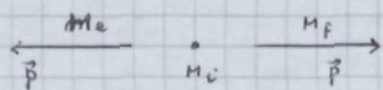
Un ejemplo típico observado es



cuya vida media es $\tau = 3.034 (13) \times 10^{-2}$ seg. Sin embargo el proceso (3) presenta algunas peculiaridades que durante muchos años preocuparon a los físicos

i) Si A es par (impar) un núcleo debe tener spin entero (semientero) y como el spin del electrón es $1/2$ se tiene que $J_i \neq J_f$ y no hay conservación del momento angular

ii) Por otra parte si M_i es la masa del núcleo inicial y M_f la del final entonces en el sistema en que el núcleo inicial este en reposo, el núcleo final y el electrón salen con momentos iguales y opuestos



según la ley de conservación del momento. Entonces la ley de conservación de la energía implica

$$M_i c^2 = (M_f^2 c^4 + p^2 c^2)^{1/2} + (M_e^2 c^4 + c^2 p^2)^{1/2}$$

$$\Rightarrow p = \frac{c}{2M_i} \lambda^{1/2} (M_f^2, M_i^2, M_e^2) \quad (4)$$

$$\Rightarrow E_e = \frac{c^2}{2M_i} (-M_f^2 + M_i^2 + M_e^2)$$

siendo $\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx$, la llamada función λ de Källén

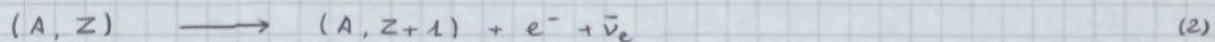
Es decir los electrones salen con una energía totalmente determinada, lo cual es totalmente falso pues los electrones aparecen con una distribución de energías

que viene descrita (transiciones permitidas) en la ley

$$\frac{dN(E_e)}{dE_e} \propto p_e E_e (E_{\max} - E_e)^2 \quad (1)$$

donde E_{\max} es la energía máxima de los electrones emitidos y viene dada muy aproximadamente por (39.4). Es decir que estas desintegraciones parecen violar la ley de conservación del momento angular y la de la energía.

Esta desagradable situación fue resuelta por Pauli al suponer, en 1931, que al producirse la desintegración β además de un electrón se emitía otra partícula de spin $1/2$, carga nula y masa extraordinariamente pequeña pues E_{\max} venía dada, dentro de los errores experimentales, en (39.4). Hoy día esta partícula se denomina antineutrino y su símbolo para una desintegración β típica

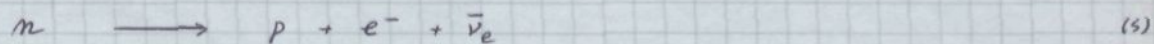


para las cuales son válidas ambas leyes de conservación. El antineutrino postulado por Pauli fue descubierto, en 1957, por Cowan y Reines. Hoy día está bien establecido que $M_\nu c^2 < 60 \text{ eV}$ y una medida reciente (1980) de la forma del espectro de la desintegración β del tritio sugiere que su masa es

$$14 \text{ eV} < M_\nu c^2 < 44 \text{ eV} \quad 99\% \text{ C.L.} \quad (3)$$

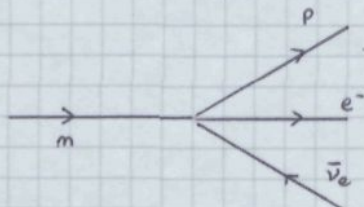
Si además se hacen hipótesis sensatas sobre la estructura de la molécula de nitrógeno, en la que se halla el tritio, entonces $M_\nu c^2 = (34.3 \pm 4) \text{ eV}$. Estos valores, si bien aún yentés, necesitan confirmación.

Los neutrones libres se desintegran β de la forma



con una vida media $\tau = 917 (14) \text{ seg}$. En general los neutrones de los núcleos son estables pues el principio de exclusión de Pauli impide su desintegración, cuando esto no sucede el núcleo es un emisor β .

La primera teoría cuántica de campos para describir las desintegraciones β fue dada por Fermi en 1934. Posteriormente (1956) Lee y Yang dieron una reformulación de la teoría de Fermi en la que la paridad era rotada de la forma máxima posible y finalmente Gabbibo, en 1963, dio una formulación general de las desintegraciones débiles. Limitándonos a la desintegración del neutrón de interacción se puede representar como



y la constante de acoplamiento es

$$G_F c \hbar^{-3} = 1.1663(3) \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$$

(1)

$$\Rightarrow \frac{G_F M_P^2 c}{\hbar^3} = 1.0267(3) \times 10^{-5}$$

es decir su intensidad es menor que la de las interacciones electromagnéticas. En realidad la teoría de Gabbibo que explicaba un gran número de datos experimentales es a la suma una teoría fenomenológica. El problema es el siguiente. Mediante la teoría de Gabbibo y usando teoría de perturbaciones en primer orden de potencias en G_F se obtenía un buen acuerdo entre un número de datos experimentales y la teoría. Como la precisión en las medidas experimentales no es muy grande y la constante de acoplamiento es pequeña las correcciones de orden superior al primero son despreciables. Sin embargo si se querían calcular estas correcciones los resultados obtenidos eran infinitos que no podían ser eliminados pues la teoría de Gabbibo no es renormalizable, y por tanto no puede ser la teoría final de las interacciones débiles. Mas adelante volveremos sobre este punto y veremos como se resuelve hoy día este problema.

6. - Las partículas

Después de haber pasado una semana revisando a las interacciones que

parecen ser necesarias para explicar el mundo que nos rodea. Que hemos visto cuales son hoy día las partículas que consideramos elementales es de una estructura conocida. Vamos a dividir las partículas elementales en dos grandes grupos:

i) Los leptones: Partículas elementales que no tienen interacciones fuertes

ii) Los quarks: Partículas elementales con todo tipo de interacciones.

i) Los leptones

ia) e, ν_e

Ambas partículas tienen $spin\ 1/2$, y sus propiedades más importantes son

$$e : M_e = 0.511\ 003\ 4\ (14)\ \text{MeV} , \quad \tau > 5 \times 10^{21}\ \text{años} , \quad Q = -1$$

(4)

$$\nu_e : M_{\nu_e} \leq 60\ \text{eV} , \quad \tau > 3 \times 10^2\ (\text{mV/eV})\ \text{seg} , \quad Q = 0$$

El electrón fue descubierto por J.J. Thomson a finales del siglo pasado (1897) estudiando los rayos catódicos. Como hemos dicho antes el neutrino fue postulado por Pauli en 1931 y descubierto por Cowan y Reines en 1957. Ya hemos dicho que estas partículas no tienen interacciones fuertes. Ambas tienen interacciones débiles y el electrón, al estar cargado, tiene además interacción electromagnética. Es precisamente el hecho de que el neutrino tenga solo interacciones electrodébiles lo que hace tan difícil su detección.

P.A.M. Dirac, en 1928, intentó construir una ecuación de ondas relativista para el electrón, postulando la ecuación que hoy día se llama de Dirac. Al resolver esta ecuación se encontró que en un electrón con momento \vec{p} podía tener energía positiva o negativa $E = \pm (\vec{p}^2 + m_e^2)^{1/2}$. Para evitar las dificultades vinculadas con la introducción en la teoría de partículas observables un energía negativa, Dirac introdujo el concepto de vacío como aquel estado en el que todos los estados con energía negativa están ocupados por electrones, mientras que todos los estados de energía positiva están vacíos. Supongámonos ahora que bajo la influencia de acciones externas se quita uno de los electrones de un estado de energía negativa, es decir se crea un agujero en

el mar de electrones de energía negativa. Tomemos entonces en el estado final un agujero y un electrón con energía positiva que ha sido arrancado del mar. Se puede probar que este agujero se comporta como una partícula de masa igual a la del electrón, de energía positiva y con carga igual y opuesta a la del electrón. Hoy día esta partícula se la llama anti-electrón o positrón. El positrón fue descubierto por Anderson, en 1932, en la radiación cósmica.

La existencia de antipartículas no es una peculiaridad del electrón, sino que en principio toda partícula tiene la antipartícula correspondiente. La partícula y la antipartícula tienen la misma masa, el mismo spin y la misma vida media, pero todas sus cargas son iguales y opuestas. ¿Por qué decimos cargas? Sabemos bien lo que es la carga eléctrica; esta goza de dos propiedades que nos interesa destacar:

- es un número cuántico aditivo, es decir que la carga de un sistema de partículas es la suma de las cargas de las partículas que lo componen
- es exactamente conservada, es decir en cualquier proceso la carga inicial y la final son iguales.

En general llamaremos carga a todo número cuántico aditivo sea o no absolutamente conservado. Una partícula coincide con su antipartícula si y solo si todas sus cargas son nulas.

El electrón y el neutrino electrónico tiene además de carga eléctrica otro tipo de carga llamada carga o número leptónico electrónico L_e y para ambas $L_e = +1$. Evidentemente para el anti-electrón y el anti-neutrino $L_e = -1$ y para las restantes partículas $L_e = 0$.

(b) μ, ν_μ

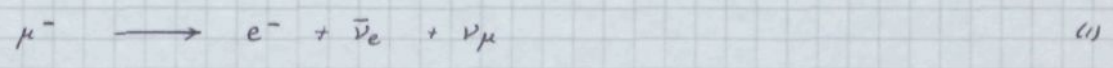
Ambas partículas tienen spin $1/2$ y sus propiedades más importantes son

$$\mu: M_\mu = 105.65946(24) \text{ KeV}, \quad \tau = 2.197120(77) \times 10^{-6} \text{ seg}, \quad Q = -1$$

$$\nu_\mu: M_{\nu_\mu} < 0.57 \text{ KeV}, \quad \tau > 2.6 \times 10^{-2} (m_\mu / eV) \text{ seg}, \quad Q = 0$$

El muón fue descubierto por Neddermeyer y Anderson, en 1938, en la radiación cósmica. El neutrino muónico que como el anterior se puede considerar estable y de masa nula, es distinto de ν_e según han demostrado experimentalmente

Darby (1962) y Bienlein (1964) de acuerdo con la hipótesis de Schwinger y Nishijima (1957). En más de un 98% de los veces el muón se desintegra



que es un proceso mediado por las interacciones débiles. Además de la carga eléctrica estas partículas tiene una carga leptónica muónica $L_\mu = +1$ que se supone exactamente conservada. Evidentemente el antimuón y el antimuón muónico tienen $L_\mu = -1$. Todas las demás partículas tienen $L_\mu = 0$. Es precisamente las leyes de conservación de los números leptónicos que no permiten el proceso $\mu^- \rightarrow e^- + \gamma$ que estaría energéticamente favorecido y

¿Por qué existen el μ y ν_μ ? la verdad es que no lo sabemos, pues no sabemos que sea necesaria su existencia

(c) τ, ν_τ

Ya hemos dicho que al lado del (e, ν_e) había un (μ, ν_μ) que parecen totalmente innecesarios. Pero desde 1975 sabemos que esto no es todo al descubrir H.L. Perl un nuevo leptón, el τ . Sus propiedades

$$\tau : M_\tau = 1784 (4) \text{ MeV} , \quad \tau < 2.3 \times 10^{-12} \text{ seg} , \quad Q = -1$$

$$\nu_\tau : M_\nu < 250 \text{ MeV} , \quad \nu_\tau \quad Q = 0$$

Ambas partículas tienen spin $1/2$ y el valor teórico de la vida media del τ es $\tau = 2.73 (49) \times 10^{-13}$ seg. Fijémonos que M_τ es casi dos veces la masa del protón y una vez más el nombre de leptón es poco apropiado pues significa "ligero". Se ve que el neutrino asociado al tau es estable y que su masa es nula o muy pequeña. Se sabe que $\nu_\tau \neq \nu_\mu$ pero esto está comprobado que $\nu_\tau \neq \nu_e$ aunque se ve que esto es así. Se supone que existe una carga leptónica tauónica L_τ que es $+1$ para el τ y ν_τ , $L_\tau = -1$ para sus antipartículas y cero para las demás partículas. y que es conservado.

Si bien la evidencia experimental no es concluyente todo parece favorecer un modelo leptónico secuencial. En este modelo se supone que existe una sucesión de leptones cargados de masas crecientes y que cada leptón cargado tiene asociado un neutrino. Cada tipo leptónico tiene una carga leptónica asociada que

es conservada. Tenemos pues un cierto número de generaciones

$$(v_e, e) , (v_\mu, \mu) , (v_\tau, \tau) , \dots \quad (1)$$

Los teóricos esperan que el número de generaciones no sea muy elevado (15-16). Argumentos de tipo cosmológico (abundancia primitiva de ^4_2He) hacen creer que el número de generaciones no puede superar a 4 o 5.

Mediante argumentos cosmológicos se puede también probar que no existen neutrinos estables con masas comprendidas entre 50 eV y 1 GeV y que además la suma de todas las masas de los neutrinos ligeros estables debe cumplir

$$\sum_d m_{\nu_d} \leq 50 \text{ eV} \quad (2)$$

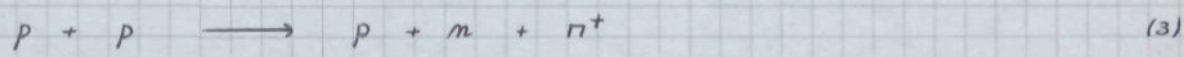
ii) Los quarks

Al finalizar la segunda guerra mundial se sabía que existían el p y el n, que entonces se consideraban elementales, y que formaban parte de lo que después se llamaría la familia de los hadrones y que era la formada por las partículas que interactuaban fuertemente. Poco después se descubrieron los piones que pasaron a aumentar la familia de los hadrones y a lo largo de la década de los cincuenta y de los sesenta su número fue aumentando a gran velocidad y en la actualidad hay unos pocos centenares. Hoy día los hadrones se clasifican en dos grupos

i) Los bariones: que son partículas de spin semi-entero y carga bariónica $B \neq 0$

ii) Los mesones: que tienen spin entero y $B = 0$.

Sabes el protón y el neutrón que como sabemos son los componentes de los núcleos atómicos, todos los restantes hadrones se han producido en choques de partículas de altas energías que vienen, fundamentalmente, mediados por las interacciones fuertes. Por ejemplo



Sabes el protón que es estable todos los demás hadrones se desintegran.

Se puede probar que la vida media de una partícula depende crucialmente de dos factores

- i) la vida media es inversamente proporcional al cuadrado de la constante de acoplamiento de la interacción que rige su desintegración.
- ii) la vida media es inversamente proporcional a un factor, llamado de espino factor, que crece rápidamente con la energía liberada en la interacción.

En principio los hadrones, que tienen todo tipo de interacciones, tienden a desintegrarse en procesos mediados por las interacciones fuertes y entonces sus vidas medias son $\tau \approx 10^{-20} - 10^{-24}$ seg. Estos hadrones se llaman mesonares. En algunos casos leyes de conservación prohíben las desintegraciones fuertes y entonces el hadrón se desintegra electrodinámicamente con vidas medias típicas $\tau \approx 10^{-16} - 10^{-20}$ seg. Finalmente también la desintegración electrodinámica es prohibida el hadrón tiende a desintegrarse débilmente con vidas medias $\tau \approx 10^{-8} - 10^{-13}$ seg. La inmensa mayoría de los hadrones se desintegran vía las interacciones fuertes y solo uno es estable: el protón. El positrón es estable pues es el hadrón más ligero y B debe ser exactamente o al menos muy aproximadamente conservado. En la tabla damos algunas propiedades de los bariones que se desintegran débil y electrodinámicamente y que eran conocidos ya en 1974.

Un paso previo a todo intento no solo de construir modelos para describir la posible estructura de los hadrones sino también para intentar entender sus propiedades, es establecer algún orden entre las partículas más allá de los grandes grupos en que hasta ahora han sido divididas. Los esquemas de clasificación se basan fundamentalmente en el hecho de que la naturaleza conserva muchas cantidades de forma exacta o aproximada y como resultado de esto muchas partículas tienen propiedades fácilmente relacionables. Es conveniente recordar que toda simetría continua lleva asociada una ley de conservación y que se usará uno u otro concepto según convenga. Para las simetrías discretas esto no es cierto en general pues si bien la simetría bajo la operación de paridad implica la existencia de una ley de conservación de la paridad, la simetría bajo la inversión temporal no conduce a ninguna ley de conservación.

Creemos que toda teoría física debe ser invariante bajo el grupo propio de Poincaré (grupo de Lorentz propio más traslaciones espaciales temporales). Esto tiene dos consecuencias:

	MASS (MeV)	J ^π	τ (μg)	Mode principal de désintégration	T	T ₃	Q	θ	S	Y
π [±]	139.5669 (12)	0 ⁺	2.6030 (23) × 10 ⁻⁸	μ [±] ν	1	±1	±1	0	0	0
π ⁰	134.9626 (39)	0 ⁺	0.828 (57) × 10 ⁻¹⁶	γγ		0	0			
K ⁺	493.669 (15)	0 ⁺	4.2374 (26) × 10 ⁻⁸	μ ⁺ ν	1/2	+1/2	+1	0	+1	+1
K ⁰	497.67 (13)	0 ⁺	0.8923 (22) × 10 ⁻¹⁰	ππ		-1/2	0			
K _S ⁰			5.483 (40) × 10 ⁻⁸	πππ		0	0			
K _L ⁰			7.7 (13) × 10 ⁻¹⁹	γγ		0	0			
η	548.8 (6)	0 ⁺				0	0		0	0
ρ	938.2796 (27)	1/2 ⁺	> 10 ³⁰ cm ²	ρ e ⁻ ν̄	1/2	+1/2	+1	1	0	0
ρ	939.5734 (27)	1/2 ⁺	947 (44)			-1/2	0		0	0
Λ	1115.60 (5)	1/2 ⁺	2.632 (20) × 10 ⁻¹⁰	ρπ ⁻	0	0	0	1	-1	0
Σ ⁺	1189.36 (6)	1/2 ⁺	0.800 (4) × 10 ⁻¹⁰	ρπ ⁰		+1	+1			
Σ ⁰	1192.46 (8)	1/2 ⁺	5.8 (1.3) × 10 ⁻²⁰	Λγ	1	0	0	1	-1	0
Σ ⁻	1197.34 (5)	1/2 ⁺	4.482 (11) × 10 ⁻¹⁰	ππ ⁻		-1	-1			
Ξ ⁰	1314.9 (6)	1/2 ⁺	2.90 (10) × 10 ⁻¹⁰	Λπ ⁰	1/2	+1/2	0	1	-2	-1
Ξ ⁻	1321.32 (13)	1/2 ⁺	4.641 (16) × 10 ⁻¹⁰	Λπ ⁻		-1/2	-1			
Ω ⁻	1672.22 (34)	3/2 ⁺	0.82 (3) × 10 ⁻¹⁰	ΛK ⁻	0	0	-1	1	-3	-2

MESONS

BARYONS

- i) Para caracterizar las partículas elementales se puede utilizar la masa y el $spim$, pues estas junto con el momento caracterizan las representaciones irreducibles del grupo de Poincaré. Si la masa es nula solo podemos hablar de helicidad, que no es más que la proyección del $spim$ en la dirección del movimiento.
- ii) Como el grupo de Poincaré tiene diez parámetros y es continuo debe haber 10 cantidades conservadas. Estas son el momento, el momento angular total y el momento del centro de masas.

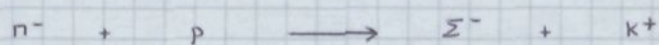
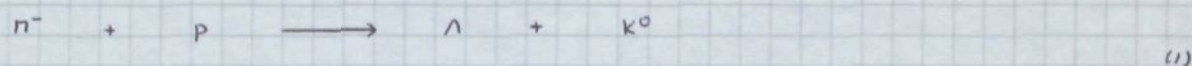
Para completar el grupo de Poincaré es necesario añadir a las transformaciones del grupo propio las operaciones de paridad y de inversión temporal. Se cree que las interacciones fuertes y electromagnéticas son invariantes bajo ambas operaciones, mientras que las interacciones débiles no solo violan la paridad de la forma máxima posible sino que también violan ligeramente la invariancia bajo inversión temporal. En los procesos entre partículas dominados por las interacciones fuertes y las electromagnéticas la paridad, que es un número cuántico multiplicativo, debe ser conservado. En las partículas de la tabla anterior se pueden fijar arbitrariamente las paridades del p , n y Λ y todas las demás se pueden determinar a partir de sus procesos de producción que vienen mediada por las interacciones fuertes. La razón por la que se fija la paridad del p no es posible determinar la del n es que hay la ley de conservación de la carga eléctrica. De la misma forma el hecho que las interacciones fuertes conserven una carga, que introduciremos más adelante, llamada extrañeza hace que la paridad de una partícula extraña, por ejemplo la Λ , deba ser fijada arbitrariamente. Mencionemos finalmente que la teoría cuántica de campos permite probar que para los fermiones la partícula y anti-partícula tienen paridades opuestas mientras que para bosones la partícula y la anti-partícula tienen la misma paridad.

Quisieramos ahora introducir el isospin que fue introducido por Heisenberg en 1932 en el marco de la Física Nuclear. En el mundo real el p y el n son dos partículas claramente distinguibles. Supongamos un mundo en que las interacciones débiles no existieran, entonces ambas partículas serían estables. Mas aún, si en este mundo ideal tampoco existieran las interacciones electromagnéticas, conceptos tales como carga y momento magnético dejarían de tener sentido y la única forma de distinguir ambas partículas sería el hecho de que el neutrón tiene una

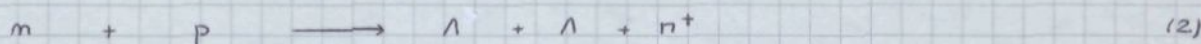
masa ligeramente superior a la del protón. Sin embargo, es un hecho general que esta diferencia de masa es debida a la distinta interacción de las dos partículas con el campo electromagnético y, por tanto, es de esperar que en un mundo en el que sólo existieran las interacciones fuertes el neutrón y el protón fueran dos partículas indistinguibles. Se usa el nombre nucleón para una partícula que puede presentar dos estados de carga; el protón y el neutrón.

La estructura matemática que permite desarrollar las ideas que acabamos de exponer es el llamado formalismo de isospin. Este consiste en suponer que las interacciones fuertes son invariantes bajo rotaciones en un espacio interno tridimensional llamado de isospin o, en un lenguaje más matemático, que las interacciones fuertes son invariantes bajo un grupo $SU(2)$ de isospin y cuyo generador \vec{T} juega aquí un papel totalmente análogo al operador momento angular en el grupo de rotaciones ordinario. Las partículas deben quedar clasificadas en isomultipletes caracterizados por el valor del isospin $T = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$. Si un conjunto de partículas constituye un isomultiplete caracterizado por T , decimos que tiene isospin T y para distinguir entre sí las $(2T+1)$ componentes del isomultiplete bastara usar T_3 que puede tomar los valores $T_3 = -T, -T+1, \dots, T-1, T$. Por otra parte, todas las partículas de un determinado isomultiplete deben tener no sólo la misma masa sino también las mismas propiedades espacio-temporales tales como spin y paridad, debido a que \vec{T} conmuta con todos los generadores del grupo de Poincaré y por razón parecida deben tener todas ellas el mismo valor de B . Como las interacciones electromagnéticas y débiles son mucho menos intensas que las fuertes es de esperar que queden buenos residuos de dicha invariancia en la naturaleza. Las partículas se podrían clasificar en isomultipletes, pero las partículas de un dado isomultiplete no tienen exactamente la misma masa pues las interacciones electromagnéticas existen y pueden romper la igualdad de la masa en unos pocos por ciento. Un análisis de la Tabla de la pag. 47 muestra que esto es precisamente lo que sucede. Como matemáticamente $SU(2)$ de isospin es análogo al grupo de rotaciones las leyes de adición de isospin son idénticas a las del momento angular: Si una partícula tiene $(T^{(1)}, T_3^{(1)})$ y otra $(T^{(2)}, T_3^{(2)})$ el estado de ambas tiene $T = T^{(1)} + T^{(2)}, T^{(1)} + T^{(2)} - 1, \dots, |T^{(1)} - T^{(2)}|$ y $T_3 = T_3^{(1)} + T_3^{(2)}$. Sin entrar en detalles queremos mencionar que el formalismo de isospin tiene utilidad más allá del marco de las interacciones fuertes, debido a que si bien las electromagnéticas y débiles rotan el isospin lo hacen de forma simple.

Cuando a finales de la década de los cuarenta e inicios de la década siguiente el número de hadrones conocidos fue aumentando, se encontró que una serie de transiciones que se deberían esperar que ocurrieran como interacciones fuertes y que no violaban ninguna ley de conservación conocida no tenían lugar o si ocurren lo hacen más las interacciones débiles. La única explicación posible de esto es que se estaba observando una nueva ley, hasta entonces desconocida, de conservación de las interacciones fuertes. Fue Gell-Mann quien, en 1953, introdujo el concepto de extrañeza. Se observaban, por ejemplo, las interacciones fuertes



mientras que no tiene lugar el proceso fuerte



Una asignación adecuada de extrañezas S viene dada en la tabla de la pag 47. Procesos como los (1) en los que las partículas extrañas son producidas en pares que tienen extrañezas opuestas son conocidos históricamente como procesos de producción asociada. Las interacciones fuertes y electromagnéticas conservan la extrañeza, mientras que las débiles permiten su no conservación a través de reglas simples.

En ocasiones se define la hipercarga como

$$Y = B + S \quad (3)$$

y para todas las partículas es válida la relación de Gell-Mann - Nishijima

$$Q = T_3 + \frac{1}{2} Y \quad (4)$$

donde Q es la carga de la partícula tomada como unidad la carga del protón.

En 1961 hubo un nuevo paso importante en el esquema de clasificación de las partículas elementales, gracias a los trabajos independientes de Gell-Mann y Ne'eman, que analizaremos brevemente. De los bariones que aparecen en la tabla de la pag. 47 hay ocho que tienen spin-paridad $1/2^+$, siendo su masa media

$M = 1151.1 \text{ MeV}$ y se agrupan en cuatro múltiplos de masas medias

$$Y = 1 \quad T = 1/2 \quad M_N = 938.9264 (38)$$

$$Y = 0 \quad T = 0 \quad M_\Lambda = 1115.60 (5)$$

$$Y = 0 \quad T = 1 \quad M_\Sigma = 1193.05 (11)$$

$$Y = -1 \quad T = 1/2 \quad M_\Xi = 1318.11 (61)$$

(14)

que difieren de la masa media, M , en cantidades menores de $0.18M$. Podemos ahora imaginar la siguiente situación: la interacción fuerte es en realidad suma de dos; una parte, que suele llamarse ahora fuerte, con una simetría superior a la hasta aquí considerada, y otra, que se acostumbra a llamar medio-fuerte, que rompe de alguna forma, que esperamos va sencilla, esta nueva simetría. Si la interacción medio fuerte no existiera, sería de esperar que las partículas se agruparían en supermúltiplos con idénticas propiedades espacio-temporales, ya que esta simetría superior actúa en un espacio interno distinto del espacio-tiempo ordinario. Igualmente todas deben tener el mismo número bariónico. Es precisamente la interacción medio-fuerte la causante, al romper la simetría superior, del desdoblamiento de un supermúltiplo en isomúltiplos, de forma totalmente análoga a como las interacciones de isospin, al romper $SU(2)$, producen el desdoblamiento en las masas de un isomúltiplo. De los comentarios que acabamos de hacer sobre las masas es de esperar que la interacción medio fuerte sea de una intensidad del orden de $1/10$ de la fuerte y por tanto quedem en la naturaleza claros residuos de esta simetría superior.

Es evidente que el primer problema que se presenta es el de identificar el grupo que describe esta simetría superior. Forzosamente el grupo $SU(2)$ de isospin debe ser un subgrupo del grupo buscado y además los supermúltiplos deben contener isomúltiplos con distintos valores de T e Y . El hecho de que sean Y y T_3 los números cuánticos adicionales que juegan aquí un papel esencial limita las posibilidades a tres y es precisamente $SU(3)$ el grupo favorecido. (Solo hay tres álgebras de Lie de rango 2).

Es necesario hacer algunas consideraciones matemáticas sobre $SU(3)$. Este grupo es el de las transformaciones unitarias unimodulares en un espacio tridimensional y tiene por tanto 8 generadores de los cuales solo dos conmutan entre sí. Para carac-

terizar las representaciones irreducibles de $SU(3)$, es decir los conjuntos mínimos de estados que se transforman entre sí bajo la acción del grupo, es necesario dar dos números enteros no negativos (p, q) . La dimensión de la base asociada a esta representación irreducible es

$$D(p, q) = \frac{1}{2} (1+p)(1+q)(2+p+q) \quad (1)$$

Las representaciones (p, q) con $p \geq q$ y la (q, p) tienen la misma dimensión y la segunda se dice que es conjugada de la primera. En general, al hablar de una representación, se acostumbra a usar, en lugar del par de números (p, q) la dimensión de la misma, añadiendo primas si hay que distinguirlas entre varias representaciones con una misma dimensión. Las representaciones conjugadas se denotan mediante la dimensión con un asterisco. La representación $(0, 0) \equiv 1$ es la trivial, la $(1, 0) \equiv 3$ es la fundamental y la $(1, 1) \equiv 8$ es la regular o adjunta.

Para caracterizar de forma única los estados base de una representación irreducible se deben usar tres números cuánticos que suelen elegirse como (Y, T, T_3) . Aquí Y y T_3 se eligen proporcionales a los elementos que conmutan del álgebra del grupo y T^2 es una combinación cuadrática de generadores. Todas las partículas hasta aquí consideradas así como las resonancias conocidas tienen Y entero y esto equivale a decir que las únicas representaciones que aparecen en la naturaleza son las que tienen $(p-q) = 3$. En general, la base correspondiente a una representación irreducible de $SU(3)$ y a no es irreducible al considerarse sus propiedades de transformación bajo $SU(2) \otimes U_1(1)$. Se puede probar que el contenido de las representaciones de orden tres bajo el interés para nosotros es

(p, q)	$D(p, q)$	Contenido en $SU_1(1) \otimes SU_7(2)$ (Y, T)
$(0, 0)$	1	$(0, 0)$
$(1, 0)$	3	$(1/3, 1/2) \oplus (-2/3, 0)$
$(1, 1)$	8	$(1, 1/2) \oplus (0, 0) \oplus (0, 1) \oplus (-1, 1/2)$
$(3, 0)$	10	$(1, 3/2) \oplus (0, 1) \oplus (-1, 1/2) \oplus (-2, 0)$

El contenido de las D^* es el mismo que el de la D con $Y \rightarrow -Y$.

De acuerdo con todo esto, las partículas conocidas tienen que agruparse en supermultipletes. Las partículas de un supermultiplete deben tener todas ellas el mismo número B y el mismo J^P y si no existieran las interacciones medio fuertes también la misma masa; son precisamente estas interacciones medio-fuertes las que rompen la igualdad de las masas. Si suponemos que el Hamiltoniano de las interacciones medio-fuertes se transforma bajo SU(3) como la componente (0, 0, 0) de un octeto entonces las masas de los distintos supermultipletes de un supermultiplete dado vienen dadas por la fórmula de Gell-Mann-Okubo

$$M(Y, T, T_3) = M_0 + M_1 Y + M_2 \left[T(T+1) - \frac{1}{4} Y^2 \right] \quad (1)$$

donde M_0, M_1 y M_2 son constantes que varían de un supermultiplete a otro. Así para el octeto de bariones $1/2^+$

$$M_N = M_0 + M_1 + \frac{1}{2} M_2, \quad M_\Lambda = M_0$$

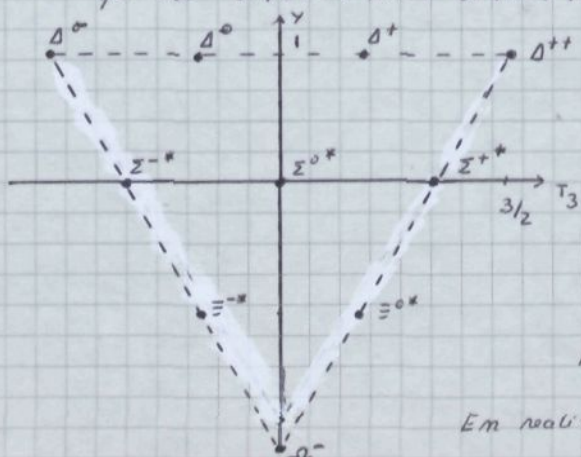
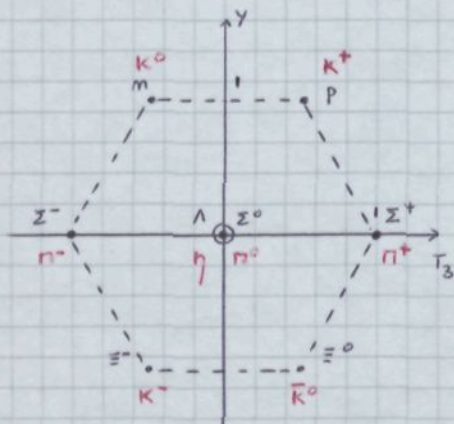
$$M_\Sigma = M_0 + 2M_2, \quad M_\Xi = M_0 - M_1 + \frac{1}{2} M_2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} (M_N + M_\Xi) = \frac{3}{4} M_\Lambda + \frac{1}{4} M_\Sigma \quad (2)$$

que se satisface muy bien $1128.52(31) = 1134.96(17)$, y que constituye un ejemplo típico de lo que se suelen denominar fórmulas mágicas. La misma fórmula (2) sirve para cualquier octeto. Las mesones 0^- forman otro octeto y la fórmula mágica que para mesones suele escribirse para los cuadrados de las masas es ahora

$$4 M_K^2 = 3 M_\eta^2 + M_\pi^2 \quad (3)$$

que da $0.98275(11) = 0.9226(20) \text{ GeV}^2$.



En la figura damos el decuplete $3/2^+$. La fórmula mágica es ahora

$$M_{\Sigma^*} - M_\Delta = M_{\Xi^*} - M_{\Xi} = M_{\Omega^*} - M_{\Xi^*} \quad (4)$$

$$152 = 149 = 139$$

En realidad cuando se puntúa

- $M_0 = 1232(2) \text{ KeV}$
- $M_{\Sigma^*} = 1384(11) \text{ KeV}$
- $M_{\Xi^*} = 1533(11) \text{ KeV}$
- $M_{\Omega^*} = 1672.22(31) \text{ KeV}$

el SU(3) la partícula Ω^- no era conocida y Gell-Mann predijo su existencia en cuanto a masa y propiedades siendo hallada posteriormente.

Junto a otras formulas masicas en las que solo se tiene en cuenta el efecto de las interacciones medio fuertes en primer orden de teoria de perturbaciones, hay formulas masicas que tienen en cuenta los efectos de las interacciones medio-fuertes a todos los ordenes y el efecto de las interacciones electromagneticas a todos los ordenes y que se espera que sean muy buenas. Un ejemplo de estas formulas es

$$M_{\pi} - M_{\rho} + M_{\Sigma^+} - M_{\Sigma^-} + M_{\Xi^-} - M_{\Xi^0} = 0 \tag{1}$$

$$+ 1.29343 (4) + 7.98 (8) + 6.4 (6) = - 0.3 \pm 0.6 \text{ MeV}$$

Aqui hemos dado unos pocos ejemplos de aplicación del SU(3). La introducción de esta simetría ha permitido ir clasificando todas las partículas conocidas en supermultipletes, relacionar gran número de datos experimentales para todo tipo de interacciones y hacer muchas predicciones teoricas, muchas de las cuales se han ido confirmando experimentalmente.

En 1964 Gell-Mann y Zweig independientemente introdujeron lo que se llama el modelo quark. La idea fundamental del modelo es que existen tres partículas, llamadas quarks, que se transforman de acuerdo a la representación 3 de SU(3) y que estas y sus antipartículas son los constituyentes elementales de los hadrones. Estos quarks se simbolizan por u, d y s y sus propiedades son

	J^P	B	T, T_3	Y	S	Q
u	$1/2^+$	$1/3$	$1/2, +1/2$	$1/3$	0	$+2/3$
d	$1/2^+$	$1/3$	$1/2, -1/2$	$1/3$	0	$-1/3$
s	$1/2^+$	$1/3$	0, 0	$-2/3$	-1	$-1/3$

u = up
d = down
s = strange

La hipótesis fundamental del modelo quark es que los mesones son estados ligados de un quark y un antiquark, mientras que los bariones son estados ligados de tres quarks. Consecuencia inmediata de esto es que todas las mesones tienen $B=0$ y $J=$ entera, mientras que los bariones tienen $B=1$ y $J=$ semi entera, como debe suceder. Así por ejemplo $\rho \equiv (u\bar{u}d)$, $n \equiv (d\bar{d}u)$, $\pi^+ \equiv (u\bar{d})$, $K^+ \equiv (u\bar{s})$, etc.

Por otra parte, considerando únicamente las propiedades bajo $SU(3)$ y recordando que los quarks llevan la representación 3 y los antiquarks la 3^* , se puede demostrar que a partir de los nueve estados distintos quark-antiquark se pueden construir ocho estados que se transforman de acuerdo a la representación irreducible 8 y el octogonal a todos estos que es base de una representación irreducible 1 ; en el lenguaje de teoría de grupos $3 \otimes 3^* = 1 \oplus 8$. Físicamente esto significa que todos los mesones deben estar en las representaciones 1 y 8 de $SU(3)$ y por tanto los únicos valores posibles de (Y, T) son $(1, 1/2)$, $(0, 1)$, $(0, 0)$ y $(-1, 1/2)$. De la misma forma los tres quarks de un barión dan origen a 27 estados posibles a partir de los cuales se pueden construir combinaciones lineales independientes que son base de las representaciones $1, 8, 8$ y 10 es decir $3 \otimes 3 \otimes 3 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10$ y por tanto todos los bariones deben hallarse en supermultipletes correspondientes a las representaciones $1, 8,$ y 10 y por tanto los valores posibles de (Y, T) son $(1, 3/2)$, $(1, 1/2)$, $(0, 1)$, $(0, 0)$, $(-1, 1/2)$ y $(-2, 0)$. Los hadrones cuyas propiedades difieren de las que acabamos de exponer se llaman exóticos de primera clase y no se sabe que existan. Estos mesones exóticos podrían corresponder, por ejemplo, a estados ligados de dos quarks y dos antiquarks para mesones y de cuatro quarks y un antiquark para bariones.

El modelo quark permite no sólo explicar nuevos hechos de la espectroscopía de los hadrones sino también otros hechos tales como la razón de los momentos magnéticos del neutrón y del protón. El modelo quark predice $\mu_p / \mu_n = -1.5$ y el valor experimental es $\mu_p / \mu_n = -1.479817(15)$

Todo lo dicho conduce ineluctablemente a que los experimentales hayan dedicado un esfuerzo considerable a buscar los quarks (la caza del quark). Se han realizado múltiples experiencias que pueden ser agrupadas de la siguiente forma

i) Búsqueda en radiación cósmica.- Se han buscado quarks en la radiación cósmica bien sea buscando partículas de ionización anormalmente baja, buscando en cascadas con la esperanza de que hayan sido liberados en las interacciones de alta energía de las partículas primarias, etc. Entre las típicas halladas son flujos tales como $\phi \leq 0.71 \times 10^{-11} \text{ (cm}^2 \text{ sr seg)}^{-1}$ con 90% C.L.

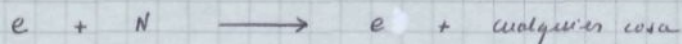
ii) Búsqueda en materia estable.- Se cree que debido a sus cargas fraccionarias

al menos uno de los quarks, probablemente el u , es estable y se han buscado quarks atrapados en la materia. Usando levitómetros magnéticos y métodos espectroscópicos se han analizado meteoritos, rocas terrestres, rocas de origen lunar, agua del mar y nunca ha sido hallado un quark. Otro método de buscar quarks es haciendo una versión muy refinada de la experiencia de Millikan. El grupo de Ginebra (Morpurgo) no ha encontrado quarks y da como límite de la densidad de quarks $\rho < 3 \times 10^{-21}$ quarks/nucleón. El grupo de Stamford (Fairbank) encuentra cargas fraccionarias y da $\rho = 10^{-20}$ quark/nucleón, en contradicción con el resultado de Ginebra que parece más fiable.

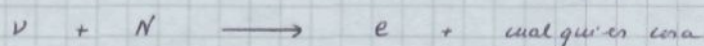
(vi) Búsqueda de quarks con aceleradores. - Tampoco aquí se han logrado producir quarks en colisiones de muy altas energías. Con los ISR del CERN se producen quarks de masas $M_q \lesssim 20 \text{ GeV}$ y se ha visto que (máx de quarks producidos) / (mínimo de piones producidos) $\lesssim 10^{-11}$.

La creencia general hoy día es que los quarks son partículas reales pero que debido a que su energía de interacción crece con la distancia esta solo se puede encontrar confinada dentro de los hadrones. Esta es la llamada hipótesis de confinamiento de los quarks. Como resultado de esto, cuando se intenta separar un quark de un barión, por ejemplo, la energía potencial del sistema aumenta rápidamente y llegaría a tomar valores enormes si no apareciera un nuevo fenómeno: la creación de un quark y un antiquark a partir de la energía potencial. El nuevo quark forma con los otros dos quarks del barión un nuevo barión y el nuevo antiquark con el quark que intentábamos aislar forma un mesón.

Mucha información sobre la estructura de los nucleones proviene de estudiar procesos de colisiones profundamente inelástica del tipo, tales como



(1)



a energías altas y grandes transferencias de momento. Los datos experimentales permiten confirmar que los nucleones están formados por tres quarks y que estos tienen spin $1/2$ y cargas fraccionarias. Mas aún, los datos indican que a distancias pequeñas la interacción entre los quarks es despreciable. Una idea de como es la interacción entre los quarks es como si estos estuvieran unidos por una banda elástica. Debido a los dos quarks están muy cercanos la banda está tensa y los quarks se mueven

como si fueran libres y a medida que los quarks se van alejando aumenta la energía de interacción entre ellos. Esta propiedad de que a pequeñas distancias los quarks se mueven libremente recibe el nombre de libertad asintótica.

Poco después de la aparición del modelo quark surgió una dificultad. Consideremos el hadrón D^{++} con $J_3 = +3/2$, entonces es evidente que debe estar formado por tres quarks (uuu) los tres con spin hacia arriba. Es sabido que la función de ondas de un sistema de fermiones debe ser totalmente antisimétrica; como la parte de $SU(3)$ y de spin es totalmente simétrica debe ser la espacial totalmente antisimétrica pero esto es raro pues para los potenciales ordinarios el estado fundamental tiene los momentos angulares relativos nulos, y por tanto su función de ondas es simétrica. Para poder notarse el principio de conexión spin-estadística, la solución a este problema es la siguiente: Hasta aquí hemos considerado quarks de tres tipos o aromas distintos y esto nos ha conducido a dificultades. Otra forma de lograr que la función de ondas de tres quarks tenga la simetría apropiada es introducir un nuevo grado de libertad para los quarks: el color. Supondremos que un quark de un determinado aroma puede ser verde, rojo o azul. Se sabe que todos los hadrones conocidos son singletes de color y entonces la función de ondas de la parte de color es totalmente antisimétrica con lo cual ha desaparecido el problema de conexión de spin-estadística. En un barión los tres quarks tienen en cada instante un color distinto y como estos colores se han elegido figuradamente como los tres colores primarios se suele decir que los bariones son blancos. En un mesón el quark y el antiquark tienen en cada instante colores complementarios: si el quark es verde el antiquark es antiverte (\equiv magenta), si el quark es azul el antiquark es anti azul (\equiv amarillo) y si uno es rojo el otro es antimorfo (\equiv cian). El color del quark puede cambiar en el transcurso del tiempo. También los mesones son blancos. Un quark aislado no puede ser blanco, ni lo puede ser un estado ligado de cuatro quarks y un antiquark, por lo cual muchos de los fenómenos observados se pueden explicar postulando que solo las partículas blancas pueden existir como libres.

Otra prueba de la existencia del color es la siguiente: En el modelo quark el n^0 es

$$|n^0\rangle \propto \frac{1}{\sqrt{2}} [|u\rangle|\bar{u}\rangle - |d\rangle|\bar{d}\rangle] \quad (1)$$

y como hemos visto se desintegra principalmente en la forma $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$. Debido a la existencia de la anomalía triangular sabemos calcular la anchura paramétrica precisamente y el resultado teórico coincide con el experimental si:

$$A \equiv \sum_i T_3^{(i)} Q_i^2 \approx \frac{1}{2} \quad (1)$$

donde Q_i es la carga del quark en unidades de la del fotón y $T_3^{(i)}$ es la tercera componente del su espín. La suma se extiende sobre los quarks constituyentes del pión. Si no hay color $A = (1/2)(4/9) - (1/2)(1/9) = (1/6)$, mientras que con el color $A = 1/2$, como debe ser.

Un proceso que durante los últimos años ha sido muy estudiado es



y en particular se suele medir

$$R(s) = \frac{\sigma(e^+e^- \longrightarrow \text{hadrones})}{\sigma(e^+e^- \longrightarrow \mu^+\mu^-)} \quad (3)$$

donde $s = (p_{e^-} + p_{e^+})^2 = 4E_{c.m.}^2$. Suponiendo que los hadrones están formados por quarks que a altas energías se comportan básicamente como libres es fácil demostrar que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} R(s) = \sum Q_c^2 \quad (4)$$

donde la suma se extiende a todos los quarks. A bajas energías $R(s)$ presenta una serie de picos correspondientes a resonancias tales como el ρ , ω y ϕ después de $E_{c.m.} = 2 \text{ GeV}$ se estabiliza el valor de $R(s)$ con $R(s) \approx 2.5$. Por otra parte de (4) se empuenta $\sum Q_c^2 = 4/9 + 1/9 + 1/9 = 2/3$ si no hay color y $\sum Q_c^2 = 2$ si existe el color, estando este último número en buen acuerdo con el dato experimental.

En 1974 dos grupos, simultánea e independientemente, observaron una estructura muy peculiar en la sección eficaz de la reacción (2) que indicaba claramente la presencia de una nueva partícula de propiedades altamente peculiares y totalmente inesperada. Por las cosas en este último año ha habido más excitación entre los físicos dedicados al estudio de las partículas elementales. Esta partícula llamada J/ψ tiene una masa $M = 3097 (1) \text{ MeV}$ y su anchura es $\Gamma = (63 \pm 9) \text{ keV}$. Su spin paridad

es 1^- y $T=0$. No hay ninguna duda, hoy día, de que se trata de un hadrón. Su característica más destacada es su anchura, que es extra ordinariamente pequeña, pues las dimensiones de masas análogas acostumbraban a tener anchuras del orden de 1000 a 2000 veces mayores. ¿Qué es esta partícula? Volvamos hacia atrás en la historia: como veremos más adelante a finales de la década de los sesenta se intentaron hacer modelos que unificaran las interacciones débiles y electromagnéticas. El modelo propuesto por Weinberg y Salam, independientemente, surgían dificultades pues al introducir el quark extraño en la teoría se producían sucesos tales como $K_L^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$ con una intensidad muchísimo mayor que la observada experimentalmente. En 1970 Glashow, Iliopoulos y Maiani demostraron que todas las dificultades desaparecerían si se postulaba un nuevo tipo de quark, el C (\equiv charm), el quark encantado.

$$C : J^P = 1/2^+ \quad B = 1/3 \quad T = 0 \quad Y = 1/3 \quad S = 0 \quad C = +1 \quad Q = +2/3 \quad (4)$$

Todas las partículas y quarks conocidos hasta entonces tenían $C=0$. La hipercarga se define como $Y = B + S + C$ y la relación de Gell-Mann-Nishijima continúa siendo válida. Como los quarks anteriores aparecen en tres colores distintos, se supuso entonces que el J/ψ era un estado ligado ($C\bar{C}$), de tal modo que la forma normal de desintegración de este sistema iba en dos partículas con $C=1$ y otra con $C=-1$, pero formulas más recientes parecen indicar que las partículas con $C \neq 0$ tienen todas ellas masas $M \gtrsim 2 \text{ GeV}$ y entonces esta desintegración no es posible energéticamente; el hecho de que el canal más natural no sea permitido energéticamente le obliga a desintegrarse en canales menos naturales y esto reduce drásticamente su anchura.

Hoy día se han descubierto distintas excitaciones del estado ligado ($C\bar{C}$) y su espectroscopía está bien estudiada. Genéricamente se designan estos estados con el nombre de charmonium. Por otra parte un estado con $C = \pm 1$ no puede desintegrarse fuertemente, pues estas interacciones conservan el aroma de los quarks, y en tanto el mesón y el barión más ligero con $C \neq 0$ debieran desintegrarse débilmente. Estas partículas son hoy día conocidas

$$D^\pm \quad J^P = 0^- \quad (C\bar{3}) \quad M = 1868.3 (4) \text{ MeV} \quad \tau = (2.5 \pm 3.5 / 1.5) \times 10^{-13} \text{ seg}$$

$$D^0 \quad 0^- \quad (C\bar{u}) \quad 1863.1 (4) \text{ MeV} \quad \tau = (3.5 \pm 3.5 / 1.7) \times 10^{-13} \text{ seg}$$

$$\Lambda_c^+ \quad 1/2^+ \quad (Cud) \quad 2273 (6) \text{ MeV} \quad \tau \approx 7 \times 10^{-13} \text{ seg}$$

A energías $E_{cm} \approx 4.6$ GeV el valor de $R(s)$ se ha vuelto a estabilizar a $R(s) \approx 4.5 - 5$. A estas energías en la reacción (58.2) se incluyen ya las partículas encantadas y en tanto ~~de~~ acuerdo con (58.4) $R(s) \approx 3(4/9 + 1/9 + 1/9 + 4/9) \approx 10/3$. Por otra parte los experimentales incluyen en sus medidas de $R(s)$ el canal $\mu^+\mu^- \rightarrow \tau^+\tau^-$ que ahora ya es energéticamente posible y en tanto el número teórico es $R(s) = 10/3 + 1 \approx 4.3$ en buen acuerdo con los datos experimentales.

En 1977 la historia anterior se repitió sin la intervención de los Gounus. En el estudio de la sección eficaz e^+e^- se observó de nuevo una estructura que indicaba la presencia de una partícula de propiedades peculiares. Hay dos de la denominación Υ y $M = 9458 (6) \text{ MeV}$, $\Gamma \approx 60 \text{ keV}$, $J^P = 1^-$ y $T=0$. Esta partícula y otras análogas que aparecen se consideran estados ligados de un nuevo quark el b (\equiv bottom) (\equiv beauty).

$$b : J^P = 1/2, \quad B = 1/3, \quad T = 0, \quad Y = -2/3, \quad S = 0, \quad C = 0, \quad b = -1, \quad Q = -1/3 \quad (4)$$

Si bien ha habido rumores no hay plena confirmación de que se hallan hallado partículas con $b = \pm 1$.

Resumiendo, se cree hoy día que los hadrones están formados a partir de unas partículas elementales sin estructura que llamamos quarks. Todos los quarks tienen $J^P = 1/2^+$ y $B = 1/3$. y cada clase o aroma de quarks aparece en tres colores distintos. En general los distintos sabores se agrupan de la siguiente forma en el modelo sucesional

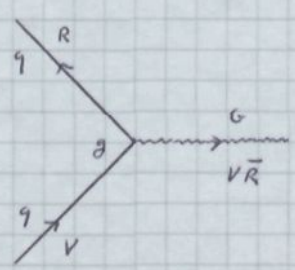
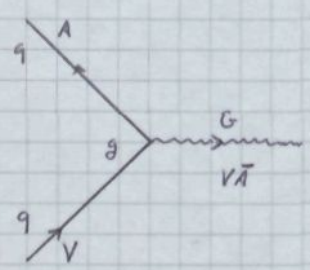
$$(u, d), \quad (c, s), \quad (t, b), \quad \dots$$

donde en cada pareja el primer quark tiene carga $2/3$ y el segundo tiene carga $-1/3$. El t (\equiv top) (\equiv truth) no ha sido aun descubierto. Aparecen nuevamente las generaciones y los teóricos creen que el número de pares de quarks es igual al número de pares de leptones. En cuanto a su interacción sabemos que los quarks están probablemente confinados y que por otra parte a altas energías (distancias pequeñas) se comportan como libres (libertad asintótica)

7. - Q.C.D

Olvídenos de momento de los leptones que no tienen interacciones fuertes y vamos a intentar construir una teoría que describa las interacciones fuertes entre los quarks. Designaremos por N_f el número de aromas distintos y sabemos que cada quark puede aparecer en $N=3$ colores distintos. La teoría que pretendemos describir debe respetar una serie de hechos bien conocidos: las interacciones fuertes no cambian el aroma de los quarks, las fuerzas entre quarks deben presentar libertad asintótica, las fuerzas entre quarks deben ser capaces de explicar su confinamiento.

En el año 1974 Gross y Wilcek e independientemente Politzer probaron que solo una teoría de gauge no abeliana podía describir las propiedades de libertad asintótica y de confinamiento que deseábamos para la teoría de las interacciones fuertes. Consideremos un quark de un determinado aroma el cual puede aparecer en tres estados de color, los cuales tienen exactamente la misma masa. Consideraremos que el conjunto de los tres estados se transforman de acuerdo con la representación fundamental de un grupo $SU(3)_{\text{color}} \equiv SU_C(3)$. Es muy fácil construir una densidad lagrangiana invariante bajo las transformaciones globales $SU_C(3)$. Convertiremos ahora esta invariancia global en local. Sabemos que para ello es necesario introducir 8 (número de generadores del grupo) campos vectoriales (spin 1) $G_\mu^a(x)$ ($a=1,2,\dots,8$) sin masa y tales que se transformen de acuerdo con la representación adjunta de $SU(3)$. La teoría así construida, la cual es renormalizable, se llama Q.C.D (Cromodinámica Cuántica) y las partículas asociadas con los campos gauge introducidos se llaman gluones. La interacción entre los quarks viene pues descrita por el intercambio de gluones. Vertices típicos que aparecen en la densidad lagrangiana de interacción son



(4)

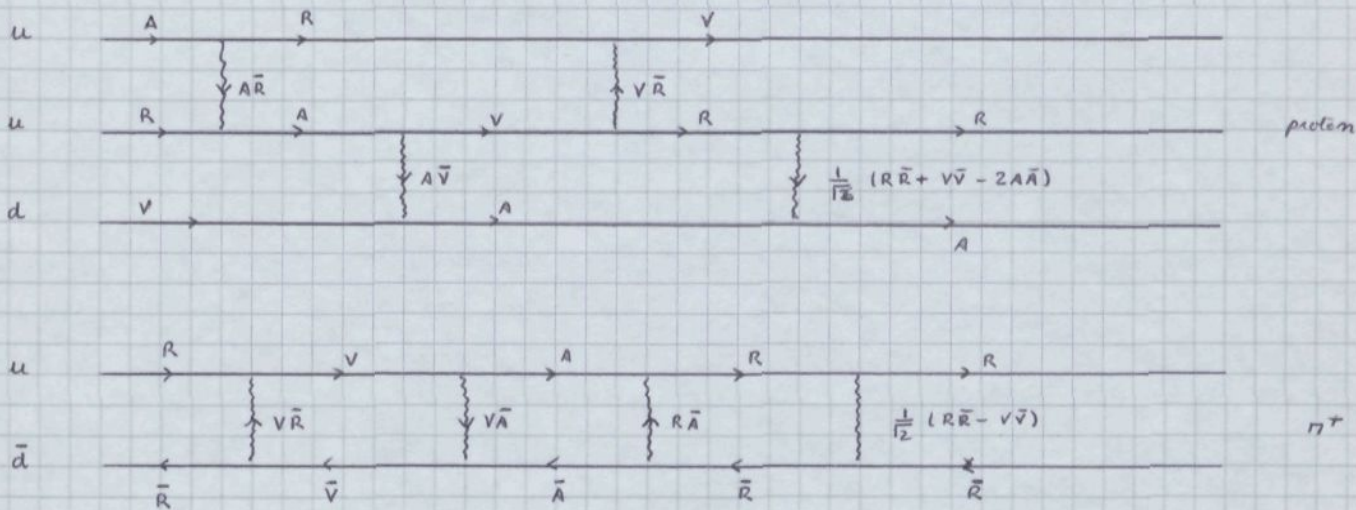
V=verde, A=azul y R=rojo.

g = constante de acoplamiento

Los gluones se deben considerar coloreados y compuestos siempre de un color y un anticolor. Podemos entender esto recordando que los tres colores pertenecen a la representación 3 de $SU_c(3)$ y los anticolores a la 3^* . Además como $3 \otimes 3^* = 1 \oplus 8$, de los nueve estados que se forman al combinar los tres colores con los tres anticolores hay una combinación lineal $(R\bar{R} + V\bar{V} + A\bar{A})/\sqrt{3}$ que es un singlete de color y que nada tiene que ver con los gluones y los restantes dan origen a estados que se transforman exactamente como los gluones bajo $SU_c(3)$.

Como es típico de toda teoría gauge no abeliana hay también en la densidad Lagrangiana autointeracciones gluónicas cúbicas y cuárticas. Estas interacciones existen para los campos gluónicos coloreados, mientras que no existen en Q.E.D pues los fotones no tienen carga eléctrica.

Imágenes de lo que puede ser un protón o un n^+ en esta teoría es



La Q.C.D. ya hemos dicho que es una teoría renormalizable y que por tanto pueden realizarse cálculos en cualquier orden de teoría de perturbaciones. Aquí la constante efectiva de estructura fina ($\alpha_s \equiv g^2/4\pi$) es, en la aproximación de un loop,

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{12\pi}{(33 - 2N_f)} \frac{1}{\ln(Q^2/\Lambda^2)} \tag{1}$$

$$\Lambda \approx 0.150 \text{ GeV}$$

Notar que si $Q^2 \rightarrow \infty$ vemos que $\alpha_s(Q^2) \rightarrow 0$ es decir la teoría incorpora la libertad asintótica (en realidad para que suceda esto $N_f \leq 16$). A $Q^2 = (10 \text{ GeV})^2$ y para $N_f = 3$ se tiene $\alpha_s(Q^2) \approx 0.17$ y un cálculo perturbativo tiene sentido. Para valores de

α^2 pequeños (grandes distancias), $\alpha_s(\alpha^2)$ se hace grande. La teoría de perturbaciones usada para deducir (62.1) no es ya válida y como no sabemos prácticamente nada de teorías de campos en régimen no perturbativo todo lo que podemos hacer es especular. Una posibilidad es que la verdadera $\alpha_s(\alpha^2)$ crezca indefinidamente al hacerse α^2 pequeña y entonces este sería el origen del confinamiento. A pesar de las muchas técnicas usadas, tales como desarrollos en $1/N$, teoría de campos sobre retículos, efecto de solitones, merons, etc. no sabemos aun realmente si la QCD produce el deseado confinamiento. Si todos los campos que tienen color están confinados ni los quarks ni los gluones pueden propagarse libremente en el espacio y esto sería la razón por la que las interacciones fuertes son de corto alcance. Como los hadrones son singletos de color no pueden emitir o absorber un solo gluon, deben interactuar de forma análoga a las interacciones dipolo-dipolo del electromagnetismo. Dos nucleones podrían interactuar vía el intercambio de dos gluones o de un par $q\bar{q}$, por ejemplo. El modelo de interacción NN por intercambio de mesones sería la aproximación a lo anterior cuando $q\bar{q}$ formaran un meson.

Una línea relativamente prometedora ha sido desarrollada por Shifman, Vainshtein y Zakharov a partir de 1979. No pretenden explicar el confinamiento sino que intentan reducir todos los efectos no perturbativos a unos pocos parámetros, que si supieramos explicar el confinamiento serían calculables, que ellos ajustan a partir de los datos experimentales. Así han logrado indudables éxitos en la explicación de las masas y de las constantes de acoplamiento de los hadrones.

La QCD permite por ejemplo calcular la corrección a $R(s)$ dada en (58.5) para s finita y grande. Se encuentra en primer orden

$$R(s) = \sum_a \alpha_a^2 \left\{ 1 + \frac{12}{(33 - 2N_f) \ln s/\Lambda^2} \right\} \quad (1)$$

es decir nos acercamos al límite $s \rightarrow \infty$ desde arriba como su de experimentalmente. El hecho de que esta, y correcciones similares, sean de tipo logarítmico y no en potencias es típico a las teorías gauge no abelianas y aquí como en otros casos esta de acuerdo con los datos experimentales.

Debemos aun aumentar nuestros conocimientos sobre el régimen no perturbativo pero los aspectos cualitativos que entendemos son prometedoros.

Un problema del cual no hemos hablado es el de las masas de los quarks. No es fácil definir lo que se entiende por masas de partículas permanentemente contraídas como son los quarks. Se suele hablar de masas constituyentes que son la masas de los quarks como constituyentes de los hadrones y éstas se toman usualmente como

$$m_u \approx m_d \approx 350 \text{ MeV}, \quad m_s \approx 470 \text{ MeV}, \quad m_c \approx 1500 \text{ MeV}, \quad m_b \approx 4500 \text{ MeV} \quad (1)$$

Al lado de estas masas en las que intervienen efectos no perturbativos aparecen las llamadas masas invariantes definidas a partir de los parámetros de masa que aparecen en el lagrangiano y que son

$$\hat{m}_u \approx 4 \text{ MeV}, \quad \hat{m}_d \approx 7 \text{ MeV}, \quad \hat{m}_s \approx 150 \text{ MeV}, \quad \hat{m}_c = m_c, \quad \hat{m}_b = m_b \quad (2)$$

Es precisamente el hecho de que \hat{m}_u y \hat{m}_d sean mucho menores que la masa de los hadrones lo que justifica que la simetría de isospín sea muy buena. Como también \hat{m}_s es menor que la masa típica de los hadrones $SU(3)$ es aún una buena simetría. Simetrías como $SU(4)$ o superiores deben estar muy rotas debido a las grandes masas de los nuevos quarks.

8. - Teoría electrodébil

Recordemos de nuevo que los constituyentes fundamentales de la materia parecen pudense agrupar en generaciones

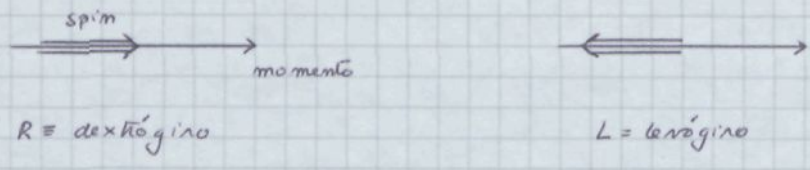
$$\left(\begin{array}{c} \nu_e \\ e \end{array} ; \begin{array}{ccc} u_A & u_R & u_V \\ d_A & d_R & d_V \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{c} \nu_\mu \\ \mu \end{array} ; \begin{array}{ccc} c_A & c_R & c_V \\ s_A & s_R & s_V \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{c} \nu_\tau \\ \tau \end{array} ; \begin{array}{ccc} t_A & t_R & t_V \\ b_A & b_R & b_V \end{array} \right), \dots \quad (3)$$

donde el t aún no ha sido descubierto y de los datos experimentales podemos afirmar $m_t > 19 \text{ GeV}$. Los leptones por no tener color no participan en las interacciones fuertes. Fijemos de momento nuestra atención en un doblete cualquiera de los anteriores

$$\left(\begin{array}{c} f \\ f' \end{array} \right) \quad (4)$$

y demos cuenta que en todos los casos ambas partículas tienen $spín \frac{1}{2}$ y que $Q_f = Q_{f'} + 1$.

Sabemos además que toda partícula de spin 1/2 puede presentar solo dos estados de helicidad



Sea $f(x)$ el campo que describe las partículas f , entonces se puede escribir

$$f(x) = f_R(x) + f_L(x) \tag{1}$$

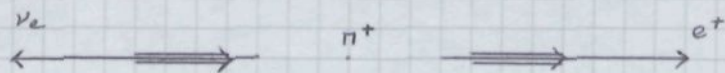
donde $f_R(x)$ [$f_L(x)$], en el límite en que la masa del f sea nula, contiene solo partículas f dextróginas [levóginas]. Lo mismo puede decirse del $f'(x)$.

¿Por qué hacemos esta división del campo? Ya hemos dicho antes que la teoría fenomenológica de Fermi de las interacciones débiles es una buena descripción de muchos hechos experimentales y de alguna forma debe reaparecer como una aproximación a la teoría final de dichas interacciones. Por otra parte en la teoría de Fermi solo aparecen los campos $f_L(x)$ y $f'_L(x)$, que en el límite de masa nula contienen solo partículas levóginas y antipartículas dextróginas. Esto permite explicar un hecho altamente paradójico. Los dos principales canales de desintegración del π^+ son

$$\pi^+ \longrightarrow \mu^+ \nu_\mu \quad \Gamma(\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu) = 2.5287(22) \times 10^{-8} \text{ eV}$$

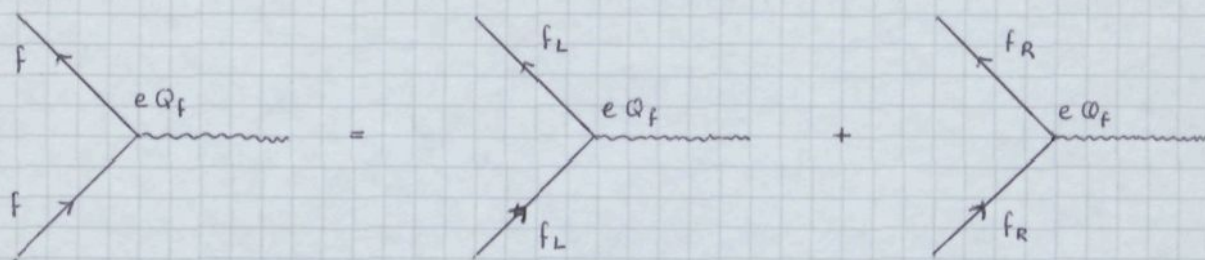
$$\pi^+ \longrightarrow e^+ \nu_e \quad R = \frac{\Gamma(\pi^+ \rightarrow e^+ \nu_e)}{\Gamma(\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu)} = 1.267(23) \times 10^{-4}$$
(2)

Ambas desintegraciones son débiles. En la primera la energía liberada es de 34 MeV mientras que en la segunda es de 139 MeV y en tanto debemos esperar que $R > 1$ en claro desacuerdo con la experiencia. En la teoría de Fermi sin embargo solo interviene el campo $f_L(x)$ y esto no lo hemos tenido en cuenta. El efecto de esto es que como la masa del neutrino es cero o despreciable los neutrinos que se produzcan serán todos levóginos. Por otra parte en la segunda reacción se desprende una energía mucho mayor que la masa del electrón y en buena aproximación podemos suponer que la masa del electrón es nula por lo cual el positrón producido será puramente dextrógiro y entonces nos encontramos con la siguiente situación



situación claramente prohibida por la conservación del momento angular total. Un cálculo más detallado da un valor teórico de R totalmente coincidente con el experimental.

Por otra parte los campos $f_R(x)$ son también necesarios pues $f_L(x)$ y $f_R(x)$ interactúan de forma análoga con un campo electromagnético y se puede escribir



El primer paso importante encaminado a construir una teoría electrodébil fue dado por S.L. Glashow en 1961. Introduzcamos para la pareja de fermiones consideramos los campos

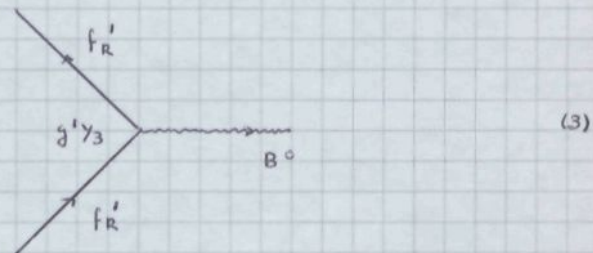
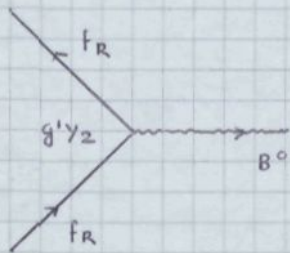
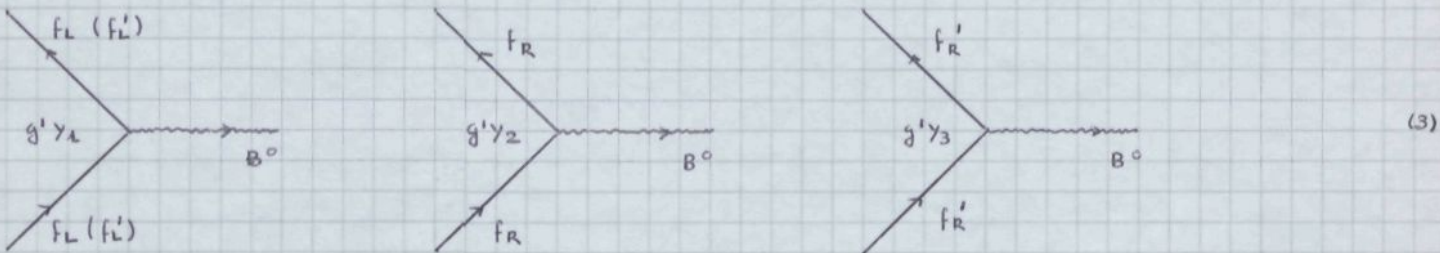
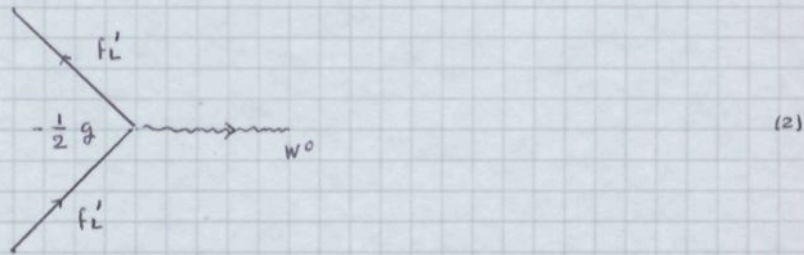
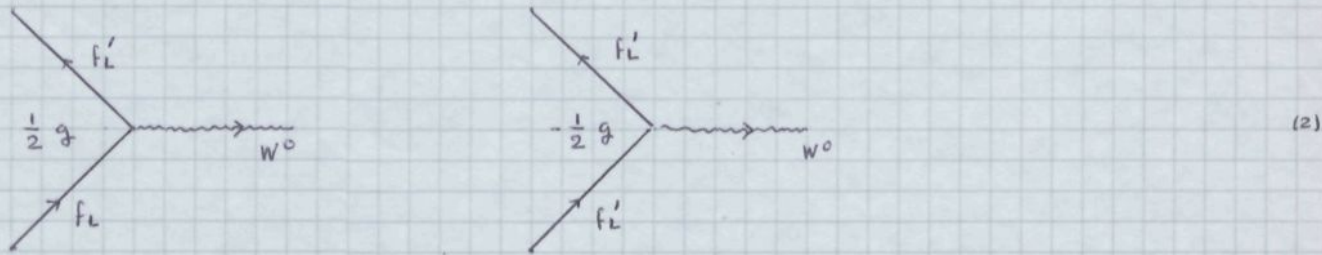
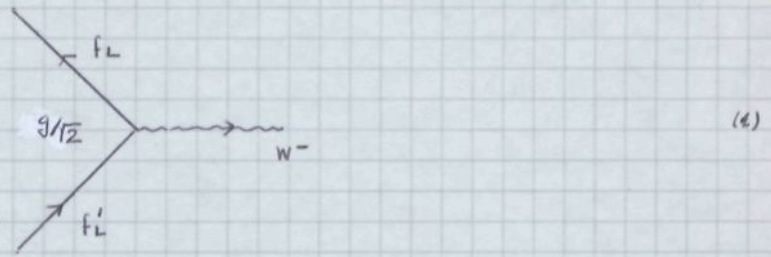
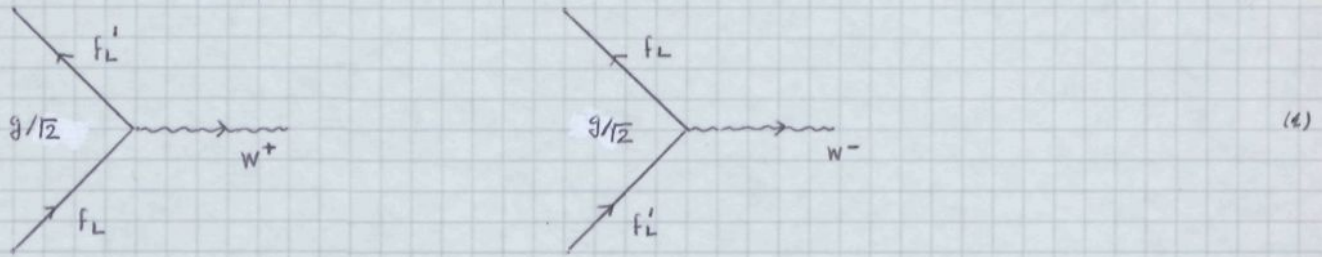
$$\psi_1(x) \equiv \begin{pmatrix} f_L(x) \\ f'_L(x) \end{pmatrix}, \quad \psi_2(x) \equiv f_R(x), \quad \psi_3(x) \equiv f'_R(x) \quad (1)$$

Para fermiones sin masa es fácil construir una densidad lagrangiana que describa estos campos en ausencia de interacciones. Esta densidad es invariante bajo las transformaciones de gauge globales

$$\psi_j(x) \longrightarrow \psi'_j(x) = \exp \left\{ i \vec{\alpha} \cdot \frac{\vec{\tau}}{2} \right\} \exp \{ i \gamma_j \beta \} \psi_j(x) \quad j=1,2,3 \quad (2)$$

donde $\vec{\alpha}$ y β son los parámetros reales que caracterizan la transformación de $SU(2) \otimes U(1)$ elegida. Los γ_j son cantidades reales que elegiremos más adelante. El grupo $SU(2)$ se suele denominar de isospin débil, si bien nada tiene que ver con el isospin que hemos introducido antes. El campo $\psi_1(x)$ es un isodoublet y las $\vec{\tau}$ al actuar sobre él actúan como las matrices de Pauli. Los campos $\psi_2(x)$ y $\psi_3(x)$ son singletes de isospin débil y $\vec{\tau} \psi_2 = \vec{\tau} \psi_3 \equiv 0$. Exijamos ahora que esta simetría sea también en local es decir que el Lagrangiano sea invariante bajo (2) cuando $\vec{\alpha} \longrightarrow \vec{\alpha}(x)$ y $\beta \longrightarrow \beta(x)$. Como el grupo $SU(2)$

tiene 3 parámetros y $U(1)$ tiene un parámetro el precio a pagar es introducir un alto campo vectoriales de spin uno: $\vec{W}_\mu(x)$ y $B_\mu(x)$. Sus acoplamientos pueden ser representados en la forma



donde W^+ y W^- forman un par partícula - antipartícula y W^0 y B^0 coinciden con sus antipartículas. Los $\pm, 0$ indican sus cargas eléctricas, que deben ser conservadas en todos los vértices. Como $SU(2)$ es un grupo no abeliano una única constante de acoplamiento describe todos los acoplamientos. Por otra parte al ser $U(1)$ abeliano tenemos libertad de elegir el acoplamiento de cada uno de los campos y esto se traduce en la libertad de elegir los acoplamientos de la forma $(g' \gamma_j)$ $j=1,2,3$. Notar que $B_\mu(x)$ es el campo que destruye y crea B^0 ; $W_\mu^3(x)$ es el campo que destruye y crea W^0 y $W_\mu(x) \equiv [W_\mu^1(x) + i W_\mu^2(x)]/\sqrt{2}$ crea W^+ y destruye W^- , mientras que $W_\mu^+(x)$ crea W^- y destruye W^+ .

Como es usual existen también autoacoplos entre los campos gauge y además como siempre es imposible dotar a estas partículas de masa sin romper la invariancia gauge.

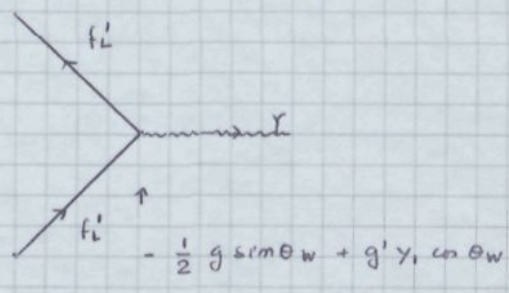
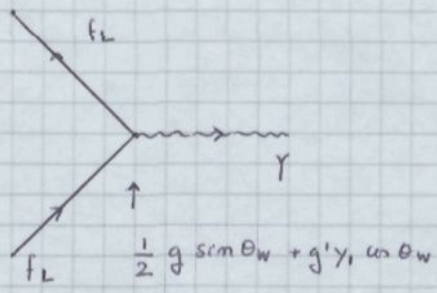
Tenemos en la naturaleza una partícula neutra de spin 1 y sin masa, el fotón, y trataremos de identificar su campo $A_\mu(x)$ con una combinación lineal

a los campos $W_{\mu}^3(x)$ y $B_{\mu}(x)$. La combinación de dichos campos ortogonal a la que nos describe el campo electromagnético la denotaremos por $Z_{\mu}(x)$ y las partículas asociadas, los Z^0 , tienen spin 1, carga nula y no tienen masa. Escribiendo

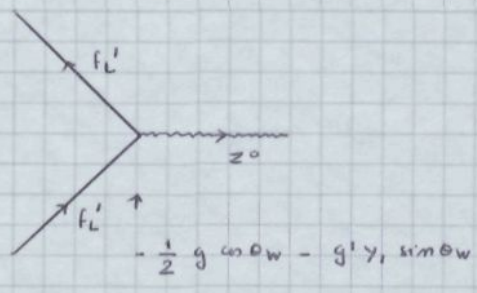
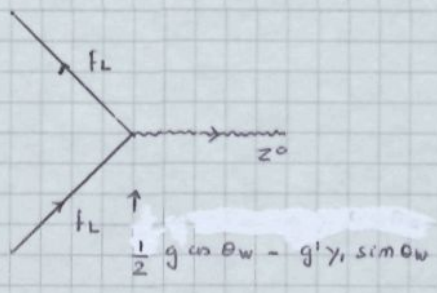
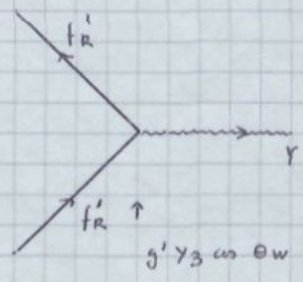
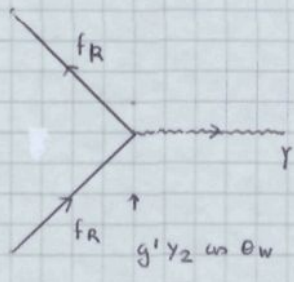
$$W_{\mu}^3(x) = \cos \theta_W Z_{\mu}(x) + \sin \theta_W A_{\mu}(x) \tag{1}$$

$$B_{\mu}(x) = -\sin \theta_W Z_{\mu}(x) + \cos \theta_W A_{\mu}(x)$$

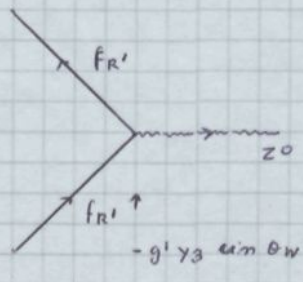
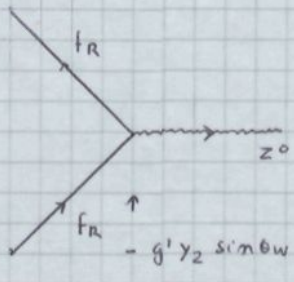
donde θ_W , llamado ángulo de Weinberg o doble, es el que fija la combinación. Entonces escribiremos en los acoplamientos (67.1) y



(2)



(3)



Entonces para que los acoplamientos con los fotones sean los correctos se debe cumplir

$$\frac{1}{2} g \sin \theta_w + g' y_1 \cos \theta_w = g' y_2 \cos \theta_w = e Q_f \tag{1}$$

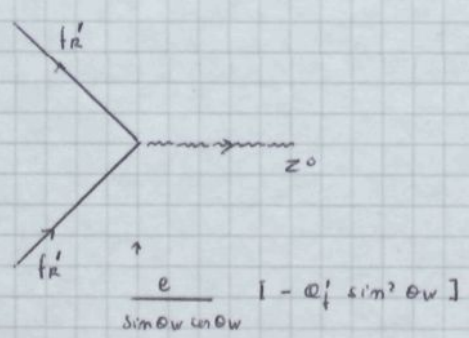
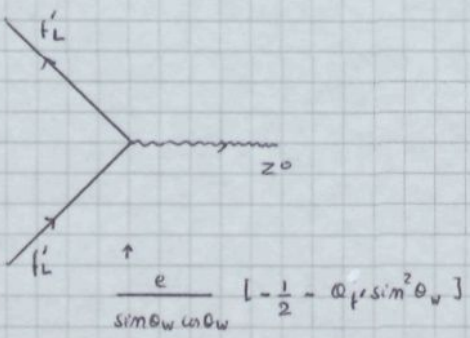
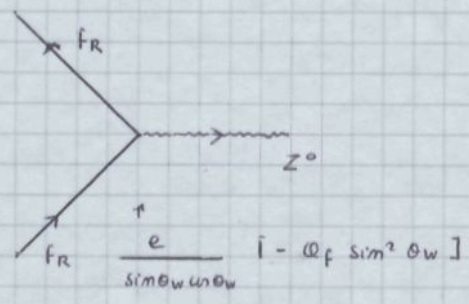
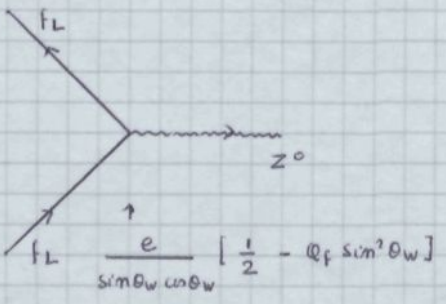
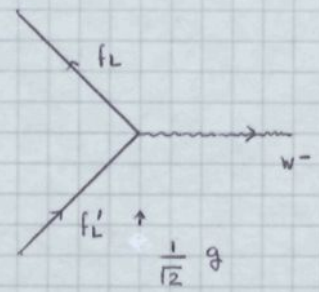
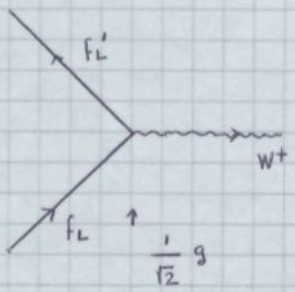
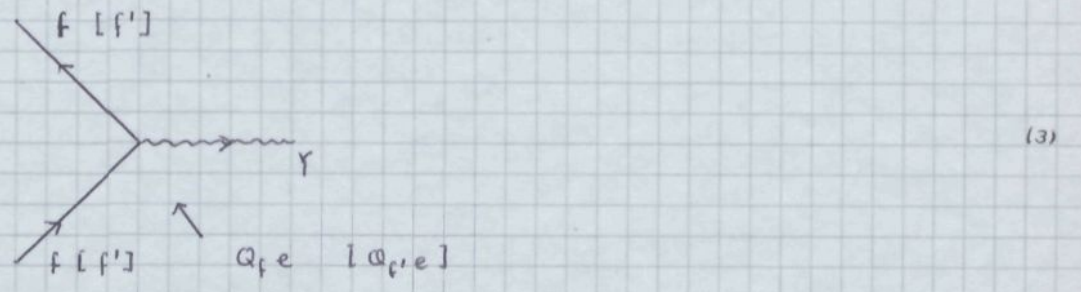
$$-\frac{1}{2} g \sin \theta_w + g' y_1 \cos \theta_w = g' y_3 \cos \theta_w = e Q_{f'} = e(Q_f - 1)$$

de donde

$$g \sin \theta_w = g' \cos \theta_w = e \tag{2}$$

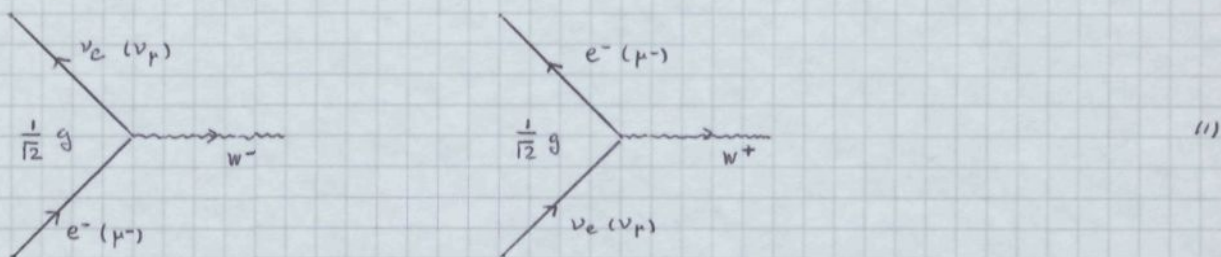
$$y_1 = Q_f - 1/2, \quad y_2 = Q_f, \quad y_3 = Q_{f'}$$

Terminamos por tanto con una teoría en la que los acoplamientos de los fermiones con los distintos campos gauge son

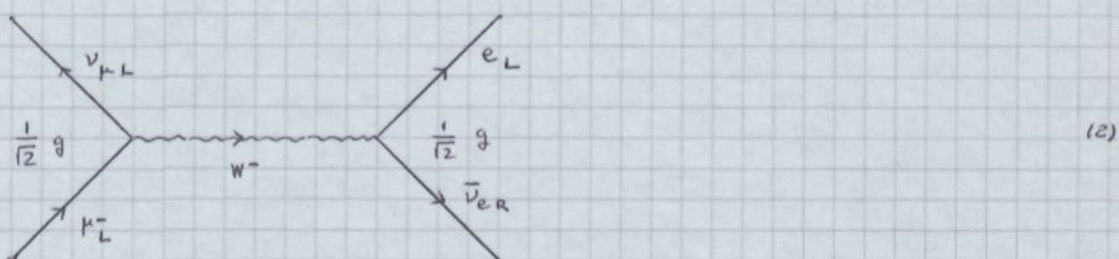


¿Que hemos conseguido con todo esto? Hemos logrado formular una teoría de campos gauge renormalizable con un tipo campo gauge de spin 1 y sin masa, cuyas interacciones vienen descritas en términos de solo dos constantes de acoplamiento (g y g' por ejemplo). Uno de los campos juega el papel del campo electromagnético, mientras que los otros tres no tienen nada que ver con las partículas conocidas pues el fotón es la única partícula de spin 1 y masa nula que existe. No parece que hayamos logrado gran cosa y por esto el modelo de Glashow paso muy desapercibido.

Veamos ahora lo que sucedería si por algún mecanismo logáramos dar masa a los mesones W^\pm y Z^0 , dejando, obviamente, el fotón sin masa. Limitándonos a considerar solo los leptones de las dos primeras generaciones y sus acoplamientos con los W^\pm tenemos los vertices



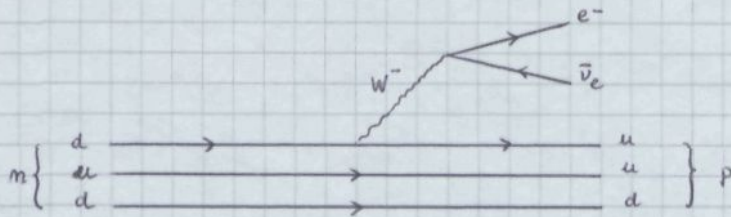
Entonces en segundo orden de teoría de perturbaciones tenemos procesos tales como



Si suponemos que $M_W^2 \gg M_\mu^2$ entonces los efectos de propagación del W^- son despreciables y el diagrama anterior es equivalente a uno que mediante el acoplamiento directo de un tipo campo describe la desintegración $\mu^- \rightarrow e^- \nu_\mu \bar{\nu}_e$ y coincide exactamente con los resultados de la teoría de Fermi si

$$\frac{g^2}{8M_W^2} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \tag{3}$$

Similarmante la desintegración del neutrón puede describirse



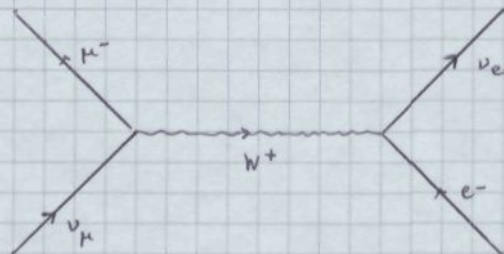
(1)

y en el límite de M_W muy grande coincide con los resultados de la teoría habitual

Si en cambio en detalles técnicos podemos decir que si M_W es suficientemente grande la teoría que acabamos de construir reproduce para energías pequeñas y como resultado de los diagramas en los que se intercambia un W^\pm una teoría totalmente equivalente a la de Fermi si se cumple (70.3). Recordemos que la corriente electromagnética, que se acopla al fotón, es una corriente neutra. Aquí los $W_{\mu}(x)$ se deben acoplar a corrientes cargadas y surge de nuevo que en la teoría de Fermi los procesos débiles son debidos a corrientes cargadas.

¿Qué sucede con el Z^0 ? Si el Z^0 no existiera serían posibles, en segundo orden de teoría de perturbaciones, procesos tales como

$$\nu_\mu + e^- \longrightarrow \mu^- + \nu_e$$

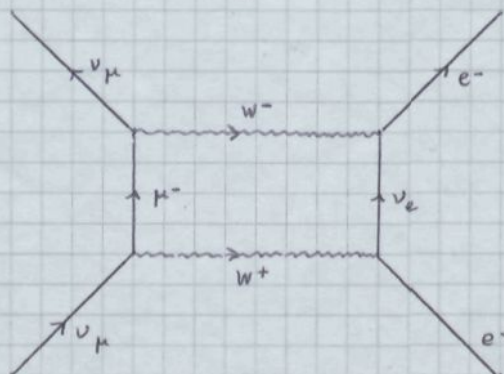


(2)

que son procesos típicos mediados

por corrientes cargadas y cuyas secciones eficaces calculadas con nuestra teoría y con la de Fermi dan resultados idénticos si (70.3) es cierta y la energía es $s \ll M_W^2$. Por el contrario no son posibles, en segundo orden de teoría de perturbaciones, procesos tales como

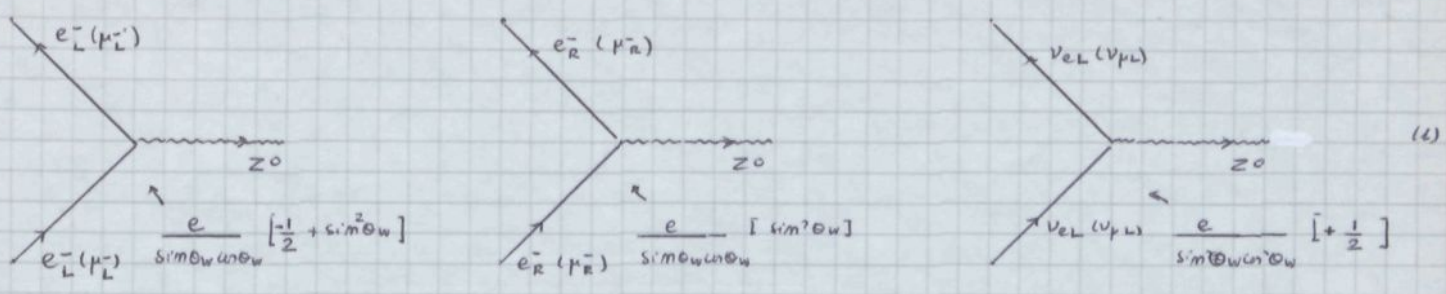
$$\nu_\mu + e^- \longrightarrow e^- + \nu_\mu$$



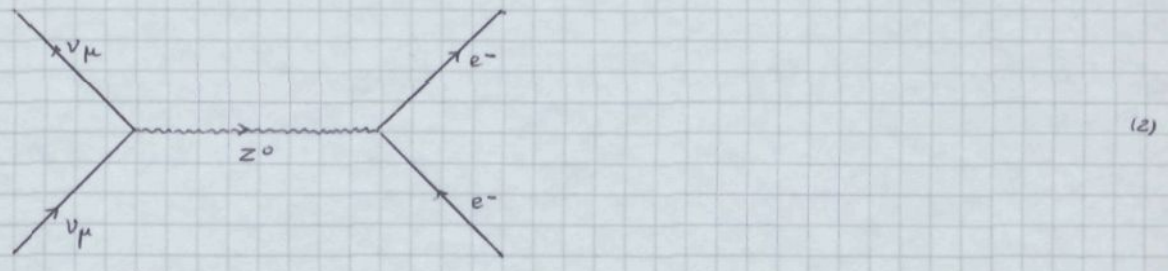
(3)

el cual es sólo posible en cuarto orden de teoría de perturbaciones y por tanto muy poco probable. Por

otra parte si el Z^0 existe aparecen nuevos acoplamientos leptónicos:



(Fijémosnos que V_R no se acopla debido a que su carga es nula). Estos procesos se dice que son mediados por corrientes neutras. Si estos existieran también (71.3) es posible en segundo orden de teoría de perturbaciones:



y si la masa del Z^0 es parecida a la del W^\pm , para energías mucho menores que estas masas, es de esperar que las secciones eficaces en los procesos (71.2) y (71.3) sean del mismo orden de magnitud a no ser que θ_W tomara algunos valores excepcionales.

Era claro que las cosas mejorarían si los mesones gauge W^\pm y Z^0 tuvieran masa, aun cuando aparecerían procesos dominados por corrientes neutras, tales como el (2), para los que no había ninguna evidencia experimental. Una solución obvia es añadir a la densidad Lagrangiana que acabamos de construir términos que dieran masa a los mesones gauge W^\pm y Z^0 , aunque así rompieran la simetría gauge local. El problema es que añadiendo, por las buenas, términos máximos la teoría ya no es renormalizable y aparecen todos los defectos de antes. Se tenía que añadir masas y por tanto romper la simetría bajo las transformaciones de gauge locales de una forma mucho más sofisticada, para que la teoría mantuviera su carácter de renormalizable.

La solución fue encontrada independientemente por Weinberg (1967) y Salam (1968) y está basado en un mecanismo descubierto por Higgs en 1966. No voy a intentar aquí describir la forma de usar el mecanismo de Higgs para dar masas y solo mencionaré que es posible dar masas a las partículas W^\pm y Z^0 a cambio de introducir en la teoría una partícula escalar neutra descrita por un

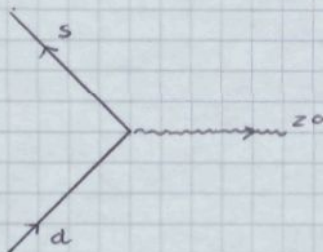
campo $\chi(x)$ y que se denomina Higgs. Las masas de los mesones gauge resultan ser

$$M_W = \left[\frac{\pi \alpha}{\sqrt{2} G_F} \right]^{1/2} \frac{1}{\sin \theta_W} = \frac{37.2816 (48) \text{ GeV}}{\sin \theta_W} \quad (1)$$

$$M_Z = \frac{M_W}{\cos \theta_W} = \frac{37.2816 (48) \text{ GeV}}{\sin \theta_W \cos \theta_W}$$

El mismo mecanismo sirve para dar masas a los fermiones, pero las masas de estos no son calculables. Si bien Weinberg y Salam sospecharon que esta forma de romper la simetría mantendría la renormalizabilidad de la teoría, debió esperar al año 1971 para que G. 't Hooft demostraba que así sucedía.

El año 1973 se descubrieron las corrientes débiles neutras predichas por esta teoría. Se puede además probar que si la teoría se pretende formular únicamente con los quarks u , d y s conduce a la existencia de corrientes neutras con cambio de extrañeza, es decir vertices de la forma



(2)

cuánta los cuales hay desde hace años fuerte evidencia experimental en contra de su existencia. Fueron Glashow, Iliopoulos y Hariami los que, en 1970, postularon la existencia de quarks encantados para explicar este tipo de corrientes neutras. Como hemos dicho antes los quarks encantados fueron descubiertos en 1974.

Esto es en esencia la teoría electrodébil unificadora de las interacciones electromagnéticas y débiles, en el sentido de que no puede existir una de estas interacciones sin que exista la otra. No es sin embargo una teoría unificadora total en el sentido de que con una constante de acoplamiento se explican todas las interacciones pues debido a tener modo $SU(2) \otimes U(1)$ ha sido preciso usar dos constantes de acoplamiento. A las energías que se pueden obtener en el laboratorio la teoría está en perfecto acuerdo con los datos experimentales si se toma

$$\sin^2 \theta_w = 0.230 \pm 0.015 \quad (1)$$

Notan que entonces $M_W = 77.7 (27) \text{ GeV}$ y $M_Z = 88.6 (21) \text{ GeV}$. Es muy interesante hacer experiencias a energías más elevadas para asegurarnos de que existen los mesones W^\pm y Z^0 y ver si sus propiedades son las predichas por la teoría estándar que acabamos de formular. Por otra parte es de esperar que estas nuevas experiencias permitan conocer las propiedades de los Higgs y ver si están de acuerdo con las predichas.

9. - G.U.T.

Hasta aquí hemos logrado formular una teoría para las interacciones fuertes, Q.C.D., y una teoría electrodébil, ambas basadas en un principio de gauge local. ¿Sería posible, usando el mismo principio, formular una teoría de gran unificación (G.U.T.)? Por G.U.T. entendemos una teoría basada sobre un principio de gauge local y en la que aparezca un solo grupo G que tenga unas características tales que con un solo acoplamiento k podamos describir los tres tipos de interacciones que observamos a bajas energías. Por otra parte G debe ser suficientemente grande para que

$$G \supset SU_c(3) \otimes SU(2) \otimes U(1) \quad (1)$$

donde $SU(2) \otimes U(1)$ es el grupo de Glashow de las electrodébiles. Se puede probar que el grupo mínimo que cumple estas condiciones es $SU(5)$ y nos limitaremos a considerar este si bien un ligero cambio mucho de lo que diremos es válido para grupo G mayores.

El grupo $SU(5)$ es el de las transformaciones unitarias unimodulares en un espacio de cinco dimensiones. El grupo en consideración tiene 24 generadores que indicaremos por T_i , $i = 1, 2, \dots, 24$, y que cumplen

$$T_i^\dagger = T_i, \quad \text{Tr} [T_i] = 0 \quad (2)$$

$$[T_i, T_j] = i f_{ijk} T_k$$

donde f_{ijk} es completamente antisimétrica y además podemos normalizar los generadores a forma que

$$\text{Tr} [T_i T_j] = \frac{1}{2} \delta_{ij} \tag{1}$$

Veamos la forma explícita de estos generadores. Los ocho generadores asociados con $SU_C(3)$ son

$$T_G^a = \begin{vmatrix} \lambda_a/2 & & 0 \\ & & \\ 0 & & 0 \end{vmatrix} \quad a = 1, 2, \dots, 8 \tag{2}$$

donde λ_a son las ocho matrices 3×3 de Gell-Mann. Los tres generadores del $SU(2)$ de isospin débil son

$$T_W^i = \begin{vmatrix} 0 & & 0 \\ & & \\ 0 & & \tau_i/2 \end{vmatrix} \tag{3}$$

donde τ_i son las matrices de spin de Pauli. El generador asociado con $U(1)$ debe conmutar con todos los anteriores y teniendo en cuenta que $\text{Tr}(T) = 0$ y la condición (1) obtenemos

$$T_B = \sqrt{\frac{3}{5}} \begin{vmatrix} & & 0 \\ -1/3 & & \\ & & 1/2 \end{vmatrix} \tag{4}$$

Los restantes 12 generadores son (indicamos solo los elementos no nulos)

$$T_{X_j^1} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & & 1 & & \\ & & & & \\ 1 & & & & 0 \\ & & & & \\ & & & & \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{fila } j \\ \text{columna } 4 \end{matrix} \quad T_{X_j^2} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & & -i & & \\ & & & & \\ i & & & & 0 \\ & & & & \\ & & & & \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{fila } j \\ \text{columna } 4 \end{matrix} \tag{5}$$

y las matrices análogas $T_{Y_j^1}$ y $T_{Y_j^2}$ en las que cambiamos la fila o columna 4 por la 5. Hemos pues obtenido la representación de los generadores en la representación fundamental.

Esta representación irreducible de $SU(5)$ viene caracterizada por cuatro números

entonces no negativos $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ y su dimensión es

$$D(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = \frac{1}{2^5 \cdot 3^2} (\lambda_1 + 1) (\lambda_2 + 1) (\lambda_3 + 1) (\lambda_4 + 1) (\lambda_1 + \lambda_2 + 2) (\lambda_2 + \lambda_3 + 2) (\lambda_3 + \lambda_4 + 2) (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + 3) (\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + 3) (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + 4) \quad (1)$$

y las representaciones de ordenes mas bajos son $D(0,0,0,0) = 1$ (trivial)
 $D(1,0,0,0) = 5$ (fundamental), $D(0,1,0,0) = 10$., y las dos conjugadas de estas ultimas.

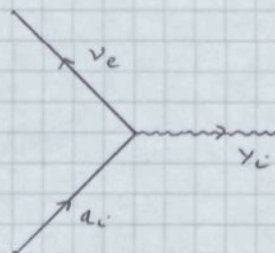
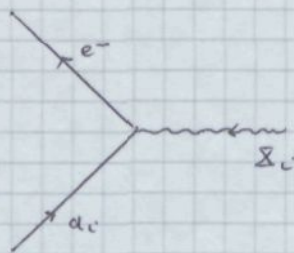
Si nos limitamos a considerar los fermiones de la primera generacion: $\nu_e, e^-, u_L, u_R, u_V$ y d_L, d_R, d_V tenemos un total de 15 estados si el neutrino no tiene masa los cuales encajan de forma natural en las representaciones 5 y 10 de $SU(5)$. La forma de realizar la asociacion es

$$\Psi_R(x) = \begin{pmatrix} d_A(x) \\ d_R(x) \\ d_V(x) \\ e^c(x) \\ + \nu^c(x) \end{pmatrix}_R \quad (2)$$

$$\Psi_L(x) = \begin{pmatrix} 0 & +u_V^c(x) & -u_R^c(x) & +u_A(x) & +d_A(x) \\ -u_V^c(x) & 0 & +u_A^c(x) & +u_R(x) & +d_R(x) \\ +u_R^c(x) & -u_A^c(x) & 0 & +u_V(x) & +d_V(x) \\ +u_A(x) & -u_R(x) & -u_V(x) & 0 & +e^c(x) \\ -d_A(x) & -d_R(x) & -d_V(x) & -e^c(x) & 0 \end{pmatrix}_L$$

La densidad Lagrangiana libre es invariante bajo las transformaciones $SU(5)$ globales. Impongamos ahora la condicion de que tambien lo sea bajo las transformaciones de gauge locales. Sabemos que para lograr esto se deben introducir 24 campos gauge de spin 1 y masa nula cuyos acoplamiento vienen descritos por una unica constante de acoplamiento g^* . De estos mesones gauge 8 son los gluones, 3 son los W y 1 es el B. Los restantes 12 son llamados lept-quarks pues transforman los leptones en quarks. Se suelen designar

de la siguiente forma. Hay tres campos $\Sigma_\mu^i(x)$ (y sus adjuntos) con partículas asociadas de carga $4/3$ y otros tres campos $Y_\mu^i(x)$ (y sus adjuntos) con partículas asociadas de carga $1/3$. Acoplamiento típicos son



$$i = A, R, V \quad (1)$$

Es evidente que la simetría $SU(5)$ debe romperse y, como en la teoría electrodébil, suele hacerse con el mecanismo de Higgs. La rotura de la simetría se hace en dos estadios: en el primer estadio se dan unas enormes masas M a los bosones intermedios X e Y y todos los demás permanecen sin masa. En un segundo estadio se dan masas a los W^\pm y Z^0 dejando sin masas a los gluones y al fotón como debe suceder.

Veamos algunas predicciones de la teoría. Fijemos que tanto la constante de acoplamiento de $SU(3)$, g_s , como las de $SU(2)$ o $U(1)$, g y $g'Y_j$, quedan totalmente determinadas en términos de g^* . En primer lugar esto implica que al estar las Y_j relacionadas con las cargas éstas deben estar cuantificadas y si $-1e1$ indica la carga del electrón, entonces las de los quarks u y d resultan ser $2/3e1/3$ y $-1/3e1/3$, tal como debe suceder. En segundo lugar se encuentra que

$$g_s = g^* \quad , \quad g = g^* \quad , \quad g' = \sqrt{\frac{3}{5}} g^* \quad (2)$$

de donde

$$\sin \theta_w = \sqrt{\frac{3}{8}} = 0.612 \dots \quad (3)$$

Las predicciones (2) y (3) parecen ser totalmente falsas, pero en realidad no es así. Tengamos en cuenta que las constantes de acoplamiento efectivas son funciones de la energía y lo mismo sucede con el ángulo de Weimberg. Las predicciones anteriores deben ser vistas a energías del orden de la masa M y no a las energías que habitualmente nos movemos. Las técnicas del grupo de renormalización nos permiten averiguar cómo cambian estas cantidades con la energía. Para las constantes

de estructura fina tenemos, en la aproximación de un loop

$$\frac{1}{\alpha_s(Q^2)} = \frac{1}{\alpha_s(M^2)} - \frac{1}{4\pi} \left[11 - \frac{2}{3} N_f \right] \ln \frac{M^2}{Q^2}$$

$$\frac{1}{\alpha_g(Q^2)} = \frac{1}{\alpha_g(M^2)} - \frac{1}{4\pi} \left[\frac{22}{3} - \frac{2}{3} N_f \right] \ln \frac{M^2}{Q^2} \quad (1)$$

$$\frac{1}{\alpha_{g'}(Q^2)} = \frac{1}{\alpha_{g'}(M^2)} - \frac{1}{4\pi} \left[-\frac{2}{3} N_f \right] \ln \frac{M^2}{Q^2}$$

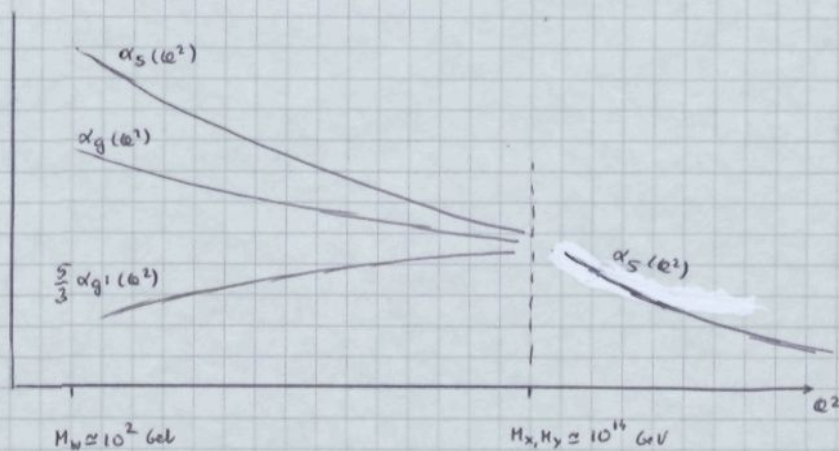
y es de esperar que de acuerdo con (75.1)

$$\alpha_s(M^2) = \alpha_g(M^2) = \frac{5}{3} \alpha_{g'}(M^2) = \alpha_{g^*}(M^2) \quad (2)$$

Tengamos en cuenta que a las energías usuales en el laboratorio, digamos $Q_e = 10 \text{ GeV}$ o bien para $N_f = 6$

$$\alpha_s(Q_e^2) = 0.244, \quad \alpha_g(Q_e^2) = 0.0322, \quad \frac{5}{3} \alpha_{g'}(Q_e^2) = 0.0160 \quad (3)$$

Las dos primeras decaen al aumentar Q^2 haciéndolo más rápidamente la primera; por el contrario la última crece con Q^2 y es de esperar que a una determinada masa se encuentren. Calcula pues algún para $M \approx 10^{16} \text{ GeV}$. La situación es



Evidentemente a las dos últimas ecuaciones de (1) se puede obtener $\sin^2 \theta_W(Q^2)$ y para Q^2 laboratorio o encontrar un valor en perfecto acuerdo con el experimental.

Finalmente debemos cuenta que los diagramas (75.1) permiten explicar la desintegración

del foto'n. Se encuentran por simples cálculos dimensionales $\tau \approx M^4$ y cálculos más detallados dan $\tau \approx 10^{30 \pm 1}$ años lo cual está dentro de las posibilidades experimentales.