EL METODO W.B.K

Pretendemos desarrollar aquí una formulación funcional de la aproximación W.B.K. a través de integrales de camino que pueda ser generalizada fácilmente a teorías de campos. Seguiremos

R.F. DASHEN, B. HASSLACHER y A NEVEU. Phys. Rev. D10, 4114 (1970)

R. RAJARAMAN Phys. Rep. C21, 227 (1975)

J. ZINN-JUSTIN Phys. Rep C70, 109 (1981)

i) Estados ligados en sistemas con un grado de libertad

Consideremos una partícula de masa M en un potencial $V(x)$. Sean E_m los niveles discretos del Hamiltoniano H correspondiente que vienen dados por los polos del propagador $(E = E+i0)$

$$G(E) = \mathrm{Tr}\,\frac{1}{H-E} = \sum_m \frac{1}{E_m - E} \tag{1}$$

Para simplificar la notación supondremos espectro puramente discreto. Se puede escribir

$$G(E) = i\,\mathrm{Tr}\int_0^\infty \frac{dT}{\hbar}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}(E-H)T\right\} \tag{2}$$

y esto equivale a

$$G(E) = i\int_0^\infty \frac{dT}{\hbar}\,G(T)\,e^{iET/\hbar} \tag{3}$$

donde

$$G(T) = \mathrm{Tr}\left(e^{-iHT/\hbar}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 \,\langle x_0| e^{-iHT/\hbar} |x_0\rangle \tag{4}$$

Recordemos que la amplitud de transición es

$$\langle x_b| e^{-iHT/\hbar} |x_a\rangle = \int \mathcal{D}[x(t)]\; e^{\frac{i}{\hbar} S[x(t)]} \tag{5}$$

donde la integral se extiende sobre todos los caminos que empiezan en x_a en $t=0$ y terminan en x_b en $t=T$.

Antes de continuar recordemos algunas fórmulas que necesitaremos frecuentemente.

i) Integrales Gaussianas

$$\boxed{\int \left(\prod_{i=1}^{m} d\vec{x}_i\right) \exp\left\{-\sum_{i,j=1}^{m} A_{ij}\, \vec{x}_i\cdot\vec{x}_j + \sum_{i=1}^{m} \vec{\beta}_i\cdot\vec{x}_i\right\} = \pi^{3m/2} (\det A)^{-3/2} \exp\left\{\frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{m} (A^{-1})_{ij}\, \vec{\beta}_i\cdot\vec{\beta}_j\right\}} \qquad (1)$$

ii) Aproximación de fase estacionaria

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, g(x)\, e^{-if(x)} \simeq \frac{\sqrt{2\pi}\, e^{-if(a)}\, g(a)}{\sqrt{i f''(a)}} \quad , \quad f'(a)=0} \qquad (2)$$

Demostración: Supongamos que $f(x)$ tiene un único extremo aislado en $x=a$. Entonces

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, g(x)\, e^{-if(x)} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[g(a) + g'(a)(x-a) + \cdots\right] \exp\left\{-i\left[f(a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(a) + \cdots\right]\right\}$$

Si suponemos que $f''(a) \neq 0$, las derivadas de orden superior no sean grandes y que $g(x)$ varíe lentamente alrededor de $x=a$, entonces se obtiene inmediatamente (2). En condiciones análogas y para varias variables si $f(x_1, \ldots x_m) \equiv f(\vec{x})$ presenta un extremo en $\vec{x} = \vec{a}$ entonces

$$\boxed{\begin{gathered}\int d\vec{x}\, g(\vec{x})\, e^{-if(\vec{x})} \simeq \left(\frac{2\pi}{i}\right)^{m/2} (\mathrm{Det}\, A)^{-1/2}\, g(\vec{a})\, e^{-if(\vec{a})} \\ A_{ij} = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}\right|_{\vec{x}=\vec{a}}\end{gathered}} \qquad (3)$$

Entonces

$$G(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 \int \mathcal{D}[x(t)]\, e^{\frac{i}{\hbar}\int_0^T dt\left[\frac{M\dot{x}^2}{2} - V(x)\right]} \qquad x(0) = x(T) = x_0 \qquad (4)$$

es decir que todos los caminos son periódicos con período T. Debemos ahora proceder al cálculo de esta integral.

i) Acoplamiento débil.

Supongamos para concretar que $V(x)$ tiene un mínimo único en $x = x_m$. Entonces en la vecindad de $x = x_m$

$$V(x) = V(x_m) + \frac{M}{2}\omega^2 (x-x_m)^2 + \cdots\cdots \qquad (5)$$

Método de la fase estacionaria

R. B. DINGLE "Asymptotic Expansions: Their Derivation and Interpretation" Academic Press 1973

Consideremos la integral

$$F(t) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, g(x)\, e^{t\,h(x)} \tag{1}$$

donde $h(x)$ y $g(x)$ son tales que $F(t)$ existe. Quisiéramos determinar el comportamiento asintótico de $F(t)$ cuando $g(x)$ and $h(x)$ son funciones desarrollables en serie de potencias alrededor de un punto $x = x_0$ en el que $h(x)$ es estacionario. Supongamos que

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k\, (x-x_0)^k \tag{2}$$

$$h(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} h_\ell\, (x-x_0)^\ell$$

donde

$$g_k = \frac{1}{k!}\, g^{(k)}(x_0) \tag{3}$$

$$h_k \equiv \frac{1}{k!}\, h^{(k)}(x_0) \qquad , \qquad h_1 \equiv 0$$

Entonces

$$F(t) = e^{t h_0} \sum_{k=0}^{\infty} g_k \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, (x-x_0)^k\, e^{t h_2 (x-x_0)^2}\; e^{t \sum_{\ell=3}^{\infty} h_\ell (x-x_0)^\ell}$$

$$F(t) = e^{t h_0} \sum_{k=0}^{\infty} g_k \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, y^k\, e^{t h_2 y^2}\; e^{t \sum_{\ell=3}^{\infty} h_\ell y^\ell}$$

Ahora bien

$$\sum_{k=0}^{\infty} g_k\, y^k\, e^{t y^3 \sum_{\ell=3}^{\infty} h_\ell y^{\ell-3}} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_{m,n}\, (t y^3)^m\, y^n$$

con lo cual

$$F(t) = e^{t h_0} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_{m,n}\, t^m \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, y^{3m+n}\, e^{t h_2 y^2}$$

Recordemos que si $3m+n = 2\nu$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy\, y^{2\nu}\, e^{t h_2 y^2} = \Gamma\!\left(\nu + \tfrac{1}{2}\right) (-t h_2)^{-\nu - 1/2}$$

y es nula si $3m+n$ es impar. De aquí

$$F(t) = e^{t h_0} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{2\nu} c_{m,\,2\nu-m}\; t^m \int_{-\infty}^{+\infty} dy\; y^{2m+2\nu}\; e^{t h_2 y^2}$$

$$= e^{t h_0} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{2\nu} c_{m,\,2\nu-m}\; t^m\; \Gamma(m+\nu+1/2)\; (-t h_2)^{-m-\nu-1/2}$$

Se obtiene por tanto

$$\left.\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\; g(x)\; e^{t h(x)} &= e^{t h_0} \sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu\; t^{-\nu-1/2} \\ d_\nu &= (-h_2)^{-\nu-1/2} \sum_{m=0}^{2\nu} c_{m,\,2\nu-m}\; (-h_2)^{-m}\; \Gamma(m+\nu+1/2) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

En particular

$$d_0 = (-h_2)^{-1/2}\; c_{0,0}\; \sqrt{\pi}$$

$$d_1 = (-h_2)^{-3/2}\; \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[c_{02} + \frac{3}{2h_2}\, c_{11} + \frac{15}{4 h_2^2}\, c_{20} \right]$$

Como

$$c_{00} = g_0 \qquad\qquad c_{02} = g_2$$

$$c_{11} = g_0 h_4 + g_1 h_3$$

$$c_{20} = \frac{1}{2}\, g_0\, h_3^2$$

$\Rightarrow$

$$c_{00} = g(x_0) \qquad\qquad c_{02} = \frac{1}{2}\, g^{(2)}(x_0)$$

$$c_{11} = \frac{1}{24}\, g(x_0)\, h^{(4)}(x_0) + \frac{1}{6}\, g^{(1)}(x_0)\, h^{(3)}(x_0)$$

$$c_{20} = \frac{1}{72}\, g(x_0)\, [h^{(3)}(x_0)]^2$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\; g(x)\, e^{t h(x)} = \frac{\sqrt{2\pi}\; e^{t h(x_0)}\; g(x_0)}{\sqrt{-t\, h^{(2)}(x_0)}} \left\{ 1 + \frac{d_1}{d_0}\, \frac{1}{t} + \cdots \right\}$$

En el límite de acoplamiento débil supondremos que se puede escribir

$$V(x) = V(0) + \frac{1}{2} M\omega^2 x \qquad (1)$$

donde, sin pérdida de generalidad, hemos supuesto $x_m = 0$. Entonces

$$G(T) \simeq e^{-\frac{i}{\hbar}V(0)T} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 \int \mathcal{D}[x(t)]\, e^{\frac{iM}{2\hbar}\int_0^T dt\, [\dot{x}^2(t) - \omega^2 x^2(t)]} \qquad (2)$$

Como el Lagrangiano es cuadrático nos basta calcular

$$G(T) \simeq e^{-\frac{i}{\hbar}V(0)T} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0\, F(T)\, e^{\frac{i}{\hbar} S_{cl}[x_0 T;\, x_0 0]} \qquad (3)$$

Empecemos calculando S_{cl}. Las ecuaciones a resolver son

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0 \qquad x(0) = x(T) = x_0$$

y por tanto

$$x(t) = \frac{x_0}{\sin\omega T}\left[\sin\omega(T-t) + \sin\omega t\right] \Rightarrow \dot{x}(t) = \frac{x_0\omega}{\sin\omega T}\left[-\cos\omega(T-t) + \cos\omega t\right]$$

y en particular

$$x(0) = x(T) = x_0 \quad , \quad \dot{x}(0) = \frac{x_0\omega}{\sin\omega T}[1-\cos\omega T] \quad , \quad \dot{x}(T) = -\frac{x_0\omega}{\sin\omega T}[1-\cos\omega T]$$

De acuerdo con (I.8.3)

$$S_{cl} = \frac{M}{2}\left[x(T)\dot{x}(T) - x(0)\dot{x}(0)\right] = -\frac{M\omega x_0^2}{\sin\omega T}(1-\cos\omega T)$$

$$= -M\omega x_0^2 \operatorname{tg}\frac{\omega T}{2}$$

El factor $F(T)$ es el mismo que el dado en (I.9.1) y por tanto

$$G(T) \simeq e^{-\frac{i}{\hbar}V(0)T}\left[\frac{M\omega}{2\pi i\hbar\sin\omega T}\right]^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} dx_0\, e^{-\frac{i}{\hbar}M\omega x_0^2 \operatorname{tg}\frac{\omega T}{2}} =$$

$$= e^{-\frac{i}{\hbar}V(0)T}\left[\frac{M\omega}{2\pi i\hbar\sin\omega T}\right]^{1/2}\pi^{1/2}\left[\frac{i}{\hbar}M\omega \operatorname{tg}\frac{\omega T}{2}\right]^{-1/2} =$$

$$= e^{-\frac{i}{\hbar}V(0)T}\left[\frac{M\omega\pi}{2\pi i\hbar\sin\omega T}\,\frac{\hbar}{iM\omega\operatorname{tg}\frac{\omega T}{2}}\right]^{1/2} = e^{-\frac{i}{\hbar}V(0)T}\,\frac{1}{2i\sin\frac{\omega T}{2}} \qquad (5)$$

Este resultado se puede escribir

$$G(T) = e^{-\frac{i}{\hbar}V(0)T} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-i(m+\frac{1}{2})\omega T} \qquad (1)$$

por lo cual

$$G(E) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i}{\hbar} \int_0^{\infty} dT \, \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \left[E - V(0) - (m+\tfrac{1}{2})\omega\hbar \right] T \right\}$$

de donde

$$\boxed{G(E) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{V(0) + (m+\frac{1}{2})\hbar\omega - E}} \qquad (2)$$

lo cual nos da los niveles energéticos en la aproximación de acoplamiento débil

$$\boxed{E_m = V(0) + (m+\tfrac{1}{2})\hbar\omega} \qquad m = 0, 1, 2, \ldots \qquad (3)$$

Hasta aquí lo único que hemos aproximado es el potencial $V(x)$ para el que se ha supuesto válido el desarrollo (3.1), por lo demás los cálculos son exactos y no se ha usado en absoluto la aproximación W.B.K.

ii) Acoplamiento fuerte.

En contraste con el acoplamiento débil consideremos ahora el caso en el que no es válida la aproximación (3.1) es decir que el acoplamiento es fuerte. Entonces en lugar de desarrollar $V(x)$ alrededor de su mínimo, desarrollamos toda la acción $S[T,0;x(t)]$ alrededor de los caminos extremales. La ecuación de partida es como antes (2.4)

$$G(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 \int \mathcal{D}[x(t)] \, e^{\frac{i}{\hbar} S[T,0;x(t)]} \qquad (4)$$

Los caminos extremales son las soluciones de

$$\frac{\delta S}{\delta x(t)} = -\left(M\ddot{x}(t) + \frac{\partial V}{\partial x} \right) = 0 \qquad (5)$$

sujetas a las condiciones $x(0) = x(T) = x_0$; indicaremos por $\{x^{\nu}_{cl}(t)\}$ al conjunto de tales soluciones. Notemos que ahora x_0 corresponderá a las distintas formas de elegir el punto inicial sobre cada órbita periódica clásica y puede ser un punto cualquiera de la órbita.

Desarrollando ahora la acción alrededor de tales soluciones

$$S[T,0;x(t)] = S[T,0;x_{cl}^j(t)] + \int_0^T dt\left[\frac{M}{2}\dot{y}^2 - \frac{1}{2}V''[x_{cl}^j(t)]y^2\right] + \cdots \qquad (1)$$

donde

$$V''[x_{cl}^j(t)] \equiv \left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{x=x_{cl}^j(t)}$$

Evidentemente los términos lineales en y no aparecen por ser $x_{cl}^j(t)$ un extremal. Entonces podemos escribir en la aproximación de fase estacionaria

$$G(T) \simeq \sum_j \int dx_0\, e^{\frac{i}{\hbar}S[T,0;x_{cl}^j(t)]}\,\Delta^j$$

$$\Delta_j \equiv \int \mathcal{D}[y(t)]\, e^{\frac{i}{\hbar}\int_0^T dt\left[\frac{M}{2}\dot{y}^2 - \frac{1}{2}V''[x_{cl}^j(t)]y^2\right]} \qquad (2)$$

donde $y(0)=y(T)=0$. Aquí hemos despreciado los términos de orden superior al cuadrático. Esta es la primera de las aproximaciones en el método WBK. No es una aproximación de acoplamiento débil. Si bien despreciamos potencias de orden superior en las fluctuaciones cuánticas alrededor del camino clásico $x_{cl}^j(t)$, el camino clásico es calculado usando todo el potencial $V(x)$.

Para calcular las fluctuaciones alrededor de la trayectoria clásica, i.e. Δ_j, usaremos el "shifting method". Deseamos calcular $(M\equiv 1)$

$$\Delta \equiv \int \mathcal{D}[y(t)]\,\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_0^T dt\left[\frac{1}{2}\dot{y}^2 - \frac{1}{2}V''(t)y^2\right]\right\} \qquad (3)$$

donde $V''(t) \equiv V''[x_{cl}(t)]$, siendo $x_{cl}(t)$ una trayectoria clásica periódica de período T y $y(0)=y(T)=0$. Al escribir (3) de forma detallada obtenemos una integral gaussiana múltiple que puede evaluarse exactamente usando (2.1) si podemos calcular el determinante de $(\partial^2/\partial t^2 + V''(t))$, sujeto a las condiciones de contorno $y(0)=y(T)=0$. Para encontrar este determinante, lo diagonalizaremos usando el cambio de variables

$$z(t) = y(t) - \int_0^t dt'\,\frac{\dot{f}(t')}{f(t')}\,y(t') \qquad (4)$$

donde $f(t)$ es la solución con valor propio cero del operador mencionado

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + V''(t)\right)f(t) = 0 \qquad (5)$$

El inverso de (5.4) es

$$y(t) = z(t) + f(t)\int_0^t dt' \frac{\dot f(t')}{f^2(t')} z(t') \qquad (1)$$

En efecto

$$z(t) + f(t)\int_0^t dt' \frac{\dot f(t')}{f^2(t')} z(t') = y(t) - \int_0^t dt' \frac{\dot f(t')}{f(t')} y(t') + f(t)\int_0^t dt' \frac{\dot f(t')}{f^2(t')} y(t') -$$

$$- f(t)\int_0^t dt' \frac{\dot f(t')}{f^2(t')}\int_0^{t'} dt'' \frac{\dot f(t'')}{f(t'')} y(t'') = \left| \begin{matrix} u(t') = \int_0^{t'} dt'' \frac{\dot f(t'')}{f(t'')} y(t'') & du(t') = \frac{\dot f(t')}{f(t')} y(t')\, dt' \\ dv(t') = dt' \frac{\dot f(t')}{f^2(t')} & v(t') = -\frac{1}{f(t')} \end{matrix} \right| =$$

$$= y(t) - \int_0^t dt' \frac{\dot f(t')}{f(t')} y(t') + f(t)\int_0^t dt' \frac{\dot f(t')}{f^2(t')} y(t') + f(t)\left\{ \frac{1}{f(t')}\int_0^{t'} dt'' \frac{\dot f(t'')}{f(t'')} y(t'')\right\}_0^t$$

$$- f(t)\int_0^t dt' \frac{1}{f(t')} \frac{\dot f(t')}{f(t')} y(t') = y(t) \qquad \text{Q.E.D.}$$

Veamos ahora como se escribe el exponente de (5.3). De (1) se deduce

$$\dot y(t) = \dot z(t) + \dot f(t)\int_0^t dt' \frac{\dot f(t')}{f^2(t')} z(t') + \frac{\dot f(t)}{f(t)} z(t) =$$

$$= \dot z(t) + \dot f(t)\frac{y(t) - z(t)}{f(t)} + \frac{\dot f(t)}{f(t)} z(t) = \dot z(t) + \frac{\dot f(t)}{f(t)} y(t) \qquad (2)$$

de donde

$$\ddot y(t) = \ddot z(t) + \frac{\ddot f(t)}{f(t)} y(t) + \frac{\dot f(t)}{f(t)} \dot y(t) - \frac{\dot f^2(t)}{f^2(t)} y(t) \Rightarrow$$

$$\ddot y(t) + V''(t)\, y(t) = \ddot z(t) + \frac{\dot f(t)}{f(t)}\left[\dot y(t) - \frac{\dot f(t)}{f(t)} y(t)\right] \Rightarrow$$

$$\ddot y(t) + V''(t)\, y(t) = \ddot z(t) + \frac{\dot f(t)}{f(t)} \dot z(t) \qquad (3)$$

y por lo tanto

$$\int_0^T dt\,[\dot y^2(t) - V''(t)\, y^2(t)] = \int_0^T dt\,[-\ddot y(t) - V''(t)\, y(t)]\, y(t) =$$

$$= -\int_0^T dt\left[\ddot z(t) + \frac{\dot f(t)}{f(t)}\dot z(t)\right] y(t) = \int_0^T dt\left[\dot z(t)\,\dot y(t) - \frac{\dot f(t)}{f(t)}\dot z(t)\, y(t)\right] =$$

$$= \int_0^T dt\, \dot z(t)\left[\dot y(t) - \frac{\dot f(t)}{f(t)} y(t)\right] = \int_0^T dt\, \dot z^2(t) \qquad (4)$$

Por tanto en términos de las nuevas variables podemos escribir

$$\Delta = \int \mathcal{D}[z(t)] \left| \frac{\mathcal{D}[y(t)]}{\mathcal{D}[z(t)]} \right| e^{+\frac{i}{\hbar}\int_0^T dt \, \frac{1}{2} \dot{z}^2(t)} \qquad (1)$$

Debemos por tanto calcular el Jacobiano de la transformación (5) que es de tipo Volterra y por consiguiente es

$$\left| \frac{\mathcal{D}[y(t)]}{\mathcal{D}[z(t)]} \right| = \exp\left\{ \frac{1}{2} \int_0^T dt \, \frac{\dot{f}(t)}{f(t)} \right\} = \exp\left\{ \frac{1}{2} \ln f(t) \Big|_0^T \right\} = \sqrt{\frac{f(T)}{f(0)}} \qquad (2)$$

por lo cual

$$\Delta = \left[\frac{f(T)}{f(0)} \right]^{1/2} \int \mathcal{D}[z(t)] \, e^{+\frac{i}{\hbar}\int_0^T dt \, \frac{1}{2} \dot{z}^2(t)} \qquad (3)$$

Recordemos que como $y(0) = y(T) = 0$ entonces $z(0) = 0$ y $z(T)$ debe venir ligada por

$$z(T) + f(T) \int_0^T dt \, \frac{\dot{f}(t)}{f^2(t)} \, z(t) = 0 \qquad (5)$$

Ahora bien podemos integrar (3) sobre $z(T)$ siempre que impongamos (4) explícitamente pues

$$1 = \int dz(T) \; \delta\left[z(T) + f(T) \int_0^T dt \, \frac{\dot{f}(t)}{f^2(t)} \, z(t) \right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int dz(T) \, \exp\left\{ i\frac{\alpha}{\hbar} \left[z(T) + f(T) \int_0^T dt \, \frac{\dot{f}(t)}{f^2(t)} \, z(t) \right] \right\}$$

y por tanto

$$\Delta = \frac{1}{2\pi\hbar} \left[\frac{f(T)}{f(0)} \right]^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int dz(T) \int_{\substack{z(0)=0 \\ z(T)}} \mathcal{D}[z(t)] \, \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_0^T dt \, \frac{1}{2} \dot{z}^2(t) + \right.$$

$$\left. + i\frac{\alpha}{\hbar} \left[z(T) + f(T) \int_0^T dt \, \frac{\dot{f}(t)}{f^2(t)} \, z(t) \right] \right\} \qquad (5)$$

y esto puede escribirse

$$\Delta = \frac{1}{2\pi\hbar} \left[\frac{f(T)}{f(0)} \right]^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int dz(T) \int_{\substack{z(0)=0 \\ z(T)}} \mathcal{D}[z(t)] \, \exp\left\{ \int_0^T dt \left[\frac{i}{2\hbar} \dot{z}^2(t) + i\frac{\alpha}{\hbar} \frac{f(T)}{f(t)} \dot{z}(t) \right] \right\} \qquad (6)$$

donde se ha tenido en cuenta que

$$\int_0^T dt \, \frac{f(T)}{f(t)} \dot{z}(t) = z(t) \frac{f(T)}{f(t)} \Big|_0^T + \int_0^T dt \, \frac{f(T)\dot{f}(t)}{f^2(t)} z(t) = z(T) + f(T) \int_0^T dt \, \frac{\dot{f}(t)}{f^2(t)} z(t)$$

Se tiene por tanto que calcular

$$\Delta = \frac{1}{2\pi\hbar}\left[\frac{f(T)}{f(0)}\right]^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} dz(T) \int_{\substack{z(0)=0\\ z(T)}} \mathcal{D}[z(t)]\ \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_0^T dt\left[\frac{1}{2}\dot{z}^2(t) + \alpha\frac{f(T)}{f(t)}\dot{z}(t)\right]\right\} \tag{1}$$

La integración sobre caminos puede ahora realizarse fácilmente pues el Lagrangiano es cuadrático

$$L = \frac{1}{2}\dot{z}^2(t) + \alpha f(T)\frac{1}{f(t)}\dot{z}(t) \tag{2}$$

y la ecuación clásica del movimiento es

$$\ddot{z}(t) = -\alpha f(T)\frac{d}{dt}\frac{1}{f(t)} \tag{3}$$

Debemos ahora buscar soluciones con $z(0)=0$ y $z(T)$. Esta es

$$z(t) = \frac{z(T)}{T}t + \alpha t\frac{f(T)}{T}\int_0^T dt'\frac{1}{f(t')} - \alpha f(T)\int_0^t dt'\frac{1}{f(t')} \tag{4}$$

o

$$\dot{z}(t) = \frac{z(T)}{T} + \alpha\frac{f(T)}{T}\int_0^T dt'\frac{1}{f(t')} - \alpha f(T)\frac{1}{f(t)} \tag{5}$$

y por tanto la acción clásica es

$$S_{cl} = \int_0^T dt\left[\frac{1}{2}\dot{z}^2(t) + \alpha\frac{f(T)}{f(t)}\dot{z}(t)\right] =$$

$$= \frac{T}{2}\left[\frac{z(T)}{T} + \alpha\frac{f(T)}{T}\int_0^T dt\frac{1}{f(t)}\right]^2 - \frac{1}{2}\alpha^2\int_0^T dt\frac{f^2(T)}{f^2(t)} \tag{6}$$

De aquí

$$\Delta = \frac{1}{2\pi\hbar}\left[\frac{f(T)}{f(0)}\right]^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty} dz(T)\ F(T)\ e^{\frac{i}{\hbar}S_{cl}} \qquad F(T) = (2\pi i\hbar T)^{-1/2} \tag{7}$$

La integración sobre $z(T)$ es inmediata

$$\Delta = \frac{1}{2\pi\hbar}\left[\frac{f(T)}{f(0)}\right]^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha\ \exp\left\{-\frac{i}{2\hbar}\alpha^2\int_0^T dt\frac{f^2(T)}{f^2(t)}\right\} \tag{8}$$

y por medio de nueva integración

$$\Delta = \left[\frac{f(T)}{f(0)}\right]^{1/2}\left[\frac{i}{2\pi\hbar}\right]^{1/2}\left[\int_0^T dt\frac{f^2(T)}{f^2(t)}\right]^{-1/2} \tag{9}$$

Esto es

$$\Delta = \sqrt{\frac{i}{2\pi\hbar}} \left\{ f(0)\, f(T) \int_0^T dt \, \frac{1}{f^2(t)} \right\}^{-1/2} \tag{1}$$

Quisiéramos ahora transformar esta expresión. La solución general de (5.5) es

$$f(t) = \left\{ \alpha \int_0^t dt' \, \frac{1}{\dot{x}_{cl}^2(t')} + \beta \right\} \dot{x}_{cl}(t) \tag{2}$$

donde α y β son constantes cualesquiera, como se puede ver sustituyendo en (5.5) y teniendo en cuenta (4.5). Nosotros tomaremos en particular $\alpha \equiv 0$, $\beta = 1$. Teniendo en cuenta el carácter periódico de la solución clásica

$$f(T) = f(0) = \dot{x}_{cl}(0) \tag{3}$$

Recordemos que la trayectoria clásica debe cumplir $x_{cl}(0) = x_{cl}(T) = x_0$. Démonos cuenta, sin embargo, que el período no es necesariamente T, sino que puede ser T/n, donde n es un número entero positivo arbitrario. Entonces

$$\int_0^T dt \, \frac{1}{f^2(t)} = \int_0^T dt \, [\dot{x}_{cl}(t)]^{-2} = 2n \int_{x_-}^{x_+} dx_{cl} \, [\dot{x}_{cl}(t)]^{-3} =$$

$$= 2n \int_{x_-}^{x_+} dx_{cl} \, [2(E_{cl} - V)]^{-3/2} \tag{4}$$

donde $x_\pm$ son los puntos de retroceso. Mas aún

$$T = 2n \int_{x_-}^{x_+} dx_{cl} \, [2(E_{cl} - V)]^{-1/2} \tag{5}$$

y por tanto

$$\frac{dT}{dE} = -\, 2n \int_{x_-}^{x_+} dx_{cl} \, [2(E_{cl} - V)]^{-3/2} \tag{6}$$

Comparando (4) y (6) se obtiene

$$\Delta^{(n)} = \sqrt{\frac{i}{2\pi\hbar}} \, \frac{1}{\dot{x}_{cl}(0)} \left| \frac{dE_{cl}}{dT} \right|^{1/2} \tag{7}$$

donde $x(0)$ es el punto inicial y final de todos los caminos. En validad la fórmula (7) no es correcta pues en cada punto de retroceso se produce un desfasaje de $\pi/2$ (J. B. KELLER, Ann. of Phys. (N.Y) $\underline{4}$, 180 (1958)) y finalmente resulta

$$\Delta^{(n)} = \sqrt{\frac{i}{2\pi\hbar}} \; \frac{1}{\dot{x}_{cl}(0)} \left| \frac{dE_{cl}}{dT} \right|^{1/2} e^{-i\pi n} \qquad (1)$$

y por tanto $G(T)$, dado en (5.2) puede escribirse

$$G(T) \simeq \sqrt{\frac{i}{2\pi\hbar}} \sum_{n=1}^{\infty} \int dx_{cl}(0) \frac{1}{\dot{x}_{cl}(0)} \left| \frac{dE_{cl}}{dT} \right|^{1/2} e^{\frac{i}{\hbar}\left[S_{cl}^{(n)}(T) - n\pi\hbar \right]} \qquad (2)$$

Sobre una órbita cerrada $S_{cl}^{(n)}(T)$ y $|dE_{cl}/dT|$ son independientes del punto de partida y la integración sobre $x_{cl}(0)$ es inmediata

$$\int dx_{cl}(0) \frac{1}{\dot{x}_{cl}(0)} = 2\int_{x_-}^{x_+} dx_{cl}(0) \frac{1}{\dot{x}_{cl}(0)} = \oint dt = \frac{T}{n} \qquad (3)$$

Notemos que cada órbita se cuenta dos veces para incluir su invertida temporal. Entonces

$$G(T) \simeq \sqrt{\frac{i}{2\pi\hbar}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T}{n} \left| \frac{dE_{cl}}{dT} \right|^{1/2} e^{\frac{i}{\hbar}\left[S_{cl}^{(n)}(T) - n\pi\hbar \right]} \qquad (4)$$

y por tanto

$$G(E) \simeq \sqrt{\frac{-i}{2\pi\hbar}} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} dT \frac{1}{\hbar} \frac{T}{n} \left| \frac{dE_{cl}}{dT} \right|^{1/2} e^{\frac{i}{\hbar}\left[ET + S_{cl}^{(n)}(T) - n\pi\hbar \right]}$$

Indiquemos por $\tau \equiv T/n$ el periodo básico por ciclo., teniendo en cuenta $S_{cl}^{(n)}(T) = n\, S_{cl}(\tau)$ se obtiene

$$G(E) \simeq \frac{1}{\hbar} \sqrt{\frac{-i}{2\pi\hbar}} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} d\tau \sqrt{n}\, \tau \left| \frac{dE_{cl}}{d\tau} \right|^{1/2} \exp\left\{ \frac{in}{\hbar} \left[E\tau + S_{cl}(\tau) - \pi\hbar \right] \right\} \qquad (5)$$

La integración sobre τ la haremos de nuevo por el método de la fase estacionaria. El punto estacionario viene determinado por la condición

$$\frac{dS_{cl}(\tau)}{d\tau} = -E_{cl} = -E \qquad (6)$$

que determina τ en función de E.

$$G(E) \simeq \frac{1}{\hbar} \sqrt{\frac{-i}{2\pi\hbar}} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2\pi}\, \sqrt{n}\, \tau(E) \left| \frac{dE_{cl}}{d\tau} \right|^{1/2} e^{\frac{in}{\hbar}\left[E\tau(E) + S_{cl}(\tau) - \pi\hbar \right]} \left[-\frac{in}{\hbar} \frac{\partial^2 S_{cl}}{\partial \tau^2} \right]^{-1/2} \qquad (7)$$

de donde como $\partial^2 S_{cl}/\partial\tau^2 = -\partial E/\partial\tau$ se obtiene

$$G(E) \simeq \frac{i}{\hbar}\, \tau(E) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \, e^{\frac{in}{\hbar} W(E)}$$

$$W(E) \equiv S_{cl}(\tau(E)) + E\,\tau(E) \qquad (1)$$

donde $W(E)$ es la función característica de Hamilton. La suma se puede realizar inmediatamente y vale

$$G(E) \simeq -\frac{i}{\hbar}\, \tau(E)\, \frac{e^{iW(E)/\hbar}}{1 + e^{iW(E)/\hbar}} \qquad (2)$$

Como hemos dicho antes los polos de esta función son las energías de los estados ligados y están situados en

$$W(E) = (2n+1)\pi\hbar \qquad n = 0, 1, 2 \ldots \qquad (3)$$

que es la ecuación que determina la energía de los estados ligados. Teniendo en cuenta que

$$W = S_{cl} + E\tau = \int_0^{\tau} dt \left(\frac{M}{2}\dot{x}^2 - V + E \right) = M \int_0^{\tau} dt\, \dot{x}^2 = 2\sqrt{M} \int_{x_-}^{x_+} dx\, \sqrt{2(E - V(x))}$$

y por tanto (3) se puede escribir

$$\int_{x_-}^{x_+} dx\, \sqrt{2M\,(E - V(x))} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\hbar \,, \qquad n = 0, 1, 2 \ldots \qquad (4)$$

que no es más que la aproximación W.B.K.

Esto completa la derivación del método W.B.K para obtener los niveles energéticos para un sistema unidimensional. Evidentemente este resultado se puede obtener por métodos mucho más simples. Pero es precisamente el procedimiento que acabamos de presentar el que se generaliza fácilmente a teorías con muchos grados de libertad y en particular a teorías de campo.

c) Si $V(x)$ tiene un mínimo en $x = a$, entonces la solución estática clásica $x_a(t) = a$ es también trivialmente periódica para todo período T. Aquí hemos considerado sólo órbitas no triviales al deducir (4). Perturbar alrededor de la órbita trivial y mantener sólo términos cuadráticos es equivalente a lo que hicimos en el tratamiento del acoplamiento débil. En aquel caso vimos que $G(T)$ era de orden $(\hbar)^0$ (ver (4.2)), mientras que para órbitas no triviales $G(T)$ es de orden $1/\sqrt{\hbar}$ (10.4). Por tanto la contribución de las órbitas triviales es usualmente despreciable pues $\hbar$ es pequeño. Sin embargo, cuando el acoplamiento es débil, los periodos de las órbitas son muy próximos a $2\pi/\omega$. Entonces la contribución de la órbita trivial (3.4) tiene un factor $1/\sin(\omega T/2)$ que es importante. ¿Se debe ahora sumar las contribuciones de las órbitas triviales y no triviales? No. Esto sería contaje doble. Para el límite de acoplamiento débil (oscilador armónico puro), cuando se "perturba" alrededor de la órbita trivial y se mantienen términos cuadráticos se está resolviendo el problema de forma exacta, puesto que toda la acción es cuadrática en x y $\dot{x}$. No es necesario añadir contribuciones adicionales provenientes de órbitas no triviales. Otra forma de ver esto es darse cuenta que para un oscilador armónico, la acción para todos los caminos cerrados periódicos es la misma e igual a cero (Ver (I.8.4) con $x = x'$ y $\omega T = 2m\pi$). Las distintas órbitas no triviales y la trivial no representan puntos estacionarios aislados de la acción. En resumen, para acoplamiento fuerte se pueden ignorar las órbitas triviales mientras que para acoplamiento débil son las únicas que deben ser tenidas en cuenta.

(ii) La partícula libre es una aplicación sencilla del W.B.K. Puede parecer que aquí no hay órbitas periódicas pues no hay potencial. Pero procedamos como es usual colocando la partícula en una caja de longitud L con condiciones frontera periódicas, lo cual es equivalente a ponerla en un anillo de circunferencia L. En este caso puede realizar un movimiento periódico girando una y otra vez. El periodo es $\tau = 2L/v$, y

$$E = \frac{M}{2} v^2 \quad , \quad S = \frac{1}{2} M v^2 \tau \quad , \quad W(E) = S + E\tau = M v^2 \tau = 2L\sqrt{2ME}$$

Sin embargo ahora no se puede aplicar (11.3). El factor $e^{-im\pi} = (-1)^m$ de (10.5) que había dos puntos de retroceso en cada órbita. Esto es cierto para el movimiento periódico en un pozo pero no en nuestro caso donde no hay puntos de retroceso. Es fácil ver que la ley de cuantificación es ahora $W(E) = 2m\pi\hbar$ y por tanto los niveles energéticos son

$$E_m = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ML^2} m^2 \quad , \quad m = 1, 2, \ldots$$

que es el resultado habitual.

(iii) En el tratamiento llevado a cabo se ha supuesto que para un τ dado hay una única órbita con este periodo por ciclo. Esta es la razón por lo que al pasar de (5.2) a (10.2) hemos reemplazado la suma sobre $\int$ por una simple suma sobre n., esto es las multiples repeticiones de la misma orbita. Este es usualmente el caso para potenciales típicos unidimensionales con un solo pozo. Cuando puede haber más de una órbita con un período básico dado, como por ejemplo en un pozo doble, las contribuciones a $G(E)$ son aditivas. Habra un nivel energético cuando un miembro de una u otra familia de orbitas satisfaga la condición (11.3). Por supuesto no es de esperar que los resultados vayan a fallar cuando la energia sea cercana a la parte mas alta que separa los dos pozos, es decir cuando la probabilidad de que la partícula salte de un pozo al otro por efecto túnel sea importante.

SERIE DE PERTURBACIONES

Consideremos en el marco de la Mecánica Cuántica no relativista un problema descrito por el Hamiltoniano

$$H = H_0 + H_1 \qquad (1)$$

$$H_0 = \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} x^2 \qquad H_1 = \frac{1}{g^2} \left[V(gx) - \frac{1}{2} g^2 x^2 \right]$$

Supondremos que el potencial $V(x)$ tiene un mínimo nulo en $x=0$ y que

$$V(x) = \frac{1}{2} x^2 + O(x^3) \qquad (2)$$

Si estudiamos este problema usando teoría de perturbaciones, la energía del estado fundamental se puede escribir

$$E_0(g) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \, g^{2m} \qquad (3)$$

Quisiéramos encontrar un método para calcular el comportamiento dominante de A_m para $m \to \infty$.

En el caso en que

$$V(gx) \equiv \frac{1}{2} g^2 x^2 + g^4 x^4 \qquad (4)$$

entonces $H_1 = g^2 x^4$, es decir un oscilador armónico perturbado con un término $g x^4$. Un simple cálculo permite probar que

$$E_0(g) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} g^2 - \frac{21}{8} g^4 + \frac{333}{16} g^6 - \frac{30885}{128} g^8 + \cdots\cdots \qquad (5)$$

(Los A_m están relacionados con los B_m del libro de A. GALINDO y P. PASCUAL por la relación $A_m = 2^{m-1} B_m$). La serie anterior es asintótica, según lograron demostrar J. LOEFFEL, A. MARTIN, B. SIMON y A. S. WIGHTMAN. [Phys. Lett. 30B, 656 (1969)] y B. SIMON [Ann. Phys. (N.Y) 58, 76 (1970)]. Por otra parte C.M. BENDER y T. T. WU [Phys. Rev. 184, 1231 (1969)] lograron probar que

$$A_m \underset{m\to\infty}{\simeq} (-1)^{m+1} \, m! \, 3^m \, \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{6}{\pi m}} \left(1 + O\left(\frac{1}{m}\right) \right) \qquad (6)$$

Ejemplo (J. Zinn-Justin. "Topics in Quantum Field Theory and Gauge Theories" Springer 1978 Ed. J.A. de Azcarraga)

Vamos a considerar, en primer lugar, una integral simple que tiene una estructura similar a las integrales funcionales que deseamos estudiar:

$$Z(g) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \; \exp\left\{ - \left(\frac{x^2}{2} + g\,\frac{x^4}{4} \right) \right\} \qquad (1)$$

Girando el contorno de integración en el plano x es fácil comprobar que $Z(g)$ es una función analítica en el plano cortado. Puede calcularse como serie de potencias de g. Se tiene

$$Z(g) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} Z_n \, g^n$$

$$(2)$$

$$Z_n = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{4^n} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \; x^{4n} e^{-\frac{1}{2} x^2}$$

Integral que se puede llevar a cabo analíticamente con el resultado

$$Z_n = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma(2n + 1/2) \qquad (3)$$

y por lo tanto la serie (2) es divergente para todos los valores de g. Es fácil sin embargo probar que la serie es asintótica en todo el plano cortado. Vamos ahora a determinar Z_n para $n \to \infty$ por el método de la fase estacionaria. Podemos escribir

$$Z_n = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{4^n} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \, 2 \int_0^{\infty} dx \; \exp\left(- \frac{1}{2} x^2 + 4n \ln x \right) \qquad (4)$$

El punto de silla es

$$-x_c + \frac{4n}{x_c} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_c = 2\sqrt{n} \qquad (5)$$

El hecho de que x_c crece con n es el responsable de la divergencia de la serie. Entonces

$$Z_n \simeq \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\sqrt{2}}{4^n} \exp\left\{ -2n + 2n \ln 4n \right\} \qquad (6)$$

o equivalentemente

$$Z_n \simeq \frac{(-1)^n}{2\pi\sqrt{2}} \, 4^n \, \frac{n!}{n} \qquad (7)$$

que es equivalente a (3) para $n \to \infty$. Recordad

$$\ln \Gamma(z) \sim \left(z - \frac{1}{2}\right) \ln z - z + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + \cdots \qquad \Leftrightarrow \qquad n! = \sqrt{2\pi n}\; e^{-n + n \ln n}$$

Para estimar Z_K hemos usado el hecho que podemos obtener una expresión integral explícita desarrollando $\exp(-gx^4/4)$. Veremos que esto no es necesario. En efecto podemos escribir

$$Z_m = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \oint \frac{dg}{g^{m+1}} \exp\left\{-\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}gx^4\right)\right\} \qquad (1)$$

donde el contorno rodea el origen. Para grandes m podemos estimar Z_m buscando el punto de silla en los planos x y g. Las ecuaciones del punto de silla son

$$\left.\begin{aligned} &1 + g_c x_c^2 = 0 \\ &\frac{m}{g_c} + \frac{x_c^4}{4} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

que dan

$$x_c = \pm 2\sqrt{m} \quad , \qquad g_c = -\frac{1}{4m} \qquad (3)$$

Notar que g_c es negativo y decrece como $1/m$. Esta será una característica general y esencial de nuestro análisis. Podemos ahora calcular la integral (1) usando (2.3). Se tiene

$$A = \begin{vmatrix} 2i & \mp i 8 m^{3/2} \\ \mp i 8 m^{3/2} & 16 i m^3 \end{vmatrix}$$

de donde $\det A = 32 m^3$ se obtiene por lo tanto

$$Z_m \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{2\pi}{i}\right) \frac{1}{(32 m^3)^{1/2}} (-4m) \exp\left\{-2m + m - m\ln(-1/4m)\right\} =$$

$$= \frac{(-1)^m}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{m}} e^{-m + m\ln 4m} = \frac{(-1)^m}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{m}} e^{-m + m\ln m} \cdot 4^m =$$

$$\simeq \frac{(-1)^m}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{m}} 4^m \frac{m!}{\sqrt{m 2\pi}} \simeq \frac{(-1)^m}{2\pi\sqrt{2}} 4^m \frac{m!}{m}$$

que es el resultado obtenido antes.

También es posible calcular correcciones. En efecto consideremos la integral

$$I = 2\int_0^{\infty} dx\, e^{-\frac{1}{2}x^2 + 2m\ln x^2}$$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{f(x)} \qquad f(x) \equiv -\frac{1}{2}x^2 + 2m\ln x^2$$

Los puntos de silla son

$$f'(x) = -x + \frac{4m}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{\pm} = \pm 2\sqrt{m}$$

$$f(x_\pm) = -2m + 2m \ln 4m$$

$$f''(x_\pm) = -2$$

$$f'''(x_\pm) = \pm \frac{1}{\sqrt{m}}$$

$$f''''(x_\pm) = -\frac{3}{2m}$$

$$f(x) = -2m + 2m\ln 4m - (x-x_\pm)^2 \pm \frac{1}{6\sqrt{m}}(x-x_\pm)^3 - \frac{1}{16m}(x-x_\pm)^4 + \cdots$$

Por tanto

$$I = \sum_{r=\pm} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \; e^{-2m+2m\ln 4m} \, e^{-(x-x_\pm)^2} \, e^{\pm \frac{1}{6\sqrt{m}}(x-x_\pm)^3 - \frac{1}{16m}(x-x_\pm)^4 + \cdots} =$$

$$= e^{-2m+2m\ln 4m} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \; e^{-y^2} \left\{ e^{+\frac{1}{6\sqrt{m}}y^3 - \frac{1}{16m}y^4 \cdots} + e^{-\frac{1}{6\sqrt{m}}y^3 - \frac{1}{16m}y^4 \cdots} \right\} =$$

$$= 2e^{-2m+2m\ln 4m} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \; e^{-y^2} \left\{ 1 - \frac{1}{16m}y^4 + \frac{1}{72m}y^6 + \cdots \right\}$$

$$= 2e^{-2m+2m\ln 4m} \sqrt{\pi} \left\{ 1 - \frac{1}{48m} + \cdots \right\}$$

y por lo tanto

$$z_m \simeq \frac{(-1)^m}{m!} \sqrt{2} \, e^{-2m} (2m)^{2m} \left\{ 1 - \frac{1}{48m} + \cdots \right\}$$

Además

$$\ln \Gamma(2m+1/2) = 2m\ln(2m+1/2) - (2m+1/2) + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \frac{1}{12(2m+1/2)} + \cdots$$

$$= 2m\ln 2m + \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{16m} - 2m - \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \frac{1}{24m} + \cdots$$

$$= 2m\ln 2m - 2m + \frac{1}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{48m} + \cdots$$

$$\Gamma(2m+1/2) = \sqrt{2\pi} \, e^{-2m} (2m)^{2m} \left\{ 1 - \frac{1}{48m} + \cdots \right\}$$

que coincide con 14' al orden deseado.

Queremos obtener resultados análogos a (~~14.~~ 6) para la serie (14.4) por métodos que después puedan ser fácilmente generalizables a teoría cuántica de campos. La energía del estado fundamental viene dado por

$$E_0 = E_0^{(0)} - \lim_{\beta\to\infty} \frac{1}{\beta} \ln \frac{\mathrm{Tr}\, e^{-\beta H}}{\mathrm{Tr}\, e^{-\beta H_0}} \tag{1}$$

donde $E_0^{(0)}$ es la energía del estado fundamental del sistema no perturbado. En efecto

$$- \lim_{\beta\to\infty} \frac{1}{\beta} \ln \frac{\mathrm{Tr}\, e^{-\beta H}}{\mathrm{Tr}\, e^{-\beta H_0}} = \lim_{\beta\to\infty} \frac{1}{\beta} \left\{ \ln \sum_n e^{-\beta E_n^{(0)}} - \ln \sum_n e^{-\beta E_n} \right\}$$

$$= \lim_{\beta\to\infty} \frac{1}{\beta} \left\{ \ln e^{-\beta E_0^{(0)}} \left[1 + \sum_n{}' e^{-\beta (E_n^{(0)} - E_0^{(0)})} \right] - \ln e^{-\beta E_0} \left[1 + \sum_n{}' e^{-\beta (E_n - E_0)} \right] \right\}$$

donde la prima indica que la suma no incluye el estado fundamental. Como $E_n^{(0)} - E_0^{(0)} > 0$, $E_n - E_0 > 0$ para $n \neq 0$ se obtiene inmediatamente (1). De acuerdo con los métodos de las integrales de camino

$$\mathrm{Tr}\, e^{-\beta H} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 \langle x_0 | e^{-\beta H} | x_0 \rangle =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 \int \mathcal{D}[x(\tau)] \exp \left\{ - \int_0^\beta d\tau \left[\frac{1}{2} \dot{x}^2(\tau) + \frac{1}{g^2} V(gx) \right] \right\} \tag{2}$$

donde la última integral es la acción Euclídea. Tener en cuenta que la integración sobre caminos debe hacerse para los caminos $x(0) = x(\beta) = x_0$. Entonces podemos escribir

$$\frac{\mathrm{Tr}\, e^{-\beta H}}{\mathrm{Tr}\, e^{-\beta H_0}} = \mathcal{N} \int dx_0 \int \mathcal{D}[x(\tau)]\, e^{-\int_0^\beta d\tau \left[\frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{g^2} V(gx) \right]} \tag{3}$$

donde $\mathcal{N}$ es tal que el segundo miembro se reduce a 1 cuando $H = H_0$. Veamos ahora cómo podemos usar (3) para hallar las cantidades de interés. Consideremos

$$F(g) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n g^n \tag{5}$$

entonces

$$S_n = \frac{1}{2\pi i} \oint dg \frac{F(g)}{g^{n+1}} \tag{5}$$

donde el contorno de integración es un círculo alrededor del origen recorrido en sentido positivo. En efecto

$$\frac{1}{2\pi i}\oint dg\,\frac{F(g)}{g^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty} S_k \oint dg\,\frac{1}{g^{n+1-k}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty} S_k \int_0^{2\pi} \frac{|g|\,e^{i\theta}\,i\,d\theta}{|g|^{n+1-k}\,e^{i(n+1-k)\theta}} = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty} S_k\,\frac{1}{|g|^{n-k}}\int_0^{2\pi} d\theta\, e^{i(k-n)\theta} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty} S_k\,\frac{1}{|g|^{n-k}}\,2\pi\,\delta_{nk} = S_n \qquad \text{Q.E.D.}$$

Entonces teniendo en cuenta este resultado así como la ecuación (15.3) se obtiene inmediatamente que el término n del desarrollo de $Tr\,e^{-\beta H}/Tr\,e^{-\beta H_0}$ es

$$\left[\frac{Tr\,e^{-\beta H}}{Tr\,e^{-\beta H_0}}\right]^{(n)} = \frac{\mathcal{N}}{2\pi i}\oint \frac{dg^2}{(g^2)^{n+1}}\int dx_0 \int \mathcal{D}[x(\tau)]\, e^{-\int_0^\beta d\tau\left[\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{g^2}V(gx)\right]} \tag{1}$$

que está claramente relacionado con A_n dada en (14.3). Es necesario ahora calcular el comportamiento de (1).

i) Caso $V(gx) = \frac{1}{2}g^2x^2 + g^4x^4$

Por razones didácticas trataremos primero este caso y después procederemos al caso general. Seguiremos básicamente E. BRÉZIN, J.C. LE GUILLOU y J. ZINN-JUSTIN [Phys. Rev. D.15, 1544 (1977)] si bien muchas de las técnicas dadas allí se pueden encontrar en J. S. LANGER [Ann. Phys. (N.Y) 41 (108) (1967)]. Ahora la ecuación (1) se puede escribir.

$$\left[\frac{Tr\,e^{-\beta H}}{Tr\,e^{-\beta H_0}}\right]^{(n)} = \frac{\mathcal{N}}{2\pi i}\int dx_0 \int \mathcal{D}[x(\tau)]\, e^{-\int_0^\beta d\tau\left[\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}x^2\right]} \oint \frac{dg^2}{(g^2)^{n+1}}\, e^{-g^2\int_0^\beta dt\, x^4} \tag{2}$$

Empecemos considerando la integral

$$I_n(B) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{dg}{g^{n+1}}\, e^{-gB} \tag{3}$$

Pasando a polares

$$I_m(B) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} d\theta\, e^{i\theta}\, i|g|\, \frac{e^{-im\theta}}{|g|^{m+1} e^{i\theta}}\, e^{-B|g|e^{i\theta}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi|g|^m}\int_0^{2\pi} d\theta\, e^{-B|g|\cos\theta}\, e^{-i(B|g|\sin\theta + m\theta)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi|g|^m}\left\{\int_0^{2\pi} d\theta\, e^{-|g|B\cos\theta}\cos(m\theta + B|g|\sin\theta) - i\int_0^{2\pi} d\theta\, e^{-|g|B\sin\theta}\sin(m\theta + B|g|\sin\theta)\right\}$$

La segunda integral es nula y por tanto

$$I_m(B) = \frac{1}{2\pi|g|^m}\int_0^{2\pi} d\theta\, e^{-|g|B\sin\theta}\cos(K\theta + B|g|\sin\theta)$$

Usando G.H. 337. 14a (p. 155) se obtiene

$$I_m(B) = \frac{(-1)^m}{m!} B^m$$

Usando este resultado

$$\left[\frac{\mathrm{Tr}\, e^{-\beta H}}{\mathrm{Tr}\, e^{-\beta H_0}}\right]^{(m)} = \frac{(-1)^m}{m!}\mathcal{N}\int dx_0 \int \mathcal{D}[x(\tau)]\, e^{-\int_0^\beta d\tau\left[\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}x^2\right]}\left(\int_0^\beta d\tau\, x^4\right)^m$$

que puede escribirse

$$\left[\frac{\mathrm{Tr}\, e^{-\beta H}}{\mathrm{Tr}\, e^{-\beta H_0}}\right]^{(m)} = \frac{(-1)^m}{m!}\mathcal{N}\int dx_0 \int \mathcal{D}[x(\tau)]\, e^{-S_E[x(\tau)]} \tag{1}$$

$$S_E[x(\tau)] = \int_0^\beta d\tau\, \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + x^2) - m\ln\int_0^\beta d\tau\, x^4$$

donde recordemos que los caminos deben ser tales que $x(0) = x(\beta) = x_0$. Procederemos a calcular ahora esta integral en la aproximación de fase estacionaria. En primer lugar deberemos hallar las trayectorias estacionarias del tipo considerado. Para calcular las trayectorias consideremos

$$\delta S_E[x(\tau)] \equiv S[x+\eta] - S[x] = \int_0^\beta d\tau\, \frac{1}{2}\left[(\dot{x}+\dot{\eta})^2 + (x+\eta)^2 - \dot{x}^2 - x^2\right] - m\ln\int_0^\beta d\tau\,(x+\eta)^4 + m\int_0^\beta d\tau\, x^4 =$$

$$= \int_0^\beta d\tau\left[\dot{x}\dot{\eta} + \eta x\right] - m\ln\left\{1 + 4\,\frac{\int_0^\beta d\tau\, x^3\eta}{\int_0^\beta d\tau\, x^4}\right\} + O(\eta^2) =$$

$$= \int_0^\beta d\tau \, [\dot{x}\dot{\eta} + x\eta] - 4m \frac{\int_0^\beta d\tau \, x^3 \eta}{\int_0^\beta d\tau \, x^4} = \int_0^\beta d\tau \left[\dot{x}\dot{\eta} + x\eta - \frac{4m x^3 \eta}{\int_0^\beta d\tau \, x^4} \right] =$$

$$= \int_0^\beta d\tau \left\{ -\ddot{x} + x - \frac{4m x^3}{\int_0^\beta d\tau \, x^4} \right\} \eta$$

y por tanto

$$\frac{\delta S}{\delta x} = -\ddot{x} + x - \frac{4m x^3}{\int_0^\beta d\tau \, x^4} \qquad (1)$$

La ecuación que determina las trayectorias que hacen la acción estacionaria es pues

$$\ddot{x}(\tau) = x - \frac{4m}{I[x]} x^3$$

$$I[x] \equiv \int_0^\beta d\tau \; x^4(\tau) \qquad (2)$$

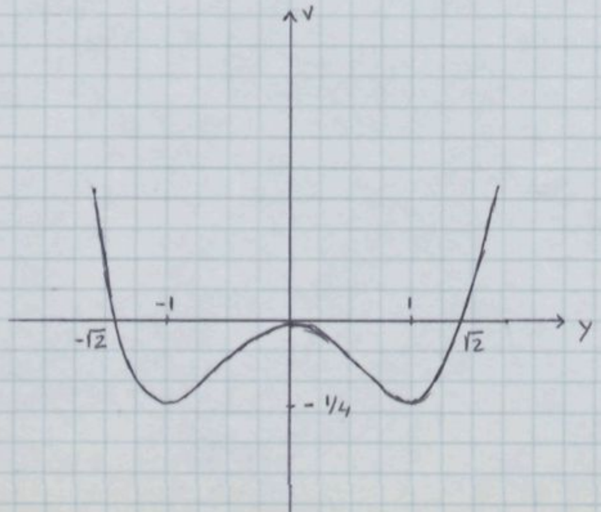
Una forma muy útil de visualizar las soluciones de (2) es darse cuenta que describen la "posición" x, como una función del "tiempo" τ para una partícula de masa unidad que se mueve en un potencial $-x^2/2 + mx^4/I$. Es útil introducir

$$y(\tau) = \left[\frac{4m}{I(x)} \right]^{1/2} x(\tau) \qquad (3)$$

y entonces (2) se escribe

$$\ddot{y}(\tau) = y(\tau) - y^3(\tau) \qquad (4)$$

Con esto ahora el potencial es $-y^2/2 + y^4/4$, que está representado en la figura



Teniendo en cuenta (17.1) es evidente que el máximo de S, es decir el máximo del integrando ocurre para $x=0$, esto es $y=0.$, con $\dot{x}=0$. Debido a la forma del potencial pueden aparecer soluciones acotadas no triviales. Las soluciones que nos interesaran son aquellas en las que la energía de la partícula es casi nula, de forma que ésta se halla en $y=0$ durante la mayor parte del tiempo β, después hace una breve excursión a $y=\pm\sqrt{2}$ y vuelve al origen. (Evidentemente el punto donde se inicia la trayectoria es arbitrario). La ley de conservación de la energía da

$$\frac{1}{2}\dot{y}^2(\tau) - \frac{1}{2}y^2(\tau) + \frac{1}{4}y^4(\tau) = E \tag{1}$$

y para $E=0$

$$\sqrt{2}\,\dot{y}(\tau) = \sqrt{-y^4(\tau) + 2y^2(\tau)} \tag{2}$$

i.e.

$$\tau - \tau_0 = \sqrt{2}\int_{y_0}^{y} dy\,\frac{1}{y\sqrt{2-y^2}} \tag{3}$$

Entonces G. H. 231 10a (p.38) obtenemos

$$\tau - \tau_0 = \ln\left\{\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2-y^2}}{y}\;\frac{y_0}{\sqrt{2}-\sqrt{2-y_0^2}}\right\}$$

y eligiendo $y(\tau_0)=\sqrt{2}$ entonces

$$\tau - \tau_0 = \ln\left\{\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2-y^2}}{y}\right\}$$

Las soluciones deseadas son pues

$$\left.\begin{aligned} y_c(\tau) &= \pm\, y_0(\tau-\tau_0) \\ y_0(\tau) &= \frac{\sqrt{2}}{\cosh\tau} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

El punto crucial de las soluciones (4) es que son las únicas para las que $S_E[x]$ es comparable a $S_E[0]$ en el límite termodinámico $\beta\to\infty$, esto es $S[x_c] \propto \beta^0$. Si hubieramos elegido funciones correspondientes a energías no nulas habríamos obtenido valores de $S[x]\propto\beta$ y por lo tanto valores de la integral funcional enormemente pequeños frente al considerado.

Es necesario ahora calcular $S_E[x_c]$. Recordemos que (17.1) tiene sólo caminos que cumplen $x(t_0) = x(t_0+\beta)$. En el límite de grandes β la solución (4) cumple esta condición si se toman las integrales en un intervalo simétrico muy largo centrado en $t=0$. Es útil definir

$$J \equiv \lim_{\beta\to\infty} \int_{-\beta/2}^{+\beta/2} d\tau \; y_0^4(\tau) \tag{1}$$

Entonces

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \, \frac{4}{\cosh^4 \tau} = 64 \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \, (e^{\tau} + e^{-\tau})^{-4} = \frac{16}{3} \tag{2}$$

según G.H. 311.9 (p. 53). De (18.2) y (18.3) se obtiene, usando (1), que

$$I[x_0] = \frac{16\, m^2}{J} \tag{3}$$

y por lo tanto

$$x_0(\tau) = \left[\frac{4m}{J} \right]^{1/2} y_0(\tau) \tag{4}$$

con lo cual

$$S[x_c] = \frac{4m}{J} \lim_{\beta\to\infty} \int_{-\beta/2}^{\beta/2} d\tau \, \frac{1}{2} \left[\dot{y}_0^2(\tau) + y_0^2(\tau) \right] - m \ln \frac{16\, m^2}{J} \tag{5}$$

Como

$$\dot{y}_0^2(\tau) + y_0^2(\tau) = 16 \, \frac{e^{2\tau} + e^{-2\tau}}{(e^{\tau} + e^{-\tau})^4}$$

se obtiene

$$\int_{-\beta/2}^{+\infty} d\tau \, \left[\dot{y}_0^2(\tau) + y_0^2(\tau) \right] = 16 \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \, \frac{e^{2\tau} + e^{-2\tau}}{(e^{\tau} + e^{-\tau})^4} = 32 \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \, \frac{e^{2\tau}}{(e^{\tau} + e^{-\tau})^4}$$

y usando G.H. 311.9 (p 53) resulta que el valor de esta integral es $16/3$. Por lo tanto

$$S[x_0] = \frac{4m}{J} \, \frac{1}{2} \, \frac{16}{3} - m \ln \frac{16\, m^2}{J}$$

y como $J = 16/3$ se obtiene

$$S[x_0] = 2m - 2m \ln(4m) + m \ln J \tag{6}$$

Debemos ahora comprobar si x_c es realmente un máximo del integrando, $\exp(-S[x])$, en el espacio funcional. Para contestar esta pregunta escribiremos

$$x(\tau) = x_0(\tau) + v(\tau) \tag{7}$$

y desarrollaremos $S[x(\tau)]$ hasta términos cuadráticos incluidos:

$$S[x(\tau)] = \int_0^\beta d\tau \ \frac{1}{2} \left[(\dot{x}_0 + \dot{v})^2 + (x_0+v)^2 \right] - m \ln \int_0^\beta d\tau \ (x_0+v)^4 =$$

$$= S[x_c] + \int_0^\beta d\tau \left[\dot{x}_0 \dot{v} + x_c v + \frac{1}{2} (\dot{v}^2 + v^2) \right] - m \ln \left[1 + \frac{4}{I} \int_0^\beta d\tau \ x_0^3 v + \frac{6}{I} \int_0^\beta d\tau \ x_0^2 v^2 \right]$$

$$= S[x_c] + \int_0^\beta d\tau \ \frac{1}{2} (\dot{v}^2 + v^2) - \frac{6m}{I} \int_0^\beta d\tau \ x_0^2 v^2 + \frac{8m}{I^2} \int_0^\beta d\tau \ x_0^3 v \int_0^\beta d\tau' \ x_0^3 v$$

Usando (20.2), (20.3) y (20.4) se obtiene

$$S[x(\tau)] = S[x_0(\tau)] + \int_0^\beta d\tau \ \frac{1}{2} (\dot{v}^2 + v^2) - \frac{3}{2} \int_0^\beta d\tau \ y_0^2 v^2 + \frac{2}{J} \int_0^\beta d\tau \ y_0^3 v \int_0^\beta d\tau' \ y_0^3 v$$

Obviamente los términos lineales en v han desaparecido. Se tiene por tanto

$$\left.\begin{aligned} S[x_c(\tau) + v(\tau)] &= S[x_0(\tau)] + \frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau_1 \int_0^\beta d\tau_2 \ v(\tau_1) \ M(\tau_1, \tau_2) \ v(\tau_2) \\ M(\tau_1, \tau_2) &= \delta(\tau_1 - \tau_2) \left[-\frac{d^2}{d\tau_1^2} + 1 - \frac{6}{\cosh^2 \tau_1} \right] + \frac{4}{J} \ y_0^3(\tau_1) \ y_0^3(\tau_2) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Para resolver este problema debemos empezar encontrando los valores propios y funciones propias de

$$-\frac{d^2\psi}{dx^2} - \frac{\lambda(\lambda+1)}{\cosh^2 x} \psi = \omega \psi \qquad (2)$$

Introduzcamos

$$\xi = \text{th}\, x \quad , \quad \psi(x) = \phi(\xi) \qquad (3)$$

y entonces la ecuación anterior se escribe como

$$(1-\xi^2) \frac{d^2\phi}{d\xi^2} - 2\xi \frac{d\phi}{d\xi} + \lambda(\lambda+1)\phi + \frac{\omega}{1-\xi^2} \phi = 0 \qquad (4)$$

Si ahora

$$\phi(\xi) = (1-\xi^2)^{-i\sqrt{\omega}/2} \ \varphi(\xi) \qquad (5)$$

obtenemos

$$(1-\xi^2) \frac{d^2\varphi}{d\xi^2} - 2\xi (1 - i\sqrt{\omega}) \frac{d\varphi}{d\xi} + [i\sqrt{\omega} + \omega + \lambda(\lambda+1)] \varphi = 0 \qquad (6)$$

Introduzcamos ahora

$$\xi = 1 - 2t \quad , \quad v(t) = \varphi(\xi) \qquad (7)$$

Entonces

$$t(t-1)\frac{d^2 v(t)}{dt^2} + (1-i\sqrt{\omega})(1-2t)\frac{dv(t)}{dt} + [\omega + i\sqrt{\omega} + \lambda(\lambda+1)]v(t) = 0 \tag{1}$$

que es una ecuación diferencial hipergeométrica (A. S. p. 562) con

$$a = -\lambda - i\sqrt{\omega} \qquad b = \lambda - i\sqrt{\omega} + 1 \qquad c = -i\sqrt{\omega} + 1 \tag{2}$$

y por tanto la solución buscada es

$$\phi(\xi) = A(1-\xi^2)^{-i\sqrt{\omega}/2} F[-i\sqrt{\omega}-\lambda, -i\sqrt{\omega}+\lambda+1, 1-i\sqrt{\omega}; \tfrac{1}{2}(1-\xi)] +$$

$$+ B(1-\xi^2)^{-i\sqrt{\omega}/2}\left(\frac{1-\xi}{2}\right)^{i\sqrt{\omega}} F[-\lambda, \lambda+1, 1+i\sqrt{\omega}; \tfrac{1}{2}(1-\xi)] \tag{3}$$

Consideremos ahora los estados ligados, esto es $\omega<0$ y tomaremos $\sqrt{\omega} = i\sqrt{|\omega|}$. Puesto que

$$\frac{1-\xi}{2} \xrightarrow[x\to\infty]{} e^{-2x} \qquad 1-\xi^2 \xrightarrow[x\to\infty]{} 4e^{-2x} \tag{4}$$

se tiene

$$\phi(\xi) \xrightarrow[x\to\infty]{} A\,4^{\sqrt{|\omega|}/2} e^{-\sqrt{|\omega|}x} + B\,4^{\sqrt{|\omega|}/2} e^{-\sqrt{|\omega|}x} e^{+2\sqrt{|\omega|}x} \tag{5}$$

y por tanto $B \equiv 0$, con lo cual para los estados ligados

$$\phi(\xi) = A(1-\xi^2)^{\sqrt{|\omega|}/2} F[\sqrt{|\omega|}-\lambda, \sqrt{|\omega|}+\lambda+1, 1+\sqrt{|\omega|}; \tfrac{1}{2}(1-\xi)] \tag{6}$$

Para estudiar el comportamiento en $x\to-\infty$, escribiremos (A.S. 15.3.6. p 559)

$$\phi(\xi) = A(1-\xi^2)^{\sqrt{|\omega|}/2}\left\{\frac{\Gamma(1+\sqrt{|\omega|})\,\Gamma(-\sqrt{|\omega|})}{\Gamma(1+\lambda)\,\Gamma(-\lambda)} F[\sqrt{|\omega|}-\lambda, \sqrt{|\omega|}+\lambda+1; \sqrt{|\omega|}+1; \tfrac{1+\xi}{2}]\right.$$

$$\left. + \left(\frac{1+\xi}{2}\right)^{-\sqrt{|\omega|}} \frac{\Gamma(1+\sqrt{|\omega|})\,\Gamma(\sqrt{|\omega|})}{\Gamma(\sqrt{|\omega|}-\lambda)\,\Gamma(\sqrt{|\omega|}+\lambda+1)} F[1+\lambda, -\lambda, 1-\sqrt{|\omega|}; \tfrac{1+\xi}{2}]\right\} \tag{7}$$

y como

$$\frac{1}{2}(1+\xi) \xrightarrow[x\to-\infty]{} e^{2x} \qquad 1-\xi^2 \xrightarrow[x\to-\infty]{} 4e^{2x}$$

resulta

$$\phi(\xi) \xrightarrow[x\to-\infty]{} A\,e^{\sqrt{|\omega|}/2} e^{\sqrt{|\omega|}x}\left\{\frac{\Gamma(1+\sqrt{|\omega|})\,\Gamma(-\sqrt{|\omega|})}{\Gamma(1+\lambda)\,\Gamma(-\lambda)} + e^{-2\sqrt{|\omega|}x}\frac{\Gamma(1+\sqrt{|\omega|})\,\Gamma(\sqrt{|\omega|})}{\Gamma(\sqrt{|\omega|}-\lambda)\,\Gamma(\sqrt{|\omega|}+\lambda+1)}\right\}$$

y por tanto las energías de los estados ligados vienen dadas

$$\frac{\Gamma(1+\sqrt{|\omega|})\,\Gamma(\sqrt{|\omega|})}{\Gamma(\sqrt{|\omega|}-\lambda)\,\Gamma(\sqrt{|\omega|}+\lambda+1)} = 0 \tag{8}$$

Si $\lambda > 0$, esta condición es equivalente a

$$\sqrt{|\omega|} - \lambda = -n \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

Se obtiene por lo tanto que las funciones propias y valores propios de (21.2) son

$$\left.\begin{array}{l} \psi_n(x) = A\,[\cosh x]^{n-\lambda}\; F\left[-n, -n+2\lambda+1, -n+\lambda+1; \tfrac{1}{2}(1-\operatorname{tgh} x)\right] \\ \\ \omega_n = -(n-\lambda)^2 \qquad\qquad n = 0, 1, 2 \ldots < \lambda \end{array}\right\} \tag{2}$$

En el caso de interés para nosotros $\lambda = 2$ y en este caso sólo hay dos estados ligados que, debidamente normalizados son

$$\left.\begin{array}{ll} \psi_0(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\dfrac{1}{\cosh^2 x} & \omega_0 = -4 \\ \\ \psi_1(x) = \sqrt{\dfrac{3}{2}}\,\dfrac{\sinh x}{\cosh^2 x} & \omega_0 = -1 \end{array}\right\} \quad \lambda = 2 \tag{3}$$

Conocidas ya estas soluciones correspondientes a los estados ligados volvamos de nuevo a (21.1). Indiquemos por $\{v_\alpha(\tau)\}$ las funciones propias de la ecuación de Schrödinger (21.2), que suponemos que forman un conjunto ortonormal completo. Entonces $v(\tau)$ se puede escribir

$$v(\tau) = \sum_\alpha \xi_\alpha\, v_\alpha(\tau) \tag{4}$$

y por tanto

$$S[x_0+v] = S[x_c] + \sum_\alpha \frac{1}{2}(\omega_\alpha+1)\,\xi_\alpha^2 + \frac{2}{J}\left[\sum_\alpha \xi_\alpha \int_0^\beta d\tau\; y_0^3(\tau)\, v_\alpha(\tau)\right]^2 \tag{5}$$

donde ω_α es el valor propio correspondiente a $v_\alpha(\tau)$. En las direcciones ξ_α correspondientes a $\omega_\alpha > 0$ (continuo) es evidente que $S[x_c+v] > S[x_c]$. Consideremos los casos $\omega_\alpha < 0$; teniendo en cuenta (3) obtenemos inmediatamente $(J \equiv 16/3)$

$$\begin{aligned} S[x_0+v_0] &= S[x_0] - \frac{3}{2} + \frac{9}{4}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau\, \frac{1}{\cosh^5 \tau}\right]^2 \\ S[x_0+v_1] &= S[x_0] + \frac{9}{2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau\, \frac{\sinh \tau}{\cosh^5 \tau}\right]^2 \end{aligned} \tag{6}$$

Las integrales se pueden calcular fácilmente (G.H. 311. 10 p 53) con el resultado

$$\begin{aligned} S[x_0+v_0] &= S[x_0] - \frac{3}{2} + \frac{81\pi^2}{256} > S[x_c] \\ S[x_0+v_1] &= S[x_0] \end{aligned} \tag{7}$$

Por tanto el segundo estado ligado, $\nu_1(\tau)$, describe una dirección en el espacio funcional a lo largo de lo que el integrando permanece constante. Que debe originarse una situación de este tipo es evidente por el hecho de que la elección de τ_0 en (19.4) es arbitraria. Entonces el desplazamiento en el espacio de funciones del punto

$$x_0(\tau) = \sqrt{\frac{3m}{2}}\ \frac{1}{\cosh \tau} \qquad a \qquad x_0'(\tau) = \sqrt{\frac{3m}{2}}\ \frac{1}{\cosh(\tau+\tau_0)} \tag{1}$$

debe dejar $S[x_0]$ invariante. Notemos que

$$\delta x_0(\tau) \equiv x_0'(\tau) - x_0(\tau) = \sqrt{\frac{3m}{2}} \left\{ \frac{1}{\cosh(\tau+\tau_0)} - \frac{1}{\cosh \tau} \right\} = -\sqrt{\frac{3m}{2}}\ \frac{\sinh \tau}{\cosh^2 \tau}\ \tau_0 + O(\tau_0^2) =$$

$$= -\sqrt{m}\ \nu_1(\tau)\ \tau_0 + O(\tau_0^2) \tag{2}$$

La proporcionalidad de $dx_0(\tau)/d\tau$ y $\nu_1(\tau)$ se puede obtener por comparación directa de (23.3) y (19.4). Mas aún podemos ver que $dx_0(\tau)/d\tau$ debe ser un estado propio de la ecuación de Schrödinger (21.2) con valor propio -1, para ello basta diferenciar la ecuación (18.2)

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\left[\frac{dx_0}{d\tau}\right] = \left[\frac{dx_0}{d\tau}\right] - \frac{12m\, x_0^2}{I}\left[\frac{dx_0}{d\tau}\right]$$

que es totalmente equivalente a

$$\left[-\frac{d^2}{d\tau^2} - \frac{6}{\cosh^2\tau}\right]\frac{dx_0}{d\tau} = -\frac{dx_0}{d\tau} \tag{3}$$

Antes de continuar vamos a derivar un resultado que necesitaremos en el futuro. Queremos calcular

$$\frac{\det(\mathcal{H}-z)}{\det(\mathcal{H}_0-z)}\ , \qquad \mathcal{H} = \mathcal{H}_0 - \frac{\lambda(\lambda+1)}{\cosh^2 x} \qquad \mathcal{H}_0 = -\frac{d^2}{dx^2} \tag{4}$$

Podemos escribir

$$\frac{\det(\mathcal{H}-z)}{\det(\mathcal{H}_0-z)} = \frac{\det(\mathcal{H}_0+V-z)}{\det(\mathcal{H}_0-z)} = \det\left(1 + \frac{1}{\mathcal{H}_0-z}V\right) \qquad V \equiv -\frac{\lambda(\lambda+1)}{\cosh^2 x} \tag{5}$$

y por lo tanto

$$\frac{\det(\mathcal{H}-z)}{\det(\mathcal{H}_0-z)} = \prod_m \Lambda_m(z) \tag{6}$$

donde $\Lambda_m(z)$ vienen determinados por la ecuación de autovalores.

$$\left[1 + \frac{1}{\mathcal{H}_0 - z} V \right] |\psi_m\rangle = \Lambda_m(z) \, |\psi_m\rangle$$

esto es

$$\left[\mathcal{H}_0 + \frac{1}{1 - \Lambda_m(z)} V \right] |\psi_m\rangle = z \, |\psi_m\rangle \tag{1}$$

Si $z<0$, entonces las cantidades $[1 - \Lambda_m(z)]^{-1}$ son las distintas intensidades del potencial V para las que hay estados propios de la ecuación de Schrödinger (1) con energía z. Si introducimos

$$\lambda' = \frac{1}{2} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{4\lambda(\lambda+1)}{1 - \Lambda_m(z)}} \right]$$

entonces (1) se reduce a (21.2) con $\lambda \to \lambda'$. Como la relación entre λ' y la energía z viene dada por (23.1)

$$\sqrt{-z} = -m + \frac{1}{2} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{4\lambda(\lambda+1)}{1 - \Lambda_m(z)}} \right]$$

obtenemos inmediatamente

$$\Lambda_m(z) = \frac{(\sqrt{-z} - \lambda + m)(\sqrt{-z} + \lambda + 1 + m)}{(\sqrt{-z} + m)(\sqrt{-z} + m + 1)} \qquad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

y por tanto

$$\frac{\det(\mathcal{H} - z)}{\det(\mathcal{H}_0 - z)} = \prod_{m=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{-z} - \lambda + m)(\sqrt{-z} + \lambda + 1 + m)}{(\sqrt{-z} + m)(\sqrt{-z} + m + 1)} \tag{3}$$

Como

$$\Gamma(z) = \lim_{m \to \infty} \frac{m! \, m^z}{z(z+1) \cdots\cdots (z+m)}$$

obtenemos

$$\frac{\det(\mathcal{H} - z)}{\det(\mathcal{H}_0 - z)} = \frac{\Gamma(1 + \sqrt{-z}) \, \Gamma(\sqrt{z})}{\Gamma(1 + \lambda + \sqrt{-z}) \, \Gamma(\sqrt{-z} - \lambda)} \tag{4}$$

que es el resultado deseado.

Veamos antes de continuar otro resultado de interés. Como es bien sabido (2.1)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=1}^{N} dx_i \, \exp\left\{ -\frac{1}{2} x^T (A - z) x \right\} = (2\pi)^{N/2} \frac{1}{[\det(A - z)]^{1/2}} \tag{5}$$

donde A es una matriz $N \times N$ tal que $A - z > 0$. Consideremos por ejemplo

$$I(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \; e^{-\frac{1}{2} x^T (A-z) x} \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 3/2 & -3/2 \\ -3/2 & 3/2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Aplicando la fórmula anterior

$$I(z) = \frac{2\pi}{\sqrt{z(z-3)}} \tag{2}$$

Darse cuenta que los valores propios y vectores propios de A son

$$\lambda = 0 \qquad \xi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad , \qquad \lambda = 3 \qquad \xi_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Entonces

$$\xi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} (x_1 + x_2) \qquad\qquad x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\xi_0 + \xi_3)$$

$$\xi_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} (x_1 - x_2) \qquad\qquad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\xi_0 - \xi_3) \tag{4}$$

Como el Jacobiano de la transformación es 1, podemos escribir (1) como

$$I(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_0 \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_3 \; e^{-\frac{1}{2} \xi^T (B-z) \xi} \quad , \quad B \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Consideremos ahora el caso $z=0$ en el que la integración sobre ξ_0 es imposible. Olvidémonos de esta integración y denotemos por $I_3(0)$ la restante, entonces

$$I_3(z=0) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_3 \; e^{-\frac{1}{2} \xi^T B \xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_3 \; e^{-\frac{1}{2} 3 \xi_3^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \tag{6}$$

Otra forma equivalente de obtener este resultado es calcular

$$2\pi \left[\lim_{z\to 0} \frac{2\pi \det (B-z)}{(0-z)} \right]^{-1/2} = 2\pi \left[\lim_{z\to 0} \frac{2\pi (-z)(3-z)}{(0-z)} \right]^{-1/2} = 2\pi \frac{1}{\sqrt{6\pi}} = \sqrt{\frac{2\pi}{3}}$$

y por tanto

$$I_3(z=0) = 2\pi \left[\lim_{z\to 0} \frac{2\pi \det (B-z)}{(0-z)} \right]^{-1/2} \tag{7}$$

que es el resultado deseado.

Obtenidos estos resultados volvamos al cálculo de (17.1) con la acción dada en (21.1) es decir

$$\left[\frac{\mathrm{Tr}\, e^{-\beta H}}{\mathrm{Tr}\, e^{-\beta H_0}} \right]^{(m)} = \frac{(-1)^m}{m!} \mathcal{N} \int dx(0) \int \mathcal{D}[v(\tau)] \; e^{-S[x(\tau)]} \tag{8}$$

$$S[x(\tau)] = S[x_0] + \frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau_1 \int_0^\beta d\tau_2 \; v(\tau_1) M(\tau_1,\tau_2) v(\tau_2)$$

Esto es simplemente una evaluación de integrales Gaussianas, tratando con cuidado la dirección $v_1(\tau)$ en la que el integrando permanece constante. El operador $M(\tau_1,\tau_2)$ es

$$M(\tau_1,\tau_2) = \delta(\tau_1-\tau_2)\left[-\frac{d^2}{d\tau_1^2}+1-\frac{6}{\cosh^2\tau_1}\right]+\frac{4}{J}\,y_0^3(\tau_1)\,y_0^3(\tau_2) \tag{1}$$

y se puede escribir como

$$M(\tau_1,\tau_2) \equiv \langle\tau_1|M|\tau_2\rangle$$
$$M = \mathcal{H}+1+\frac{32}{5}|u\rangle\langle u| \tag{2}$$

donde $\mathcal{H}$ es el operador dado en (24.4) con $\lambda=2$ y $|u\rangle$ es tal que

$$u(\tau)=\langle\tau|u\rangle = \left(\frac{15}{128}\right)^{1/2} y_0^3(\tau)$$
$$\langle u|u\rangle = 1 \tag{3}$$

Entonces

$$\det(M) = \det\left(\mathcal{H}+1+\frac{32}{5}|u\rangle\langle u|\right) = \det(\mathcal{H}+1)\det\left[1+\frac{32}{5}\frac{1}{\mathcal{H}+1}|u\rangle\langle u|\right]$$

$$= \det(\mathcal{H}+1)\left(1+\frac{32}{5}\langle u|\frac{1}{\mathcal{H}+1}|u\rangle\right) \tag{4}$$

Como

$$(\mathcal{H}+1)\,y_0(\tau) = -2\,y_0^3(\tau) \tag{5}$$

obtenemos

$$\frac{32}{5}\langle u|\frac{1}{\mathcal{H}+1}|u\rangle = \frac{32}{5}\,\frac{15}{128}\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\, y_0^3(\tau)\frac{1}{\mathcal{H}+1}y_0^3(\tau) = -\frac{3}{8}\int_{-\infty}^{+\infty}d\tau\, y_0^4(\tau) = -\frac{3}{8}\,\frac{16}{3} = -2$$

y por lo tanto

$$\det(M) = -\det(\mathcal{H}+1) \tag{6}$$

Ahora integrando (26.7) sobre todas las direcciones excepto $v_1(\tau)$ obtenemos, generalizando (26.7), que el resultado de la integración es

$$I = \mathcal{N}'\left[\lim_{z\to-1}\frac{2\pi\det(M)}{(-1-z)}\right]^{-1/2} \tag{7}$$

donde $\mathcal{N}'$ son constantes que vienen de la integración Gaussiana. Usando (6)

$$I = \mathcal{N}''\left[\lim_{z\to-1}-\frac{2\pi}{-1-z}\,\frac{\det(\mathcal{H}-z)}{\det(\mathcal{H}_0-z)}\right]^{-1/2} \tag{8}$$

Escribimos $z=-1+\Delta$ con $\Delta\downarrow 0$, entonces usando (25.4)

$$I = \mathcal{N}'' \left\{ \frac{\pi}{3} \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta\, \Gamma\left(-1-\frac{\Delta}{2}\right)} \right\}^{-1/2} \tag{1}$$

y como $z\,\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$ se tiene

$$\Delta\, \Gamma\left(-1-\frac{\Delta}{2}\right) = -\Delta \frac{1}{1+\frac{\Delta}{2}}\, \Gamma\left(-\frac{\Delta}{2}\right) = \frac{2}{1+\frac{\Delta}{2}}\, \Gamma\left(1-\frac{\Delta}{2}\right) \xrightarrow[\Delta\to 0]{} 2 \tag{2}$$

y por lo tanto

$$I = \mathcal{N}'' \sqrt{\frac{6}{\pi}} \tag{3}$$

Consideremos ahora la integración según $v_1(t)$. Notemos que cuando el parámetro τ_0 cambia, el punto

$$x_c^{\tau_0}(\tau) = \sqrt{\frac{4m}{J}}\; \frac{\sqrt{2}}{\cosh(\tau-\tau_0)} \tag{4}$$

traza una línea en el espacio de funciones. De aquí se sigue que la región del espacio de funciones que contribuye a esta parte de la integración es parecida a un lazo de una cuerda delgada. En realidad hay dos lazos de este tipo correspondientes a $\pm x_c^{\tau_0}(\tau)$, y ambos satisfacen (18.2). Como el integrando permanece constante cuando recorremos el lazo, la contribución de esta integral debe ser igual a dos veces la longitud de cada lazo. Como (24.2)

$$\delta x_c^{\tau_0}(\tau) = -\sqrt{m}\; v_1(\tau-\tau_0)\, d\tau_0 \tag{5}$$

vemos que la longitud del elemento de línea a lo largo de la cuerda es

$$|\delta x_c^{\tau_0}(\tau)| = \sqrt{m}\, \| v_1(\tau-\tau_0) \|\, d\tau_0 = \sqrt{m}\, d\tau_0 \tag{6}$$

y por tanto la contribución de la integral es

$$2\beta\sqrt{m} \tag{7}$$

Escribiéndolo todo conjuntamente

$$\left[\frac{\mathrm{Tr}\, e^{-\beta H}}{\mathrm{Tr}\, e^{-\beta H_0}}\right]^{(m)} = \frac{(-1)^m}{m!}\, \mathcal{N}' \mathcal{N}'' \sqrt{\frac{6}{\pi}}\; 2\beta\sqrt{m}\; e^{-m\left[2 - 2\ln(4m) + \ln J\right]} \tag{8}$$

Teniendo en cuenta que $J = 16/3$ y que

$$m! = \sqrt{2\pi m}\; e^{m(\ln m - 1)} \left(1 + O(1/m)\right) \tag{9}$$

se obtiene

$$\left[\frac{\mathrm{Tr}\, e^{-\beta H}}{\mathrm{Tr}\, e^{-\beta H_0}}\right]^{(m)} = \mathcal{N}'\mathcal{N}''\, \beta\, (-1)^m \sqrt{\frac{6}{\pi}}\; 3^m\, \frac{m!}{\pi\sqrt{m}} \left[1 + O\left(\frac{1}{m}\right)\right] \tag{10}$$

Tengamos en cuenta que evidentemente

$$\left[\frac{\mathrm{Tr}\, e^{-\beta H}}{\mathrm{Tr}\, e^{-\beta H_0}} \right]^{(0)} = 1 \qquad (1)$$

Sin embargo si seguimos el mismo cálculo teniendo en cuenta que no existe el modo de valor propio cero obtenemos $\mathcal{N}\mathcal{N}''$ y por tanto $\mathcal{N}\mathcal{N}''=1$. y podemos escribir

$$E_0(g) = E_0^{(0)} - \lim_{\beta\to\infty} \frac{1}{\beta} \ln \left[1 + \beta \sum_{m=1}^{\infty} A'_m (g^2)^m \right]$$

$$A'_m = (-1)^m \sqrt{\frac{6}{\pi}}\; 3^m \frac{m!}{\pi\sqrt{m}} \left(1 + O(1/m)\right) \qquad (2)$$

Tomemos ahora en cuenta que

$$\ln\left\{ 1 + \beta \sum_{m=1}^{\infty} A'_m (g^2)^m \right\} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \left(\beta \sum_{k=1}^{\infty} A'_k\, g^{2k}\right)^m =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} g^{2k} \left[\beta A'_k - \frac{1}{2}\beta^2 \sum_{i_1 i_2} A'_{i_1} A'_{i_2} + \frac{1}{3}\beta^3 \sum_{i_1 i_2 i_3} A'_{i_1} A'_{i_2} A'_{i_3} + \dots + \frac{(-1)^{k+1}}{k} A_1'^{\,k} \right]$$

donde $i_1+i_2=k$, $i_1+i_2+i_3=k$, ... Como los A_m crecen mas rapidamente que $m!$. entonces

$$\ln\left[1 + \beta \sum_{m=1}^{\infty} A'_m (g^2)^m \right] \simeq \sum_{m=1}^{\infty} (g^2)^m \beta A'_m \qquad (3)$$

donde se han despreciado términos de orden $1/m$. Entonces obtenemos finalmente

$$E_0(g) = \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m g^{2m}$$

$$A_m = (-1)^{m+1} \sqrt{\frac{6}{\pi}}\; 3^m \frac{m!}{\pi\sqrt{m}} \left[1 + O\left(\frac{1}{m}\right) \right] \qquad (4)$$

que es el resultado deseado. Ver la tabla de la página siguiente.

ii) Caso general

Vamos a ver ahora como con métodos mas simples se pueden hallar resultados más generales. (E. BREZIN , J.-C. LE GUILLOU y J. ZINN-JUSTIN Phys. Rev. D15, 1558 (1977)) El punto de partida es como antes (16.1) que vamos a intentar integrar por el método de la fase estacionaria para lo cual debemos buscar los puntos silla en las variables combinadas $x(\tau)$ y g . Supongamos que hemos identificado un punto silla dominante $x_c(\tau)$, g_c correspondiente a una acción finita en el límite $\beta\to\infty$.

m	$\lvert A_m \rvert$		$\lvert A_m \rvert$ asintótico	
1	0.75		1.319 690 441	
2	2.625		5.598 972 358	
3	2.081 25	1	4.114 387 609	1
4	2.412 890 625	2	4.275 797 028	2
5	3.580 980 467	3	5.736 583 688	3
6	6.398 281 347	4	9.426 168 866	4
7	1.329 733 727	6	1.832 656 686	6
8	3.144 821 468	7	4.114 304 056	7
9	8.335 416 031	8	1.047 330 827	9
10	2.447 894 070	10	2.980 755 790	10
11	7.843 333 160	11	9.378 729 140	11
12	2.773 877 694	13	3.232 601 825	13
13	1.055 646 658	15	1.211 255 516	15
14	4.326 810 683	16	4.902 219 085	16
15	1.900 817 197	18	2.131 197 110	18
16	8.912 101 753	19	9.904 909 096	19
17	4.442 550 889	21	4.900 678 370	21
18	2.346 464 307	23	2.571 805 784	23
19	1.309 150 261	25	1.426 830 803	25
20	7.693 999 853	26	8.344 215 842	26

Este punto satisface las ecuaciones

$$\ddot{x}_c = \frac{1}{g_c} V'(g_c x_c)$$

$$\frac{2m}{g_c} = \frac{2}{g_c^3}\int_0^\beta d\tau\, V(g_c x_c) - \frac{1}{g_c^2}\int_0^\beta d\tau\, x_c\, V'(g_c x_c) \qquad (1)$$

Introduciendo la nueva variable

$$y_c(\tau) \equiv g_c\, x_c(\tau) \qquad (2)$$

el sistema anterior equivale a

$$\ddot{y}_c(\tau) = V'[y_c(\tau)]$$

$$m\, g_c^2 = \int_0^\beta d\tau \left[\frac{1}{2}\dot{y}_c^2(\tau) + V[y_c(\tau)] \right] \qquad (3)$$

donde hemos tenido en cuenta el carácter periódico de $y_c(\tau)$. Las contribuciones dominantes de este punto de silla vienen simplemente del valor del integrando en este punto y de las fluctuaciones armónicas alrededor de esta solución clásica. Dejaremos para el final la integración sobre g^2.

Sea E la energía de la trayectoria $y_c(\tau)$ de periodo β, entonces

$$\frac{1}{2}\dot{y}_c^2(\tau) = V[y_c(\tau)] + E \qquad (4)$$

según se deduce inmediatamente de la primera de las ecuaciones (3). El valor de la acción es entonces

$$S[x_c(\tau), g_c] = \frac{1}{g_c^2}\int_0^\beta d\tau \left\{ \frac{1}{2}\dot{y}_c^2(\tau) + V[y_c(\tau)] \right\} =$$

$$= \frac{1}{g_c^2}\int_0^\beta d\tau \left\{ 2\,[E + V[y_c(\tau)]] - E \right\} =$$

$$= \frac{1}{g_c^2}\left\{ -\beta E + 2\int_{y_-}^{y_+} dy\, [2(E + V(y))]^{1/2} \right\} \qquad (5)$$

donde los puntos $y_\pm$ son los puntos de retroceso en los que la velocidad se anula. Para calcular las fluctuaciones de la trayectoria clásica usaremos el método de los desplazamientos discutido antes. Debemos calcular

$$I \equiv \int \mathcal{D}[y(\tau)]\, \exp\left\{ -\frac{1}{2g^2}\int_0^\beta d\tau\, [\dot{\eta}^2(\tau) + V''(\tau)\,\eta^2(\tau)] \right\} \qquad (6)$$

que trataremos de forma totalmente analoga a (5.3) y de acuerdo con (10.1) obtenemos

$$I = \frac{1}{g\sqrt{2\pi}} \quad \frac{1}{\dot{y}(0)} \left| \frac{dE}{d\beta} \right|^{1/2} \qquad (1)$$

Como antes integramos sobre posiciones iniciales y obtenemos

$$\left[\frac{\mathrm{Tr}\, e^{-\beta H}}{\mathrm{Tr}\, e^{-\beta H_0}} \right]^{(n)} \simeq \frac{\mathcal{N}}{i\,(2\pi)^{3/2}} \, \beta \left(- \frac{dE}{d\beta} \right)^{1/2} \int \frac{dg^2}{(g^2)^{n+3/2}} \, e^{-S[x_c, g]} \qquad (2)$$

Teniendo en cuenta que

$$S[x_c, g] \equiv \frac{1}{g^2} A[x_c] \qquad (3)$$

$$A[x_c] \equiv -\beta E + 2 \int_{y_-}^{y_+} dy \, [\, 2\,(E + V(y))\,]^{1/2}$$

obtenemos

$$\left[\frac{\mathrm{Tr}\, e^{-\beta H}}{\mathrm{Tr}\, e^{-\beta H_0}} \right]^{(n)} \simeq \frac{\mathcal{N}}{i\,(2\pi)^{3/2}} \, \beta \left(- \frac{dE}{d\beta} \right)^{1/2} \int \frac{dg^2}{(g^2)^{n+3/2}} \, e^{-\frac{1}{g^2} A[x_c]} \qquad (5)$$

La última integral se puede hacer por el método de la fase estacionaria:

$$I \equiv \int \frac{dg^2}{(g^2)^{n+3/2}} \, e^{-\frac{1}{g^2} A[x_c]} = \int \frac{dz}{z^{3/2}} \, e^{-\frac{A}{z} - n \ln z}$$

$$g(z) = z^{-3/2} \qquad i f(z) = \frac{A}{z} + n \ln z \qquad i f'(z) = -\frac{A}{z^2} + \frac{n}{z} \qquad i f''(z) = \frac{2A}{z^3} - \frac{n}{z^2}$$

$$z_c = \frac{A}{n} \qquad g(z_c) = \frac{n^{3/2}}{A^{3/2}} \qquad i f(z_c) = n - n \ln n + n \ln A \qquad i f''(z_c) = n^3 / A^2$$

$$I = (2\pi)^{1/2} \, e^{n \ln n - n} \, e^{-n \ln A} \, \frac{n^{3/2}}{A^{3/2}} \, \frac{A}{n^{3/2}} = (2\pi)^{1/2} \, \frac{1}{A^{n+1/2}} \, e^{n \ln n - n}$$

$$= \frac{\Gamma(n + 1/2)}{A^{n+1/2}} \qquad (5)$$

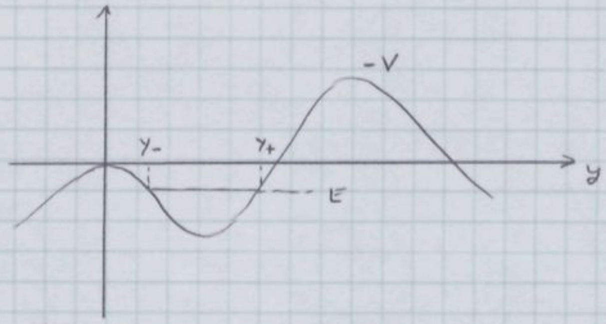
y por tanto

$$\left[\frac{\mathrm{Tr}\, e^{-\beta H}}{\mathrm{Tr}\, e^{-\beta H_0}} \right]^{(n)} \simeq \frac{\mathcal{N}}{i\,(2\pi)^{3/2}} \, \beta \left(- \frac{dE}{d\beta} \right)^{1/2} \frac{\Gamma(n + 1/2)}{[\, A(x_c)\,]^{n+1/2}} \qquad (6)$$

Para simplificar la expresión debemos hallar $E = E(\beta)$ para grandes valores de β. Recordemos que

$$\beta = 2 \int_{y_-}^{y_+} dy \; [2E + 2V(y)]^{-1/2} \tag{1}$$

e introduzcamos $\alpha \equiv -E > 0$. En el límite $\alpha \downarrow 0$ tenemos $y_+(-\alpha) \equiv y_+(0) = y_+$



y $y_-(-\alpha) = \sqrt{2\alpha}$, por lo cual

$$\beta = 2 \int_{\sqrt{2\alpha}}^{y_+} dy \; [-2\alpha + 2V(y)]^{-1/2}$$

De aquí:

$$\beta = 2 \int_0^{y_+} dy \left(\frac{1}{\sqrt{2V}} - \frac{1}{y} \right) + 2 \int_{\sqrt{2\alpha}}^{y_+} dy \frac{1}{\sqrt{-2\alpha + 2V}} - 2 \int_0^{y_+} dy \left(\frac{1}{\sqrt{2V}} - \frac{1}{y} \right) =$$

$$= 2 \int_0^{y_+} dy \left(\frac{1}{\sqrt{2V}} - \frac{1}{y} \right) + 2 \int_{\sqrt{2\alpha}}^{y_+} dy \left(\frac{1}{\sqrt{-2\alpha+2V}} - \frac{1}{\sqrt{2V}} \right) + 2 \int_{\sqrt{2\alpha}}^{y_+} dy \frac{1}{y} - 2 \int_0^{\sqrt{2\alpha}} dy \left(\frac{1}{\sqrt{2V}} - \frac{1}{y} \right)$$

La última integral da cero en el límite $\alpha \downarrow 0$ $(V \sim \frac{1}{2} y^2)$ y por tanto

$$\beta = 2 \int_0^{y_+} dy \left(\frac{1}{\sqrt{2V}} - \frac{1}{y} \right) + 2 \ln y_+ - \ln 2 - \ln \alpha + 2 \int_{\sqrt{2\alpha}}^{y_+} dy \left(\frac{1}{\sqrt{-2\alpha+2V}} - \frac{1}{\sqrt{2V}} \right)$$

La última integral recibe toda la contribución de $y \simeq \sqrt{2\alpha}$ y por consiguiente

$$\int_{\sqrt{2\alpha}}^{y_+} dy \left(\frac{1}{\sqrt{-2\alpha+2V}} - \frac{1}{\sqrt{2V}} \right) = \int_{\sqrt{2\alpha}}^{y_+} dy \left(\frac{1}{\sqrt{-2\alpha+y^2}} - \frac{1}{y} \right) = \ln \frac{y + \sqrt{-2\alpha+y^2}}{y} \Bigg|_{\sqrt{2\alpha}}^{y_+} = \ln 2$$

obteniendo

$$\beta = 2 \int_0^{y_+} dy \left(\frac{1}{\sqrt{2V}} - \frac{1}{y} \right) + 2 \ln y_+ + \ln 2 - \ln \alpha$$

y de aquí

$$E \underset{\beta \to \infty}{\sim} -2 e^{-\beta} y_+^2 \, e^{2 \int_0^{y_+} dy \left(\frac{1}{\sqrt{2V(y)}} - \frac{1}{y} \right)} \tag{2}$$

Em resumen

$$\left[\frac{\mathrm{Tr}\ e^{-\beta H}}{\mathrm{Tr}\ e^{-\beta H_0}}\right]^{(m)} \simeq \mathcal{N}\ \frac{1}{2\pi\ \pi^{1/2}}\ \beta\ e^{-\beta/2}\ y_+\ \frac{\Gamma(m+1/2)}{[A(x_c)]^{m+1/2}}\ e^{\int_0^{y_+} dy \left(\frac{1}{\sqrt{2V(y)}} - \frac{1}{y}\right)} \qquad (1)$$

Nos falta ahora determinar $\mathcal{N}$ a partir de (15.3) teniendo en cuenta que el miembro de la izquierda debe ser la unidad si $V(gx) = \frac{1}{2} g^2 x^2$, i.e.

$$1 = \mathcal{N} \int dx_0 \int \mathcal{D}[x(\tau)]\ e^{-\int_0^\beta d\tau \left[\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}x^2\right]} \qquad (2)$$

Si introducimos $t = -i\tau$ y $T = -i\beta$ entonces

$$1 = \mathcal{N} \int dx_0 \int \mathcal{D}[x(t)]\ e^{i\int_0^T dt \left[\frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}x^2\right]} \qquad (3)$$

Entonces de acuerdo con (I.9.2)

$$1 = \mathcal{N} \int dx_0 \left[\frac{1}{2\pi i \sin T}\right]^{1/2} e^{i\frac{\cos T - 1}{\sin T} x_0^2} =$$

$$= \mathcal{N}\ (2\pi i \sin T)^{-1/2} \left(-\frac{\pi \sin T}{i(\cos T - 1)}\right)^{1/2} = \mathcal{N}\left(-4\sin^2\frac{T}{2}\right)^{-1/2}$$

$$= \mathcal{N}\ e^{-\beta/2}$$

de donde

$$\mathcal{N} = e^{\beta/2} \qquad (4)$$

y por lo tanto el resultado final deseado es

$$\boxed{\begin{aligned} &E_m \underset{m\to\infty}{\sim} -\frac{1}{2\pi^{3/2}}\ \frac{\Gamma(m+1/2)}{[A(x_c)]^{m+1/2}}\ y_+\ \exp\left\{\int_0^{y_+} dy\left(\frac{1}{\sqrt{2V(y)}} - \frac{1}{y}\right)\right\} \\ &A(x_c) \doteq -\beta E + 2\int_{y_-}^{y_+} dy\ [2(E+V(y))]^{1/2} \qquad E \downarrow 0 \end{aligned}} \qquad (5)$$

Evidentemente si hay mas de un punto de silla dominante E_m es la suma de las contribuciones del tipo (5) sobre todos los puntos de silla.

Consideremos como ejemplo

$$V(y) = \frac{1}{2} y^2 - \gamma y^3 + \frac{1}{2} y^4 \qquad (1)$$

i) $|\gamma| > 1$

El origen es un mínimo relativo y la partícula parte de $y=0$ y llega a

$$y_+ = \gamma - \sqrt{\gamma^2 - 1} \qquad (2)$$

reflejándose en este punto y volviendo al origen. Se tiene

$$\int_0^{y_+} dy \left(\frac{1}{\sqrt{2V(y)}} - \frac{1}{y} \right) = \int_0^{y_+} dy \left(\frac{1}{y\sqrt{y^2 - 2\gamma y + 1}} - \frac{1}{y} \right) =$$

$$= - \ln \left\{ 1 - \gamma y + \sqrt{y^2 - 2\gamma y + 1} \right\}_0^{y_+} = - \ln \left[\frac{1}{2} \sqrt{\gamma^2 - 1} \left(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 1} \right) \right] \qquad (3)$$

La acción clásica correspondiente para $E \to 0$ es

$$A[x_c] = 2 \int_0^{y_+} dy \; y \left[y^2 - 2\gamma y + 1 \right]^{1/2} =$$

$$= 2 \left\{ \frac{1}{3} (y^2 - 2\gamma y + 1)^{3/2} \Big|_0^{y_+} + \gamma \int_0^{y_+} dy \, (y^2 - 2\gamma y + 1)^{1/2} \right\} =$$

$$= 2 \left\{ -\frac{1}{3} + \gamma \left[\frac{1}{2} (y - \gamma)(y^2 - 2\gamma y + 1) + \frac{1-\gamma^2}{2} \ln \left(y - \gamma + (y^2 - 2y + 1)^{1/2} \right) \right]_0^{y_+} \right\} =$$

$$= - \frac{2}{3} + \gamma^2 - \frac{1}{2} \gamma (\gamma^2 - 1) \ln \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}$$

y por tanto

$$\boxed{\begin{aligned} E_n &\underset{n \to \infty}{\sim} - \frac{1}{\pi^{3/2}} \frac{\Gamma(n + 1/2)}{[A(x_c)]^{n+1/2}} \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} \\ A[x_c] &= - \frac{2}{3} + \gamma^2 - \frac{1}{2} \gamma (\gamma^2 - 1) \ln \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \end{aligned}} \qquad (5)$$

Como $A > 0$, vemos que todos los términos de orden elevado son negativos. En consecuencia la transformación Borel de $E_0(g)$ tiene una singularidad sobre el eje real positivo. Por tanto, o bien $E(g)$ no queda unívocamente definido por su serie asintótica porque no es sumable Borel, o más probablemente en este caso, tiene realmente un corte sobre el eje real positivo, porque el desarrollo asintótico generado de esta forma es el desarrollo de la energía para un estado inestable.

(ii) $|\gamma| < 1$

Entonces el origen es un mínimo absoluto de V y y_+ se hace complejo. En realidad hay dos puntos de silla complejo conjugados contribuyendo ambos al orden dominante. El resultado para cada punto de silla se obtiene por prolongación analítica del anterior y por tanto

$$\boxed{E_m \sim \frac{2}{\pi^{3/2}} \Gamma(m+1/2) (1-\gamma^2)^{-1/2} \operatorname{Im}\left[A(x_c)^{-m-1/2} \right]} \tag{1}$$

donde A está definida en (34.4). Para el caso particular $\gamma = 0$ entonces $A(x_c) = -2/3$ y por tanto

$$E_m \sim \frac{2}{\pi^{3/2}} \Gamma(m+1/2) (-1)^{m+1} \frac{3^{m+1/2}}{2^{m+1/2}} \tag{2}$$

como $\Gamma(m+1/2) \simeq m!/\sqrt{m}$ obtenemos

$$E_m \sim (-1)^{m+1} m! \, 3^m \frac{\sqrt{6}}{\pi\sqrt{\pi m}} \frac{1}{2^m} \tag{3}$$

que coincide con el resultado derivado antes. Notar que el factor 2^{-m} es debido a una redefinición de la constante de acoplamiento. Este resultado indica que si $|\gamma|<1$ la serie es sumable Borel.

(iii) $\gamma = \pm 1$

La acción clásica tiene un límite que es $A(x_c) = 1/3$ y por lo tanto es positiva. Como sabemos que ahora el resultado para $E_0(g)$ debe ser real para g positivo, vemos que la serie de perturbaciones es claramente no sumable Borel. Esto sucede siempre cuando el mínimo clásico del potencial es degenerado, y al mismo tiempo existe un efecto túnel mecánico-cuántico entre los mínimos clásicos. Entonces se pueden encontrar soluciones de instantones reales, que dominan el orden elevado de la serie de perturbaciones, y que dan contribuciones directas exponencialmente pequeñas a la teoría de perturbaciones. Parece que estas contribuciones directas a la teoría de perturbaciones deberían ser exactamente los términos necesarios para cancelar la irregularidad de la transformación de Borel, pero esto no está probado

i) En parte de lo anterior hemos considerado soluciones periódicas de periodo β. Hemos tomado soluciones con periodo β exactamente, pero existen soluciones con periodos $\beta/2$, $\beta/3$, ... que también son soluciones de nuestro problema. Estas soluciones tienen una acción clásica que es 2, 3, ... veces mayor que la de periodo exactamente β y por lo tanto dan correcciones exponencialmente pequeñas al resultado obtenido.

ii) Los términos correctivos a la integración por el punto de silla darían correcciones sistemáticas de la forma de potencias de $1/n$ a las expresiones de E_n antes obtenidas.

iii) Es fácil también generalizar los resultados anteriores al N-simo estado excitado, para lo cual se deben tener en cuenta las correcciones dominantes (del tipo $e^{-\beta}$) a la acción clásica calculada antes.

iv) Referencias

C.M. BENDER y T.T. WU Phys. Rev. Letters 27, 461 (1971).

C.M. BENDER y T.T. WU Phys. Rev. D7, 1620 (1972)

T. BANKS, C.M. BENDER y T.T. WU Phys. Rev. D8, 3346 (1973)

L.N. LIPATOV, Zh. Eksp. Teor. Fiz. Red. 25, 116 (1976) and Leningrad Institute of Nuclear Physics Reports 253 y 255 (no publicados)

E. BREZIN, J.C. LE GUILLOU y J. ZINN-JUSTIN. Phys. Rev. D15, 1544 (1977)

E. BREZIN, J.C. LE GUILLOU y J. ZINN-JUSTIN Phys. Rev. D15, 1558 (1977)

E. BREZIN, G. PARISI y J. ZINN-JUSTIN. Phys. Rev. D16, 408 (1977)

J. ZINN-JUSTIN en "Topics in Quantum Field Theory and Gauge Theories" Proceedings of the VIII International Seminar on Theoretical Physics. Salamanca 1977. Ed. J.A. de Azcarraga. Springer Verlag 1978.

MUCHOS GRADOS DE LIBERTAD

La formulación mediante integrales de camino del método WBK permite una generalización a muchos grados de libertad siguiendo un método totalmente análogo. Empecemos considerando un problema bidimensional como en (1.4) definimos

$$G(T) = \mathrm{Tr}\left(e^{-iHT/\hbar}\right) = \int dx_0\, dy_0 \int \mathcal{D}[x(t)]\,\mathcal{D}[y(t)]\, e^{\frac{i}{\hbar}\int_0^T dt \left[\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2) - V(x,y)\right]} \tag{1}$$

donde las orbitas deben ser cerradas. Indicando por $\bar{\mathcal{D}}[x(t)]$ el hecho de que la integración sobre x_0 debe realizarse podemos escribir

$$G(T) = \int \bar{\mathcal{D}}[x(t)]\,\bar{\mathcal{D}}[y(t)]\, e^{\frac{i}{\hbar} S[x(t),\, y(t)]} \tag{2}$$

Usando $\vec{r} \equiv (x,y)$ y manteniendo sólo términos cuadráticos en las fluctuaciones se puede escribir

$$G(T) = \int \bar{\mathcal{D}}[\vec{r}(t)]\, e^{\frac{i}{\hbar} S[\vec{r}(t)]} =$$

$$= \sum_{o.p.} e^{\frac{i}{\hbar} S[\vec{r}_{cl}(t)]} \int \bar{\mathcal{D}}[\vec{\rho}(t)]\, e^{\frac{i}{\hbar}\int_0^T dt\, \frac{1}{2}\, \vec{\rho}\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} - V''\right)\vec{\rho}} \tag{3}$$

donde $\vec{\rho}(t) \equiv \vec{r}(t) - \vec{r}_{cl}(t)$, $V'' = (\partial^2 V/\partial r_i\, \partial r_j)_{r_{cl}(t)}$ es una matriz 2x2 en cada instante t. La suma se extiende a las orbitas periodicas clásicas. La integral de camino es de forma gaussiana y es exactamente integrable si se conocen las funciones propias y valores propios del operador

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} + V''(\vec{r}_{cl}(t)) \tag{4}$$

Empecemos considerando el caso simple en que $V(x,y)$ es separable

$$V(x,y) = V_1(x) + V_2(y) \tag{5}$$

y además que $V_2(y)$, pero no $V_1(x)$, tenga acoplamiento débil, es decir

$$V_2(y) \simeq V_2(0) + \frac{1}{2}\omega^2 y^2 \tag{6}$$

Entonces las consideraciones previas sugieren que perturbemos alrededor de orbitas que son no triviales en x, pero triviales en y. Tambien el operador (4) se diagonaliza en una pieza que solo depende de x y otra que solo depende de y. Entonces

$$G(T) = G_x(T)\, G_y(T) \tag{1}$$

donde de acuerdo con (6.1)

$$G_y(T) = \sum_p e^{-\frac{i}{\hbar}\left[V_2(0) + (p+\frac{1}{2})\hbar\omega\right]T} \tag{2}$$

y teniendo en cuenta (10.4)

$$G_x(T) \simeq \sqrt{\frac{i}{2\pi\hbar}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{T}{m} \left|\frac{dE_{cl}^{(1)}}{dT}\right|^{1/2} e^{\frac{i}{\hbar} m \left[S_{cl}^{(1)}(T/m) - \pi\hbar\right]} \tag{3}$$

donde $E_{cl}^{(1)}$ y $S_{cl}^{(1)}$ corresponden a la energía y a la acción que tendría la órbita clásica en x, si ni la coordenada y ni $V_2(y)$ existieran. En la presencia de $V_2(y)$, la misma órbita tiene energía y acción

$$E_{cl} = E_{cl}^{(1)} + V_2(0) \qquad , \qquad S_{cl} = S_{cl}^{(1)} - V_2(0)\,T \tag{4}$$

Entonces

$$G(E) \simeq \frac{1}{\hbar}\sqrt{\frac{-i}{2\pi\hbar}} \sum_{m,p} \int d\tau\, \tau \left|\frac{dE_{cl}}{d\tau}\right|^{1/2} \sqrt{m}\; e^{-im\pi}\, e^{\frac{im}{\hbar}\left[S_{cl}(\tau) + \tau\left[E - (p+\frac{1}{2})\hbar\omega\right]\right]} \tag{5}$$

Como antes la integración sobre la τ la haremos por el método de la fase estacionaria que son los que satisfacen

$$-\frac{\partial S_{cl}}{\partial \tau} = E_{cl} = E - (p+\tfrac{1}{2})\hbar\omega \equiv E_p \tag{6}$$

y por tanto como antes

$$G(E) \simeq \sum_{p,m} \frac{i}{\hbar}\tau(E_p)\,(-1)^m\, e^{\frac{im}{\hbar}W(E_p)} \qquad W(E_p) \equiv S_{cl}(\tau(E_p)) + E_p\,\tau(E_p) \tag{7}$$

y consecuentemente

$$G(E) = \sum_p \frac{-i\tau(E_p)}{\hbar} \frac{e^{iW(E_p)/\hbar}}{1 + e^{iW(E_p)/\hbar}} \tag{7}$$

Por tanto $G(E)$ tendrá ~~polos~~ polos cuando

$$W(E_p) = (2m+1)\hbar\pi \qquad m = \text{entero} \tag{9}$$

Si las raíces de la ecuación $W(E) = (2m+1)\pi\hbar$ se las denota por E_m, entonces los niveles energéticos del sistema son

$$E_{m,p} = E_m + (p+\tfrac{1}{2})\hbar\omega \tag{10}$$

Resultado razonable. Los niveles de energía vienen ahora caracterizados por dos enteros. De acuerdo con (38.6), la energía clásica de la órbita que obedece la condición de cuantificación no es $E_{m,p}$, sino $E_{m,p} - (p+1/2)\hbar\omega = E_m$. En nuestro problema aunque la órbita yazga enteramente sobre el eje x, las fluctuaciones cuánticas a lo largo del eje ortogonal y producen un término adicional $(p+1/2)\hbar\omega$ al nivel de energía cuántico.

El siguiente paso en el proceso de generalización es cuando el potencial es separable pero ni $V_1(x)$ ni $V_2(y)$ se pueden aproximar por potenciales armónicos. Entonces se debe perturbar sobre todas las órbitas periódicas en el plano x-y, no triviales en x ni en y. Debemos darnos cuenta de un punto muy importante. Mientras que en un potencial unidimensional todas las órbitas acotadas son periódicas, en mayor número de dimensiones, las órbitas periódicas son más bien una excepción que una regla. Muchas trayectorias no se cerrarán sobre sí mismas. Uno se pregunta si las órbitas periódicas darán sin embargo todos los niveles energéticos en el método WBK. Que realmente pueden es fácil de ver en un potencial separable. En este caso una órbita periódica es la superposición de una órbita periódica en x y otra periódica en y. Las dos no necesitan tener el mismo periodo, pero se debe cumplir que

$$m\tau_1 = n\tau_2 = T \tag{1}$$

donde m y n son enteros. La acción es la suma de las acciones individuales en x e y y de nuevo la integral de camino se factorizará en una pieza dependiente de x y otra dependiente de y. Entonces

$$G(T) = \mathrm{Tr}\left(e^{-\frac{i}{\hbar}HT}\right) = \mathrm{Tr}\left(e^{-\frac{i}{\hbar}H_1 T}\right)\mathrm{Tr}\left(e^{-\frac{i}{\hbar}H_2 T}\right) \tag{2}$$

Como era de esperar para un potencial separable, el resultado total se factoriza en aquel de dos problemas unidimensionales, en cada uno de los cuales todas las órbitas son periódicas. Los niveles energéticos serán

$$E_{m_1 m_2} = E_{m_1} + E_{m_2} \tag{3}$$

donde E_{m_i} son las aproximaciones WBK a los niveles de los sistemas x e y separados.

Para un potencial cualquiera $V(x,y)$ que no es separable debemos perturbar alrededor de todas las órbitas periódicas no triviales en x y en y. Las correcciones cuánticas alrededor de una órbita periódica dada se evaluarán hallando los valores propios del operador (37.6) sujeto a las condiciones de contorno periódicas de los caminos $\vec{\rho}^{\,\circ}(t)$. Sin embargo como $V''(\vec{r}_{cl}(t))$ no es separable en x e y, el calculo es mas complicado tecnicamente. El lector interesado en la demostración puede consultar R. F. DASHEN, B. HASSLACHER y A. NEVEU Phys. Rev. <u>10D</u>, 4114 (1974) Aqui vamos a dar solo el resultado final que es una inmediata generalización de (38.9)

Consideremos la ecuación

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + V''[\vec{r}_{cl}(t)] \right] \vec{\xi}(t) = 0 \tag{1}$$

donde $\vec{\xi}(t)$ es un vector bidimensional escrito en forma de columna y el operador diferencial es una matriz 2 x 2. Esta ecuación tiene dos soluciones. Una de ellas es claramente

$$\vec{\xi}_1(t) = \dot{\vec{r}}_{cl}(t) \tag{2}$$

pues $\vec{r}_{cl}(t)$ satisface

$$\ddot{\vec{r}}_{cl}(t) + V'(\vec{r}_{cl}) = 0 \tag{3}$$

y derivando con respecto al tiempo se prueba que (2) es solución. Llamemos $\vec{\xi}_2(t)$ la otra solución independiente de (1). Como $\vec{r}_{cl}(t)$ es periodica con periodo τ, tambien lo es $V''(\vec{r}_{cl})$. Puede probarse que (1), que tiene coeficientes periodicos, tiene soluciones independientes que satisfacen

$$\vec{\xi}_i(t+\tau) = e^{i\nu_i}\, \vec{\xi}_i(t) \tag{4}$$

donde los ν_i se llaman angulos de estabilidad. Claramente la primera solución $\vec{\xi}_1(t) = \dot{\vec{r}}_{cl}(t)$ es periodica con periodo τ y satisface (4) con $\nu_1 = 0$. Es claro por tanto que siempre habrá un ángulo de estabilidad cero. Consideremos como ejemplo el caso de un potencial separable (37.5) tal que (37.6) sea satisfecha. Entonces las soluciones de (1) son

$$\vec{\xi}_1(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_{cl}(t) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{\xi}_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{i\omega t} \end{pmatrix}$$

Para la primera el ángulo de estabilidad es cero y para la segunda $\nu_2 = \omega\tau$.
La razón del nombre es que si $Im\,\nu_i \neq 0$ entonces las fluctuaciones en $\vec{\xi}_i(t)$ crecerían indefinidamente cuando $t \to \pm\infty$.

El resultado general es que (38.5) se debe sustituir por

$$G(E) \simeq \frac{1}{\hbar}\sqrt{\frac{-i}{2\pi\hbar}} \sum_{m,p} \int d\tau\, \tau \left|\frac{dE_{cl}}{d\tau}\right|^{1/2} \sqrt{m}\; e^{-im\pi}\; e^{\frac{im}{\hbar}\left[S_{cl}(\tau) + E\tau - (p+\frac{1}{2})\hbar\nu_2\right]} \qquad (1)$$

Recordar que los ángulos de estabilidad son, en general, funciones de τ. También es cierto que para m recorridos de la órbita básica el ángulo es $m\nu_2$. La fase estacionaria en τ conduce a la ecuación

$$-\frac{\partial S_{cl}(\tau)}{\partial \tau} = E_{cl} = E - (p+\tfrac{1}{2})\hbar\,\beta_2(\tau) \qquad (2)$$

donde

$$\beta_2(\tau) \equiv \frac{\partial \nu_2(\tau)}{\partial \tau} \qquad (3)$$

Esto fija la energía E_{cl} y el período τ de la órbita en términos de E y p. Entonces la condición de cuantificación para los polos de $G(E)$ es

$$W(E_{cl}) \equiv S(E_{cl}) + E\tau - (p+\tfrac{1}{2})\hbar\,\nu_2(\tau) = 2m\hbar\pi \qquad (4)$$

para todos los enteros p y m. Notar que hemos puesto $2m$ en lugar de $(2m+1)$ pues en general las órbitas no tienen ahora puntos de retroceso y no hay la fase asociada con ellos. Si el potencial $V(x,y)$ fuese tal que las órbitas dieran lugar a puntos de retroceso esto se reflejaría en una modificación de (4). Si las raíces de (4) son, para un p dado, $E_{cl} = E_m^p$ entonces de (2) se deduce que los niveles energéticos son

$$E_{m,p} = E_m^p + (p+\tfrac{1}{2})\hbar\,\beta_2(\tau) \qquad (5)$$

donde $\beta_2(\tau)$ se evalúa para la órbita que satisface (4). Vemos de nuevo que los niveles energéticos WBK son la suma de la energía clásica de la órbita apropiada más las correcciones debidas a fluctuaciones "transversales" a la órbita. Las fluctuaciones a lo largo de la órbita no producen fluctuaciones cuánticas pues el ángulo de estabilidad es nulo. Esto también explica porque no hay "correcciones cuánticas" a la energía de la órbita clásica en el problema unidimensional (11.4). Hay realmente una condición de cuantificación (11.4) pero una vez elegida la órbita clásica apropiada, la energía clásica es igual a la cuántica.

La generalización a N grados de libertad es inmediata. Existirá como siempre un ángulo de estabilidad nulo, y correcciones cuánticas debidas a los restantes. Los niveles energéticos serán de la forma

$$E_{m,\{p_i\}} = E_{cl}^{m,\{p_i\}} + \sum_{i=2}^{N} \left(p_i + \frac{1}{2}\right) \hbar \beta_i \tag{1}$$

donde la órbita clásica obedece

$$E_{cl} = E - \sum_{i=2}^{N} \left(p_i + \frac{1}{2}\right) \hbar \beta_i$$

$$W(E_{cl}) = S(E_{cl}) + E\tau - \sum_{i=2}^{N} \left(p_i + \frac{1}{2}\right) \hbar \nu_i(\tau) = 2 m \pi \tag{2}$$

para todos los enteros $\{p_i\}$ y m.

En teoría de campos, el tratamiento formal es el mismo que en el problema con N coordenadas. Se tiene que

$$G(T) = \int \mathcal{D}[\phi(x,t)]\, e^{\frac{i}{\hbar} S[\phi(x,t)]}$$

$$S[\phi(x,t)] = \int_0^T dt \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \right] \tag{3}$$

y se perturba alrededor de órbitas periódicas clásicas $\phi_{cl}(x,t)$ soluciones de las ecuaciones del movimiento

$$\ddot{\phi}(x,t) + \frac{\delta V[\phi]}{\delta \phi(x,t)} = 0 \tag{4}$$

La ecuación a considerar equivalente a (40.1) es

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} + V''[\phi_{cl}] \right\} \eta(x,t) = 0 \tag{5}$$

$$V''[\phi_{cl}] = \left. \frac{\partial^2 V[\phi]}{\partial \phi(x)\, \partial \phi(x)} \right|_{\phi = \phi_{cl}(x,t)}$$

cuyas soluciones $\eta_i(x,t)$ obedecen

$$\eta_i(x, t+\tau) = e^{i\nu_i(\tau)}\, \eta_i(x) \tag{6}$$

donde τ es el periodo de la órbita clásica y ν_i los ángulos de estabilidad. Uno de estos ángulos correspondiente a $\eta(x,t) = \dot{\phi}_{cl}(x,t)$ será nulo.

Para teoría de campos, la suma sobre los ν_i puede ser divergente. En este caso se espera que la renormalización cancelará todas las divergencias.

$G(T)$ cuando cuando se desarrolle para n pasadas de la misma órbita periódica $\phi(\tau)$ con periodo $\tau = T/n$, recibirá, para cada n, una contribución

$$\sum_{\{p_i\}} \sqrt{\frac{i}{2\pi\hbar}}\ \tau \left| \frac{1}{m} \frac{\partial^2 S_{cl}}{\partial \tau^2} \right|^{1/2} \exp\left\{ \frac{im}{\hbar} \left[S_{cl} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Counter terms}}}{S_{c.t}} - \sum_i \left(p_i + \frac{1}{2}\right) \hbar \nu_i \right] \right\} \qquad (1)$$

Este resultado es una generalización directa de los anteriores, en particular del problema bidimensional. El único angulo de estabilidad no nulo que aparecía allí ha quedado sustituido por la suma infinita $\sum_i \left(p_i + \frac{1}{2}\right) \hbar \nu_i$ a causa de los infinitos modos normales de la teoría de campos. El conjunto $\{p_i\}$ representa el número de excitaciones de los modos normales. El estado de energia mas bajo corresponde a todos los $p_i = 0$. Se supone que no hay mas que un angulo de estabilidad igual a cero; cuando hay varios estos deben tratarse con sumo cuidado. El término $S_{c.t}$ viene de los contratérminos añadidos al Lagrangiano para hacer la teoría finita.

A partir de (1) se calcula $G(E)$ por el procedimiento usual y se obtiene

$$G(E) \simeq \sum_{\{p_i\}} -i \frac{\tau(E)}{\hbar} \frac{e^{iW(E)/\hbar}}{1 - e^{iW(E)/\hbar}} \qquad (2)$$

donde

$$W(E) \equiv W_{\{p_i\}}(E) \equiv S_{cl}\left[\phi(\tau(E))\right] + S_{c.t}\left[\phi(\tau(E))\right] - \sum_i \left(p_i + \frac{1}{2}\right) \hbar \nu_i(\tau(E)) + E\tau(E) \qquad (3)$$

y $\tau(E)$ viene definido por

$$E = -\frac{\partial}{\partial \tau}\left[S_{cl}\left[\phi(\tau)\right] + S_{c.t}\left[\phi(\tau)\right]\right] - \sum_i \left(p_i + \frac{1}{2}\right) \hbar \nu_i'(\tau) \qquad (4)$$

y los polos ocurren a

$$W_{\{p_i\}}(E) = 2N\pi \qquad (5)$$

las soluciones de esta ecuación $E_{N,\{p_i\}}$ son los niveles de energia en la aproximación WBK

MODELOS BIDIMENSIONALES

I) R. F. DASHEN, B. HASSLACHER y A. NEVEU Phys. Rev. D10, 4130 (1974)

J. GOLDSTONE y R. JACKIW Phys. Rev. D11, 1486 (1975)

R. RAJARAMAN Phys. Rep. C21, 227 (1975)

Se sabe que ciertas teorías de campos bidimensionales tienen soluciones clásicas que parecen partículas extensas. Queremos estudiar aquí si estos objetos aparecen como verdaderos estados de partículas en la correspondiente teoría cuántica de campos.

La forma usual de llevar a cabo teoría de perturbaciones está basada en la hipótesis de que los estados asintóticos de una teoría de campos son campos libres. Esta hipótesis selecciona un único sector de las soluciones admisibles al problema total con interacción. Aquí queremos considerar como fundamental una solución exacta de las ecuaciones clásicas no lineales de las ecuaciones en interacción.

Vamos a considerar un modelo bidimensional (1 espacio + 1 tiempo) para explorar la aplicación de estas ideas. Sea el Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\,\partial_\mu \phi(x,t)\,\partial^\mu \phi(x,t) + \frac{1}{2} m^2 \phi^2(x,t) - \frac{1}{4}\lambda\,\phi^4(x,t) \quad , \quad \lambda>0 \qquad (1)$$

donde $\phi(x,t)$ es un campo escalar real. Este es un sistema muy familiar usado frecuentemente como prototipo para ilustrar la rotura espontánea de simetría (nótese el signo del término másico). Consideraremos un acoplamiento débil, es decir supondremos que $\lambda/m^2 \to 0$

Para obtener los niveles de energía cuánticos imitaremos muy de cerca lo que se hace en mecánica cuántica no relativista. Buscaremos mínimos del potencial hallando soluciones independientes del tiempo de las ecuaciones del movimiento. Claramente, alrededor de cada mínimo, hay un pozo de potencial local en el espacio de los campos. En la aproximación de acoplamiento mínimo un conjunto separado de niveles energéticos puede ser construido alrededor de cada mínimo. Notemos que si $\bar{\phi} = \sqrt{\lambda}/m\;\phi$, $\bar{x} = mx$ entonces

$$\mathcal{L} = \frac{m^4}{\lambda}\left\{ + \frac{1}{2}\,\partial_\mu \bar{\phi}(\bar{x},\bar{t})\,\partial^\mu \bar{\phi}(\bar{x},\bar{t}) + \frac{1}{2}\bar{\phi}^2(\bar{x},t) - \frac{1}{4}\bar{\phi}^4(\bar{x},t)\right\} \qquad (2)$$

lo cual prueba que el límite $\lambda/m^4 \to 0$ es equivalente a $\hbar \to 0$.

Escribamos el Lagrangiano como

$$L = \int dx\, \mathcal{L} = \int dx\, \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)^2 - V[\phi] \tag{1}$$

$$V[\phi] \equiv \int dx \left\{ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{1}{4}\lambda \phi^4 \right\}$$

siendo $V[\phi]$ el potencial en el espacio de los campos. Las ecuaciones del movimiento son

$$\Box \phi(x,t) - m^2 \phi(x,t) + \lambda \phi^3(x,t) = 0 \tag{2}$$

En particular, las soluciones clásicas independientes del tiempo son soluciones de

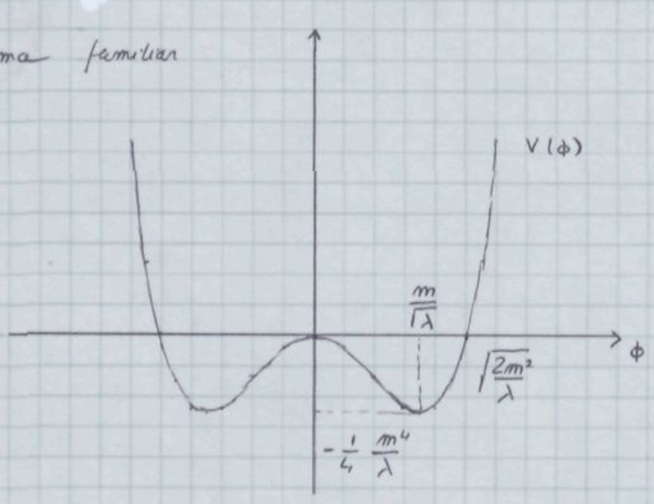
$$\frac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial t^2} = 0 = \nabla^2 \phi(x) + m^2 \phi(x) - \lambda \phi^3(x) = -\frac{\delta V[\phi]}{\delta \phi(x)} \tag{3}$$

y por tanto son extremales del potencial.

Es evidente que los mínimos absolutos de V ocurrirán (ver (1)) para soluciones de ϕ independientes de x. En este caso

$$V(\phi) \equiv -\frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{1}{4}\lambda \phi^4 \tag{4}$$

tiene la forma familiar



con un máximo local a $\phi = 0$ y dos mínimos a $\phi = \pm m/\sqrt{\lambda}$. El par de mínimos degenerados $\phi(x,t) = \pm m/\sqrt{\lambda}$ son mínimos absolutos del funcional energía potencial. Cualquiera de ellos puede usarse para construir un conjunto de niveles correspondientes al vacío y a los quanta de la teoría. Claramente, los estados construidos alrededor de estos mínimos violarán la simetría $\phi \leftrightarrow -\phi$ del Lagrangiano. Este es un ejemplo sencillo de rotura espontánea de la simetría. Consideremos por ejemplo los niveles energéticos construidos a partir de $\phi_0 \equiv m/\sqrt{\lambda}$, que llamaremos vacío clásico. El potencial $V[\phi]$ puede desarrollarse alrededor de ϕ_0. Si $\phi(x,t) = \phi_0 + \phi'(x,t)$ se obtiene, teniendo en cuenta que los términos lineales en $\phi'(x,t)$ no existen pues ϕ_0 es un mínimo:

$$V[\phi] = V[\phi_0] + \int dx \left\{ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi'}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi'^2 + \frac{3}{2}\lambda \phi_0^2 \phi'^2 + \lambda \phi_0 \phi'^3 + \frac{1}{4}\lambda \phi'^4 \right\}$$

Sustituyendo $\phi_0 = m/\sqrt{\lambda}$ y trabajando en una caja grande de longitud L, se obtiene

$$V[\phi] = -\frac{m^4}{4\lambda} L + \int dx \, \frac{1}{2} \phi'(x,t) \left[-\nabla^2 + 2m^2 \right] \phi'(x,t) +$$

$$+ m\sqrt{\lambda} \int dx \, \phi'^3(x,t) + \frac{\lambda}{4} \int dx \, \phi'^4(x,t) \qquad (1)$$

Consideremos de momento que los dos últimos términos son despreciables; entonces $V[\phi]$ contiene solo un término constante y términos cuadráticos en ϕ'. El operador $(-\nabla^2 + 2m^2)$ es trivialmente diagonalizable y sus funciones propias son de la forma $\exp(ikx)$ con valores propios $\omega_k^2 = k^2 + 2m^2$. En términos de estos modos normales, el sistema se convierte en un conjunto de osciladores armónicos no acoplados. La energía del estado fundamental (vacío) viene dada por

$$E_{vac} \simeq V[\phi_0] + \frac{1}{2} \sum \omega_k =$$

$$= -\frac{m^4}{4\lambda} L + \frac{1}{2} \sum_{k_n} \left(k_n^2 + 2m^2 \right)^{1/2} \qquad k_n = n\frac{2\pi}{L}$$

$$\simeq -\frac{m^4}{4\lambda} L + \frac{1}{2}\frac{L}{2\pi} \int dk \left(k^2 + 2m^2 \right)^{1/2} \qquad (2)$$

y las excitaciones más bajas son

$$E\{N_k\} \simeq -\frac{m^4}{4\lambda} L + \sum_{k_n} \left(N_{k_n} + \frac{1}{2} \right) \sqrt{k_n^2 + 2m^2} \qquad (3)$$

Estos son los resultados familiares para campos libres para el vacío y para los estados que contienen un número finito de cuantos del campo de masa $\sqrt{2}\, m$.

La energía del estado fundamental tiene un término $-m^4 L/4\lambda$ que es la energía clásica del mínimo ϕ_0., más una corrección cuántica, que tiene una divergencia ultravioleta cuadrática. Esta divergencia no es ningún problema y se elimina cambiando el origen de energías.

Antes de considerar el efecto de los términos despreciados vamos a estudiar la posible existencia de soluciones independientes del tiempo de las ecuaciones del movimiento

$$\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} + m^2 \phi(x) - \lambda \phi^3(x) = 0 \qquad (4)$$

Multiplicando por $d\phi/dx$ e integrando obtenemos

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\phi(x)}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2(x) - \frac{1}{4}\lambda\phi^4(x) = \text{cte.} \tag{1}$$

Determinemos la constante de forma que $\phi(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} m/\sqrt{\lambda}$ y entonces

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\phi(x)}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2(x) - \frac{1}{4}\lambda\phi^4(x) = \frac{1}{4}\frac{m^4}{\lambda} \tag{2}$$

$$\Rightarrow \qquad \left(\frac{d\phi(x)}{dx}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\,\phi^2(x) - \frac{m^2}{\sqrt{2\lambda}}\right)^2 \tag{3}$$

Esta ecuación tiene evidentemente las soluciones $\pm\phi_0$ dadas antes, pero además

$$\int_a^x dx = -\int_0^{\phi(x)} dy\, \frac{1}{\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\,y^2 - \frac{m^2}{\sqrt{2\lambda}}}$$

$$(x-a) = +\frac{1}{m\sqrt{2}} \ln \frac{\phi(x) + \frac{m}{\sqrt{\lambda}}}{\phi(x) - \frac{m}{\sqrt{\lambda}}}$$

y por tanto

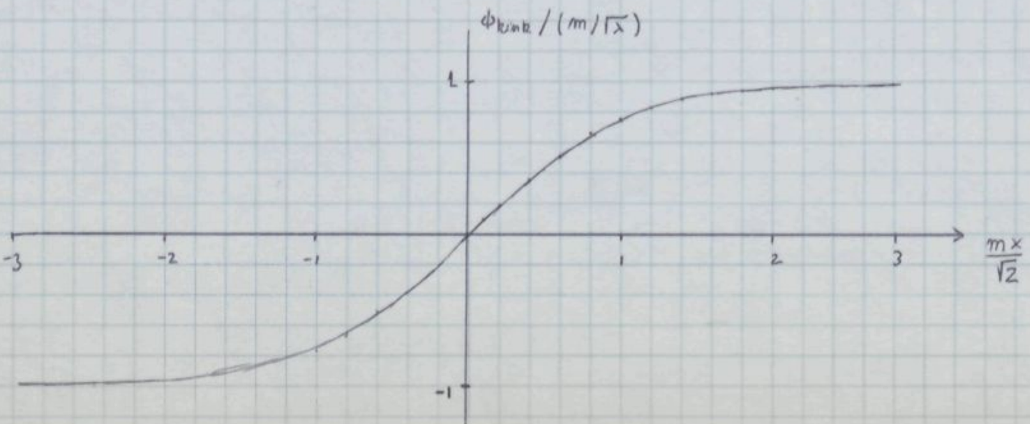
$$\phi(x) = \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \tanh \frac{m(x-a)}{\sqrt{2}} \equiv \phi^{(a)}_{kink}(x) \tag{5}$$

es una solución para cualquier valor de a. Consideremos una solución de este tipo, por ejemplo $a \equiv 0$ y llamémosla $\phi_{kink}(x)$

$$\phi_{kink}(x) = \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \tanh \frac{mx}{\sqrt{2}}$$

$$\phi_{kink}(+x) = -\phi_{kink}(-x) \quad , \quad \phi_{kink}(0) = 0 \tag{5}$$

$$\phi_{kink}(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \pm\frac{m}{\sqrt{\lambda}}\left\{1 - 2e^{\mp\sqrt{2}\,mx}\right\}$$



Vemos pues que, clasicamente, la densidad de energía del kink es distinta de la del vacío sólo localmente cerca de $x=0$. La diferencia entre ambos es una cantidad finita incluso en el límite $L\to\infty$

$$E^{cl}_{kink} - E^{cl}_{vac} = V[\phi_{kink}] - V[\phi_{vac}] =$$

$$= \int_{-L/2}^{L/2} dx \left\{ \frac{1}{2}(\nabla\phi_{kink})^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2_{kink} + \frac{1}{4}\lambda \phi^4_{kink} \right\} - \int_{-L/2}^{L/2} dx \left\{ -\frac{m^2}{4\lambda} \right\} =$$

$$= \frac{m^4}{\lambda} \int_{-L/2}^{L/2} dx \left\{ \frac{1}{4} \frac{1}{\cosh^4 \frac{mx}{\sqrt{2}}} - \frac{1}{2}\tanh^2 \frac{mx}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4}\tanh^4\frac{mx}{\sqrt{2}} \right\} + \frac{m^2}{4\lambda} L$$

$$= \frac{m^4}{\lambda} \int_{-L/2}^{L/2} dx \frac{1}{4\cosh^4 \frac{mx}{\sqrt{2}}} \left\{ 2 - \cosh^4 \frac{mx}{\sqrt{2}} \right\} + \frac{m^2}{4\lambda} L = \frac{m^4}{2\lambda} \int_{-L/2}^{L/2} dx \frac{1}{\cosh^4 \frac{mx}{\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{16\, m^3}{\sqrt{2}\,\lambda} \int_{-mL/2\sqrt{2}}^{mL/2\sqrt{2}} dt\, (e^t + e^{-t})^{-4}$$

Teniendo en cuenta que si $\nu>0$ $|k/\nu|<\lambda$ se tiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{e^{kx}}{(e^{\lambda x}+e^{-\lambda x})^\nu} = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\frac{k}{2\lambda}\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}-\frac{k}{2\lambda}\right)}{2\lambda\,\Gamma(\nu)} \qquad (1)$$

entonces en el límite $L\to\infty$

$$E^{cl}_{kink} - E^{cl}_{vac} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{m^3}{\lambda} \qquad (2)$$

Es claro que ϕ_{kink} es un extremo de $V[\phi]$. Veamos si es un mínimo local o equivalentemente, si ϕ_{kink} es solución estable clasicamente. Para ello desarrollemos $V[\phi]$ en $\phi(x) = \phi_{kink}(x) + \eta(x)$, así obtenemos

$$V[\phi] = V[\phi_{kink}] + \frac{1}{2}\int dx\, \eta(x) \left\{ -\nabla^2 - m^2 + 3m^2\tanh^2\frac{mx}{\sqrt{2}} \right\} \eta(x)$$

$$+ m\sqrt{\lambda} \int dx\, \eta^3(x) \tanh\frac{mx}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4}\lambda \int dx\, \eta^4(x) \qquad (3)$$

Veamos cuales son las funciones propias del operador cuadrático

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} - m^2 + 3m^2\tanh^2\frac{mx}{\sqrt{2}} \right] \eta_i(x) = \tilde{\omega}_i^2\, \eta_i(x) \qquad (4)$$

Hagamos el cambio de variables

$$z = \frac{mx}{\sqrt{2}} \quad , \quad \epsilon_i = \frac{\tilde{\omega}_i^2}{m^2} - 2 \quad , \quad \tilde{\eta}_i(z) = \eta_i(x) \tag{1}$$

Entonces

$$\left[-\frac{d^2}{dz^2} - \frac{6}{\cosh^2 z} \right] \tilde{\eta}_i(z) = 2\epsilon_i \tilde{\eta}_i(z) \tag{2}$$

que es la ecuación estudiada en la pag II. 21. Entonces existen sólo dos estados ligados ($\epsilon < 0$) y ~~el~~ estado de colisión ($\epsilon > 0$)

$$\epsilon_0 = -2 \quad , \quad \tilde{\omega}_0^2 = 0 \quad , \quad \tilde{\eta}_0(z) = \frac{1}{\cosh^2 z}$$

$$\epsilon_1 = -\frac{1}{2} \quad , \quad \tilde{\omega}_1^2 = \frac{3}{2} m^2 \quad , \quad \tilde{\eta}_1(z) = \frac{\sinh z}{\cosh^2 z} \tag{3}$$

$$\epsilon = \frac{1}{2} k^2 \qquad \tilde{\omega}_k^2 = m^2 \left(\frac{1}{2} k^2 + 2 \right) \quad , \quad \tilde{\eta}_k(z) = e^{ikz} \left(3\tanh^2 z - 1 - k^2 - 3ik \tanh z \right)$$

Para obtener la densidad de estas soluciones de colisiones, notemos que cuando $z \to \pm\infty$ se transforman en

$$\tilde{\eta}_k(z) \to e^{ikz} \left[2 - k^2 \mp 3ik \right]$$

que puede escribirse como

$$\tilde{\eta}_k(z) \to e^{i\left(kz \pm \frac{1}{2}\delta\right)} \tag{4}$$

donde el corrimiento de fase es

$$\frac{1}{2}\delta(k) = -\operatorname{arctg} \frac{3k}{2-k^2} \tag{5}$$

Además la longitud de la caja en términos de la variable z es $mL/\sqrt{2}$ y las condiciones frontera implican

$$k \frac{mL}{\sqrt{2}} + \delta(k) = 2m\pi \qquad m = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

Cuando $L \to \infty$ se tiene

$$\frac{dm}{dk} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{mL}{\sqrt{2}} + \frac{d\delta(k)}{dk} \right\} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{mL}{\sqrt{2}} - 6 \frac{(k^2+2)}{(k^2+1)(k^2+4)} \right\} \tag{7}$$

Nótese que los estados ligados o de colisión de la ecuación (2) no deben confundirse con los estados ligados o de colisión de la teoría de campos original.

Vemos que todos los $\tilde{\omega}_i^2$ son positivos excepto $\tilde{\omega}_0^2$ que es nulo. Entonces el "kink" es estable clásicamente para todos los modos excepto uno, donde tiene neutralidad estable. El modo de frecuencia cero es una consecuencia de la invariancia traslacional del Lagrangiano. Si $\phi(x,t)$ es una solución de las ecuaciones del movimiento también lo es $\phi(x+a,t)$ para cualquier constante a. En nuestro caso estas son $\phi^{(a)}_{kink}(x)$ que tiene la misma $V[\phi]$ para todo valor de a. Notemos que

$$\delta\phi = \phi^{(\delta a)}_{kink}(x) - \phi^{(0)}_{kink}(x) = \delta a \frac{\partial \phi^{(0)}_{kink}}{\partial x} = \delta a \frac{m^2}{\sqrt{2\lambda}} \frac{1}{\cosh^2 \frac{mx}{\sqrt{2}}} \tag{1}$$

que es exactamente la función propia de frecuencia cero.

Es evidente que el modo de frecuencia cero no es una peculiaridad de este modelo, y aparecerá en toda solución con dependencia espacial de una teoría de campos invariante bajo traslaciones. Sin embargo en el caso de soluciones que no dependan del tiempo, como el vacío $\phi_0 = m/\sqrt{\lambda}$, la operación de traslación da de nuevo la misma solución, en cuyo caso no aparecen nuevas funciones con la misma energía y el modo de frecuencia cero no está presente necesariamente. Vemos de (3.2) que en nuestro modelo las fluctuaciones alrededor del vacío de frecuencia mas baja corresponden a la masa del boson $\sqrt{2}\, m$ y no cero.

Volviendo a nuestro problema, hemos determinado los valores propios $\tilde{\omega}_i^2$ de la segunda derivada de $V[\phi]$ alrededor de ϕ_{kink}. Todos excepto $\tilde{\omega}_0^2$ son definidos positivos. Esto significa que en el espacio de los campos ϕ_{kink} es un mínimo de $V[\phi]$ en todas las direcciones menos una, la correspondiente a la traslación del kink como un todo. Excepto por el modo traslacional, podemos aplicar los métodos de acoplamiento débil para hallar un conjunto de niveles energéticos perturbando alrededor de $\phi^{(0)}_{kink}(x)$. El resultado, para el nivel más bajo (el estado fundamental del kink o hadrón extendido) sería, ignorando órdenes mas altos en λ

$$E_{kink} \simeq V[\phi_{kink}] + \frac{1}{2}\sum_i \tilde{\omega}_i \tag{2}$$

Incluir o no incluir el término de frecuencia cero en esta ecuación no altera el resultado. Sin embargo los principios detrás de la ecuación (2) no son estrictamente válidos cuando el modo $\omega = 0$ está presente. A lo largo del modo traslacional, el potencial es constante, y el sistema no es como un oscilador sino como una partícula libre. Cuando el potencial es constante en una coordeonda es erróneo perturbar alrededor de un valor cualquiera de esta coordenada. Las funciones de onda tienden a esparcirse sobre todos los valores de esta coordenada. Por ejemplo en un problema monodimensional en el que $V(x) = V_0 = \text{cte}$ entonces los niveles energéticos son de la forma $V_0 + \frac{1}{2} p^2$ y la función $\exp(ipx)$. Para el kink, las funciones de onda de los estados propios de la energía se esparcirán a lo largo del modo traslacional, i.e. sobre el conjunto de las funciones $\phi^{(a)}_{kink}(x)$. Una solución particular $\phi^{(0)}_{kink}(x)$ no tiene significado especial. Si intentamos perturbar alrededor de $\phi^{(0)}_{kink}$, se originarán singularidades infrarrojas. Otra forma de decir esto es la siguiente: Cualquier solución, digamos $\phi^{(0)}_{kink}$, está en reposo y bien localizada, lo cual viola el principio de indeterminación. La misma simetría traslacional que ha originado el modo de frecuencia cero da origen también a la conservación del momento total. De la misma forma que las ondas planas de una partícula libre se extienden por todo el espacio, el kink de momento definido se extiende sobre todo el modo traslacional.

Mas adelante veremos como tratar el modo traslacional. El resultado es simple los niveles energéticos correspondientes al kink son de la forma $E = (M^2 + P^2)^{1/2}$, donde P es el momento total y M es la "masa" del kink que resulta ser la cantidad que se obtiene de la ecuación naïve (7.2). Esto es físicamente razonable. La masa en reposo del estado kink debe provenir de su energía clásica mas las fluctuaciones de punto cero de los modos normales. Anticipando este resultado calcularemos M.

De (7.2)

$$E_{kink} = V[\phi_{kink}] + \frac{m}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\sum_{q_m} m\left(\frac{1}{2}q_m^2 + 2\right)^{1/2} \qquad (1)$$

mientras la del vacío es

$$E_{vac} = V[\phi_0] + \frac{1}{2}\sum_{k_m}\left(k_m^2 + 2m^2\right)^{1/2} \qquad (2)$$

donde

$$L k_m = \frac{mL}{\sqrt{2}} q_m + \delta(q_m) = 2m\pi \qquad (3)$$

para todos los enteros n. Evidentemente la cantidad de interés es

$$E_{kink} - E_{vac} = V[\phi_{kink}] - V[\phi_0] + \frac{m}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{q_m}\left[m\left(\frac{1}{2}q_m^2 + 2\right)^{1/2} - \left(\left(\frac{m q_m}{\sqrt{2}} + \frac{\delta(q_m)}{L}\right)^2 + 2m^2\right)^{1/2}\right] \qquad (4)$$

Consideremos en primer lugar la suma que aparece en la ecuación anterior en el límite $L \to \infty$

$$\frac{1}{2} \sum_{q_n} \left\{ \left(\frac{m^2}{2} q_n^2 + 2m^2 \right)^{1/2} - \left(\frac{m^2 q_n^2}{2} + 2m^2 + \frac{2m\, \delta(q_n)\, q_n}{\sqrt{2}\, L} \right)^{1/2} \right\} \simeq$$

$$\simeq \frac{1}{2} \sum_{q_n} \left\{ - \frac{m\, q_n}{\sqrt{2}\, L} \delta(q_n) \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} m^2 q_n^2 + 2m^2}} \right\}$$

Introduzcamos

$$\tilde{\omega}(q_n) \equiv \left[\frac{1}{2} m^2 q_n^2 + 2m^2 \right]^{1/2} \qquad (1)$$

Además de (6.7)

$$\frac{1}{L} \sum_{q_n} \to \frac{m}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{2\pi} + O(1/L) \qquad (2)$$

y por tanto

$$E_{kink} - E_{vac} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{m^3}{\lambda} + \frac{m}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dq\, \delta(q) \frac{d\tilde{\omega}(q)}{dq} =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}\, m^3}{3\lambda} + \frac{m}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4\pi} \tilde{\omega}(q)\, \delta(q) \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dq\, \tilde{\omega}(q) \frac{d\delta(q)}{dq}$$

Por otra parte

$$\frac{d}{dq} \delta(q) = -6 \frac{q^2+2}{(q^2+1)(q^2+4)}$$

$$\Rightarrow \frac{d\delta(q)}{dq} \underset{q \to \pm\infty}{\sim} -\frac{6}{q^2} \Rightarrow \delta(q) \underset{q \to \pm\infty}{\sim} cte + \frac{6}{q}$$

$$\tilde{\omega}(q)\, \delta(q) \underset{q \to \pm\infty}{\simeq} \left(cte + \frac{6}{q} \right) \frac{m}{\sqrt{2}} |q|$$

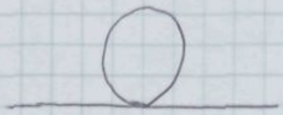
y por tanto

$$\tilde{\omega}(q)\, \delta(q) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{12\, m}{\sqrt{2}}$$

Se obtiene pues

$$E_{kink} - E_{vac} = \frac{2\sqrt{2}\, m^3}{3\lambda} + \frac{m}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{3m}{\pi\sqrt{2}} + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dq\, \frac{m}{\sqrt{2}} (q^2+4)^{1/2} \left(\frac{-6(q^2+2)}{(q^2+1)(q^2+4)} \right) \qquad (3)$$

Notar que esta cantidad es logarítmicamente divergente. El problema no tiene nada que ver con la solución kink sino con el mismo lagrangiano en el que no hemos tenido presente la ordenación normal. Tanto $\phi^2(x)$ como $\phi^4(x)$ tienen valores esperados en el vacío divergentes. La divergencia en $\phi^2(x)$ conduce a una cuadrática que es la hallada en (3.2) y que en sí misma no es ningún problema pues puede sustraerse. La divergencia en $\phi^4(x)$ es peor. En particular, si hubiéramos calculado correcciones de orden superior a (3.2) y (3.3), hubiéramos encontrado que la masa del bosón (es decir la diferencia entre la energía del primer estado excitado de (3.3) y el vacío dado en (3.2)) saldría logarítmicamente divergente. En un lenguaje más familiar el propagador $\langle 0 | T(\phi(x)\, \phi(y)) | 0 \rangle$, que conduce a la masa del bosón, tiene una divergencia logarítmica a causa de diagramas como



La solución es por supuesto sustituir en el Lagrangiano todos los productos por sus ordenados normales. Equivalentemente se puede retener los productos de la forma convencional y añadir contratérminos. Ambas cosas son equivalentes pues

$$m^2 : \phi^2(x) : \;\sim\; m^2 \left[\phi^2(x) - c_1 \right]$$
$$\lambda : \phi^4(x) : \;\sim\; \lambda \left[\phi^4(x) - c_2\, \phi^2(x) - c_3 \right] \qquad (1)$$

donde todas las c_i son divergentes. Mientras que c_1 y c_3 afectan sólo la escala total de energías, c_2 es esencial para hacer finita las diferencias de energía entre dos niveles cualesquiera. En más de dos dimensiones entonces además de usar productos ordenados normales hay que usar contratérminos como es bien sabido en teorías renormalizables. Entonces debemos reemplazar el Lagrangiano dado en (1.1) por

$$\mathcal{L}'(x) = \mathcal{L}(x) + \frac{1}{2}\, \delta m^2\, \phi^2(x) \qquad (2)$$

y consecuentemente $V[\phi]$ por

$$V'[\phi] = V[\phi] - \frac{1}{2}\, \delta m^2 \int dx\; \phi^2(x) \qquad (3)$$

donde

$$\delta m^2 = \frac{3\lambda}{4\pi} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} dk\, \left(k^2 + 2\quad\right)^{-1/2} \quad , \; \Lambda \to \infty \qquad (5)$$

está tomado de forma que cancele la divergencia producida por ϕ^4. Veremos como el contratérmino no solo hace las funciones de n-puntos y la masa del boson finita sino que cancela la divergencia logarítmica hallada antes. ¿Como afecta el término añadido los resultados hallados hasta aquí? El nuevo funcional potencial es

$$V'[\phi] = \int dx \left\{ \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - \frac{1}{2} (m^2 + \delta m^2) \phi^2 + \frac{1}{4} \lambda \phi^4 \right\} \tag{1}$$

El vacío es aún $\phi_0 = m/\sqrt{\lambda}$. Esto puede parecer raro pues ϕ_0 es un mínimo del potencial antiguo con masa m^2 y no del potencial correcto (1) con masa $m^2 + \delta m^2$. Pero en orden mas bajo en λ/m^2 el cambio en la acción debido a su dependencia implícita en m^2 a traves de ϕ_0 puede ignorarse pues ϕ_0 es precisamente un extremo de la acción. Como antes introducimos $\phi'(x) = \phi(x) - m/\sqrt{\lambda}$ y obtenemos

$$V'[\phi] = V[\phi_0] - \frac{1}{2} \delta m^2 \frac{m^2}{\lambda} L + \frac{1}{2} \int dx\, \phi'(x) \left[-\nabla^2 + 2m^2 \right] \phi'(x) +$$

$$+ \int dx \left[- \delta m^2 \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \phi'(x) - \frac{1}{2} \delta m^2 \phi'^2(x) + m\sqrt{\lambda}\, \phi'^3(x) + \frac{1}{4} \lambda \phi'^4(x) \right] \tag{2}$$

Como $\delta m^2 \sim O(\lambda)$ los términos de la última integral son de orden $O(\sqrt{\lambda})$ o mas elevado y pueden ser tratados perturbativamente. Para obtener la nueva energía del vacío en lugar de (3.2) podemos despreciar legítimamente los términos de orden $O(\sqrt{\lambda})$ en (2) y se tiene

$$E_{vac} = \left(- \frac{m^4}{4\lambda} - \frac{\delta m^2}{2} \frac{m^2}{\lambda} \right) L + \frac{1}{2} \sum_{k_n} \left(k_n^2 + 2m^2 \right)^{1/2} \tag{3}$$

Haciendo las mismas maniobras alrededor del kink

$$V'[\phi] = V[\phi_{kink}] - \frac{1}{2} \delta m^2 \int dx\, \phi^2_{kink}(x) + \frac{1}{2} \int dx\, \eta(x) \left[-\nabla^2 - m^2 + 3\lambda \phi^2_{kink}(x) \right] \eta(x)$$

$$+ \int dx \left[-\frac{1}{2} \delta m^2 \eta^2(x) - \delta m^2 \phi_{kink}(x)\, \eta(x) + \lambda \phi_{kink}(x)\, \eta^3(x) + \frac{1}{4} \lambda \eta^4(x) \right] \tag{4}$$

y despreciando los términos de orden $O(\sqrt{\lambda})$ de la última integral

$$E_{kink} = V[\phi_{kink}] - \frac{1}{2} \delta m^2 \int dx\, \frac{m^2}{\lambda} \tanh^2 \frac{mx}{\sqrt{2}} + \frac{m}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} \sum_{q_n} m \sqrt{\frac{1}{2} q_n^2 + 2} \tag{5}$$

Se tiene entonces que

$$M \equiv E_{kink} - E_{vac} = \frac{2\sqrt{2}\, m^3}{3\lambda} + \frac{m}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{3m}{\pi\sqrt{2}} - \frac{3m}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dq \sqrt{\frac{q^2+4}{2}}\, \frac{(q^2+2)}{(q^2+1)(q^2+4)}$$

$$+ \frac{1}{2}\, \delta m^2\, \frac{m^2}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(1 - \tanh^2 \frac{mx}{\sqrt{2}}\right) \qquad (1)$$

Ahora bien

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(1 - \tanh^2 \frac{mx}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{m}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,(1-\tanh^2 x) = \frac{4\sqrt{2}}{m}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,(e^x + e^{-x})^{-2} =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{m}$$

Ademas

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dq\, \frac{1}{\sqrt{2}}\, \frac{q^2+2}{(q^2+1)\sqrt{q^2+4}} = \left| \begin{array}{c} q^2 \equiv 2k^2 \\ dq = \sqrt{2}\, dk \end{array} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, \frac{2k^2+2}{\sqrt{k^2+2}\,(2k^2+1)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \left(\frac{1}{(k^2+2)^{1/2}} + \frac{1}{(2k^2+1)(k^2+2)^{1/2}} \right)$$

Se tiene entonces

$$M = \frac{2\sqrt{2}\, m^3}{3\lambda} + \frac{m}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{3m}{\pi\sqrt{2}} - \frac{3m}{2\pi\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \left[\frac{1}{(k^2+2)^{1/2}} + \frac{1}{(2k^2+1)(k^2+2)^{1/2}} \right]$$

$$+ \frac{m\sqrt{2}}{\lambda}\, \delta m^2$$

El último término cancela exactamente el término logarítmicamente divergente de la integral anterior. Ademas

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, \frac{1}{(2k^2+1)(k^2+2)^{1/2}} = \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, \frac{1}{(k^2+1/2)(k^2+2)^{1/2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\, \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

Obtenemos pues

$$M = \frac{2\sqrt{2}\, m^3}{3\lambda} + \frac{m}{2\sqrt{6}} - \frac{3m}{\pi\sqrt{2}} \qquad (2)$$

Tenemos pues ya el valor de la masa cuántica para el kink. Tiene una primera pieza $2\sqrt{2}\, m^3/3\lambda$ que proviene de $V[\phi_{kink}] - V[\phi_0]$ que es clásica. Además hay una pieza de orden $O(1)$ que proviene de las fluctuaciones de punto cero. Ademas hay correcciones finitas de orden mas elevado en λ que no hemos calculado. Que la "parte clásica" de la masa es de $O(1/\lambda)$ y domina sobre los efectos cuánticos de orden $O(1)$ parece ser una característica general de estas partículas con extensión que se obtienen en el límite de acoplamiento débil a partir de soluciones no triviales independientes del tiempo. De (1.2) es evidente que las soluciones no triviales estáticas tienen energía de orden $1/\lambda$.

Como hemos dicho antes y demostraremos más adelante, un tratamiento correcto del modo traslacional da para los niveles energéticos $E_n = \sqrt{M^2 + P_n^2}$, donde P_n es el momento del kink. Además M dada en (12.2) y E_{kink} dada en (11.5) corresponden al nivel de energía más bajo obtenido perturbando alrededor del kink. Niveles más altos pueden hallarse excitando modos normales dados en (6.3) de forma análoga a como los cuantos usuales de la teoría son excitados a partir del vacío. Como ya hemos dicho antes estos modos se pueden considerar como osciladores armónicos independientes. La cantidad M corresponde al estado fundamental de todos los osciladores. Si uno de los modos, digamos el discreto $\tilde{\omega}_1^2 = 3m^2/2$ es excitado al nivel n, la masa correspondiente es

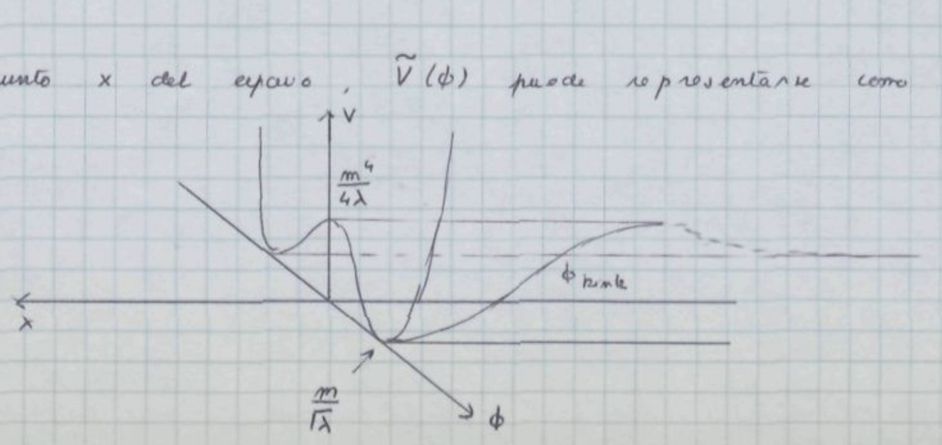
$$M(n) = M + n\sqrt{\frac{3}{2}}\, m \tag{1}$$

Esta masa corresponde a un estado excitado del kink. Otros estados excitados obtenidos por excitación de $\tilde{\eta}_k(z)$ pueden imaginarse como un conjunto de los bosones usuales en la presencia de un kink.

Como $\phi_{kink}(x)$ no es un mínimo absoluto de la energía potencial, es necesario preguntarse si los estados construidos a partir de él son estables. Hay razones para creer que el estado es estable aunque $\phi_{kink}(x)$ no sea un mínimo absoluto de $V[\phi]$. La barrera de potencial en el espacio de las funciones que separa ϕ_{kink} de ϕ_0 es de alguna forma infinita, cuando la longitud del espacio L tiende a infinito. Para ver esto, consideremos la parte sin gradientes de la densidad de energía potencial

$$\tilde{V}(\phi) \equiv \frac{1}{4}\lambda\phi^4(x) - \frac{1}{2}m^2\phi^2(x) \tag{2}$$

En cada punto x del espacio, $\tilde{V}(\phi)$ puede representarse como una función de ϕ



con dos mínimos degenerados en $\phi = \pm \frac{m}{\sqrt{\lambda}}$, separados por una barrera de altura $m^4/4\lambda$. Si dejamos que x varíe de $-L/2$ a $L/2$, con L muy grande, entonces $\tilde{V}(\phi_0)$ traza un par de valles degenerados con un promontorio entre ellos. La solución $\phi_{kink}(x)$ (y sus inmediatas excitaciones) tienden a $-m/\sqrt{\lambda}$ para $x \to -\infty$ y a $+m/\sqrt{\lambda}$ para $x \to \infty$. Salvo en una región finita cerca de $x \simeq 0$, ϕ_{kink} yace aproximadamente en un valle la mitad del espacio y en el otro valle la otra mitad. En contraste cualquiera de los vacíos clásicos está totalmente en uno de los valles. Para convertir un ϕ_{kink} en alguna excitación finita alrededor de ϕ_0, uno debe elevar esencialmente la mitad del espacio desde $-m/\sqrt{\lambda}$ a $+m/\sqrt{\lambda}$, a través de la barrera. Esto exige cruzar una barrera de altura $m^4/4\lambda$ en cada punto, lo cual es una barrera total de tamaño $(L/2).(m^4/4\lambda)$ que claramente diverge cuando $L \to \infty$. En este sentido hay una barrera de potencial infinita en el espacio de funciones que separa ϕ_{kink} de ϕ_0. Parece razonable que la contribución definida positiva del gradiente que hemos ignorado no cambiará la conclusión.

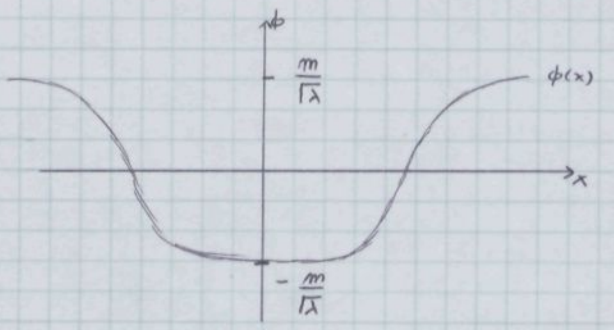
Este argumento es a lo más heurístico. Podemos consolarnos viendo que este argumento es el usado convenientemente para razonar que el modelo tiene dos vacíos degenerados con espacios de Hilbert separados: Para ir de $\phi_0 = m/\sqrt{\lambda}$ a $\phi_0 = -m/\sqrt{\lambda}$ (o excitaciones finitas a su alrededor) se debe elevar a lo largo de todo L la solución a través de la barrera y la altura de la barrera es $L m^4/4\lambda$ que tiende hacia ∞ cuando $L \to \infty$, y por tanto no habrá efecto túnel del uno al otro.

Sospechamos pues que los estados construidos en la aproximación de acoplamiento débil a partir de ϕ_{kink} no se mezclan ~~con~~ aquellos construidos a partir de los dos vacíos $\pm\phi_0$. Por tanto el primer conjunto se puede considerar que tiene un número cuántico conservado que llamaremos número bariónico B. El estado más bajo construido sobre el kink, puede llamarse barión y su masa es

$$M = \frac{2\sqrt{2}\, m^3}{3\lambda} + m\left(\frac{1}{2\sqrt{6}} - \frac{3}{\pi\sqrt{2}}\right) \qquad (1)$$

y por tanto, en la aproximación de acoplamiento débil, es muy pesado. Estados excitados sobre el kink obtenidos por excitación de los modos normales $\tilde{\eta}(z)$ también tienen el mismo número bariónico y pueden considerarse como estados formados por un barión y varios mesones. Evidentemente los mesones son mucho más ligeros que el barión.

Hay dos sectores sin bariones que son los construidos a partir de los dos vacíos $\pm\phi_0$ y que no se mezclan, esperamos, entre sí ni con el sector bariónico. Es tentador pensar que el número bariónico es aditivo con kinks con $B=+1$, vacío con $B=0$ y antikinks con $B=-1$. Los antikinks son $\phi_{antikink}(x) = -\phi_{kink}(x)$. Notar que los estados $B=-1$ y los $B=1$ se pueden aniquilar para dar $B=0$, según se puede razonar fácilmente a nivel clásico. Consideremos una configuración de campo como la de figura.



Esta configuración puede imaginarse como un kink y un anti-kink separados, pero claramente pertenece al sector $B=0$. Sin mucho gasto de energía, el kink y el antikink pueden aproximarse el uno al otro y disolverse con pequeñas excitaciones alrededor de ϕ_0. Notar que no hay estados con $|B|>1$.

Dado que el estado más bajo del kink parece ser estable nos podemos preguntar si $\phi_{kink}(x)$ representa alguna característica de este estado bariónico. Claramente no es la función de ondas del barión. La función de ondas correspondiente al estado fundamental $\Psi_0[\phi]$ estará posiblemente picada alrededor de $\phi = \phi_{kink}(x)$ y de los trasladados $\phi_{kink}(x-a)$. Discutamos este punto con más detalle siguiendo J. Goldstone y R. Jackiw Phys. Rev. D<u>11</u>, 1486 (1975)

Tomemos como base del sector $B=1$ los estados propios del momento del barión $|p\rangle$ y los del barión más uno o más mesones $|p,\{k\}\rangle$. Vimos que todos los modos propios $\tilde{\eta}_k$, excepto los discretos η_0 y η_1, pueden caracterizarse por sus momentos asintóticos k. Por sencillez ignoraremos los η_1 (el número de estos modos discretos depende del modelo y siempre pueden incorporarse incluyendo estados excitados del barión $|p^*\rangle$). El modo traslacional η_0 es sin embargo una característica de estos modelos. Supondremos que el conjunto completo de estados no incluye mesones correspondientes a η_0. Veremos que esto es autoconsistente y está de acuerdo con el hecho de que η_0 juega el único papel de dar a los bariones los estados correctos de momento.

Supondremos como hipótesis básica que

$$\langle p, \{k\} \mid \Phi(x,t) \mid q, \{l\} \rangle_c \sim O(\lambda^{(m+n-1)/2}) \qquad (1)$$

$$\{k\} = k_1, k_2, \dots k_m \quad , \quad \{l\} = l_1, l_2, \dots, l_n$$

donde c indica conectados y Φ es el operador cuántico del estado bariónico. Esto está de acuerdo con (5.3) donde vemos que la absorción o emisión de un meson debido a la interacción cuesta al menos un factor $\sqrt{\lambda}$. Por otra parte cuando no hay mesones el mencionado elemento de matriz es de orden $1/\sqrt{\lambda}$ como veremos más adelante. Como la masa del barión es grande

$$E_p = (M^2 + p^2)^{1/2} = M + \frac{1}{2M} p^2 + O(\lambda^2) \qquad (2)$$

y por tanto

$$\Delta E = E_p - E_q = \frac{1}{2M}(p^2 - q^2) + O(\lambda^2) \qquad (3)$$

es de orden λ. Consistente con todo esto definimos

$$\langle p \mid \Phi(x,0) \mid q \rangle \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{da}{2\pi} e^{i(p-q)a} f_1(x-a) \qquad (4)$$

$$\langle p, k \mid \Phi(x,0) \mid q \rangle \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{da}{2\pi} e^{i(p+k-q)a} f_2(k, x-a) \qquad (5)$$

y similarmente para elementos de matriz mas complicados.

El operador campo en la representación de Heisenberg debe satisfacer

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - m^2 \right) \Phi(x,t) = - \lambda \Phi^3(x,t) \qquad (6)$$

Tomando elementos de matriz entre estados bariónicos, el miembro de la izquierda para $t=0$ da

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{da}{(2\pi)} \left\{ -(E_p - E_q)^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - m^2 \right\} e^{i(p-q)a} f_1(x-a) \qquad (7)$$

y el de la derecha

$$- \lambda \sum_{m,m'} \langle p \mid \Phi(x,0) \mid m \rangle \langle m \mid \Phi(x,0) \mid m' \rangle \langle m' \mid \Phi(x,0) \mid p \rangle \qquad (8)$$

donde $|m\rangle$ y $|m'\rangle$ son ~~dos~~ conjuntos completos de estados intermedios antes. De (1) y (3) es evidente que al orden dominante $O(1/\sqrt{\lambda})$, se deben incluir únicamente en (8) los estados bariónicos y que $(E_p - E_q)^2$ puede eliminarse. Entonces

$$-\lambda\langle p|\Phi^3(x,0)|q\rangle = -\lambda\int dp'\,dp''\ \langle p|\Phi(x,0)|p'\rangle\langle p'|\Phi(x,0)|p''\rangle\langle p''|\Phi(x,0)|q\rangle =$$

$$= -\lambda\int dp'\,dp''\ \frac{da}{2\pi}\frac{da'}{2\pi}\frac{da''}{2\pi}\ e^{i(p-p')a+i(p'-p'')a'+i(p''-q)a''}\ f_1(x-a)\,f_1(x-a')\,f_1(x-a'')$$

$$= -\lambda\int da\,da'\,da''\ \frac{1}{2\pi}\ \delta(a-a')\,\delta(a'-a'')\ e^{i(p-q)a}\ f_1^3(x-a) =$$

$$= -\lambda\int\frac{da}{2\pi}\ f_1^3(x-a)\ e^{i(p-q)a}$$

Se obtiene pues

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{da}{2\pi}\left[-\frac{d^2}{dx^2}-m^2\right]f_1(x-a)\,e^{i(p-q)a} = -\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{da}{2\pi}\ f_1^3(x-a)\,e^{i(p-q)a} \qquad (1)$$

para todo p y q y por tanto $f_1(x)$ debe satisfacer la ecuación (3.4) y $f_1(x)=\phi_{kink}(x)$
Obtenemos por tanto

$$\langle p|\Phi(0,0)|q\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{2\pi}\ e^{-i(p-q)y}\ \phi_{kink}(y) \qquad (2)$$

Vemos pues que $\phi_{kink}(y)$ es la transformada de Fourier del factor de forma $\langle p|\Phi(0,0)|q\rangle$ del barión. Es esto precisamente lo que hace que digamos que el barion es un objeto extenso.

Similarmente podemos calcular el elemento de matriz de (16.6) entre el estado $|q\rangle$ y el $|p,k\rangle$

$$\int\frac{da}{2\pi}\left\{-(E_{p,k}-E_q)^2-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-m^2\right\}e^{i(p+k-q)a}\ f_2(k,x-a) =$$

$$= -\lambda\langle p,k|\Phi^3(x,0)|q\rangle = -\lambda\int dp'\,dp''\ \langle p,k|\Phi(x,0)|p'\rangle\langle p'|\Phi(x,0)|p''\rangle\langle p''|\Phi(x,0)|q\rangle =$$

$$= -\lambda\int dp'\,dp''\ \frac{da}{2\pi}\frac{da'}{2\pi}\frac{da''}{2\pi}\ e^{i(p+k-p')a}\,e^{i(p'-p'')a'}\,e^{i(p''-q)a''}\ f_2(k,x-a)\,f_1(x-a')\,f_1(x-a'')$$

$$= -\lambda\int da\,da'\,da''\ \frac{1}{2\pi}\ e^{i(p+k-q)a}\ \delta(a-a')\,\delta(a'-a'')\ f_2(k,x-a)\,f_1^2(x-a) =$$

$$= -\lambda\int\frac{da}{2\pi}\ e^{i(p+k-q)a}\ f_2(k,x-a)\,f_1^2(x-a)$$ + 2 términos similares correspondientes a las otras posibilidades de creación de mesones.

Además

$$(E_{p,k}-E_q)^2 = (E_p+\tilde{\omega}_k-E_q)^2 = \underset{\lambda^2}{\underset{\uparrow}{(E_p-E_q)^2}} + \underset{\lambda}{\underset{\uparrow}{2\tilde{\omega}_k(E_p-E_q)}} + \underset{\lambda^0}{\underset{\uparrow}{\tilde{\omega}_k^{\,2}}} \simeq \tilde{\omega}_k^2$$

Con lo cual

$$\int \frac{da}{2\pi}\left[-\tilde{\omega}_k^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - m^2\right] e^{i(p+k-q)a} \; f_2(k, x-a) =$$

$$= -3\lambda \int \frac{da}{2\pi} \; e^{i(p+k-q)a} \; f_2(k, x-a)\; f_1^2(x-a)$$

y por tanto

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + 3\lambda\, \phi^2_{kink}(x) - m^2\right] f_2(k,x) = \tilde{\omega}_k^2 \; f_2(k,x) \qquad (1)$$

y comparando con (5.5) y teniendo en cuenta la normalización usual de los bosones

$$f_2(k,x) = \frac{1}{\sqrt{2\tilde{\omega}_k}}\; \eta_k(x) \qquad (2)$$

Como las $\eta_i(x)$ forman un conjunto ortonormal completo

$$\delta(x-y) = \sum_k \eta_k^*(x)\, \eta_k(y) + \eta_0^*(x)\, \eta_0(y) =$$

$$= \sum_k 2\tilde{\omega}_k \; f_2^*(k,x)\; f_2(k,y) + \eta_0^*(x)\; \eta_0(y) \qquad (3)$$

Vemos pues que el modo traslacional es necesario para obtener un conjunto completo. Sin embargo al buscar un conjunto completo de estados hemos supuesto que no hay mesones asociados con este modo. Vamos a ver que esto no es inconsistente consideremos el conmutador canónico

$$[\,\Phi(x,0)\;,\; \dot{\Phi}(y,0)\,] = i\;\delta(x-y) \qquad (4)$$

De nuevo calculamos el valor esperado de esta relación

$$\langle p|\,[\,\Phi(x,0)\;,\;\dot{\Phi}(y,0)\,]\,|q\rangle =$$

$$= \sum_{p'}\Big[\langle p|\,\Phi(x,0)\,|p'\rangle\langle p'|\,\dot{\Phi}(y,0)\,|q\rangle - \langle p|\,\dot{\Phi}(y,0)\,|p'\rangle\langle p'|\,\Phi(x,0)\,|q\rangle\Big] +$$

$$+\sum_{p',k}\Big[\langle p|\,\Phi(x,0)\,|p',k\rangle\langle p',k|\,\dot{\Phi}(y,0)\,|q\rangle - \langle p|\,\dot{\Phi}(y,0)\,|p',k\rangle\langle p',k|\,\Phi(x,0)\,|q\rangle\Big] + O(\lambda) \qquad (5)$$

Empecemos calculando la contribución sin mesones (N.M)

$$N.M = i\int dp'\Big[(E_{p'}-E_q)\langle p|\,\Phi(x,0)\,|p'\rangle\langle p'|\,\Phi(y,0)\,|q\rangle + (E_p - E_{p'})\langle p|\,\Phi(y,0)\,|p'\rangle\langle p'|\,\Phi(x,0)\,|q\rangle\Big]$$

$$= i\int dp'\,\frac{da}{2\pi}\,\frac{db}{2\pi}\; f_1(x-a)\, f_1(y-b)\Big\{(E_{p'}-E_q)\, e^{i(p-p')a}\, e^{i(p'-q)b} - (E_p - E_{p'})\, e^{i(p-p')b}\, e^{i(p'-q)a}\Big] =$$

$$= i \int dp' \frac{da}{2\pi} \frac{db}{2\pi} f_1(y-b) f_1(x-a) e^{+i(p-p')a} e^{i(p'-q)b} [E_{p'} - E_q - E_p + E_{p-p'+q}]$$

donde en la ultima integral hemos realizado el cambio $p' \to p-p'+q$. Ademas

$$E_{p'} - E_q - E_p + E_{p-p'+q} = \frac{1}{2M} (p'^2 - q^2 - p^2 + p^2 + q^2 + p'^2 - 2pp' + 2pq - 2qp') =$$

$$= \frac{1}{M} (p'^2 - pp' + pq - qp') = \frac{1}{M} (p'-q)(p'-p) + O(\lambda^2)$$

de donde

$$N.M. = \frac{i}{M} \int dp' \frac{da}{2\pi} \frac{db}{2\pi} f_1(y-b) f_1(x-a) (p'-q)(p'-p) e^{i(p-p')a + i(p'-q)b}$$

$$= -\frac{i}{M} (-i)^2 \int dp' \frac{da}{2\pi} \frac{db}{2\pi} f_1(y-b) f_1(x-a) \frac{\partial e^{i(p-p')a}}{\partial a} \frac{\partial e^{i(p'-q)b}}{\partial b}$$

$$= \frac{i}{M} \int dp' \frac{da}{2\pi} \frac{db}{2\pi} \frac{\partial f_1(x-a)}{\partial x} \frac{\partial f_1(y-b)}{\partial y} e^{i(p-p')a + i(p'-q)b} =$$

$$= \frac{i}{M} \int \frac{da}{2\pi} \left[\frac{\partial}{\partial x} f_1(x-a)\right] \left[\frac{\partial}{\partial y} f_1(y-a)\right] e^{i(p-q)a} \tag{1}$$

Hemos visto antes (7.1)

$$\frac{\partial}{\partial x} f_1(x-a) = \frac{\partial}{\partial x} \phi_{kink}(x-a) = A \eta_0(x-a) \tag{2}$$

donde $\eta_0(x)$ esta normalizada y por tanto

$$A^2 = \int dx \left(\frac{d}{dx} \phi_{kink}(x)\right)^2 = \frac{m^4}{2\lambda} \int dx \frac{1}{\cosh^4(mx/\sqrt{2})} = \frac{8\sqrt{2}\, m^3}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \, (e^t + e^{-t})^{-4}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{m^3}{\lambda} = M + O(\lambda^0)$$

Obtenemos asi en el orden deseado

$$N.M = i \int \frac{da}{2\pi} e^{i(p-q)a} \eta_0(x-a) \eta_0(y-a) \tag{3}$$

Similarmente el termino con un barion y un meson da

$$OM = i \int \frac{da}{2\pi} dk \, e^{i(p-q)a} f_2^*(k, x-a) f_2(k, y-a) \tilde{\omega}_k + (x \leftrightarrow y)$$

Obtenemos entonces

$$\langle p | [\Phi(x,0), \dot{\Phi}(y,0)] | q \rangle = i \int \frac{da}{2\pi} e^{i(p-q)a} \frac{1}{2} [2\tilde{\omega}_k f_2^*(k, x-a) f_2(k, y-a) + \eta_0(x-a)\eta_0(y-b) + x \leftrightarrow y] =$$

$$= i \int \frac{da}{2\pi} e^{i(p-q)a} \delta(x-y) = i\,\delta(p-q)\,\delta(x-y) \tag{1}$$

como debe ser. Esto confirma de nuevo que el modo η_0 no está asociado con mesones., sino con el movimiento cinético del estado bariónico. Evidentemente no se cambia nada en las conclusiones si añadimos modos discretos no traslacionales tales como $\omega_1 = \sqrt{3}\, m/\sqrt{2}$ en nuestro modelo. La solución se hace más complicada pues el conjunto completo de estados tiene que ampliarse para incluir estados excitados bariónicos caracterizados por $P_{i\{n_i\}}$ donde i corresponde al modo discreto y $\{n_i\}$ son sus números de ocupación.

Veamos finalmente como tratar el modo traslacional. Vimos que al perturbar alrededor de la solución estática $\phi_{kink}(x)$ todos los modos normales de las fluctuaciones podían ser tratados en la aproximación de oscilador armónico, salvo el modo traslacional. Las consideraciones anteriores sobre acoplamiento fuerte sugieren el método semiclásico correcto: perturbar alrededor de soluciones clásicas periódicas (dependientes del tiempo), imponer la condición WBK y usar los ángulos de estabilidad. Las soluciones deben ser no triviales en el modo traslacional, pero pueden ser triviales (esto es estáticas) en los otros modos débilmente acoplados. También vimos que el potencial es constante a lo largo del modo traslacional. Este modo se comporta como una partícula libre. Estas consideraciones implican que usemos soluciones clásicas en las que el kink se mueve como un todo a velocidad constante sin distorsionarse. A causa de la invariancia Lorentz de la teoría es fácil darse cuenta que si nos dan una solución estática

$$\phi_{kink}(x) = \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \tanh \frac{x m}{\sqrt{2}} \tag{2}$$

la solución deseada es

$$\phi^{(v)}(x,t) = \phi_{kink}\left(\frac{x - vt}{\sqrt{1-v^2}}\right) \tag{3}$$

Para convertirla en periódica usaremos el mismo método que para la partícula libre: supondremos que el espacio es una curva cerrada de longitud L, donde L tiende a infinito. La velocidad v y el periodo τ están relacionados por

$$\tau = \frac{L}{v} \tag{4}$$

La acción después de un tiempo τ es

$$S^{(v)}(\tau) = \int_0^\tau dt \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left\{ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi^{(v)}}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi^{(v)}}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^{(v)2} - \frac{1}{4}\lambda \phi^{(v)4} - \frac{1}{4}\frac{m^4}{\lambda} \right\} \tag{1}$$

donde hemos referido la acción a su valor en el vacío. Una simple álgebra da

$$S^{(v)}(\tau) = \int_0^\tau dt \int_{-\infty}^{+\infty} dx \sqrt{1-v^2} \left\{ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi_{kink}}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2_{kink} - \frac{1}{4}\lambda \phi^4_{kink} - \frac{1}{4}\frac{m^4}{\lambda} \right\}$$

y teniendo en cuenta la masa clásica

$$M_{cl} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{m^3}{\lambda} \tag{2}$$

se obtiene

$$S^{(v)}(\tau) = -M_{cl}\sqrt{1-v^2}\,\tau \tag{3}$$

Para obtener los angulos de estabilidad necesitamos resolver

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial t^2} - V''(\phi^{(v)})\right]\eta(x,t) = \left[-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + m^2 - 3\lambda\phi^{(v)2}\right]\eta(x,t) = 0 \tag{4}$$

Esta ecuación ya ha sido prácticamente resuelta. En efecto mediante una transformación de Lorentz transformemos (4) a un sistema $(x't')$ en el que el kink se halla en reposo

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial t'^2} + \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + m^2 - 3\lambda\phi^2_{kink}(x',t')\right]\eta(x't') = 0 \tag{5}$$

cuyas soluciones son

$$\eta_i(x',t') = \eta_i(x')\, e^{i\tilde{\omega}_i t'} \tag{6}$$

donde η_i y $\tilde{\omega}_i$ vienen dadas en (6.3). Pasando de nuevo a las coordenadas originales y teniendo en cuenta que después de un ciclo completo $t \to t+\tau$ y $x \to x+L$ obtenemos

$$\eta_i(x, t+\tau) = \eta_i(x,t)\, e^{i\tilde{\omega}_i \tau\sqrt{1-v^2}} \tag{7}$$

y por tanto hay un ángulo de estabilidad nulo correspondiente a $\tilde{\omega}_0$. Olvidemonos por un momento de los contratérminos entonces de acuerdo con (43.3)

$$W_{\{p_i\}}(E) = S_{cl}(\tau) + E\tau - \sum_i \left(p_i + \frac{1}{2}\right)\hbar\, \nu_i(\tau) \tag{8}$$

y en particular para el caso $p_i \equiv 0$ se tiene (estado del kink no excitado)

$$W(E) = -\left(M_{cl} + \frac{1}{2}\sum_i \hbar\tilde{\omega}_i\right)\tau\sqrt{1-v^2} + E\tau \qquad (1)$$

donde el periodo $\tau(E)$ viene determinado por (43.4)

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(M\tau\sqrt{1-L^2/\tau^2}\right) = E \qquad (2)$$

donde $M \equiv M_{cl} + \frac{1}{2}\sum \hbar\tilde{\omega}_i$ es la masa en reposo del kink teniendo en cuenta las correcciones cuánticas. De (2) se deduce

$$E = \frac{M}{\sqrt{1-L^2/\tau^2}} \quad \Leftrightarrow \quad \tau = \frac{LE}{\sqrt{E^2-M^2}} \qquad (3)$$

e insertando esto en (1) y teniendo en cuenta (43.5)

$$W(E) = L\sqrt{E^2-M^2} = 2\pi m \qquad m = \text{entero} \qquad (4)$$

y por tanto las energías son

$$E_m = \left[M^2 + \left(\frac{2m\pi}{L}\right)^2\right]^{1/2} = \sqrt{M^2 + p_m^2} \qquad (5)$$

Vemos pues que cuando el modo traslacional es tratado por el método WBK da la relación correcta energía momento para el kink, con una masa en reposo que es la obtenida perturbando alrededor de la solución estática $\phi_{kink}(x)$.

Mientras que el modo traslacional puede ser tratado de esta forma dentro de una aproximación semiclásica un tratamiento más exacto también ha sido intentado

J. L. GERVAIS y B. SAKITA

J. L. GERVAIS, A. JERICKI y B. SAKITA

C.G. CALLAN y D. J. GROSS

P. VINCIARELLI

II) LA ECUACION DE SINE - GORDON

Artículos de puesta a punto

A.C. SCOTT, F.Y.F. CHU y D.W. MC LAUGHLIN. Proc. IEEE 61, 1443 (1973)

A. BARONE, F. EPOSITO, C.J. MAGEE y A.C. SCOTT Revista Nuovo Cim. 1, 227 (1971)

El sistema de sine-Gordon es un campo escalar real $\phi(x,t)$ en 1+1 dimensiones con densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L}(x,t) = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi(x)\right)\left(\partial^\mu \phi(x)\right) + \frac{m^4}{\lambda}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{m}\phi(x)\right) - 1\right] \tag{1}$$

La ecuación del movimiento es

$$\partial^\mu \partial_\mu \phi(x) + \frac{m^3}{\sqrt{\lambda}} \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{m}\phi(x)\right) = 0 \tag{2}$$

Notar que $[\phi] = 1$, $[m^2] = [\lambda] = M^2$. Cuando el Lagrangiano se desarrolla en potencias de $\sqrt{\lambda}\,\phi(x)/m$ se obtiene

$$\mathcal{L}(x,t) = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{4!}\lambda\phi^4 - \frac{1}{6!}\frac{\lambda^2}{m^2}\phi^6 + \cdots \tag{3}$$

que en el límite de acoplamiento débil se aproxima al caso anterior. Para trabajar mas comodamente hagamos el cambio

$$x' \equiv m x \quad , \quad t' \equiv m t \quad , \quad \phi'(x't') = \frac{\sqrt{\lambda}}{m}\phi(x,t) \tag{4}$$

entonces

$$\mathcal{L}(x',t') = \frac{m^4}{\lambda}\left\{\frac{1}{2}\left(\partial'_\mu\phi'\right)\left(\partial'^\mu\phi'\right) + \left(\cos\phi' - 1\right)\right\} \tag{5}$$

y la ecuación del movimiento es

$$\Box'\phi'(x't') + \sin\phi'(x't') = 0 \tag{6}$$

Además el funcional energía potencial es

$$V[\phi] = \frac{m^3}{\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty} dx' \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi'}{\partial x'}\right)^2 + (1-\cos\phi')\right\} \tag{7}$$

Notar que además de la invariancia Lorentz, el sistema es también invariante bajo las simetrías discretas

$$\phi'(x', t') \longrightarrow -\phi'(x', t') \qquad (1)$$

$$\phi'(x', t') \rightarrow \phi'(x', t') + 2\pi n \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (2)$$

Las soluciones clásicas independientes del tiempo son soluciones de

$$\frac{\partial^2 \phi'(x' t')}{\partial t'^2} = 0 = \frac{\partial^2 \phi'(x' t')}{\partial x'^2} - \sin \phi'(x' t') = -\frac{\delta V(\phi')}{\delta \phi'} \qquad (3)$$

y por tanto son extremales del potencial.

Es evidente que los mínimos absolutos de $V(\phi)$ ocurrirán para soluciones ϕ' independientes de x. En este caso

$$V(\phi) = \frac{m^3}{\lambda} (1 - \cos \phi') \qquad (4)$$

y por lo tanto los vacíos ocurrirán para

$$\phi' = 2m\pi \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (5)$$

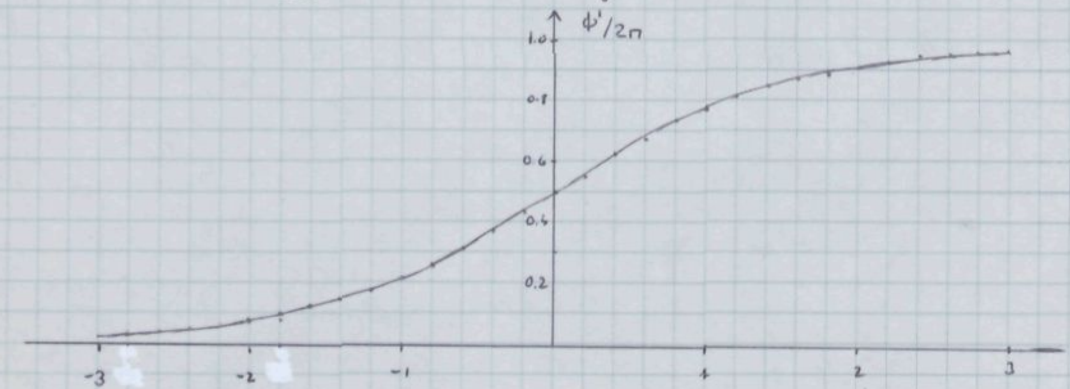
Elegiremos como vacío $\phi'_0 = 0$.

Además de estos mínimos absolutos existen soluciones estáticas que son mínimos locales de $V(\phi')$ excepto en el modo traslacional. Estos deben satisfacer

$$\frac{d^2 \phi'(x')}{dx'^2} - \sin \phi'(x') = 0 \qquad (6)$$

Una solución de esta ecuación que conecte dos vacíos distintos en los dos extremos del espacio es el llamado solitón

$$\phi'_{sol}(x') = 4 \operatorname{arctg} e^{x'}$$



$$\phi'_{sol}(0) = \pi$$

$$\phi'_{sol}(x') \underset{x' \to -\infty}{\sim} 4 e^{x'} \left(1 - \frac{1}{3} e^{2x'} + \ldots\right)$$

$$\phi'_{sol}(x') \underset{x' \to \infty}{\sim} 2\pi - 4 e^{-x'} \left(1 - \frac{1}{3} e^{-2x'} + \ldots\right)$$

Además

$$\phi'^{(u)}_{sol}(x't') = \phi'_{sol}\left(\frac{x'-ut'}{\sqrt{1-u^2}}\right) \tag{1}$$

es una solución de (23.6) por invariancia Lorentz. Es una ~~traducción~~ solución que viaja con velocidad constante u sin deformarse. En todas estas propiedades la solución hallada es análoga al kink, pero la llamamos solitón por tener una nueva propiedad muy importante: consideremos una configuración de campo, que en el remoto pasado estaba constituida a partir de un conjunto de solitones

$$\lim_{t'\to-\infty} \phi'(x',t') = \sum_{i=1}^{N} \phi'_{sol}(\xi_i) \tag{2}$$

donde

$$\xi_i = \frac{x'-u_i t'}{\sqrt{1-u_i^2}} \tag{3}$$

Entonces cuando $\phi'(x't')$ evolucionara en el tiempo de acuerdo con las ecuaciones del movimiento se convierte en

$$\lim_{t'\to+\infty} \phi'(x',t') = \sum_{i=1}^{N} \phi'_{sol}(\xi_i + d_i) \tag{4}$$

donde las d_i son constantes. Es decir, cuando soluciones solitón chocan con otras soluciones solitón, emergen del proceso de colisión sin modificar sus formas y velocidades. La colisión introduce a lo sumo un retardo d_i/u_i para cada solitón.

Notemos además que

$$\phi'_{anti\,sol}(x') \equiv 4\,\mathrm{arctg}\,(e^{-x'}) = -\phi'_{sol}(x') \tag{5}$$

es también una solución solitón. Será útil identificarla separadamente llamándola antisolitón. Recordar que de acuerdo con (24.2) estas soluciones se hallan definidas módulo 2π, pero

$$\begin{aligned}\phi'_{sol}(\infty,t') - \phi'_{sol}(-\infty,t') &= 2\pi \\ \phi'_{antisol}(\infty,t') - \phi'_{antisol}(-\infty,t') &= -2\pi\end{aligned} \tag{6}$$

las definen unívocamente.

Otra solución interesante descubierta independientemente por A. SEEGER, H. DONTH y A. KOCHENDORFER Z. Phys. 34, 173 (1953) y J.K. PERRING y T.H.R. SKYRME. Nucl. Phys. 31, 550 (1962) es la llamada solución solitón - antisolitón en colisión dada por

$$\phi'_{S.A}(x', t') = 4 \operatorname{arctg}\left[\frac{\sinh\left(u t' / \sqrt{1-u^2}\right)}{u \cosh\left(x' / \sqrt{1-u^2}\right)}\right] \quad (1)$$

y que también es una solución exacta. Notar que

$$\phi'_{SA}(x', 0) = 0$$

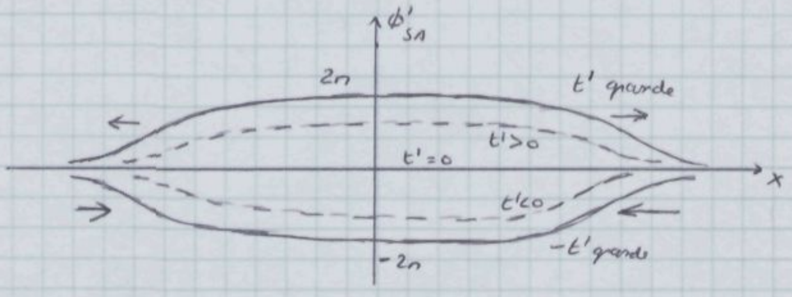
$$\phi'_{SA}(x', t') \underset{t' \to -\infty}{\sim} \phi_{sol}\left[\frac{x' + u(t' + \Delta/2)}{\sqrt{1-u^2}}\right] + \phi_{antisol}\left[\frac{x' - u(t' + \Delta/2)}{\sqrt{1-u^2}}\right] \quad (2)$$

$$\phi'_{SA}(x', t') \underset{t' \to +\infty}{\sim} \phi_{sol}\left[\frac{x' + u(t' - \Delta/2)}{\sqrt{1-u^2}}\right] + \phi_{antisol}\left[\frac{x' - u(t' - \Delta/2)}{\sqrt{1-u^2}}\right]$$

donde

$$\frac{\Delta}{2} = \frac{\sqrt{1-u^2}}{u} \ln u \quad (3)$$

Por tanto, en el pasado remoto, la solución ϕ'_{SA} consiste en un par solitón-antisolitón acercándose el uno al otro y en el remoto futuro en un par solitón-antisolitón alejándose con un retraso en el tiempo $\Delta < 0$.



Hay también una solución de colisión solitón-solitón que es

$$\phi'_{SS}(x', t') = 4 \operatorname{arctg}\left[\frac{u \sinh\left(x' / \sqrt{1-u^2}\right)}{\cosh\left(u t' / \sqrt{1-u^2}\right)}\right] \quad (4)$$

que en $t' = -\infty$ representa dos solitones que se acercan, chocan y emergen sin cambiar de forma excepto un retraso en el tiempo.

Como la ecuación de Sine-Gordon tiene un potencial con un conjunto infinito de mínimos en $\phi' = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$ se puede obtener una solución con un número arbitrario de solitones sucesivos. Así por ejemplo $\phi'_{SS}(x', 0)$ empieza en -2π para $x' = -\infty$, se eleva hasta 0 para $x' = 0$ y crece a $+2\pi$ para $x' = +\infty$. Más adelante veremos un método para obtener soluciones con un número arbitrario de solitones.

Hay aún otra clase de soluciones exactas que usaremos más adelante. Las llamaremos las soluciones doblete. Recordemos que para la solución ϕ'_{SA} el retardo en el tiempo es negativo, por lo cual las fuerzas entre un solitón y un antisolitón son atractivas y es de esperar la existencia de un estado ligado. Tales estados se obtienen fácilmente haciendo $u = iv$ en ϕ_{SA} y entonces

$$\phi'_v (x', t') = 4 \operatorname{arctg} \left[\frac{\sin (vt' / \sqrt{1+v^2})}{v \cosh (x' / \sqrt{1+v^2})} \right] \tag{1}$$

Esta función es real y solución exacta para todo v. Su forma en función del tiempo se parece a la de ϕ_{SA} pero con una importante diferencia. En lugar de separarse en un par solitón - antisolitón infinitamente alejados cuando $t' \to \pm\infty$, la separación relativa oscila aquí con un periodo $\tau = 2\pi \sqrt{1+v^2}/v$. Esta solución doblete es un una solución "respirante" y se la puede considerar como un par ligado solitón - antisolitón.

No existen, que se sepa, pares ligados solitón - solitón.

De cara a las discusiones que seguirán es conveniente pasar a las viejas variables

$$\phi_{sol} (x) = \frac{4m}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{arctg} \left[e^{mx} \right] \qquad \text{(solitón)} \tag{2}$$

$$\phi_\tau (x, t) = \frac{4m}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{arctg} \left[\epsilon \frac{\sin (mt/\tilde{\tau})}{\cosh (\epsilon m x / \tilde{\tau})} \right] \qquad \text{(solución doblete)}$$

$$\epsilon \equiv \sqrt{\tilde{\tau}^2 - 1} \qquad \tilde{\tau} \equiv \frac{m\tau}{2\pi} \tag{2}$$

Ambas soluciones se dan en sus sistemas en reposo. Soluciones en movimiento se obtienen inmediatamente mediante transformaciones de Lorentz

Es de esperar que las soluciones exactas existan a causa de algunas peculiaridades de la ecuación de Sine-Gordon [D.W. MCLAUGHLIN. J. Math. Phys. 16, 96 (1975)]. Es útil introducir

$$\sigma = \frac{x' + t'}{2} \quad , \quad \rho = \frac{x' - t'}{2} \quad , \quad \psi(\sigma, \rho) = \phi'(x', t') \tag{3}$$

Entonces (23.6) se convierte en

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \sigma \partial \rho} - \sin \psi = 0 \tag{5}$$

Supongamos que ψ_0 es una solución de esta ecuación. Consideremos la función ψ_1 definida por la llamada "Transformación de Backlund"

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \sigma} (\psi_1 - \psi_0) = a \sin \left(\frac{\psi_1 + \psi_0}{2} \right)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \rho} (\psi_1 + \psi_0) = \frac{1}{a} \sin \left(\frac{\psi_1 - \psi_0}{2} \right) \tag{5}$$

Entonces derivando la primera con relación a ρ :

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\rho\partial\sigma}(\psi_1-\psi_0) = a\cos\left(\frac{\psi_1+\psi_0}{2}\right)\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\rho}(\psi_1+\psi_2) = \cos\left(\frac{\psi_1+\psi_0}{2}\right)\sin\left(\frac{\psi_1-\psi_0}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin\psi_1 - \sin\psi_0\right) \tag{1}$$

Entonces como ψ_0 es solución también lo es ψ_1. Además es más sencillo resolver las ecuaciones (27.5) que son de primer orden. Imaginemos por ejemplo que $\psi_0 = 0$ (la solución vacío) entonces ψ_1 obedece

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\psi_1}{\partial\sigma} = a\sin(\psi_1/2) \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial\psi_1}{\partial\rho} = \frac{1}{a}\sin(\psi_1/2) \tag{2}$$

que se integran fácilmente para dar

$$\psi_1 = 4\,\mathrm{arctg}\left[e^{a\sigma+\rho/a}\right] \tag{3}$$

En términos de las coordenadas iniciales

$$\phi'(x',t') = 4\,\mathrm{arctg}\left[\exp\left((x'-u t')/\sqrt{1-u^2}\right)\right] \qquad u = \frac{1-a^2}{1+a^2}$$

que es la solución soliton pronto de velocidad u. De la misma forma a partir de ψ_1 se puede obtener la solución con dos solitones y así sucesivamente construir soluciones con número arbitrario de solitones.

L.D. FADDEEV y L.A. TAKHTAJAN [ ] han demostrado que existe un número infinito de constantes del movimiento conservadas lo cual es probablemente el origen de las soluciones soliton y sus peculiaridades. Se sabe que existen otras siete ecuaciones en 1+1 con soluciones tipo soliton exactas [A.C. SCOTT, F.Y.F. CHU y D.M. MC LAUGHLIN Proc. IEEE 61, 1443 (1973)]

Veamos ahora como cuantizar los solitones y dobletes de la ecuación de Sine-Gordon. Supondremos que $\lambda/m^2 \ll 1$ si bien muchos de los resultados que obtendremos son válidos en general. Los resultados que daremos son obtenidos en

R. DASHEN, B. HASSLACHER y A. NEVEU Phys. Rev. D 11, 3424 (1975)

S. COLEMAN Phys. Rev. D 11, 2088, 1975

En este modelo el funcional potencial es

$$V[\phi] = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \frac{m^4}{\lambda}\left[1-\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{m}\phi\right)\right]\right\} \tag{4}$$

Elegiremos el vacío, que es un mínimo absoluto de $V[\phi]$, como $\phi_{vac}=0$. El solitón es una solución estática

$$\phi_{sol}(x) = \frac{4m}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{arctg} e^{mx} \tag{1}$$

La masa clásica del solitón es

$$M_{cl} \equiv V[\phi_{sol}] - V[\phi_{vac}] = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left\{ \frac{8m^4}{\lambda} \frac{e^{2mx}}{(1+e^{2mx})^2} + \frac{m^4}{\lambda}\left[1 - \frac{1-6e^{2mx}+e^{4mx}}{(1+e^{2mx})^2}\right]\right\}$$

donde hemos tenido en cuenta que

$$\operatorname{arctg} e^{mx} = \frac{i}{2} \ln \frac{i+e^{mx}}{i-e^{mx}} \tag{2}$$

Entonces

$$M_{cl} = \frac{16m^4}{\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{e^{2mx}}{(1+e^{2mx})^2} = \frac{16m^4}{\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{1}{(e^{mx}+e^{-mx})^2}$$

y de (18.1)

$$M_{cl} = \frac{8m^3}{\lambda} \tag{3}$$

Para determinar las correcciones cuánticas deberemos estudiar las fluctuaciones. Notar que si $\phi(x) = \phi_0(x) + \eta$ donde $\phi_0(x)$ es una solución correspondiente a un mínimo

$$V[\phi] = V[\phi_0] + \int_{-\infty}^{+\infty} dx \overbrace{\left\{ - \frac{d^2\phi_0}{dx^2} + \frac{m^3}{\sqrt{\lambda}} \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{m}\phi_0\right)\right\}}^{0} \eta(x) +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \eta(x) \left\{ -\frac{d^2}{dx^2} + m^2 \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{m}\phi_0\right)\right\} \eta(x) + \cdots \tag{4}$$

y en particular

$$V[\phi_{vac}] = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \eta(x) \left\{ -\frac{d^2}{dx^2} + m^2 \right\} \eta(x) + \cdots$$

y las oscilaciones de punto cero son

$$\left.\begin{aligned} E_{vac} &= \frac{1}{2}\sum_{k_n} \left[k_n^2 + m^2\right]^{1/2} \\ L k_n &= 2\pi n \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Por otra parte para los solitones

$$V[\phi] = V[\phi_{sol}] + \frac{1}{2}\int dx\, \eta(x) \underbrace{\left[-\frac{d^2}{dx^2} + m^2 \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{m}\phi_{sol}\right)\right]}_{\equiv H} \eta(x) + \dots$$

El operador H es

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + m^2 \cos\left(4 \operatorname{arctg} e^{mx}\right) = -\frac{d^2}{dx^2} + m^2\left[1 - \frac{2}{\cosh^2 mx}\right]$$

y la ecuación

$$H\,\eta(x) = \omega\,\eta(x)$$

tiene como soluciones

Estado ligado $\quad \omega = 0 \qquad \eta_0(x) = \sqrt{\frac{m}{2}}\,\frac{1}{\cosh mx}$ modo traslacional

Estados de colisión $\quad \omega = m\sqrt{1+k^2} \qquad \eta_k(x) = e^{ikmx}\left[k + i\tanh mx\right]$ (1)

Notar que para estos últimos

$$\eta_k(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} e^{ikmx}\left[k \pm i\right] \equiv e^{i(kmx \pm \delta/2)}$$
(2)

$$\frac{1}{2}\delta(k) = \operatorname{arctg}\frac{1}{k}$$

las condiciones periódicas imponen

$$kmL + \delta = 2\pi n \qquad n = 1, 2, \dots$$ (3)

y por tanto

$$\frac{dn}{dk} \simeq \frac{1}{2\pi}\left[mL + \frac{d\delta(k)}{dk}\right] = \frac{1}{2\pi}\left[mL - \frac{2}{k^2+1}\right]$$ (4)

Entonces la masa del solitón, incluyendo correcciones cuánticas, es

$$M_{sol} = \frac{8m^3}{\lambda} + \frac{1}{2}\sum_{q_n} m\,(1+q_n)^{1/2} - \frac{1}{2}\sum_{k_n}(k_n^2 + m^2)^{1/2}$$
(5)
$$q_n = \frac{2\pi n - \delta(q_n)}{mL} \qquad k_n = \frac{2\pi n}{L}$$

de donde

$$M_{sol} = \frac{8m^3}{\lambda} + \frac{1}{2}\sum_{q_n}\left\{ m\,(1+q_n)^{1/2} - \left[\left(m q_n + \frac{\delta}{L}\right)^2 + m^2\right]^{1/2}\right\} \simeq$$

$$\simeq \frac{8m^3}{\lambda} + \frac{1}{2}\sum_{q_n}\left[-\frac{m q_n}{L}\,\delta(q_n)\,\frac{1}{(m^2 + m^2 q_n^2)^{1/2}}\right]$$

Introduciendo

$$\tilde{\omega}(q_n) = (m^2 + m^2 q_n^2)^{1/2} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\tilde{\omega}(q_n)}{dq_n} = \frac{m^2 q_n}{(m^2 + m^2 q_n^2)^{1/2}} \tag{1}$$

se puede escribir

$$M_{sol} = \frac{8m^3}{\lambda} - \frac{1}{2Lm} \sum_{q_n} \delta(q_n) \frac{d\tilde{\omega}(q_n)}{dq_n} \simeq \frac{8m^3}{\lambda} - \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dq\, \delta(q) \frac{d\tilde{\omega}(q)}{dq}$$

$$= \frac{8m^3}{\lambda} - \frac{1}{4\pi} \Big[\delta(\omega)\, \tilde{\omega}(q) \Big]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dq\, \tilde{\omega}(q) \frac{d\phi(q)}{dq}$$

Ahora bien como $\delta \sim cte + 2/q$ se tiene $\omega\delta \sim 2|q|/q$, por lo cual

$$M_{sol} = \frac{8m^3}{\lambda} - \frac{m}{\pi} - \frac{m}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dq \frac{1}{(1+q^2)^{1/2}} \tag{2}$$

donde el último término es logarítmicamente divergente y debe ser cancelado por los contraterminos de renormalización. El lagrangiano completo es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi(x)\, \partial^\mu \phi(x) + (m^2 - \delta m^2) \frac{m^2}{\lambda} \left[\cos \frac{\sqrt{\lambda}}{m} \phi(x) - 1 \right] + E_{vac} \tag{3}$$

donde

$$\delta m^2 = -\frac{\lambda}{8\pi} \int_{-\Lambda}^{+\Lambda} dq \frac{1}{(q^2 + m^2)^{1/2}} \tag{4}$$

Entonces a (2) debemos añadir

$$E_{ren} = -\delta m^2 \frac{m^2}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[1 - \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{m} \phi_{sol}\right) \right] = -\delta m^2 \frac{m^2}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{1}{(e^{mx} + e^{-mx})^2} =$$

$$= -\frac{4m}{\lambda} \delta m^2 = \frac{m}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{(1+q^2)^{1/2}}$$

que cancela exactamente el último término de (2) y queda

$$M_{sol} = \frac{8m^3}{\lambda} - \frac{m}{\pi}$$

que puede escribirse como

$$M_{sol} = \frac{8m}{\gamma} \qquad \gamma \equiv \frac{\lambda/m^2}{1 - \lambda/8\pi m^2} \tag{5}$$

Finalmente todo lo dicho sobre el modo traslacional en el caso del kink se aplica al solitón y los niveles energéticos son:

$$E_n = \sqrt{M_{sol}^2 + P_n^2} \qquad P_n \equiv 2m\frac{\pi}{L} \tag{6}$$

Consideremos ahora la solución doblete

$$\phi_\tau(x,t) = \frac{4m}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{arctg}\left[\epsilon \, \frac{\sin(2\pi t/\tau)}{\cosh(2\pi\epsilon x/\tau)} \right] \quad , \quad \epsilon = \left[\left(\frac{m\tau}{2\pi}\right)^2 - 1 \right]^{1/2} \tag{1}$$

que depende del tiempo y cuyo periodo es τ. Para aplicar el método WBK debemos calcular la acción clásica

$$S_{cl}[\phi_\tau] = \int_0^\tau dt \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left\{ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_\tau \partial^\mu \phi_\tau + \frac{m^4}{\lambda} \left[\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{m}\phi_\tau\right) - 1 \right] \right\} = \tag{2}$$

$$= \frac{32\pi m^2}{\lambda} \left\{ \arccos \frac{2\pi}{m\tau} - \left[\left(\frac{m\tau}{2\pi}\right)^2 - 1 \right]^{1/2} \right\}$$

Por otra parte existen contratérminos que se pueden escribir de acuerdo con (21.3) como

$$S_{ct}[\phi_\tau] = \frac{\tau}{2} \sum_m (k_m^2 + m^2)^{1/2} - \delta m^2 \frac{m^2}{\lambda} \int_0^\tau dt \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{m}\phi_\tau\right) - 1 \right] \tag{3}$$

Es necesario también determinar los ángulos de estabilidad, para lo cual es preciso resolver la ecuación (II.42.5), i.e.

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + m^2 \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{m}\phi_\tau\right) \right] \eta_q(x,t) = 0 \tag{4}$$

Su cálculo es relativamente complejo y puede hallarse en la primera de las referencias mencionadas. Se puede probar

$$-\frac{1}{2}\sum_n \nu_n \hbar + S_{ct}[\phi_\tau] = -\frac{\lambda}{8\pi m^2} S_{cl}[\phi_\tau] \tag{5}$$

Entonces

$$G(T) = \sum_{n,\{p_k\}} \sqrt{\frac{i}{2\pi\hbar}}\, \tau \left| \frac{1}{m} \frac{\partial^2 S_{cl}}{\partial \tau^2} \right|^{1/2} \exp\left\{ \frac{in}{\hbar} \left[S_{cl} + S_{ct} - \sum_k \left(p_k + \frac{1}{2}\right) \nu_k \hbar \right] \right\} \tag{6}$$

En particular estamos interesados en el caso $p_k = 0$ para todos los modos que da la masa del estado ligado para cada valor de N en (II.43.5). Los valores para $p_k \neq 0$ corresponderán a estados del continuo (ν_k están en el continuo) formados por el estado ligado y otros cuanta de la teoría. Entonces

$$\frac{in}{\hbar}\left[S_{cl} + S_{ct} - \frac{1}{2}\sum \nu_k \hbar \right] = \frac{in}{\hbar}\left(1 - \frac{\lambda}{8\pi m^2}\right) S_{cl}(\tau) =$$

$$= \frac{in}{\hbar} \frac{32\pi}{\gamma} \left[\arccos \frac{2\pi}{m\tau} - \left[\left(\frac{m\tau}{2\pi}\right)^2 - 1 \right]^{1/2} \right] \tag{7}$$

Como en el caso del solitón el efecto neto de la renormalización y de las fluctuaciones es cambiar la constante de acoplamiento m^2/λ por $1/\gamma$. Entonces de acuerdo con (II. 43. 3)

$$W(E) = E\tau(E) + \frac{32\pi}{\gamma}\left[\arccos\frac{2\pi}{m\tau} - \left[\left(\frac{m\tau}{2\pi}\right)^2 - 1\right]^{1/2}\right] \qquad (1)$$

donde $\tau(E)$ satisface (II.43.4)

$$E = -\frac{d}{d\tau}\left[\frac{32\pi}{\gamma}\left(\arccos\frac{2\pi}{m\tau} - \left(\left(\frac{m\tau}{2\pi}\right)^2 - 1\right)^{1/2}\right)\right] = \frac{32\pi}{\gamma}\,\frac{1}{\tau}\left[\left(\frac{m\tau}{2\pi}\right)^2 - 1\right]^{1/2} \qquad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1)

$$W(E) = \frac{32\pi}{\gamma}\arccos\left(\frac{2\pi}{m\tau}\right) = \frac{32\pi}{\gamma}\arcsin\left(\frac{E\gamma}{16m}\right) \qquad (3)$$

y las masas de los estados ligados vienen dadas por

$$\frac{32\pi}{\gamma}\arcsin\left(\frac{M_N\gamma}{16m}\right) = 2N\pi$$

y por tanto

$$M_N = \frac{16m}{\gamma}\sin\left(\frac{N\gamma}{16}\right) \qquad (5)$$

y además de (2)

$$\frac{2\pi}{m\tau(M_N)} = \cos\left(\frac{N\gamma}{16}\right) \qquad (5)$$

Cuando N se aproxima a $8\pi/\gamma$ entonces $M_N \to 16m/\gamma$ y $\tau(M_N) \to \infty$. La correspondiente solución clásica doble tiende a desligarse cuando $\tau \to \infty$. Las soluciones doble solo existen para τ finita y positiva y por tanto los niveles energéticos (6) están definidos únicamente para

$$N = 1, 2, \ldots, < 8\pi/\gamma \qquad (6)$$

Con esta limitación, tenemos un conjunto finito de masas de estados solitón-antisolitón ligados. Hemos despreciado el modo traslacional que de haberlo tenido en cuenta nos hubiera dado

$$E_{m,N} = \left(M_N^2 + P_m^2\right)^{1/2} \qquad P_m L = 2m\pi \qquad (7)$$

Resumiendo el espectro de partículas en el Hamiltoniano de la ecuación de sine-Gordon es el siguiente: El solitón y el antisolitón que tienen una masa

$$M = \frac{8m}{\gamma} \qquad \gamma \equiv \frac{\lambda/m^2}{1 - \lambda/8\pi m^2} \qquad (8)$$

Los estados doblete producen la resultante serie de estados con masas

$$M_N = \frac{16m}{\gamma}\sin\left(\frac{N\gamma}{16}\right) \qquad N = 1, 2, \dots, < 8\pi/\gamma \qquad (2)$$

Consideremos ahora la interpretación del espectro de masas. Hay dos formas complementarias de ver los estados dobletes. El primero es que son estados ligados de N cuerpos formados por N cuantos usuales de la teoría. El segundo que son estados ligados solitón-antisolitón. Ambas versiones parecen físicamente aceptables, la primera es más natural en el límite de acoplamiento débil y la segunda para acoplamiento fuerte.

En el límite de acoplamiento débil $(\lambda/m^2 \ll 1)$ la masa del M_N puede desarrollarse $(\gamma \ll 1)$

$$M_N = \frac{16m}{\gamma}\left[\frac{N\gamma}{16} - \frac{1}{3!}\left(\frac{N\gamma}{16}\right)^3 + \dots\right]$$

$$\Rightarrow \quad M_N = N m \left[1 - \frac{1}{6}\left(\frac{N\lambda}{16m^2}\right)^2 + \dots\right] \qquad (2)$$

y en particular el estado más bajo tiene masa

$$M_1 = m\left[1 - \frac{1}{6}\left(\frac{\lambda}{16m^2}\right)^2 + \dots\right] \qquad (3)$$

es decir en el límite de acoplamiento débil M_1 tiende a m, la masa de la partícula elemental de la teoría. Es tentador por tanto identificar M_1 como la partícula "elemental" de la teoría. Entonces

$$M_N = N M_1 \left\{1 - \frac{1}{6}\left(\frac{\lambda}{16m^2}\right)^2 (N^2 - 1) + \dots\right\} \qquad (4)$$

que en el límite de acoplamiento débil puede considerarse como un estado poco ligado de N partículas "elementales" con una energía de ligadura

$$N M_1 - M_N = \frac{1}{6} M_1 \left(\frac{\lambda}{16m^2}\right)^2 (N^3 - N) + \dots \qquad (5)$$

Para indicar el estado con M_1 hemos usado la palabra "elemental". En realidad no hay distinción fundamental entre $N = 1$ y $N > 1$. Todas provienen de una única solución de la ecuación de sine-Gordon. Esto está en la línea de pensamiento de Chew al hablar de democracia entre las partículas.

En el límite $\lambda/m^2 \ll 1$ la ecuación de sine-Gordon se reduce (23.3) a una teoría ϕ^4, que en el límite no relativista se reduce a un potencial de tipo δ. La ecuación de Schrödinger correspondiente es

$$\left[-\frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \frac{\lambda}{8m^2}\sum_{i\neq j}\delta(x_i - x_j)\right]\psi_N^{(n)}(x_1 \dots x_N) = -\epsilon_N^{(n)}\psi_N^{(n)}(x_1 \dots x_N) \qquad (1)$$

que se puede resolver para el estado fundamental obteniéndose

$$\epsilon_N^{(0)} = \frac{1}{6}\, m \left(\frac{\lambda}{16 m^2}\right)^2 (N^3 - N) \qquad (2)$$

que coincide con la solución WBK al orden dominante. Mas aún se ha calculado $(2M_2 - M_1)/M_1$ hasta términos de orden $(\lambda/m^2)^4$ usando teoría de perturbaciones y ~~todos~~ ellos coinciden con los resultados obtenidos usando el W.B.K. Esto es una primera indicación de que en algún sentido los resultados del WBK pueden ser exactos. Calculando M_1 por teoría de perturbaciones los resultados no están de acuerdo con los del WBK. Podemos quizá concluir que el método WBK no determina la escala de masas, pero que los cocientes de las masas son exactos en esta aproximación.

Por el método WBK hemos obtenido energías reales y discreta M_N, $N < 8\pi/\gamma$, lo cual sugiere que son estados ligados. Pero en acoplamiento débil $M_N = NM_1 -$ (energía de ligadura de orden γ), de forma que para $N \geq 3$ estos estados están inmersos en el continuo de dos o más estados con $N = 1$. La simetría $\phi \to -\phi$ prohibe que M_3 se desintegre en dos partículas M_1, pero no hay razón que prohiba la desintegración de M_N con $N \geq 4$. Sin embargo la WBK predice también estabilidad en este caso. Se puede uno preguntar si en una teoría exacta, o en correcciones al WBK, la energía adquiriría una parte imaginaria que hace que los M_N $N \geq 4$ sean inestables. El trabajo de Fadeev apuntó sin embargo a la posibilidad de que ~~las~~ infinitas cantidades conservadas en la teoría clásica se mantienen en la cuantificación y que los estados $N \geq 4$ no se desintegran. Por otra parte en el artículo D.H.N mencionado antes y en trabajo posterior de E. WEINBERG [

] han probado que al menos en el orden mas bajo de teoría de perturbaciones estas desintegraciones no tienen lugar.

Parece que la ecuación de sine-Gordon ~~es~~ tal que los resultados obtenidos en la aproximación WBK son exactos

Hace ya años T.H.R. SKYRME Proc. Roy. Soc. A260, 127 (1961), Proc. Roy. Soc. A262, 233 (1961) Nuclear Phys. 31, 556 (1962) y D. FINKELSTEIN y C.W. MISNER Ann. Phys. 6, 230 (1959) sugirieron la posibilidad de que los solitones en la ecuación de Sine-Gordon, en una teoría cuantizada, tuvieran carácter de partículas. Además identificaron en algunos casos estas partículas como fermiones. Recientemente S. Coleman ha vuelto sobre este problema. El considera ~~la~~ la densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi(x)\partial^\mu \phi(x) + m_0^2 \frac{m^2}{\lambda}\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{m}\phi(x)\right) - m_0^2\frac{m^2}{\lambda^2} \qquad (1)$$

y los resultados de su trabajo se pueden resumir en los siguientes puntos

i) Como en toda teoría de campos escalar en 1+1 dimensiones con interacciones no derivativas, todas las divergencias que aparecen orden por orden en teoría de perturbaciones pueden ser eliminadas mediante el procedimiento de ordenar normalmente el Hamiltoniano. Para (1) esto es equivalente a renormalización multiplicativa de m_0 y una renormalización aditiva del último término. λ no queda renormalizado

ii) Si $\lambda/m^2 \geqslant 8\pi$, la energía por unidad de volumen no está acotada por abajo y la teoría carece de estado fundamental.

iii) Si $\lambda/m^2 < 8\pi$, la teoría es equivalente al sector de carga cero del modelo de Thirring con masa: Esto es sorprendente pues el modelo de Thirring es una teoría canónica de campos cuyo Hamiltoniano se expresa en términos de campos de Fermi únicamente

iv) Si $\lambda/m^2 = 8\pi$ la teoría de sine-gordon describe el sector de carga nula de una teoría de Dirac libre con masa.

Aclaremos los dos últimos puntos. El modelo de Thirring descrito en

W. THIRRING Ann. Phys. (N.Y) <u>3</u>, 91 (1958)

V. GLASER Nuov. Cim. <u>9</u>, 990 (1958)

K. JOHNSON Nuov. Cim. <u>20</u>, 773 (1961)

C. SOMMERFIELD . Ann. Phys. (N.Y) <u>26</u>, 1 (1963)

B. KLAIBER "Lectures in Theoretical Physics" Boulder 1967.

Es una teoría de un único campo de Dirac en dimensión 1+1 cuya dinámica dada, en el caso de masa nula, por

$$\mathcal{L}(x) = \bar{\Psi}(x) i \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) - \frac{1}{2} g\, j^\mu(x)\, j_\mu(x) \qquad (2)$$

$$j^\mu(x) = \bar{\Psi}(x)\gamma^\mu \psi(x)$$

donde g es un parámetro libre, la constante de acoplamiento. Las ambigüedades procedentes de la definición de $j^\mu(x)$ se resuelven exigiendo que satisfaga las identidades de Ward y entonces no es necesario proceder a nuevas renormalizaciones. El modelo es exactamente resoluble para $g > -\pi$.

En el modelo de Thirring sin masa es posible definir una densidad escalar renormalizada

$$\sigma(x) = Z\,\bar{\Psi}(x)\,\psi(x) \qquad (3)$$

donde Z es una constante dependiente del corte. El modelo de Thirring con masa se define añadiendo a $\mathcal{L}$ un término proporcional a $\sigma(x)$

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L} - m' \sigma(x) \qquad (1)$$

donde m' es un parámetro real que no debe identificarse como la masa de ninguna partícula estable. El modelo (1) no tiene solución exacta y ni siquiera se conoce si para algún valor de g es una teoría buena. Sin embargo es cierto que cada término en la serie perturbativa para las funciones de Green en potencias de m' está bien definido, excepto por problemas infrarrojos triviales asociados con el hecho de que se hace una perturbación en la masa alrededor de una teoría sin masa. Estos se resuelven por el método usual de considerar en lugar de (1)

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x)\, i\gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) - \frac{1}{2} g\, j^\mu(x)\, j_\mu(x) - m'\sigma(x) f(x) \qquad (2)$$

donde $f(x)$ es una función espacio-temporal con soporte compacto.

La serie perturbativa para (2) es término a término idéntica a la serie de perturbaciones de la ecuación de sine-Gordon en potencias de m_0^2, si se hacen las siguientes identificaciones

$$\frac{4\pi m^2}{\lambda} = 1 + \frac{1}{\pi} g$$

$$m_0^2 \frac{m^2}{\lambda} \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{m} \phi(x)\right) = - m' \sigma(x) \qquad (3)$$

$$- \frac{\sqrt{\lambda}}{m} \frac{1}{2\pi} \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi(x) = j^\mu$$

Notar que si $\lambda/m^2 = 4\pi$, entonces $g=0$ y el resultado (v) se sigue.

Notar que a medida que γ crece el número de estados ligados decrece y para $\gamma = 8\pi$ incluso M_1 desaparece. Notar que $\gamma = 8\pi$ equivale a $\lambda/m^2 = 4\pi$ y $g=0$ es decir que el valor de la constante de acoplamiento para el que todos los estados bosón de la teoría de sine-Gordon quedan no ligados en la aproximación WBK, es precisamente el mismo valor en el que los fermiones del modelo de Thirring resultan libres.

IV SOLUCIONES CLASICAS

A. CHAKRABARTI.- "Introduction to Classical Solution of Yang-Mills Field Equations" Based on talks given at Rencontre de Rabat. May 1978.

I. Campos gauge

Vamos a dar algunos resultados que nos seran útiles en lo que sigue. Consideremos la densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}[\chi(x), \partial_\mu \chi(x)] \tag{1}$$

donde $\chi(x)$ es el símbolo para un conjunto de campos. Consideremos por otra parte un grupo de Lie compacto y semi-simple G de orden N, y supongamos que $\chi(x)$ se transforma de acuerdo con una representación de G, irreducible o no, en la que los generadores vienen representados por N matrices T_a $(a = 1 \ldots N)$ hermíticas que obedecen las reglas de conmutación

$$[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c \tag{2}$$

donde los coeficientes totalmente antisimétricos f_{abc} son las llamadas constantes de estructura del grupo.

Supongamos que $\mathcal{L}(x)$ es invariante bajo una transformación global de G, es decir que bajo la transformación infinitesimal

$$\chi(x) \longrightarrow \chi'(x) = \chi(x) + i\epsilon^a T_a \chi(x) \tag{3}$$

con $\partial_\mu \epsilon^a \equiv 0$, el lagrangiano queda invariante. Como

$$\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}'(x) - \mathcal{L}(x) = i\epsilon^a \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\chi} T_a \chi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\chi)} T_a \partial_\mu \chi \right] =$$

$$= i\epsilon^a \left\{ \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\chi} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\chi)} \right] T_a \chi + \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\chi)} T_a \chi \right] \right\}$$

vemos que la invariancia de $\mathcal{L}(x)$ implica que para las soluciones de las ecuaciones del movimiento, las corriente

$$J^\mu_a(x) \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\chi)} T_a \chi \qquad a = 1, 2 \ldots N \tag{4}$$

son conservadas

$$\partial_\mu J^\mu_a(x) = 0 \tag{5}$$

Por otra parte las cargas asociadas se definen como

$$Q_a = c \int d^3x \; J^0_a(x) \tag{1}$$

donde c es una constante de normalización y satisfacen $\dot{Q}_a = 0$, si se supone que los términos de superficie se anulan.

Veamos ahora lo que sucede si suponemos transformaciones locales es decir $\epsilon_a(x)$. Entonces la densidad lagrangiana $\mathcal{L}(x)$ deja de ser invariante pues

$$\partial_\mu \chi(x) \longrightarrow \partial_\mu \chi'(x) = [1 + i\,\epsilon^a(x)\, T_a]\, \partial_\mu \chi(x) + i\,(\partial_\mu \epsilon^a(x))\, T_a\, \chi(x) \tag{2}$$

rompiendo el último término la invariancia de la teoría. La forma de restaurar la invariancia es reemplazando la derivada normal ∂_μ por la derivada covariante D_μ

$$\partial_\mu \chi(x) \longrightarrow D_\mu \chi(x) = [\partial_\mu - i g\, A^a_\mu(x)\, T_a]\, \chi(x) \tag{3}$$

donde hemos introducido un conjunto de N campos vectoriales $A_\mu^a(x)$ y exigiendo que estos se transformen de manera que

$$D_\mu \chi(x) \longrightarrow D'_\mu \chi'(x) = [1 + i\,\epsilon^a(x)\, T_a]\, D_\mu \chi(x) \tag{4}$$

con lo cual la invariancia de $\mathcal{L}(x)$ es mantenida. Una simple algebra permite deducir de (4) que la ley infinitesimal de transformación de los nuevos campos es

$$A^a_\mu(x) \longrightarrow A'^a_\mu(x) = A^a_\mu(x) - f_{abc}\, \epsilon^b(x)\, A^c_\mu(x) + \frac{1}{g}\, \partial_\mu \epsilon^a(x) \tag{5}$$

En ocasiones es conveniente hablar de transformaciones finitas

$$\begin{aligned} \chi(x) &\longrightarrow \chi'(x) = S(x)\, \chi(x) \\ S(x) &= \exp\{ i\,\epsilon^a(x)\, T_a \} \end{aligned} \tag{6}$$

Entonces la derivada covariante es

$$\begin{aligned} D_\mu \chi(x) &= [\partial_\mu - i g\, A_\mu(x)]\, \chi(x) \\ A_\mu(x) &\equiv A^a_\mu(x)\, T_a \end{aligned} \tag{7}$$

y la condición

$$D'_\mu \chi'(x) = S(x)\, D_\mu \chi(x) \tag{8}$$

da para la ley de transformación a los campos

$$A_\mu(x) \longrightarrow A'_\mu(x) = S(x)\, A_\mu(x)\, S^{-1}(x) - \frac{i}{g} \left(\partial_\mu S(x)\right) S^{-1}(x) =$$

$$= S(x)\, A_\mu(x)\, S^{-1}(x) + \frac{i}{g}\, S(x)\, \partial_\mu S^{-1}(x) =$$

$$= \frac{i}{g}\, S(x) \left[\partial_\mu - i g A_\mu(x)\right] S^{-1}(x) \tag{1}$$

Debemos ahora construir los términos de energía cinética para los nuevos campos. A este fin introduciremos las intensidades de campo $F^a_{\mu\nu}(x)$ definidas como

$$F^a_{\mu\nu}(x)\, T_a\, \chi(x) \equiv \frac{i}{g} \left[D_\mu, D_\nu\right] \chi(x) \tag{2}$$

esto es

$$F^a_{\mu\nu}(x) \equiv \partial_\mu A^a_\nu(x) - \partial_\nu A^a_\mu(x) + g\, f_{abc}\, A^b_\mu(x)\, A^c_\nu(x) \tag{3}$$

o equivalentemente

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) - i g \left[A_\mu(x), A_\nu(x)\right] \tag{4}$$

De su definición la ley de transformación de $F_{\mu\nu}(x)$ es

$$F_{\mu\nu}(x) \longrightarrow F'_{\mu\nu}(x) = S(x)\, F_{\mu\nu}(x)\, S^{-1}(x) \tag{5}$$

De todo esto se deduce que la densidad lagrangiana invariante bajo las transformaciones de gauge locales consideradas es

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}\left[\chi(x), D_\mu \chi(x)\right] - \frac{1}{4} F^a_{\mu\nu}(x)\, F^{a\,\mu\nu}(x) \tag{6}$$

El punto final es simple y sencillo: De las definiciones de D_μ y $F_{\mu\nu}$ es fácil ver que si en el caso no abeliano tenemos una solución clásica $A_\mu(x)$ para una constante de acoplamiento 1 entonces para la constante g una solución es $\frac{1}{g} A_\mu(x)$. Vemos pues que una invariancia gauge local no abeliana conduce a una estructura no lineal tal que las soluciones son no analíticas en la constante de acoplamiento g. Este aspecto no perturbativo de las soluciones clásicas de las teorías gauge es muy importante.

II. Soluciones estáticas : monopolos magnéticos

Hemos visto como las simetrías gauge locales no-Abelianas conducen a tipos particulares de ecuaciones de campos no-lineales. Una clara demostración de sus consecuencias puede obtenerse comparando las soluciones de tipo monopolo para el caso Abeliano y no-Abeliano

i) Monopolos de Dirac (Abeliano)

Es bien sabido que en la teoría de Maxwell el potencial vector $\vec{A}(\vec{x})$ no puede ser regular si deseamos que existan cargas magnéticas aisladas. En particular consideremos ~~el~~ campo creado por un monopolo en el origen

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{q_m}{4\pi} \frac{\vec{r}}{r^3} \tag{1}$$

Para cualquier superficie cerrada S que contenga el origen se tiene

$$\int_S d\vec{S} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = q_m \tag{2}$$

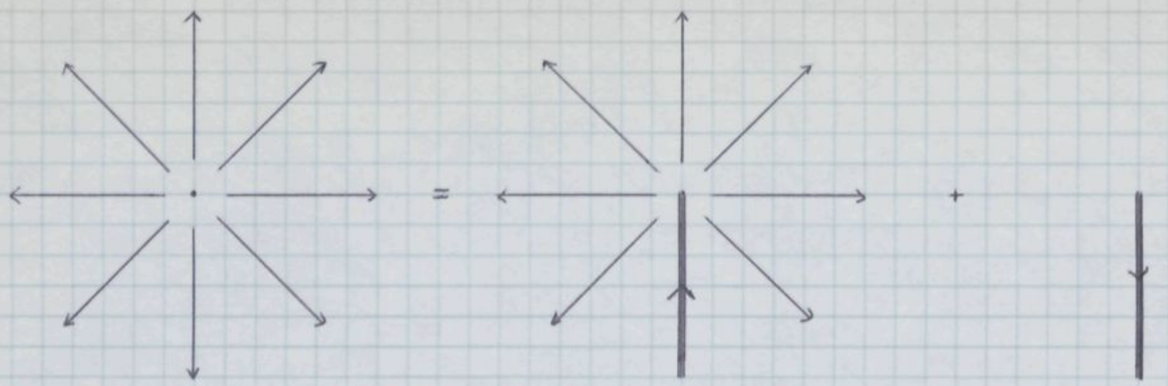
Pero si existiera un potencial vector regular tal que $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ por doquier entonces la integral se anula. Por tanto $\vec{A}$ no puede existir por doquier aun cuando $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}$ es únicamente distinta de cero en el origen. Lo máximo que podemos lograr es que $\vec{A}$ exista por doquier salvo sobre una línea que une el origen con el infinito y que salvo en ella $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. Para ver esto consideremos el campo creado por un solenoide infinitamente largo y delgado situado a lo largo del eje z negativo, con su polo positivo que tiene intensidad q_m situado en el origen. El campo magnético creado por él es

$$\vec{B}_{sol}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} q_m \frac{\vec{r}}{r^3} + q_m \, \Theta(-z) \, \delta(x) \, \delta(y) \, \hat{z} \tag{3}$$

Notar que este campo magnético difiere de $\vec{B}(\vec{r})$ sólo a lo largo del eje z negativo. y es tal que $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_{sol}(\vec{r}) = 0$, incluso en el origen. y por tanto puede ser representado por doquier mediante un potencial $\vec{A}(\vec{r})$ y podemos escribir

$$\frac{1}{4\pi} q_m \frac{\vec{r}}{r^3} = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) - q_m \, \Theta(-z) \, \delta(x) \, \delta(y) \, \hat{z} \tag{4}$$

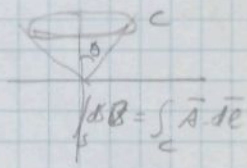
La línea ocupada por el solenoide es la llamada cuerda de Dirac. Gráficamente



Debemos imaginar $\vec{B}(\vec{r})$ como estando representado no sólo por $\vec{A}(\vec{r})$, sino por $\vec{A}(\vec{r})$ juntamente con una cuerda $\mathcal{S}$ sobre la que es singular.

Elegida la cuerda sobre el eje z negativo podemos fácilmente calcular $\vec{A}(\vec{r})$ usando la simetría axial del problema. Usando coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) esperamos por simetría hallar un potencial vector $\vec{A}(\vec{r}) = A(r, \theta)\,\hat{\phi}$., donde $\hat{\phi}$ es el vector unitario en la dirección ϕ. El flujo magnético a través de un círculo, C, correspondiente a valores fijos de r y θ, y con ϕ variando entre 0 y 2π es dado por el ángulo subtendido por C desde el origen multiplicado por $g_m/4\pi$ es decir $2\pi g_m(1-\cos\theta)/4\pi$. Por tanto

$$\frac{1}{2} g_m (1-\cos\theta) = \int d\vec{S}\cdot\vec{B} = 2\pi A(r,\theta)\, r \sin\theta \qquad (1)$$



de donde

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{g_m}{4\pi r}\,\frac{(1-\cos\theta)}{\sin\theta}\,\hat{\phi} = \frac{g_m}{4\pi r}\tan\frac{\theta}{2}\,\hat{\phi} \qquad (2)$$

que muestra la singularidad sobre el eje z negativo.

Este potencial vector no es, por supuesto, único. En primer lugar podemos hacer una transformación de gauge no singular $\vec{A}(\vec{r}) \xrightarrow{\Lambda} \vec{A}(\vec{r}) + \vec{\nabla}\Lambda(\vec{r})$, donde $\Lambda(\vec{r})$ es una función univaluada y no singular. El término $\vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r})$ en (4.4) no cambiará y por lo tanto tampoco debe hacerlo la cuerda de Dirac. Pero la posición de la cuerda es arbitraria y por tanto debemos encontrar la relación entre los potenciales singulares correspondientes a distintas posiciones de la cuerda, que ni siquiera debe ser rectilínea. Es necesario ampliar el concepto de transformación de gauge para poder mover la cuerda. Escribamos (4.4) como

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r}) + \vec{h}(\mathcal{S}, \vec{r}) \qquad (3)$$

donde $\vec{h}(\mathcal{S}, \vec{r})$ representa la contribución de la cuerda $\mathcal{S}$., un flujo de intensidad g_m a lo largo de $\mathcal{S}$ desde el origen al infinito

$$\vec h(\mathscr{J}, \vec r) = q_m \int_{\mathscr{J}} d^3x\ \delta(\vec x - \vec r) \qquad (1)$$

Según se ha definido antes la cuerda $\mathscr{J}$ está sobre el eje z negativo. Consideremos ahora otra cuerda $\mathscr{J}'$ que va del origen al infinito. Indiquemos por Γ la curva $-\mathscr{J}'$ ($\mathscr{J}'$ tomada en dirección contraria) seguida de $\mathscr{J}$. Podemos tratar Γ como una curva cerrada bien sea haciendo hipótesis convenientes con lo que sucede en el infinito o bien suponiendo que $\mathscr{J}$ y $\mathscr{J}'$ difieren sólo en una parte finita. Sea $\Omega(\vec r)$ el ángulo sólido desde $\vec r$ por alguna superficie particular que se apoye en Γ. Distintas elecciones de la superficie conducirían a valores de Ω que diferirían en 4π, pero todas ellas conducirían al mismo valor de $\vec\nabla\Omega(\vec r)$ excepto cuando $\vec r \in \Gamma$ en cuyo caso tanto $\Omega(\vec r)$ como $\vec\nabla\Omega(\vec r)$ estarán siempre mal definidas. Consideremos ahora la transformación de gauge

$$\vec A(\vec r) \longrightarrow \vec A'(\vec r) = \vec A(\vec r) - \frac{q_m}{4\pi}\vec\nabla\Omega(\vec r) \qquad (2)$$

donde $\vec r \notin \Gamma$. Entonces $\vec\nabla\times\vec A'(\vec r) = \vec\nabla\times\vec A(\vec r) = \vec B$ si $\vec r \notin \Gamma$. Aplicando el teorema de Stokes a un pequeño lazo que rodee Γ vemos que el flujo de $\vec\nabla\times(\bar A'(\vec r) - \bar A(\vec r))$ a lo largo de Γ es $q_m \cdot \mathscr{J}$ por tanto

$$\vec\nabla\times[\bar A'(\vec r) - \bar A(\vec r)] = \vec h(\mathscr{J}, \vec r) - \vec h(\mathscr{J}', \vec r) \qquad (3)$$

esto es

$$\vec B(\vec r) = \vec\nabla\times\vec A(\vec r) + \vec h(\mathscr{J}, \vec r) = \vec\nabla\times\vec A'(\vec r) + \bar h(\mathscr{J}', \vec r) \qquad (4)$$

Por tanto una transformación de la forma (2) desplaza la cuerda de Dirac y resulta pues que usando transformaciones de gauge multivaluadas podemos relacionar cualquier par de potenciales de Dirac para un monopolo magnético.

La condición crucial de consistencia es que la transformación de gauge generalizada debe dar ciertos resultados cuánticos equivalentes. Esto será así si el efecto de la transformación de gauge en la función de onda

$$\Psi(\vec x; t) \longrightarrow \Psi'(\vec x; t) = e^{-iq_e\Lambda(\vec x; t)/\hbar c}\,\Psi(\vec x; t) \qquad (5)$$

no produce un resultado multivalente. Como hay una ambigüedad de 4π en la definición de $\Omega(\vec r)$ necesitamos que

$$\frac{1}{4\pi c} q_e q_m = \frac{1}{2}\hbar n \qquad n = 0, \pm1, \pm2, \ldots \qquad (6)$$

que es la condición de cuantización de Dirac que permite probar que de existir los monopolos las cargas eléctricas están cuantificadas.

Veamos otra peculiar consecuencia del monopolo de Dirac: consideremos una partícula de masa m y carga q_e que se mueve lentamente en el campo magnético creado por un monopolo de carga q_m anclado en el origen. La ecuación del movimiento es

$$m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = q_e \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}(\vec{r}) \tag{1}$$

donde $\vec{B}(\vec{r})$ está dado en (4.1). De aquí

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r}\times m\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{1}{4\pi} q_e q_m \frac{1}{c r^3}\, \vec{r}\times\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{r}\right) = \frac{1}{4\pi} q_e q_m \frac{1}{c r^3}\left[r^2\frac{d\vec{r}}{dt} - \left(\vec{r}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}\right)\vec{r}\right]$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{d}{dt}\left[\vec{r}\times m\frac{d\vec{r}}{dt} - \frac{1}{4\pi} q_e q_m \frac{1}{c}\frac{\vec{r}}{r}\right] = 0 \tag{2}$$

Este resultado debido a H. POINCARÉ [Compt. Rend. Acad. Sc. Paris $\underline{123}$, 530 (1896)] sugiere que el momento angular total conservado es

$$\vec{J} = \vec{r}\times m\frac{d\vec{r}}{dt} - \frac{1}{4\pi c} q_e q_m \frac{\vec{r}}{r} \tag{3}$$

El primer término es el momento angular orbital del monopolo. El otro término debe forzosamente proceder del campo electromagnético. En efecto el momento angular clásico del campo electromagnético viene dado por

$$\vec{J}_{em} = \frac{1}{4\pi c}\int d^3x \left[\vec{r}\times(\vec{E}\times\vec{B})\right] \tag{4}$$

donde $\vec{B}$ viene dado en (4.1) y $\vec{E}$ es el campo debido a la carga eléctrica situada en $\vec{r}$. De aquí

$$J^i_{e.m} = \frac{q_m}{(4\pi)^2 c}\int d^3x\, E^j\left(\delta_{ij} - \hat{x}^i\hat{x}^j\right)\frac{1}{x} = \frac{q_m}{(4\pi)^2 c}\int d^3x\, E^j \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{x^i}{x}\right) =$$

$$= -\frac{q_m}{(4\pi)^2 c}\int d^3x \frac{x^i}{x}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) = -\frac{1}{4\pi c} q_m q_e \int d^3x \frac{x^i}{x}\,\delta(\vec{x}-\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi c} q_e q_m \frac{x^i}{x}$$

esto es

$$\vec{J}_{e.m} = -\frac{1}{4\pi c} q_e q_m \frac{\vec{r}}{r} \tag{5}$$

Por otra parte

$$\hat{r}\cdot\vec{J} = -\frac{1}{4\pi c} q_e q_m \tag{6}$$

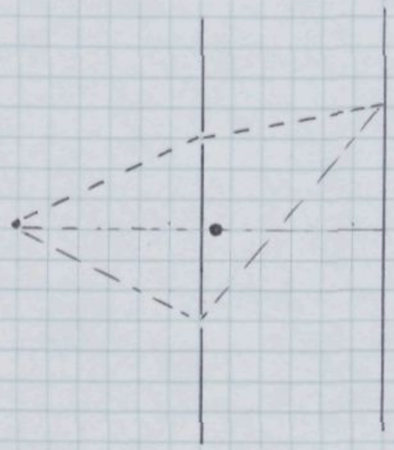
y de la condición de cuantificación de Dirac.

$$\hat{r}\cdot\vec{J} = -\frac{1}{2}\hbar n \qquad n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots \tag{1}$$

Para valores de n impares esto conduce a valores semienteros del sistema si bien inicialmente no había fermiones de spin semientero en el sistema. Mas sobre esto en A.S. GOLDHABER Phys. Rev. Lett. 36, 1122 (1976) que demuestra como fermiones, con el spin y la estadística correcta, pueden ser construidos a partir de bosones

Hay una gran bibliografía sobre monopolos. El lector interesado puede consultar P. GODDARD y D.I. OLIVE CERN Th 2455 (1977).

Queremos en particular destacar el trabajo de T.T. WU y C.N. YANG Phys. Rev. D12, 3845 (1975) y Nucl. Phys. B107, 365 (1976). La experiencia de Bohm-Aharanov explora el efecto de un campo electromagnético sobre un haz de electrones en una región donde el campo magnético es nulo. Aunque el campo $\vec{B}$ sea nulo fuera del solenoide, no



existe ningún gauge para el que $\vec{A}=0$ en esta región. Localmente el gauge puede anularse, pero no globalmente, porque dicha región no es simplemente conexa (idealizamos a un solenoide infinito). La figura de interferencia depende del factor de fase

$$\exp\left(-i\,\frac{q_e}{\hbar c}\oint dx_\mu\, A^\mu(x)\right) \tag{2}$$

donde $q_e=-|e|$ y que es igual a

$$\exp\left(i\,\frac{q_e}{\hbar c}\,\Phi\right) \tag{3}$$

donde Φ es el flujo magnético en el solenoide cilíndrico. Entonces dos casos a y b para los que

$$\Phi_a-\Phi_b = 2\pi\,(\text{entero})\times\frac{\hbar c}{q_e} \tag{4}$$

darán origen a las mismas franjas de interferencia. Entonces Wu y Yang prueban el siguiente teorema "Si (4) se satisface, ningún experimento fuera del cilindro es capaz de diferenciar entre los casos a) y b)". En efecto, consideremos en primer lugar un electrón fuera del cilindro. Consideremos una transformación de gauge que nos pase del caso a) al b)

$$\Psi_b(\vec{x};t) = e^{+\frac{iq_e}{\hbar c}\Lambda(x)}\,\Psi_a(\vec{x};t)$$
$$A_b^\mu(x) = A_a^\mu(x)+\partial^\mu\Lambda(x) \tag{5}$$

o equivalentemente

Veamos otra peculiar consecuencia del monopolo de Dirac: consideremos una partícula de masa m y carga q_e que se mueve lentamente en el campo magnético creado por un monopolo de carga q_m anclado en el origen. La ecuación del movimiento es

$$m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = q_e \frac{\dot{\vec{r}}}{c} \times \vec{B}(\vec{r}) \tag{1}$$

donde $\vec{B}(\vec{r})$ está dado en (4.1). De aquí

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times m \frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{1}{4\pi} q_e q_m \frac{1}{c r^3} \vec{r} \times \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{r}\right) = \frac{1}{4\pi} q_e q_m \frac{1}{c r^3}\left[r^2 \frac{d\vec{r}}{dt} - \left(\vec{r}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}\right)\vec{r}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left[\vec{r} \times m\frac{d\vec{r}}{dt} - \frac{1}{4\pi} q_e q_m \frac{1}{c}\frac{\vec{r}}{r}\right] = 0 \tag{2}$$

Este resultado debido a H. POINCARÉ [Compt. Rend. Acad. Sc. Paris 123, 530 (1896)] sugiere que el momento angular total conservado es

$$\vec{J} = \vec{r} \times m \frac{d\vec{r}}{dt} - \frac{1}{4\pi c} q_e q_m \frac{\vec{r}}{r} \tag{3}$$

El primer término es el momento angular orbital del monopolo. El otro término debe forzosamente provenir del campo electromagnético. En efecto el momento angular clásico del campo electromagnético viene dado por

$$\vec{J}_{e.m} = \frac{1}{4\pi c}\int d^3x \left[\vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{B})\right] \tag{4}$$

donde $\vec{B}$ viene dado en (4.1) y $\vec{E}$ es el campo debido a la carga eléctrica situada en $\vec{r}$. De aquí

$$J^i_{e.m} = \frac{q_m}{(4\pi)^2 c}\int d^3x\, E^j\left(\delta_{ij} - \hat{x}^i\hat{x}^j\right)\frac{1}{x} = \frac{q_m}{(4\pi)^2 c}\int d^3x\, E^j \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{x^i}{x}\right) =$$

$$= -\frac{q_m}{(4\pi)^2 c}\int d^3x \frac{x^i}{x}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) = -\frac{1}{4\pi c} q_m q_e \int d^3x \frac{x^i}{x}\,\delta(\vec{x}-\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi c} q_e q_m \frac{x^i}{x}$$

esto es

$$\vec{J}_{e.m} = -\frac{1}{4\pi c} q_e q_m \frac{\vec{r}}{r} \tag{5}$$

Por otra parte

$$\hat{r}\cdot\vec{J} = -\frac{1}{4\pi c} q_e q_m \tag{6}$$

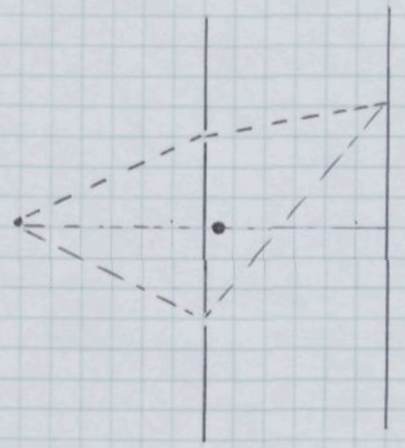
y de la condición de cuantificación de Dirac.

$$\hat{r} \cdot \vec{J} = -\frac{1}{2} \hbar m \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{1}$$

Para valores de m impares esto conduce a valores semienteros del sistema si bien inicialmente no había fermiones de spin semientero en el sistema. Mas sobre esto en A. S. GOLDHABER Phys. Rev. Lett. 36, 1122 (1976) que demuestra como fermiones, con el spin y la estadística correcta, pueden ser construidos a partir de bosones.

Hay una gran bibliografía sobre monopolos. El lector interesado puede consultar P. GODDARD y D.I. OLIVE CERN Th 2455 (1977).

Queremos en particular destacar el trabajo de T. T. WU y C.N. YANG Phys. Rev. D12, 3845 (1975) y Nucl. Phys. B107, 365 (1976). La experiencia de Bohm-Aharanov explora el efecto de un campo electromagnético sobre un haz de electrones en una región donde el campo magnético es nulo. Aunque el campo $\vec{B}$ sea nulo fuera del solenoide, no existe ningún gauge para el que $\vec{A} = 0$ en esta región. Localmente el gauge puede anularse, pero no globalmente, porque dicha región no es simplemente conexa (idealizamos a un solenoide infinito). La figura de interferencia depende del factor de fase



$$\exp\left(-i \frac{q_e}{\hbar c} \oint dx_\mu \, A^\mu(x)\right) \tag{2}$$

donde $q_e = -|e|$ y que es igual a

$$\exp\left(i \frac{q_e}{\hbar c} \Phi \right) \tag{3}$$

donde Φ es el flujo magnético en el solenoide cilíndrico. Entonces dos casos a y b para los que

$$\Phi_a - \Phi_b = 2\pi \,(\text{entero}) \times \frac{\hbar c}{q_e} \tag{4}$$

darán origen a las mismas franjas de interferencia. Entonces Wu y Yang prueban el siguiente teorema " Si (4) se satisface, ningún experimento fuera del cilindro es capaz de diferenciar entre los casos a) y b) ". En efecto, consideremos en primer lugar un electrón fuera del cilindro. Consideremos una transformación de gauge que nos pase del caso a) al b)

$$\Psi_b(\vec{x};t) = e^{+\frac{i q_e}{\hbar c}\Lambda(x)} \, \Psi_a(\vec{x};t) \tag{5}$$

$$A_b^\mu(x) = A_a^\mu(x) + \partial^\mu \Lambda(x)$$

o equivalentemente

$$S \equiv e^{-i \frac{q_e}{\hbar c} \Lambda(x)}$$

$$\Psi_b(x) = S^{-1}(x)\, \Psi_a(x) \quad , \quad A^\mu_b(x) = A^\mu_a(x) - i \frac{\hbar c}{q_e} S(x) \frac{\partial S^{-1}(x)}{\partial x_\mu} \tag{1}$$

Para que esta transformación se pueda definir $S(x)$ debe ser univaluada, pero no es necesario que lo sea $\Lambda(x)$. Por otra parte el hecho de que $A^\mu_b(x) - A^\mu_a(x)$ tenga rotacional nulo garantiza que $\partial_\mu \partial_\nu \Lambda(x) = \partial_\nu \partial_\mu \Lambda(x)$ y por tanto que $\Lambda(x)$ existe. Sin embargo es una cantidad multivaluada con un incremento

$$\Delta \Lambda = \oint [A^\mu_b - A^\mu_a]\, dx_\mu = \Phi_b - \Phi_a \tag{2}$$

cada vez que se da una vuelta alrededor del cilindro. Si se cumple (8.4) entonces $S(x)$ es univaluada. Por tanto los casos a) y b) fuera del cilindro se pueden transformar el uno en el otro mediante una transformación de gauge y ningún efecto físico observable los puede diferenciar. El mismo argumento es aplicable si se considera la función de ondas de un sistema de partículas en interacción si todas las cargas son múltiplos enteros de $|e|$.

De este teorema se puede concluir:

i) El tensor $F_{\mu\nu}(x)$ subdescribe el electromagnetismo, es decir situaciones físicas distintas en una región del espacio pueden tener el mismo $F_{\mu\nu}(x)$.

ii) La fase (8.2) sobredescribe el electromagnetismo, esto es distintas fases en una región pueden describir la misma situación física.

iii) Lo que da una descripción ajustada y completa del electromagnetismo es

$$\exp\left(- i \frac{q_e}{\hbar c} \oint dx_\mu\, A^\mu(x)\right) \tag{3}$$

La expresión anterior es menos fácil de usar (especialmente cuando se generaliza a grupos no-Abelianos) como concepto fundamental que el concepto de factor de factor de fase para cualquier camino de P a Q

$$\xi_{QP} = \exp\left\{ - i \frac{q_e}{\hbar c} \int_P^Q dx_\mu\, A^\mu(x) \right\} \tag{4}$$

Siguiendo a C.N. YANG Phys. Rev. Lett. 33, 445 (1974) llamaremos a (4) un factor de fase no-integrable (esto es dependiente del camino). El electromagnetismo es pues la manifestación invariante gauge de un factor de fase no integrable.

La definición del factor de fase no integrable (4) puede originar problemas en el caso general. Para ilustrar el problema consideraremos el caso del monopolo de Dirac. Consideremos un monopolo magnético estático de intensidad $q_m \neq 0$ en el origen

$\vec{r}=0$ y consideremos una región R del espacio tiempo consistente en todo el espacio-tiempo menos el origen $\vec{r}=0$. Entonces se puede probar que: "No existe un $A^\mu(x)$ libre de singularidades en todo R". En efecto supongamos que existiera un $A^\mu(x)$ libre de singularidades en todo R y consideremos la integral $\left(-\oint dx_\mu A^\mu\right)$ para el tiempo $t=0$, alrededor de un circulo a valores de las coordenadas esféricas r y θ fijas y con $0 \le \phi < 2\pi$. Esta integral, que indicaremos por $\Omega(r,\theta)$ para $r>0$, es igual al flujo magnético a través de un casquete que se apoya en el circulo o más explicitamente $\Omega(r,\theta) = 2\pi g_m (1-\cos\theta)$. En $\theta=0$ $\Omega(r,0)=0$, aumentando θ el valor de $\Omega(r,\theta)$ aumenta monotonamente hasta que $\Omega(r,\pi) = 4\pi g_\mu$. Pero para $\theta=\pi$ el circulo se ha convertido en un punto y por tanto $\Omega(r,\pi)=0$ pues A_μ no tiene singularidades. Hemos obtenido una contradicción y el teorema queda probado.

Cuando $A_\mu(x)$ tiene singularidades, el factor de fase no integrable se hace indefinido si el camino cruza una singularidad. Esta dificultad debe ser resuelta para usar el factor de fase no integrable como un concepto fundamental para describir el electromagnetismo. Puede resolverse de la siguiente forma. Dividamos R en dos regiones R_a y R_b que se superpongan y definamos en cada una de ellas $(A_\mu)_a$ y $(A_\mu)_b$ que en ellas están libres de singularidades de forma tal que

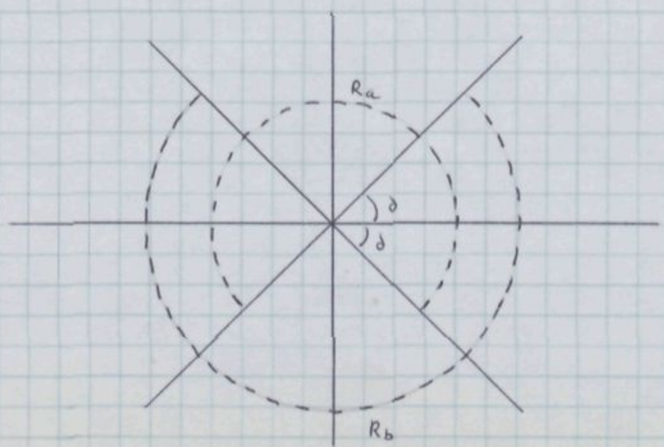
i) Sus rotacionales son iguales al campo magnético

ii) En $R_a \cap R_b \neq \phi$ las cantidades $(A_\mu)_a$ y $(A_\mu)_b$ están relacionados por una transformación de gauge.

Una posible elección es $(0 < \delta \le \pi/2)$

R_a : $0 \le \theta < \pi/2 + \delta$, $r>0$, $0 \le \phi < 2\pi$ todo t

R_b : $\pi/2 - \delta < \theta \le \pi$, $r>0$, $0 \le \phi < 2\pi$ todo t



Además

$$R_a \; : \; (A^t)_a = (A^r)_a = (A^\theta)_a = 0 \qquad (A^\phi)_a = + \frac{q_m}{4\pi r \sin\theta}(1-\cos\theta)$$

(1)

$$R_b \; : \; (A^t)_b = (A^r)_b = (A^\theta)_b = 0 \qquad (A^\phi)_b = - \frac{q_m}{4\pi r \sin\theta}(1+\cos\theta)$$

y en ambas regiones $\vec{\nabla}\times\vec{A}$ es el campo magnético creado por el monopolo en aquella región. Además en $R_a \cap R_b$ los dos potenciales están relacionados por una transformación (9.1) en la que

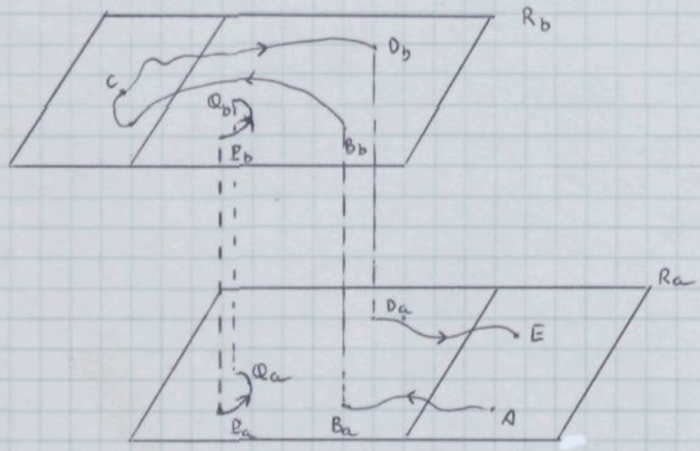
$$S = \exp\left(+ i \, \frac{2 q_e q_m}{4\pi \hbar c} \, \phi \right) \tag{2}$$

(Recordar $\vec{\nabla} = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \hat{\phi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}$). Esta es una transformación de gauge permitida si y solo si

$$\frac{q_e q_m}{4\pi c} = \frac{1}{2}\hbar n \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{3}$$

que es la condición de cuantización de Dirac. Tenemos pues

$$S = e^{i n \phi} \tag{5}$$



Para definir el factor de fase para un camino nos referiremos a la figura adjunta, donde un punto en la región de superposición tal como el P se considerará como dos puntos $P_a \in R_a$ y $P_b \in R_b$. Si el camino está enteramente en R_a o en R_b definiremos ξ mediante (9.4) con $(A^\mu)_a$ o $(A^\mu)_b$ en el exponente. Si el camino $P \to Q$ se halla enteramente en $R_a \cap R_b$ entonces tenemos dos posibles factores de fase $\xi_{Q_a P_a}$ y $\xi_{Q_b P_b}$ y es fácil ver que

$$\xi_{Q_b P_b} = S^{-1}(Q)\; \xi_{Q_a P_a}\; S(P) \tag{5}$$

lo cual meramente establece que $(A^\mu)_b$ está relacionado con $(A^\mu)_a$ mediante (9.1) con S dado por (11.4). Para un camino que pasa de una región a la otra tal como $A \to B \to C \to D \to E$ la definición es

$$\xi_{EDCBA} = \xi_{ED_a}\; S_{ab}(D)\; \xi_{D_b C B_b}\; S_{ba}(B)\; \xi_{B_a A} \tag{6}$$

Notar que fijado el camino el deslizar los puntos B y D a lo largo de él no cambia el factor de fase debido a formulas tales como (11.5)

El factor de fase definido así satisface la propiedad de grupo

$$\xi_{EDCBA} = \xi_{EDa}\,\xi_{DaCBA} = \xi_{ED_b}\,\xi_{D_bCBA} = \xi_{EDC}\,\xi_{CBA} \quad \text{etc.} \tag{1}$$

La relación entre el campo electromagnético y el factor de fase alrededor de un lazo es la usual. Solamente se debe tener cuidado en el hecho de que si el punto inicial y final A está en $R_a \cap R_b$ no tomar $\xi_{A_aBA_b}$ o $\xi_{A_bBA_a}$ sino $\xi_{A_aBA_a} = \xi_{A_bBA_b}$. El factor de fase alrededor del lazo es

$$\exp\left(+i\,\frac{qe}{\hbar c}\,\Phi\right) \tag{2}$$

donde Φ es el flujo magnetico a través de un casquete apoyado sobre el lazo. Notar que debido a la condición de Dirac el factor de fase es siempre el mismo independiente de como se elija el casquete mientras no pase por $\vec{r}=0$ en ningun instante.

Así hemos resuelto la dificultad hallada en un principio siempre que la condición de cuantificación de Dirac (6.6) sea satisfecha. Además podemos afirmar " Si (6.6) no se satisface no existe ninguna división de R en regiones superpuestas R_a, R_b--- tales que las condiciones i) y ii) de la fig 10, adecuadamente generalizadas al caso, se cumplan". Para probar esto basta observar que, si fuera cierto, se podría generalizar (11.6) y llegar a una definición satisfactoria del factor de fase. El factor de fase para un lazo es entonces una función continua del lazo. Tomemos el lazo que va el paralelo de una esfera de radio r fijo, $t=0$, $\theta=$ fijo y $\phi = 0 \to 2\pi$. El factor de fase definido por la generalización de (11.6) sería igual a

$$\exp\left[i\,\frac{qe}{\hbar c}\,\Phi(r,\theta)\right] = \exp\left\{i\,\frac{1}{2}\,\frac{q_e q_m}{\hbar c}\,(1-\cos\theta)\right\} \tag{3}$$

que no sería la unidad para $\theta=\pi$ pues suponemos que (6.6) no es cierta. Luego hemos llegado a una contradicción.

Este ultimo teorema muestra que si la condición de cuantificación de Dirac no es satisfecha, entonces el campo magnético de un monopolo de intensidad q_m no puede tomarse como una situación físicamente realizable en R. Esta es la misma conclusión a la que llegó Dirac pero desde otro punto de vista.

ii) Monopolos no abelianos ('t Hooft, Polyakov)

En la discusión precedente vimos que los potenciales de los monopolos magnéticos tienen dos tipos de singularidades

i) Una singularidad de tipo cuerda asociada solo a las cargas magnéticas

ii) La usual singularidad en el origen que aparece tanto para cargas magnéticas como para las eléctricas

Vamos a comparar esto con lo que sucede en las teorías gauge no-Abelianas. Consideraremos el modelo de H. GEORGI y S.L. GLASHOW Phys. Rev. D6, 2977 (1972) que consiste en una teoría gauge SO(3) interaccionando con un campo de Higgs que es un escalar Lorentz y un isotriplete. La densidad lagrangiana es

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4} F_{a\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}_a(x) + \frac{1}{2}(D_\mu \varphi(x))_a (D^\mu \varphi(x))_a - V[\varphi_a(x)]$$

$$V[\varphi_a(x)] = \frac{1}{4}\lambda\,[\varphi_a(x)\varphi_a(x) - a^2]^2 \tag{1}$$

donde

$$F^{\mu\nu}_a(x) = \partial^\mu A^\nu_a(x) - \partial^\nu A^\mu_a(x) + g\,\epsilon_{abc} A^\mu_b(x) A^\nu_c(x)$$

$$(D_\mu \varphi(x))_a = \partial_\mu \varphi_a(x) + g\,\epsilon_{abc} A_{b\mu}(x)\varphi_c(x) \tag{2}$$

y escribiendo $\mathcal{L}(x)$ explícitamente

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{2}\partial_\mu A_{a\nu}(x)\,\partial^\mu A^\nu_a(x) + \frac{1}{2}\partial_\mu A_{a\nu}(x)\,\partial^\nu A^\mu_a(x) - g\,\epsilon_{abc}\,\partial_\mu A_{a\nu}(x) A^\mu_b(x) A^\nu_c(x)$$

$$-\frac{1}{4}g^2 [A_{b\mu}(x)A^\mu_b(x)][A_{a\nu}(x)A^\nu_a(x)] + \frac{1}{4}g^2[A_{b\mu}(x)A_{b\nu}(x)][A^\mu_a(x)A^\nu_a(x)]$$

$$+\frac{1}{2}[\partial_\mu\varphi_a(x)][\partial^\mu\varphi_a(x)] + g\,\epsilon_{abc}\,\partial_\mu\varphi_a(x) A^\mu_b(x)\varphi_c(x)$$

$$+\frac{1}{2}g^2 A_{a\mu}(x)A^\mu_a(x)\varphi_b(x)\varphi_b(x) - \frac{1}{2}g^2 A_{a\mu}(x)A^\mu_b(x)\varphi_a(x)\varphi_b(x)$$

$$-\frac{1}{4}\lambda\,[\varphi_a(x)\varphi_a(x) - a^2]^2 \tag{3}$$

Entonces las ecuaciones del movimiento son

$$(D^\mu D_\mu \varphi(x))_a = -\lambda\,[\varphi_b(x)\varphi_b(x) - a^2]\varphi_a(x)$$

$$(D_\nu F^{\nu\mu}(x))_a = -g\,\epsilon_{abc}\,\varphi_b(x)\,(D^\mu\varphi(x))_c \tag{4}$$

o más explícitamente

$$\partial^\mu \partial_\mu \varphi_a(x) + g\,\epsilon_{abc}\,\partial_\mu A^\mu_b(x)\,\varphi_c(x) + 2g\,\epsilon_{abc}\,A^\mu_b(x)\,\partial_\mu \varphi_c(x) - g^2 A_{b\mu}(x)\,A^\mu_b(x)\,\varphi_a(x) +$$

$$+ g^2 A_{b\mu}(x)\,A^\mu_a(x)\,\varphi_b(x) = -\lambda\,[\varphi_b(x)\,\varphi_b(x) - a^2]\,\varphi_a(x)$$

$$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu_a(x) - \partial^\mu \partial_\nu A^\nu_a(x) - g\,\epsilon_{abc}\,A^\mu_b(x)\,\partial_\nu A^\nu_c(x) - g\,\epsilon_{abc}\,A_{b\nu}(x)\,\partial^\mu A^\nu_c(x) - \tag{1}$$

$$+ 2g\,\epsilon_{abc}\,A^\nu_b(x)\,\partial_\nu A^\mu_c(x) + g^2 A^\nu_a(x)\,A_{b\nu}(x)\,A^\mu_b(x) - g^2 A^\mu_c(x)\,A_{b\nu}(x)\,A^\nu_b(x) =$$

$$= -g\,\epsilon_{abc}\,\varphi_b(x)\,\partial^\mu \varphi_c(x) - g^2 A^\mu_a(x)\,\varphi_b(x)\,\varphi_b(x) + g^2 A^\mu_b(x)\,\varphi_b(x)\,\varphi_a(x)$$

Si además definimos el tensor dual

$$^*F^{\mu\nu}_a(x) = \frac{1}{2}\,\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\,F_{a\lambda\rho}(x) \tag{2}$$

tenemos las identidades de Bianchi

$$(D_\mu\, ^*F^{\mu\nu}(x))_a = 0 \tag{3}$$

En ocasiones es útil introducir

$$A_\mu(x) \equiv \frac{1}{2}\,\vec{\tau}\cdot\vec{A}_\mu(x) \quad , \quad F_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{2}\,\vec{\tau}\cdot\vec{F}_{\mu\nu}(x) \quad , \quad \varphi(x) \equiv \frac{1}{2}\,\vec{\tau}\cdot\vec{\varphi}(x) \tag{4}$$

y entonces

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) - ig\,[A_\mu(x), A_\nu(x)]$$

$$D_\mu \varphi(x) = \partial_\mu \varphi(x) - ig\,[A_\mu(x), \varphi(x)] \tag{5}$$

y entonces en esta notación

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,[F_{\mu\nu}(x)\,F^{\mu\nu}(x)] + \mathrm{Tr}\,[D^\mu\varphi(x)\cdot D_\mu\varphi(x)]$$

$$-\frac{\lambda}{4}\,\Big[\,2\,\mathrm{Tr}\,[\varphi(x)\,\varphi(x)] - a^2\Big]^2 \tag{6}$$

y las ecuaciones del movimiento son

$$D_\mu D^\mu \varphi(x) = -\lambda\,\Big\{2\,\mathrm{Tr}\,[\varphi(x)\,\varphi(x)] - a^2\Big\}\,\varphi(x)$$

$$D_\nu F^{\nu\mu}(x) = +ig\,[\varphi(x), D^\mu\varphi(x)] \tag{7}$$

Por otra parte las transformaciones de gauge se escribirían como

$$\varphi'(x) = S(x)\,\varphi(x)\,S^{-1}(x) \tag{8}$$

con

$$S(x) = \exp\left\{ \frac{i}{2} \vec{\epsilon}(x) . \vec{\tau} \right\} \qquad (1)$$

Finalmente podemos calcular la densidad de energía que es

$$\Theta^{00}(x) = \frac{1}{2} \left\{ [E_a^i(x)]^2 + [B_a^i(x)]^2 + [\Pi_a(x)]^2 + [(\mathcal{D}^i \varphi(x))_a]^2 \right\} + V[\vec{\varphi}(x)] \qquad (2)$$

$$E_a^i(x) \equiv - F_a^{0i}(x) \quad , \quad B_a^i(x) \equiv - \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F_a^{jk}(x)$$

$$\Pi_a(x) \equiv (D^0 \varphi(x))_a$$

Si suponemos $\lambda > 0$ entonces $\Theta^{00}(x) \geq 0$. Además $\Theta^{00}(x) = 0$ si y sólo si

$$F_a^{\mu\nu}(x) = 0 \qquad (3)$$

$$(D^\mu \varphi(x))_a = 0 \qquad (4)$$

$$V[\varphi(x)] = \frac{1}{4} \lambda [\vec{\varphi}^2(x) - a^2]^2 = 0 \qquad (5)$$

Llamaremos vacío a una configuración de campos para la que $\Theta^{00}(x) = 0$ por doquier. Un ejemplo de vacío es

$$\varphi_a(x) = a\, \delta_{a3} \quad , \quad A_a^\mu(x) = 0 \qquad (6)$$

Como $\Theta^{00}(x) = 0$ es invariante gauge, cualquier transformación de gauge de (6) dará también una configuración de vacío.

Introducimos además el concepto de vacío de Higgs. Diremos que los campos en una determinada región del espacio-tiempo están en el vacío de Higgs si satisfacen las ecuaciones (4) y (5), pero no necesariamente (3). Indicaremos por M_0 el conjunto de valores de $\vec{\varphi}(x)$ que minimizan la función potencial, esto es

$$M_0 \equiv \{ \vec{\varphi}(x) : \vec{\varphi}^2(x) = a^2 \} \qquad (7)$$

Notar que M_0 es una superficie esférica de radio a en el espacio de isospin donde actúa $SO(3)$. Imaginemos que elegimos un vacío de Higgs $\vec{\varphi}$; evidentemente $\vec{\varphi} \in M_0$. El grupo pequeño H_φ de $\vec{\varphi}$, que consiste de aquellos elementos de $SO(3)$ que dejan $\vec{\varphi}$ invariante, es precisamente el grupo de rotaciones alrededor de $\vec{\varphi}$ y es isomorfo a $SO(2) \simeq U(1)$. Como los H_φ para $\vec{\varphi} \in M_0$ son todos ellos isomorfos denotaremos cualquiera de ellos por H. Físicamente es de importancia fundamental pues es el grupo de simetría exacto de la teoría. La simetría $SO(3)$ original, es espontáneamente rota a H por $\vec{\varphi}$. Por tanto después de la rotura de la simetría nos queda una teoría gauge $U(1)$ que, por tanto, tiene todas las características de la teoría de Maxwell.

Como ejemplo de esto supongamos

$$A^\mu(x) = \mathcal{A}^\mu(x)\,\frac{\tau_3}{2} \tag{1}$$

$$\mathcal{A}^0(x) = 0 \qquad \vec{\mathcal{A}}(x) = \frac{g_m}{r}\,\frac{(1-\cos\theta)}{\sin\theta}\,\hat{\phi}$$

(comparar con (5.2)). Como sólo hay una dirección en el espacio de isospin se anulan todos los conmutadores y

$$F^{\mu\nu}(x) = \left[\partial^\mu \mathcal{A}^\nu(x) - \partial^\nu \mathcal{A}^\mu(x)\right]\frac{\tau_3}{2} \tag{2}$$

las ecuaciones del movimiento (14.7) son satisfechas si el campo de Higgs es

$$\varphi(x) = a\,\frac{\tau_3}{2} \tag{3}$$

Esto es totalmente análogo al monopolo con la cuerda y la singularidad en el origen. No parece que hayamos ganado gran cosa, pero realmente hay una profunda diferencia. Vamos a probar que mediante una transformación de gauge podemos eliminar totalmente la cuerda. Consideremos una transformación de gauge

$$S = e^{-i\phi\frac{\tau_3}{2}}\; e^{+i\theta\frac{\tau_2}{2}}\; e^{+i\phi\frac{\tau_3}{2}} \tag{4}$$

Es fácil ver que esta transformación gira el eje τ_3 para dar la proyección radial. En efecto

$$S\tau_3 S^{-1} = e^{-i\phi\frac{\tau_3}{2}}\left[\cos\frac{\theta}{2} + i\tau_2\sin\frac{\theta}{2}\right]\tau_3\left[\cos\frac{\theta}{2} + i\tau_2\sin\frac{\theta}{2}\right]e^{+i\phi\frac{\tau_3}{2}} =$$

$$= \left[\cos\frac{\phi}{2} - i\tau_3\sin\frac{\phi}{2}\right]\left[\cos\theta\,\tau_3 + \sin\theta\,\tau_1\right]\left[\cos\frac{\phi}{2} + i\tau_3\sin\frac{\phi}{2}\right]$$

$$= \cos\theta\,\tau_3 + \sin\theta\left[\cos\frac{\phi}{2} - i\tau_3\sin\frac{\phi}{2}\right]\tau_1\left[\cos\frac{\phi}{2} + i\tau_3\sin\frac{\phi}{2}\right]$$

$$= \cos\theta\,\tau_3 + \sin\theta\left[\cos\phi\,\tau_1 + \sin\phi\,\tau_2\right]$$

esto es

$$S\tau_3 S^{-1} = \vec{\tau}\cdot\hat{x} \tag{5}$$

que introduce una ligazón simple y esencial entre el espacio normal y el de isospin. Bajo esta transformación $A^\mu(x)$ se convierte en

$$A^\mu(x) \longrightarrow A'^\mu(x) = S A^\mu(x) S^{-1} - \frac{i}{g}(\partial^\mu S)S^{-1} \tag{6}$$

de donde

$$A'^0(x) = 0$$

$$A'^r(x) = 0 - \frac{i}{g} \frac{\partial S}{\partial r} S^{-1} = 0$$

$$A'^\theta(x) = 0 - \frac{i}{gr} \left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right) S^{-1} = - \frac{1}{2gr} [\cos\phi\, \tau_2 - \sin\phi\, \tau_1] \tag{1}$$

$$A'^\phi(x) = \frac{q_m}{r} \frac{(1-\cos\theta)}{\sin\theta} \frac{\vec{\tau}\cdot\hat{x}}{2} - \frac{1}{2gr\sin\theta} [\tau_3 - \vec{\tau}\cdot\hat{x}]$$

Si se cumple que

$$q_m\, g = -1 \tag{2}$$

(que es un caso particular de la condición de Dirac) entonces las únicas componentes no nulas de $A'^\mu(x)$ son

$$A'^\theta(x) = \frac{q_m}{2r} [-\sin\phi\, \tau_1 + \cos\phi\, \tau_2]$$
$$\tag{3}$$
$$A'^\phi(x) = \frac{q_m}{2r} [-\cos\theta\cos\phi\, \tau_1 - \cos\theta\sin\phi\, \tau_2 + \sin\theta\, \tau_3]$$

o equivalentemente

$$A'^0(x) = 0 \qquad \vec{A}'(x) = \frac{q_m}{r^2} \left(\frac{\vec{\tau}}{2} \times \vec{x}\right) \tag{4}$$

y por tanto la singularidad sobre la cuerda ha sido eliminada. Queda aún la singularidad en el origen que veremos que puede ser eliminada mediante un ansatz más complicado que (16.1) *

Sin embargo antes de pasar a este punto quisiéramos discutir la posibilidad de soluciones clásicas de energía finita para nuestro modelo. Comenzaremos estudiando lo que sucede si $A_a^\mu(x) \equiv 0$, es decir

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2} [\partial_\mu \varphi_a(x)][\partial^\mu \varphi_a(x)] - \frac{1}{4}\lambda [\varphi_a(x)\varphi_a(x) - a^2]^2 \tag{5}$$

en cuyo caso la energía es

$$H = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi_a}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial \varphi_a}{\partial t}\right) + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\varphi_a)(\vec{\nabla}\varphi_a) + V[\vec{\varphi}] \right\} \geq \tag{6}$$

$$\geq \int d^3x \left\{ \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\varphi_a)(\vec{\nabla}\varphi_a) + V[\vec{\varphi}] \right\}$$

sin necesidad de hacer ninguna hipótesis sobre la dependencia temporal. Veamos que esto teoría no puede tener soluciones de energía finita que no sean topológicamente triviales en el infinito. Toda solución de energía finita de la teoría (17.5) debe ser tal que $\vec{\varphi}(x)$ tienda a un punto de M_0 cuando vayamos hacia infinito en cualquier dirección del espacio. Las posibles direcciones según las cuales podemos tender a infinito vienen fijadas por los vectores unitarios

$$S^2 \equiv \{ \hat{r} \; : \; \hat{r}^2 = 1 \} \tag{1}$$

La energía finita implica pues que

$$\vec{\varphi}_\infty(\hat{r}) \equiv \lim_{R\to\infty} \vec{\varphi}(R\hat{r}) \in M_0 \qquad , \quad \hat{r} \in S^2 \tag{2}$$

Por otra parte podemos escribir

$$(\vec{\nabla}\varphi_a)^2 = \left(\frac{\partial \varphi_a}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left[\left(\frac{\partial \varphi_a}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial \varphi_a}{\partial \phi}\right)^2 \right] \tag{3}$$

y si $\vec{\varphi}_\infty$ no es constante el último término es de orden r^{-2} para $r\to\infty$, lo cual asegura la divergencia de (17.6) y por tanto la condición de energía finita fuerza a que $\vec{\varphi}(x)$ sea topológicamente trivial en el infinito.

La situación es totalmente distinta en presencia de $A^\mu_a(x)$ pues entonces es posible, en principio, tener energía finita y comportamiento no trivial en el infinito. Esto es debido a que ahora en lugar de $(\vec{\nabla}\varphi_a)^2$ tenemos $((\vec{D}\varphi)_a)^2$ y es perfectamente posible que $(\vec{D}\varphi)_a$ decrezca como $1/r^2$ mientras que A^μ_a y $\vec{\nabla}\varphi_a$ decrezcan como $1/r$.

Vamos a intentar hallar soluciones de energía finita a las ecuaciones (13.4). Como las ecuaciones son muy complicadas debemos elegir cuidadosamente la estrategia. La exigencia que sean de energía finita implica que asintóticamente y a grandes distancias los campos deben estar en el vacío de Higgs; cuando este es alcanzado sólo sobreviven las características electromagnéticas. Físicamente uno espera que la solución con energía más baja no nula sea independiente del tiempo y que tenga un elevado grado de simetría. Comenzaremos esto con una ansatz simplificadora. [G.'T HOOFT Nucl. Phys. B79, 276 (1974) y A.M. POLYAKOV JEPT Lett. 20, 194 (1974)]. Las simetrías de una solución forman un grupo G_0 que es un subgrupo del grupo total G de las simetrías de las ecuaciones del movimiento. G_0 no puede coincidir con G ya que sólo la solución trivial cero tiene esta simetría. Consideremos cual puede ser G_0 para la solución de menor energía. La independencia temporal presupone una elección del sistema de referencia de Lorentz en el que los campos estén en reposo. Con esta elección implica que las soluciones tienen una simetría bajo rotaciones espaciales $SO(3)$, bajo traslaciones T_3 y bajo una simetría interna $SO_r(3)$. Además hay ciertas simetrías discretas

$$\mathcal{P} : \varphi_a(\vec{r}) \longrightarrow +\varphi_a(-\vec{r}) \quad ; \quad A_a^i(\vec{r}) \longrightarrow -A_a^i(-\vec{r}) \quad ; \quad A_a^0(\vec{r}) \longrightarrow +A_c^0(-\vec{r}) \tag{1}$$

$$Z : \varphi_a(\vec{r}) \longrightarrow -\varphi_a(\vec{r}) \quad ; \quad A_a^\mu(\vec{r}) \longrightarrow A_a^\mu(\vec{r}) \tag{2}$$

que generan $Z_2 \otimes Z_2$. La acción de $\mathcal{P}$ y Z sobre $G^{\mu\nu} \equiv \vec{\varphi}\,\vec{F}^{\mu\nu}/a$ que identificaremos como el campo electromagnético en el vacío de Higgs se transforma como

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &: G^{ij}(\vec{r}) \longrightarrow G^{ij}(-\vec{r}) \quad ; \quad G^{i0}(\vec{r}) \longrightarrow -G^{i0}(-\vec{r}) \\ Z &: G^{ij}(\vec{r}) \longrightarrow -G^{ij}(\vec{r}) \quad ; \quad G^{i0}(\vec{r}) \longrightarrow -G^{i0}(\vec{r}) \end{aligned} \tag{3}$$

Podemos identificar $\mathcal{P}$ con la transformación de paridad ya que tiene la acción apropiada sobre el campo electromagnético. Tanto $\mathcal{P}$ como Z cambian el signo de $\vec{\nabla}.\vec{B}$ y, en consecuencia, la carga magnética de cualquier solución. Si $\mathcal{P}$ o Z se incluyen en G_0 la solución debe tener carga magnética nula. Podemos solo incluir $\mathcal{P}Z$ en G_0.

Volvamos a las simetrías continuas. La solución estará localizada y por tanto no será invariante bajo traslaciones. Nos queda pues $SO_r(3) \otimes SO(3) \otimes Z_2$. El producto $SO_r(3) \otimes SO(3)$ es demasiado grande y tiene varios subgrupos covariantes $SO(3)$: aquellos que consisten de solo las rotaciones espaciales o las rotaciones de isospin y el subgrupo diagonal consistente de rotaciones simultáneas e iguales en el espacio real y de isospin. La invariancia con respecto a rotaciones espaciales fuerza a que $\vec{\varphi}(x)$ sea constante asintóticamente con lo que las condiciones asintóticas son satisfechas de una forma topológicamente trivial. La invariancia isotópica fuerza a que $\vec{\varphi}$ se anule por doquier y las condiciones frontera no se satisfacen. Nos queda por tanto el grupo diagonal cuyos generadores son $[-i\vec{r}\times\vec{\nabla} + \vec{\tau}/2]$. El ansatz general invariante con respecto al grupo diagonal es

$$\varphi_a(\vec{r}) = H(agr)\frac{r^a}{gr^2} \quad ; \quad W_a^0(\vec{r}) = J(agr)\frac{r^a}{gr^2}$$

$$W_a^i(\vec{r}) = -\epsilon_{aij}\frac{r^j}{gr^2}\left[1 - K(agr)\right] + \frac{r^2\delta_{ai} - r^i r^a}{gr^3}B(agr) + \frac{r^i r^a}{gr^3}C(agr)$$

Invariancia bajo $\mathcal{P}Z$ fuerza $B = C = 0$. Por tanto la solución deseada que tiene una simetría $G_0 \cong SO(3) \otimes Z_2$, donde $SO(3)$ es el grupo diagonal en el producto $SO(3) \otimes SO_r(3)$

y Z_2 el grupo generado por PZ, es

$$\varphi_a(\bar{r}) = H(agr)\frac{r^a}{gr^2} \qquad A^0_a(\bar{r}) = J(agr)\frac{r^a}{gr^2}$$

$$A^i_a(\bar{r}) = \epsilon_{aij}\frac{r^j}{gr^2}\left[1 - K(agr)\right] \tag{1}$$

de la cual (17.4) es un caso particular

Para calcular las ecuaciones del movimiento es cómodo seguir el siguiente método debido a L.D. FADEEV "In search of many dimensional solitons" (unpublished lecture given at Alushta 1976) y S. COLEMAN Phys. Rev. D11, 2088 (1975). La acción canónica puede escribirse

$$J = -\int d^3x\, \mathcal{L}(x) = \int d^3x \left\{ \frac{1}{4} F_{a\mu\nu} F_a^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(D_\mu\varphi)_a(D^\mu\varphi)_a + V[\varphi_a]\right\} \tag{2}$$

Introduciendo $\xi = agr$ es fácil obtener

$$V[\varphi_a] = \frac{1}{4}\lambda a^4 \frac{1}{\xi^4}\left[H^2(\xi) - \xi^2\right]^2$$

$$(D_0\varphi)_a = 0$$

$$(D_i\varphi)_a = -\frac{ga^2}{\xi^2}\left\{H(\xi)K(\xi)\delta_{ia} + \frac{\xi^i\xi^a}{\xi^2}\left[\xi\frac{dH(\xi)}{d\xi} - H(\xi) - K(\xi)H(\xi)\right]\right\}$$

$$-\frac{1}{2}(D_\mu\varphi)_a(D^\mu\varphi)_a = \frac{g^2a^4}{\xi^4}\left\{H^2(\xi)K^2(\xi) + \frac{1}{2}\left[\xi\frac{dH(\xi)}{d\xi} - H(\xi)\right]^2\right\}$$

$$E^i_a = -F^{0i}_a = +\frac{ga^2}{\xi^2}\left\{J(\xi)K(\xi)\delta_{ia} + \frac{\xi^i\xi^a}{\xi^2}\left[\xi\frac{dJ(\xi)}{d\xi} - J(\xi) - K(\xi)J(\xi)\right]\right\} \tag{3}$$

$$-\frac{1}{2}(E^i_a)^2 = -\frac{g^2a^4}{\xi^4}\left\{J^2(\xi)K^2(\xi) + \frac{1}{2}\left[\xi\frac{dJ(\xi)}{d\xi} - J(\xi)\right]^2\right\}$$

$$B^i_a = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F^{jk}_a = -\frac{ga^2}{\xi^2}\left\{\xi\frac{dK(\xi)}{d\xi}\delta_{ia} + \frac{\xi^i\xi^a}{\xi^2}\left[K^2(\xi) - 1 - \xi\frac{dK(\xi)}{d\xi}\right]\right\}$$

$$\frac{1}{2}(B^i_a)^2 = \frac{g^2a^4}{\xi^4}\left\{\left[\xi\frac{dK}{d\xi}\right]^2 + \frac{1}{2}\left[K^2(\xi) - 1\right]^2\right\}$$

y de aquí se obtiene inmediatamente que

$$J = \frac{4\pi a}{g}\int_0^\infty d\xi\,\frac{1}{\xi^2}\left\{\left[\xi\frac{dK(\xi)}{d\xi}\right]^2 + \frac{1}{2}\left[K^2(\xi)-1\right]^2 - J^2(\xi)K^2(\xi) - \frac{1}{2}\left[\xi\frac{dJ(\xi)}{d\xi} - J(\xi)\right]^2 \right.$$
$$\left. + H^2(\xi)K^2(\xi) + \frac{1}{2}\left[\xi\frac{dH(\xi)}{d\xi} - H(\xi)\right]^2 + \frac{\lambda}{4g^2}\left[H^2(\xi) - \xi^2\right]^2\right\} \tag{4}$$

Las condiciones para la acción estacionaria con respecto a variaciones de K, H y J son

$$\xi^2 \frac{d^2 K(\xi)}{d\xi^2} = K(\xi)\left[K^2(\xi) - 1\right] + K(\xi)\left[H^2(\xi) - J^2(\xi)\right]$$

$$\xi^2 \frac{d^2 H(\xi)}{d\xi^2} = 2K^2(\xi) H(\xi) + \frac{\lambda}{g^2} H(\xi)\left[H^2(\xi) - \xi^2\right] \qquad (1)$$

$$\xi^2 \frac{d^2 J(\xi)}{d\xi^2} = 2K^2(\xi) J(\xi)$$

A este mismo resultado se llega, tras laboriosos cálculos, sustituyendo directamente (20.1) en las ecuaciones del movimiento. Se ha podido proceder de esta forma debido a un teorema probado por Fadeev y Coleman: Supongamos que deseamos encontrar los puntos estacionarios de una determinada función F (aquí un funcional) cuyos argumentos cubren un conjunto $\mathfrak{X}$. Sea G_0 el grupo que actúa sobre $\mathfrak{X}$ formado por las simetrías de F. Si $\mathfrak{X}_0$ indica los elementos de $\mathfrak{X}$ que permanecen fijos bajo todos los elementos de G_0, entonces un punto estacionario de F restringido a $\mathfrak{X}_0$ es también un un punto estacionario de F sobre $\mathfrak{X}$. En nuestro caso $\mathfrak{X}$ es todas las configuraciones de campo posibles, $G_0 = SO(3) \otimes Z_2$ y $\mathfrak{X}_0$ las configuraciones de nuestro ansatz.

Consideremos de momento $J(\xi) \equiv 0$, entonces (1) se reduce a

$$\xi^2 \frac{d^2 K(\xi)}{d\xi^2} = K(\xi) H^2(\xi) + K(\xi)\left[K^2(\xi) - 1\right]$$

$$\xi^2 \frac{d^2 H(\xi)}{d\xi^2} = 2K^2(\xi) H(\xi) + \frac{\lambda}{g^2} H(\xi)\left[H^2(\xi) - \xi^2\right] \qquad (2)$$

y la energía se obtiene fácilmente de (15.1) y (20.3) y es

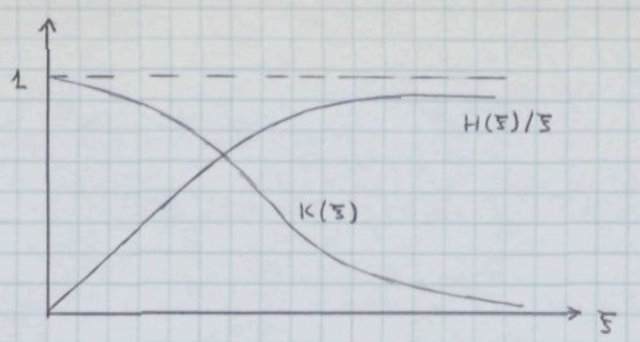
$$E = \frac{4\pi a}{g}\int_0^\infty d\xi \, \frac{1}{\xi^2}\left\{\left[\xi \frac{dK(\xi)}{d\xi}\right]^2 + \frac{1}{2}\left[K^2(\xi) - 1\right]^2 + H^2(\xi) K^2(\xi) + \frac{1}{2}\left[\xi \frac{dH(\xi)}{d\xi} - H(\xi)\right]^2 + \frac{\lambda}{4g^2}\left[H^2(\xi) - \xi^2\right]^2\right\} \qquad (3)$$

Las condiciones de contorno para soluciones de energía finita son

$$K(\xi) - 1 \leq O(\xi) \quad , \quad H \leq O(\xi) \quad \text{cuando } \xi \to 0 \qquad (4)$$

$$K(\xi) \underset{\xi\to\infty}{\sim} 0 \quad , \quad H(\xi) \underset{\xi\to\infty}{\sim} \xi$$

Que las ecuaciones (2) con las condiciones (4) tienen solución ha sido probado rigurosamente por A.S. SCHWARZ Nucl. Phys. <u>B112</u>, 358 (1976) y las formas están dadas en la figura



Mas aún podemos fácilmente averiguar como $H(\xi)$ y $K(\xi)$ se acercan a sus límites para $\xi \to \infty$. Introduciendo $h(\xi) = H(\xi) - \xi$ obtenemos fácilmente que las ecuaciones (21.2) se reducen asintóticamente a

$$\frac{d^2 K(\xi)}{d\xi^2} = K(\xi) \quad , \quad \frac{d^2 h(\xi)}{d\xi^2} = \frac{2\lambda}{g^2} h(\xi)$$

y por tanto

$$K(\xi) \underset{\xi\to\infty}{\sim} O(e^{-\xi}) \quad , \quad H(\xi) \underset{\xi\to\infty}{\sim} \xi + O\left(e^{-\frac{\sqrt{2\lambda}}{g}\xi}\right) \tag{1}$$

De aquí

$$\varphi_a(\vec{r}) \underset{r\to\infty}{\sim} a\,\frac{\xi^a}{\xi} \quad , \quad E_a^i(\vec{r}) \equiv 0 \, , \quad B_a^i(\vec{r}) \underset{r\to\infty}{\sim} +g a^2 \frac{\xi^i \xi^a}{\xi^4} \tag{2}$$

De donde a grandes distancias no hay campo eléctrico y el campo magnético es

$$\vec{B}(\vec{r}) \equiv \vec{B}_a(r)\,\hat{\varphi}_a(\vec{r}) \underset{r\to\infty}{\sim} + \frac{1}{g}\frac{\vec{r}}{r^3} \tag{3}$$

que es obviamente invariante gauge. Comparando (3) con (4.1) vemos que este es el campo creado por un monopolo de intensidad

$$q_m = + \frac{4\pi}{g} \tag{4}$$

Una pregunta que surge inmediatamente es como este resultado se relaciona con la condición de cuantificación de Dirac. Nos hemos limitado a ecuaciones clásicas y no hablaremos por ahora de su cuantificación, porque no sabemos demasiado bien como llevarla a cabo. Sin embargo el lenguaje suministrado por la interpretación de partículas, que los campos adquieren al ser cuantificados, está subyacente y podemos usarlo para obtener de forma heurística lo que sucede al cuantizarlos. Para ver esto partiremos de (13.1) y aplicaremos el mecanismo de Higgs usual. Así obtenemos fácilmente que

	Masa	Spin	Carga eléctrica
Partícula de Higgs	$\mu = a\hbar\sqrt{2\lambda}$	0	0
Fotón	0	$\hbar$	0
Mesones gauge	$M = ag\hbar$	$\hbar$	$\pm g\hbar$

Las masas se calculan a partir del Lagrangiano de la forma usual recordando que cuando desarrollamos alrededor del vacío el coeficiente del término cuadrático en los campos del boson es el cuadrado de la masa dividido por $2\hbar^2$. Como $|\vec{\varphi}| = a$ en el vacío, actúa el mecanismo de Higgs; esto es las componentes cargadas del campo de Higgs quedan absorbidas en las componentes cargadas del campo de gauge dandoles masa y dejando un único campo vectorial sin masa, así como también el Higgs restante.

La carga eléctrica se obtiene comparando la derivada covariante bajo $SO(3)$

$$\partial^\mu + ig A_a^\mu T_a \qquad (T_a)_{ij} = -i\epsilon_{aij} \tag{1}$$

con la derivada covariante electromagnética $\partial^\mu + iQA^\mu/\hbar$. Identificando $\hat{\varphi}_a A_a^\mu$ con A^μ obtenemos

$$Q = -g\hbar \ \hat{\varphi}\cdot\vec{T} \tag{2}$$

que da el resultado dado antes. Esta expresión es valida en cualquier representación y por tanto con nuevos campos $\vec{T}$ puede tener valores semienteros y la carga elemental es $\frac{1}{2}g\hbar$, y todas las demás son multiplos de ella.

Entonces volvamos a (22.5) teniendo en cuenta que la carga elemental de la teoria es $q_0 = \frac{1}{2}g\hbar$ entonces

$$\frac{q_0 q_m}{4\pi\hbar} = \frac{1}{2} \tag{3}$$

y q_m toma el valor mas bajo compatible con la condición de Dirac. Una solución con la carga opuesta se obtiene aplicando a la anterior P o Z.

Notemos ademas que los resultados (22.6) nos dicen que

$$K(\xi) \underset{r\to\infty}{\sim} O(e^{-Mr/\hbar}) \qquad H(\xi) \underset{r\to\infty}{\sim} \xi + O(e^{-\mu r/\hbar}) \tag{4}$$

es decir que se aproximan a los valores asintóticos de acuerdo a las longitudes de onda Compton de las partículas con masa asociadas al campo respectivo.

Vemos pues que el monopolo de 't Hooft - Polyakov tiene un radio finito R_0 determinado por las longitudes de onda Compton $\hbar/M$ y $\hbar/\mu$ de las partículas con masa de la teoría, de forma que en el exterior de R_0 la configuración del campo es exponencialmente cercana al vacío de Higgs; esto es

$$D^\mu \vec{\varphi} = \partial^\mu \vec{\varphi} + g \vec{A}^\mu \times \vec{\varphi} = 0 , \qquad \vec{\varphi}^2 = a^2 \qquad r \gg R_0 \tag{1}$$

con error de orden $\exp(-r/R_0)$.

Supondremos que cualquier solución de energía finita satisface (1) muy aproximadamente, excepto en un número finito de regiones localizadas compactas en el espacio correspondientes a monopolos, aun cuando las soluciones sean dependientes del tiempo. No existe ninguna prueba de esta hipótesis. Queremos analizar (1) para clarificar lo dicho antes sobre el vacío de Higgs.

Dado un $\vec{\varphi}$ fuera de las regiones localizadas correspondientes a los monopolos la forma general de $\vec{A}^\mu$ que satisface (1) es [E. CORRIGAN, D. OLIVE, D.B. FAIRLIE y J. NUYTS Nucl. Phys. B106, 475 (1976)]

$$\vec{A}_\mu = -\frac{1}{a^2 g} \vec{\varphi} \times \partial_\mu \vec{\varphi} + \frac{1}{a} \vec{\varphi} \mathcal{A}_\mu \tag{1}$$

donde $\mathcal{A}_\mu$ es arbitrario como se deduce inmediatamente de (1). Introduzcamos

$$F^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{a} \vec{\varphi} \cdot \vec{F}^{\mu\nu}(x) \tag{2}$$

de donde un simple cálculo da

$$F^{\mu\nu} = \frac{1}{a} \vec{\varphi} \cdot [\partial^\mu \vec{A}^\nu - \partial^\nu \vec{A}^\mu + g \vec{A}^\mu \times \vec{A}^\nu] =$$

$$= -\frac{1}{a^3 g} \vec{\varphi} \cdot [\partial^\mu \vec{\varphi} \times \partial^\nu \vec{\varphi}] + \partial^\mu \mathcal{A}^\nu - \partial^\nu \mathcal{A}^\mu \tag{3}$$

Entonces de (1) se deduce que

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = 0 \qquad \partial_\mu {}^* F^{\mu\nu}(x) = 0 \tag{4}$$

que son precisamente las ecuaciones de Maxwell. Hemos así demostrado que en el vacío de Higgs el único componente no nulo del campo de gauge es el componente asociado con el grupo U(1) de rotaciones alrededor de $\vec{\varphi}$, $F^{\mu\nu}$, que satisface las ecuaciones de Maxwell. En este sentido, fuera de la región de los monopolos, la teoría gauge SO(3) es localmente indistinguible de la teoría electromagnética convencional. Esto no cambia si se introducen otros campos cargados.

Veamos ahora los atributos globales del vacío de Higgs considerando el flujo magnético Φ_Σ a través de una superficie cerrada Σ. Por las ecuaciones de Maxwell Φ_Σ será no nulo solo si Σ rodea una región en la que falla (24.1) es decir donde hay monopolos. Se tiene

$$\Phi_\Sigma = \int_\Sigma d\vec{S}\ \vec{B} = + \frac{1}{2ga^3} \int_\Sigma dS^i\ \epsilon_{ijk}\ \vec{\varphi}\cdot(\partial^j\vec{\varphi} \times \partial^k\vec{\varphi}) \tag{1}$$

donde hemos usado (24.3) y el hecho de que la contribución de A^μ se anula debido al teorema de Stokes. Notar que las derivadas $\partial^i\vec{\varphi}$ que aparecen en (1) son las tangenciales a Σ, de forma que la carga magnética en Σ depende únicamente de los valores del campo de Higgs en Σ. En realidad depende de menos, pues consideremos una configuración de campo de Higgs ligeramente distinta y que cumpla (24.1)

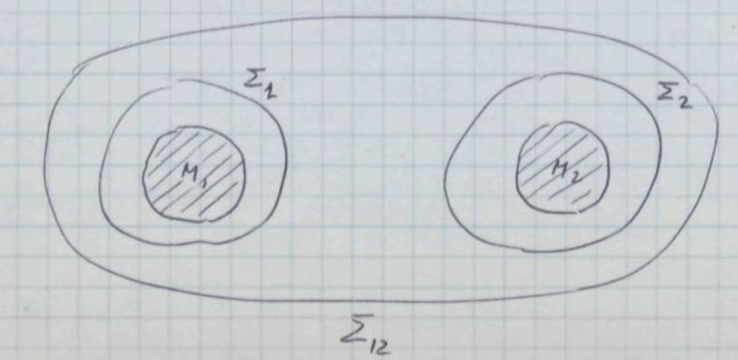
$$\vec{\varphi}' = \vec{\varphi} + \delta\vec{\varphi} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{\varphi}\cdot\delta\vec{\varphi} = 0 \tag{2}$$

Entonces

$$\delta[\vec{\varphi}\cdot(\partial^j\vec{\varphi}\times\partial^k\vec{\varphi})] = \delta\vec{\varphi}\cdot(\partial^j\vec{\varphi}\times\partial^k\vec{\varphi}) + \vec{\varphi}\cdot(\partial^j\delta\vec{\varphi}\times\partial^k\vec{\varphi}) + \vec{\varphi}\,(\partial^j\vec{\varphi}\times\partial^k\delta\vec{\varphi})$$

$$= 3\,\delta\vec{\varphi}\cdot(\partial^j\vec{\varphi}\times\partial^k\vec{\varphi}) + \partial^j[\vec{\varphi}\cdot(\delta\vec{\varphi}\times\partial^k\varphi)] - \partial^k[\vec{\varphi}\cdot(\delta\varphi\times\partial^j\varphi)]$$

La integral de los dos últimos términos de esta expresión se anula por el teorema de Stokes. Además como $\partial^j\vec{\varphi}$ es perpendicular a $\vec{\varphi}$, $\partial^j\vec{\varphi}\times\partial^k\vec{\varphi}$ es paralelo a $\vec{\varphi}$ y por tanto el término restante se anula por (2) y por tanto una pequeña variación de $\vec{\varphi}$ sujeta a (2) no produce un cambio en Φ_Σ. Este es el resultado fundamental. Se extiende a cualquier cambio en $\vec{\varphi}$ que se origina a través de pequeñas deformaciones. Tal deformación se llama una homotopía. Ejemplos de tales homotopías son i) desarrollo en el tiempo de $\vec{\varphi}$; ii) cambios de $\vec{\varphi}$ bajo transformaciones de gauge continuas iii) el cambio inducido alterando $\vec{\varphi}$ continuamente dentro del vacío de Higgs. En consecuencia Φ_Σ es independiente del tiempo, invariante gauge, y no cambia bajo cualquier deformación continua de Σ conteniendo cero o más monopolos.



En particular de la figura anterior, donde M_1 y M_2 son las regiones ocupadas por monopolos y el resto es el vacío de Higgs, se deduce

$$\Phi_{\Sigma_{12}} = \Phi_{\Sigma_1} + \Phi_{\Sigma_2} \tag{1}$$

es decir Φ es un número cuántico aditivo. Para ver que está cuantificado escribamos

$$\Phi_{\Sigma} = + \frac{4\pi N}{g} \tag{2}$$

de donde

$$N = \frac{1}{4\pi a^3} \int_{\Sigma} dS^i \, \frac{1}{2} \, \epsilon_{ijk} \, \vec{\varphi}(\vec{r}) \cdot \left[\partial^j \vec{\varphi}(\vec{r}) \times \partial^k \vec{\varphi}(\vec{r}) \right] \tag{3}$$

Consideremos ahora un vacío

$$\vec{\varphi}_N(\vec{r}) = a \, (\cos N\phi \sin\theta , \; \sin N\phi \sin\theta , \; \cos\theta) \tag{4}$$

donde (r, θ, ϕ) son coordenadas esféricas. Nótese que esto cubre M_0 N veces mientras $\hat{r}$ cubre S^2 una sola. Para estos vacíos es fácil ver si Σ es una esfera de radio R

$$\frac{1}{4\pi a^3} \int_{\Sigma} dS^i \, \frac{1}{2} \, \epsilon_{ijk} \, \vec{\varphi}_N(\vec{r}) \left[\partial^j \vec{\varphi}_N(\vec{r}) \times \partial^k \vec{\varphi}_N(\vec{r}) \right] =$$

$$= \frac{1}{4\pi a^3} \int d\Omega \, R^2 \, \vec{\varphi}_N(\vec{r}) \left[\frac{1}{R} \frac{\partial \vec{\varphi}_N(\vec{r})}{\partial\theta} \times \frac{1}{R\sin\theta} \frac{\partial \vec{\varphi}_N(\vec{r})}{\partial\phi} \right] = \frac{N}{4\pi} \int d\Omega = N$$

Este resultado es totalmente general [J. ARAFUNE, P.G.O. FREUND y C.J. GOEBEL. J. Math. Phys. 16, 433 (1975)]: La N dada por (3) es el número de veces que $\vec{\varphi}(\vec{r})$ cubre M_0 cuando $\vec{r}$ cubre Σ. El número entero N es llamado por los matemáticos grado de Brouwer o índice de Poincaré-Hopf de la correspondencia $\vec{\varphi} : \Sigma \to M_0$.

La representación $\vec{\varphi} : S^2 \longrightarrow M_0$ puede ser dividida en clases de equivalencias bajo la homotopía; dos correspondencias están en la misma clase de homotopía si y sólo si son homotópicas. Es un resultado general de la teoría de la homotopía que si M_0 es una esfera, S^2, el entero N de (3) determina completamente la clase de homotopía. Por tanto la carga magnética Φ_{Σ} depende sólo de la clase de homotopía de la correspondencia $\vec{\varphi} : S^2 \to M_0$.

Vemos pues que la carga magnética es topológicamente conservada y cuantizada en unidades de $4\pi/g$ por razones topológicas. Más aún, como la carga menor de la teoría es $q_0 = \frac{1}{2} g \hbar$ obtenemos la relación de Dirac ($q_m \equiv \Phi_{\Sigma}$)

$$\frac{q_m q_0}{4\pi \hbar} = -\frac{N}{2} \tag{1}$$

Se cree que las clases de homotopía de los campos de Higgs están separadas por barreras infinitas de potencial que impiden transiciones cuánticas entre ellas.

Los monopolos de Dirac y de 't Hooft - Polyakov difieren en su estructura interna. El monopolo de Dirac tiene una singularidad puntual por lo que la singularidad debe ser puesta a mano, mientras que el otro tiene una estructura interna suave satisfaciendo las ecuaciones gauge de la teoría SU(3) sin necesidad de fuentes externas. Fuera de la estructura hay un único grado físico de libertad, el campo electromagnético, que satisface las ecuaciones de Maxwell y da un flujo no nulo en ambos casos. La única diferencia en esta zona externa es técnica; el tensor campo electromagnético se expresa

$$F^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x) + (\text{término extra}) \tag{2}$$

El término extra es singular y contiene la cuerda de Dirac en un caso y es suave y contiene los campos de Higgs en el otro. Vamos a ver que el término de 't Hooft - Polyakov puede escribirse de la forma de Dirac mediante una transformación de gauge.

Teniendo en cuenta (14.5) y (20.1) se obtiene $[K = J = 0 \ , \ H = Cr]$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{2} a \, \hat{r}\cdot\vec{\tau} \quad , \quad A^\mu(\vec{r}) = -\frac{1}{2g}\, \vec{\tau}\cdot(\hat{r}\times\partial^\mu \hat{r}) \Rightarrow \begin{cases} A^0(\vec{r}) = 0 \\ A^i(\vec{r}) = +\dfrac{1}{2gr^2}\, \epsilon_{iaj}\, \tau_a\, r^j \end{cases} \tag{3}$$

$$F^{ij}(\vec{r}) = -\frac{1}{2gr^2}\,(\hat{r}\cdot\vec{\tau})\, \epsilon_{ijk}\, \hat{r}^k$$

donde hemos usado (20.3). Consideremos ahora una transformación de gauge

$$S = \cos\frac{\psi}{2} + i \sin\frac{\psi}{2}\, \vec{k}\cdot\vec{\tau} \quad , \quad \vec{k}^2 = 1 \tag{4}$$

bajo la cual ((3.1) y (3.5))

$$\left.\begin{aligned} A^\mu &\longrightarrow S A^\mu S^{-1} - \frac{i}{g}(\partial^\mu S) S^{-1} \\ F^{\mu\nu} &\longrightarrow S F^{\mu\nu} S^{-1} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

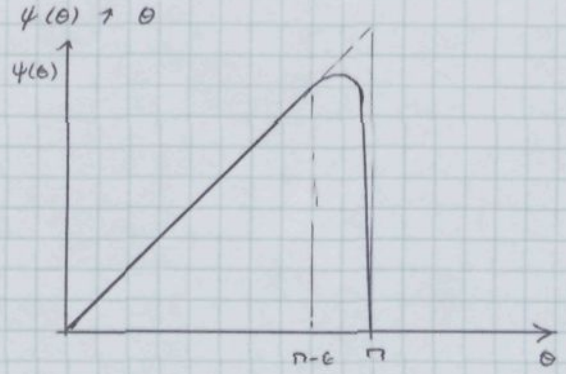
Ahora bien

$$S\,\vec{\tau}\,S^{-1} = \vec{\tau}\cos\psi + \vec{k}\times\vec{\tau}\,\sin\psi + (1-\cos\psi)\,\vec{k}\,(\vec{k}\cdot\vec{\tau}) \tag{6}$$

Elegiremos

$$\vec{k} = \hat{\phi} = \frac{\hat{z} \times \hat{r}}{\sin\theta} \tag{1}$$

y $\psi(\theta)$ como una función diferenciable tal que $\psi(\pi) = 0$ y $\psi(\theta) = \theta$ para $0 \le \theta \le \pi - \epsilon$, y consideraremos una secuencia de funciones tales que $\epsilon \downarrow 0$ de forma que $\psi(\theta) \uparrow \theta$



Antes de la transformación

$$A^r = 0 \quad , \quad A^\theta = +\frac{1}{2gr}(\vec{\tau}\cdot\hat{\phi}) \quad , \quad A^\phi = -\frac{1}{2gr}(\vec{\tau}\cdot\hat{\theta}) \tag{2}$$

y las cantidades transformadas son

$$A^r \longrightarrow 0$$

$$A^\theta \longrightarrow +\frac{1}{2gr}(1-\psi')\,\hat{\phi}\cdot\vec{\tau} \tag{3}$$

$$A^\phi \longrightarrow -\frac{1}{2gr}\frac{\sin(\theta-\psi)}{\sin\theta}\,\hat{\theta}\cdot\vec{\tau} + \frac{1}{2gr}\frac{(1-\cos\psi)}{\sin\theta}\,\hat{z}\cdot\vec{\tau}$$

donde hemos usado

$$\hat{r} = (\sin\theta\cos\phi,\ \sin\theta\sin\phi,\ \cos\theta) \quad , \quad \hat{\theta} = (\cos\theta\cos\phi,\ \cos\theta\sin\phi,\ -\sin\theta) \tag{4}$$

$$\hat{\phi} = (-\sin\phi,\ \cos\phi,\ 0)$$

Introduzcamos ahora

$$A^\mu = \frac{2}{a}\,\mathrm{Tr}(\varphi \cdot A^\mu) \tag{5}$$

que es lo único que queda en el vacío de Higgs. Para calcular esto necesitamos

$$\varphi \longrightarrow \frac{a}{2}\frac{\sin(\theta-\psi)}{\sin\theta}\,\hat{r}\cdot\vec{\tau} + \frac{a}{2}\frac{\sin\psi}{\sin\theta}\,\hat{z}\cdot\vec{\tau}$$

y se obtiene inmediatamente que

$$\vec{A} = + \frac{1}{g r \sin^2\theta} \left\{ \sin(\theta-\psi)(1-\cos\psi)\cos\theta + \sin\psi \sin(\theta-\psi)\sin\theta + \sin\psi(1-\cos\psi) \right\} \hat{\phi}$$

y en el límite $\psi \uparrow \theta$ se convierte en

$$\vec{A} = + \frac{1}{gr} \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} \hat{\phi} \qquad (1)$$

que coincide con (5.2) (tener en cuenta (22.4)) y que es precisamente el potencial de un monopolo de Dirac. Consideremos el único campo electromagnético

$$F^{\mu\nu} = \frac{2}{a} \mathrm{Tr}(\varphi F^{\mu\nu}) = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu + \frac{2ig}{a} \mathrm{Tr}\{\varphi [A^\mu, A^\nu]\} \qquad (2)$$

Para calcular el último término tengamos en cuenta que

$$[A^i, A^j] = [A^\theta, A^\phi] \epsilon_{ijk} \hat{r}^k$$

$$[A^\theta, A^\phi] = \frac{i}{2g^2r^2}(1-\psi') \left\{ \frac{\sin(\theta-\psi)}{\sin\theta} \vec{\tau}.\hat{r} + \frac{1-\cos\psi}{\sin\theta} (\hat{\phi}\times\hat{z}).\vec{\tau} \right\} \qquad (3)$$

de donde

$$\frac{2ig}{a} \mathrm{Tr}\{\varphi[A^i,A^j]\} = - \frac{1-\psi'}{2gr^2\sin^2\theta} \epsilon_{ijk} \hat{r}^k \mathrm{Tr}\left\{ [\sin(\theta-\psi)\hat{r}.\vec{\tau} + \sin\psi \hat{z}\vec{\tau}]. \right.$$

$$\left. \cdot [\sin(\theta-\psi)\vec{\tau}.\hat{r} + (1-\cos\psi)(\hat{\phi}\times\hat{z}).\vec{\tau}] \right\} =$$

$$= - \frac{1}{gr^2\sin^2\theta}(1-\psi')\epsilon_{ijk}\hat{r}^k \left\{ \sin^2(\theta-\psi) + (1-\cos\psi)\sin(\theta-\psi)\hat{r}.(\hat{\phi}\times\hat{z}) + \sin\psi\sin(\theta-\psi)(\hat{r}\hat{z}) \right\}$$

$$= - \frac{1}{gr^2\sin^2\theta}(1-\psi')\epsilon_{ijk}\hat{r}^k \sin(\theta-\psi) \left\{ \sin(\theta-\psi) + (1-\cos\psi)\sin\theta + \sin\psi\cos\theta \right\}$$

y por tanto

$$\frac{2ig}{a} \mathrm{Tr}\{\varphi[A^i,A^j]\} = - \frac{1}{gr^2}(1-\psi') \frac{\sin(\theta-\psi)}{\sin\theta} \epsilon_{ijk}\hat{r}_k \qquad (4)$$

Esto presenta en el límite $\psi(\theta) \uparrow \theta$ una singularidad en el eje zeta negativo y se puede ver que en el sentido de distribuciones

$$\frac{2ig}{a} \mathrm{Tr}\{\varphi[A^i,A^j]\} \longrightarrow \frac{4\pi}{gr^2} \epsilon_{ij3}\, \delta(x)\,\delta(y)\,\theta(-z) \qquad (5)$$

que, teniendo en cuenta (22.4), vemos que coincide con el resultado de Dirac.

Una característica importante del monopolo de 't Hooft - Polyakov es que se puede, en principio, calcular su masa. En el vector del vacío de Higgs y para cualquier teoría electromagnética la carga magnética es

$$q_m = \int d\vec{S} \cdot \vec{B} = \frac{1}{a} \int dS^k \, B^k_a \, \varphi_a = \frac{1}{a} \int d^3r \, B^k_a \, (D^k \varphi_a) \qquad (1)$$

donde la integral debe tomarse en el sentido límite de la esfera del infinito. Se hace tenido en cuenta que las igualdades de Bianchi dan $D^k B^k_a = 0$. Similarmente para la carga eléctrica

$$q_e = \int d\vec{S} \cdot \vec{E} = \frac{1}{a} \int d^3r \, E^k_a \, (D^k \varphi_a) \qquad (2)$$

De acuerdo con (15.2) la masa (consideramos el sistema centro de masas del monopolo)

$$M_m = \int d^3r \left\{ \frac{1}{2} \left[(E^k_a)^2 + (B^k_a)^2 + ((D^0\varphi)_a)^2 + ((D^k\varphi)_a)^2 \right] + V[\varphi] \right\} \geq$$

$$\geq \int d^3r \, \frac{1}{2} \left\{ (E^k_a)^2 + (B^k_a)^2 + ((D^k\varphi)_a)^2 \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \int d^3r \left[E^k_a - (D^k\varphi)_a \sin\theta \right]^2 + \frac{1}{2} \int d^3r \left[B^k_a - (D^k\varphi)_a \cos\theta \right]^2$$

$$+ a \, (q_e \sin\theta + q_m \cos\theta) \geq a \, (q_e \sin\theta + q_m \cos\theta) \qquad (3)$$

Para cualquier θ real. Eligiendo θ para obtener la mejor desigualdad

$$M_m \geq a \, (q_e^2 + g_m^2)^{1/2} \qquad (4)$$

y en el caso del monopolo

$$M_m \geq a \, |q_m| \qquad (5)$$

Esta cota es debida a E.B. BOGOMOLNY Sov. J. Nucl. Phys. <u>24</u>, 861 (1976) y L.D. FADDEEV Lett. Math. Phys. <u>1</u>, 289 (1976) y el método usado en su demostración es debido a S. COLEMAN, S. PARKE, A. NEVEU y C.M. SOMMERFIELD Phys. Rev. <u>D15</u>, 555 (1977). Recordemos por otra parte que $|q_m| = 4\pi/g$ y que la masa del bosón intermedio de la teoría es $M = ag\hbar = a\,|q_e|$

$$M_m \geq \frac{4\pi\hbar}{|q_e|^2} M = \frac{\nu}{\alpha} M \qquad (6)$$

donde α es la constante de estructura fina y $\nu = 1$ o $1/4$ dependiendo si la carga del electrón es q_e o $q_e/2$. Notemos $M_m \gtrsim 10^4$ GeV, si suponemos $M \simeq 10^2$ GeV.

Veamos si es posible saturar la cota (30.5). Esto evidentemente exige que

$$(D^0 \varphi)_a = 0 \qquad E^i_a = 0$$

$$B^i_a = \pm (D^i \varphi)_a \qquad g \gtrless 0 \tag{1}$$

$$V[\varphi] = 0$$

donde la última condición debe entenderse en el sentido $\lambda \downarrow 0$ para que quede como vestigio $|\vec{\varphi}| \underset{r\to\infty}{\sim} a$. De estas ecuaciones y de la identidad de Bianchi $(D^i B^i)_a = 0$ se deducen inmediatamente las ecuaciones (13.6) para $\lambda = 0$. Las ecuaciones (1) son de primer orden y vamos a sustituir en ellas el ansatz (20.1). Usando (20.3) se obtiene inmediatamente

$$\xi \frac{dK(\xi)}{d\xi} = -H(\xi)K(\xi) \quad , \qquad J(\xi) = 0$$

$$\xi \frac{dH(\xi)}{d\xi} = H(\xi) - [K^2(\xi) - 1] \tag{2}$$

que evidentemente implican (21.2). Para resolver estas ecuaciones hagamos el cambio

$$H(\xi) = -1 - \xi h(\xi)$$

$$K(\xi) = \xi k(\xi) \tag{3}$$

y las ecuaciones (2) se convierten en

$$\frac{dk(\xi)}{d\xi} = h(\xi)k(\xi) \qquad \frac{dh(\xi)}{d\xi} = k^2(\xi) \tag{4}$$

Es fácil comprobar que $h^2(\xi) - k^2(\xi)$ es constante y de las condiciones asintóticas (21.6) se obtiene

$$h^2(\xi) - k^2(\xi) = 1 \tag{5}$$

Entonces

$$H = H_0(\xi) = \xi \coth \xi - 1 \quad , \qquad K = K_0(\xi) = \frac{\xi}{\sinh \xi} \tag{6}$$

solución obtenida por M.K. PRASAD y C.M. SOMMERFIELD Phys. Rev. Lett. 35, 760 (1975)

Notemos que para este monopolo la densidad de masa es simplemente

$$((\mathcal{D}^i\varphi)_a)^2 = [\partial^i\varphi_a + g\,\epsilon_{abc} A^i_b \varphi_c][\mathcal{D}^i\varphi]_a =$$

$$= (\partial^i\varphi_a)[\mathcal{D}^i\varphi]_a + g\,\epsilon_{abc} A^i_b \varphi_c [\mathcal{D}^i\varphi]_a =$$

$$= \partial^i [\varphi_a (D^i\varphi)_a] - \varphi_a \partial^i [D^i\varphi)_a + g\,\epsilon_{abc} A^i_b \varphi_c [D^i\varphi)_a$$

$$= \partial^i[\varphi_a(D^i\varphi)_a] - \varphi_a\left\{\partial^i(D^i\varphi)_a + g\,\epsilon_{abc}A^i_b(D^i\varphi)_c\right\} =$$

$$= \partial^i[\varphi_a(D^i\varphi)_a] - \varphi_a(D^i(D^i\varphi))_a = \partial^i[\varphi_a(D^i\varphi)_a]$$

$$= \partial^i[\varphi_a\partial^i\varphi_a] = \frac{1}{2} \partial^i\partial^i(\varphi_a\varphi_a) = \frac{1}{2}\Delta\vec{\varphi}^2 = \frac{1}{2g^2}\Delta\left(\frac{H^2}{r^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2g^2 r}\frac{d^2}{dr^2}\left(\frac{H^2}{r}\right) \tag{1}$$

y por tanto como $H(\xi) \underset{\xi\to 0}{\sim} \frac{1}{6} \xi^2$, la densidad de masa en el origen es finita y no solamente integrable.

Volvamos al caso general dado por las ecuaciones (21.1). Las condiciones de contorno son ahora

$$K(\xi) - 1 \le O(\xi) \quad , \quad H(\xi) \le O(\xi) \quad , \quad J(\xi) \le O(\xi) \quad , \quad \xi\to 0$$

$$K(\xi) \underset{\xi\to\infty}{\sim} 0 \quad , \quad H(\xi) \underset{\xi\to\infty}{\sim} \xi \quad , \quad J(\xi) \underset{\xi\to\infty}{\le} O(\xi) \tag{2}$$

Empecemos considerando el caso en que la cota (30.3) es saturada tomando $\lambda \to 0$, entonces

$$(D^0\varphi)_a = 0 \quad , \quad E^k_a = (D^k\varphi)_a \sin\theta \quad , \quad B^k_a = (D^k\varphi)_a \cos\theta \tag{3}$$

Entonces usando el ansatz (20.1) obtenemos

$$J(\xi) = H(\xi)\sin\theta \qquad\qquad \xi\frac{dK(\xi)}{d\xi} = -H(\xi)\,K(\xi)\cos\theta$$

$$\xi\frac{dH(\xi)}{d\xi}\cos\theta = H(\xi)\cos\theta - [K^2(\xi) - 1] \tag{5}$$

que admite la solución exacta

$$H(\xi) = \xi\,\mathrm{ctgh}\,(\xi\cos\theta) - \frac{1}{\cos\theta}$$

$$K(\xi) = \xi\cos\theta\,\frac{1}{\sinh(\xi\cos\theta)} \tag{5}$$

$$J(\xi) = H(\xi)\sin\theta$$

donde θ es una constante de integración arbitraria. Evidentemente para $\theta = 0$ recuperamos el resultado anterior [M.K. PRASAD, C.M. SOMMERFIELD Phys. Rev. Lett. 35, 760 (1975) E.B. BOGOMOLNY Soviet J. Nucl. Phys. 24, 861 (1976)]

De las ecuaciones (30.1) y (30.2) se obtiene

$$q_e = q_m \tan\theta = -\frac{4\pi}{g}\tan\theta \qquad (1)$$

que nos da la relación entre la carga eléctrica y magnética del dyon. La masa del dyon es entonces

$$M_d = a\sqrt{q_e^2 + q_m^2} \qquad (2)$$

Argumentos semiclásicos han sido usados para probar que en un tratamiento mecánico cuántico q_e debe estar cuantificado [E. TOMBOULIS y G. WOO Nucl. Phys. B107, 221 (1976) y J.L. GERVAIS, B. SAKITA y S. WADIA Phys. Lett. 63B, 55 (1976)]

$$q_e = n\hbar g \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (3)$$

Es interesante que $n = 1/2$ queda excluido a pesar de estar permitido por la condición de Dirac.

Para $\lambda \neq 0$ no se conocen soluciones explícitas si bien se prueba que existen soluciones calculables numéricamente y que dependen de un parámetro arbitrario relacionable con la carga eléctrica.

III. Soluciones estáticas en espacios de dimensión D

Consideremos una teoría de campos escalares y campos gauge en D dimensiones espaciales. En situación estática el Hamiltoniano es

$$H = \int d^D x \ \mathcal{H}(x)$$

$$\mathcal{H}(x) = \mathcal{H}_A(x) + \mathcal{H}_\varphi(x) + V(\varphi) \tag{1}$$

$$\mathcal{H}_A(x) = \frac{1}{4} F_{aij}(x) F_a^{ij}(x) \qquad (a = 1, 2, \ldots, m)$$

$$\mathcal{H}_\varphi(x) = \frac{1}{2} (\vec{D}\varphi(x))_a (\vec{D}\varphi(x))_a \qquad , \qquad V(\varphi) \geq 0$$

donde hemos supuesto que trabajamos en el gauge $A_a^0(x) = 0$. La última condición es puramente restrictiva.

Introduzcamos las siguientes transformaciones de escala (transformaciones de Derrick)

$$\varphi_a(x) \longrightarrow \varphi_a(\lambda x) \qquad A_a^\mu(x) \longrightarrow \lambda A_a^\mu(\lambda x) \tag{2}$$

y designemos por

$$\Sigma_i = \int d^D x \ \mathcal{X}_i(x) \tag{3}$$

entonces

$$H \longrightarrow H_\lambda = \lambda^{4-D} H_A + \lambda^{2-D} H_\varphi + \lambda^{-D} V_\varphi \tag{4}$$

La condición de estabilidad para soluciones bajo variaciones arbitrarias de los campos se reducen ahora a

$$\left.\frac{dH_\lambda}{d\lambda}\right|_{\lambda=1} = (4-D) H_A + (2-D) H_\varphi - D V_\varphi = 0 \tag{5}$$

Veamos ahora las distintas situaciones posibles

i) Con campos escalares únicamente y $V_\varphi \geq 0$ se tienen soluciones solo para $D = 1$ (con $H_\varphi = V_\varphi$). Estos son los llamados kink y solitones

ii) Con campos gauge únicamente solo puede haber soluciones para $D = 4$. Son los instantones

iii) Cuando hay ambos tipos de campos pueden haber soluciones para $D = 2$ y $D = 3$. Para $D = 3$ son los monopolos ya discutidos y para $D = 2$ se llaman vortices

iv) Para $D \geq 5$ no hay soluciones a menos que se elimine la condición de positividad de V

De las ecuaciones (30.1) y (30.2) se obtiene

$$q_e = q_m \tan\theta = -\frac{4\pi}{g}\tan\theta \qquad (1)$$

que nos da la relación entre la carga eléctrica y magnética del dyon. La masa del dyon es entonces

$$M_d = a\sqrt{q_e^2 + q_m^2} \qquad (2)$$

Argumentos semiclásicos han sido usados para probar que en un tratamiento mecánico cuántico q_e debe estar cuantificado [E. TOMBOULIS y G. WOO Nucl. Phys. B107, 221 (1976) y J.L. GERVAIS, B. SAKITA y S. WADIA Phys. Lett. 63B, 55 (1976)]

$$q_e = n\hbar g \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (3)$$

Es interesante que $n = 1/2$ queda excluido a pesar de estar permitido por la condición de Dirac.

Para $\lambda \neq 0$ no se conocen soluciones explícitas si bien se prueba que existen soluciones calculables numéricamente y que dependen de un parámetro arbitrario relacionable con la carga eléctrica.

III. Soluciones estáticas en espacios de dimensión D

Consideremos una teoría de campos escalares y campos gauge en D dimensiones espaciales. En situación estática el Hamiltoniano es

$$H = \int d^D x \; \mathcal{H}(x)$$

$$\mathcal{H}(x) = \mathcal{H}_A(x) + \mathcal{H}_\varphi(x) + V(\varphi) \qquad (1)$$

$$\mathcal{H}_A(x) = \frac{1}{4} F_{a\,ij}(x)\, F_a^{ij}(x) \qquad (a = 1, 2, \dots, m)$$

$$\mathcal{H}_\varphi(x) = \frac{1}{2} (\vec{D}\varphi(x))_a (\vec{D}\varphi(x))_a \quad , \quad V(\varphi) \geq 0$$

donde hemos supuesto que trabajamos en el gauge $A^0_a(x) = 0$. La última condición es puramente restrictiva.

Introduzcamos las siguientes transformaciones de escala (transformaciones de Derrick)

$$\varphi_a(x) \longrightarrow \varphi_a(\lambda x) \qquad A^\mu_a(x) \longrightarrow \lambda A^\mu_a(\lambda x) \qquad (2)$$

y designemos por

$$X_i = \int d^D x \; \mathcal{X}_i(x) \qquad (3)$$

entonces

$$H \longrightarrow H_\lambda = \lambda^{4-D} H_A + \lambda^{2-D} H_\varphi + \lambda^{-D} V_\varphi \qquad (4)$$

La condición de estabilidad para soluciones bajo variaciones arbitrarias de los campos se reducen ahora a

$$\left.\frac{dH_\lambda}{d\lambda}\right|_{\lambda=1} = (4-D) H_A + (2-D) H_\varphi - D V_\varphi = 0 \qquad (5)$$

Veamos ahora las distintas situaciones posibles

i) Con campos escalares únicamente y $V_\varphi \geq 0$ se tienen soluciones solo para $D = 1$ (con $H_\varphi = V_\varphi$). Estos son los llamados kink y solitones

ii) Con campos gauge únicamente solo puede haber soluciones para $D = 4$. Son los instantones

iii) Cuando hay ambos tipos de campos pueden haber soluciones para $D = 2$ y $D = 3$. Para $D = 3$ son los monopolos ya discutidos y para $D = 2$ se llaman vortices

iv) Para $D \geq 5$ no hay soluciones a menos que se elimine la condición de positividad de V

Notar que la inclusión de campos fermiónicos puede también cambiar la situación.

IV. Vortices (D = 2)

a) Caso Abeliano

Consideremos la densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) + \frac{1}{2}(D_\mu \varphi(x))^+ (D^\mu \varphi(x)) - \frac{\lambda}{4}[\varphi^+(x)\varphi(x) - a^2]^2 \quad (1)$$

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)$$

$$D_\mu \varphi(x) = \partial_\mu \varphi(x) - i g A_\mu(x) \varphi(x)$$

o equivalentemente

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu(x) \partial^\mu A^\nu(x) + \frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu(x) \partial^\nu A^\mu(x) + \frac{1}{2}\partial_\mu \varphi^+(x) \partial^\mu \varphi(x) +$$

$$+ \frac{i}{2} g A_\mu(x) \varphi^+(x) \partial^\mu \varphi(x) - \frac{i}{2} g A_\mu(x) \partial^\mu \varphi^+(x) \varphi(x) + \frac{1}{2} g^2 A_\mu(x) A^\mu(x) \varphi^+(x)\varphi(x)$$

$$- \frac{\lambda}{4}[\varphi^+(x)\varphi(x) - a^2]^2 \quad (2)$$

y por tanto las ecuaciones del movimiento son

$$\partial_\nu F^{\nu\mu}(x) = j^\mu(x)$$

$$j^\mu(x) \equiv -\frac{i}{2} g [\varphi^+(x)\partial^\mu\varphi(x) - \varphi(x)\partial^\mu\varphi^+(x)] - g^2 A^\mu(x)\varphi^+(x)\varphi(x) \quad (3)$$

$$\partial_\mu\partial^\mu\varphi(x) - ig\,\partial_\mu A^\mu(x)\varphi(x) - ig A^\mu(x)\partial_\mu\varphi(x) - ig A_\mu(x)\partial^\mu\varphi(x) - g^2 A_\mu(x) A^\mu(x)\varphi(x) =$$

$$= -\lambda[\varphi^+(x)\varphi(x) - a^2]\varphi(x)$$

pudiéndose escribir esta última ecuación como

$$D^\mu D_\mu \varphi(x) = -\lambda[\varphi^+(x)\varphi(x) - a^2]\varphi(x) \quad (5)$$

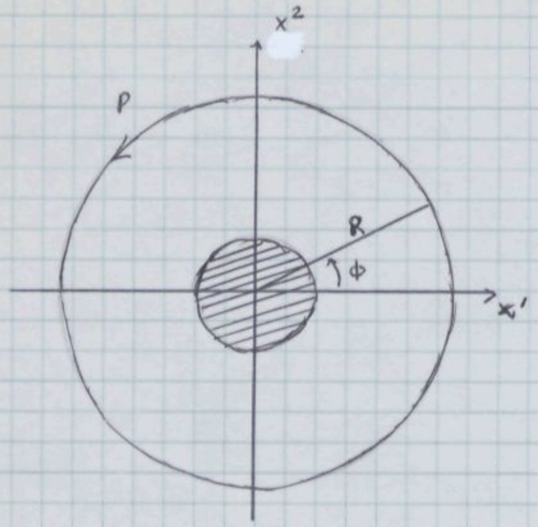
Si introducimos

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + i\varphi_2(x) = |\varphi(x)|\, e^{-i\chi(x)} \quad (5)$$

entonces en las regiones en que $j^\mu(x) = 0$ se tiene que

$$A^\mu(x) = -\frac{1}{g}\partial^\mu \chi(x) \quad (6)$$

Supongamos que tenemos una solución en la que el vórtice está concentrado alrededor del origen y que medimos el flujo magnético a través de un círculo centrado en el origen y de radio suficientemente grande para que se pueda suponer que $j_\mu(x)$ es nulo sobre él.



$$\Phi_P = \oint_P dx^i A_i(x) =$$

$$= -\frac{1}{g}\oint_P dx^i \partial_i \chi(x)$$

$$= -\frac{1}{g}\left[\chi(2\pi) - \chi(0)\right]$$

$$= +\frac{1}{g}\, 2\pi n \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{1}$$

si la función φ es univaluada. Hemos llegado por tanto a una cuantificación topológica del flujo. Aquí el criterio topológico puede formularse como una correspondencia

$$S^1_R \longrightarrow U(1) \tag{2}$$

donde S^1_R es un círculo (o su deformación continua) en el plano (x^1, x^2) (la curva cerrada P de la figura) y $U(1)$ es el grupo (parametrizado por la fase χ) de la degeneración del vacío dada por

$$|\varphi| = a \tag{3}$$

Las clases de homotopía son aquí fácilmente visualizables como "winding numbers", es decir el número de veces que uno recorre el círculo S^1_φ (3) cuando se gira una sola vez en S^1_R.

Consideremos $\chi \equiv -N\phi$ (es decir $\varphi_1 = a\cos N\phi$, $\varphi_2 = a\sin N\phi$) entonces

$$dx^i\partial_i\chi(\phi) = -R\sin\phi\, d\phi\,(-N)\left(-\frac{1}{R}\sin\phi\right) + R\cos\phi\, d\phi\,(-N)\frac{1}{R}\cos\phi = -N\, d\phi$$

y vemos por tanto

$$\Phi_P = \frac{N}{g}\int_0^{2\pi} d\phi = \frac{2\pi}{g}N \tag{4}$$

es decir que $\chi = -N\phi$ es un representante de la clase de homotopía N. Hemos así obtenido una "cuantificación" a nivel clásico. Pero la carga eléctrica es $q_e = g\hbar$ y por tanto la constante de Planck aparece usando la cuantificación del flujo si se expresa en términos de la carga.

Veamos ahora como resolver las ecuaciones del movimiento. Partiremos del ansatz

$$A^0 = 0 \quad , \quad \vec{A} = \frac{1}{r} A(r)\, \hat{\phi} \quad , \quad \varphi = f(r)\, e^{-in\phi} \tag{1}$$

Se tiene

$$\hat{\phi} \equiv (-\sin\phi,\ \cos\phi)$$

$$\partial_1 = \cos\phi \frac{\partial}{\partial r} - \sin\phi \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\phi} \quad , \quad \partial_2 = \sin\phi \frac{\partial}{\partial r} + \cos\phi \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}$$

$$\partial_1 \varphi = [\cos\phi\, f' + in \sin\phi \frac{1}{r} f]\, e^{-in\phi} \quad , \quad \partial_2\varphi = [\sin\phi\, f' - in\cos\phi \frac{1}{r} f]\, e^{-in\phi}$$

$$j^1 = g(gA-m)\sin\phi \frac{1}{r} f^2 \quad , \quad j^2 = -g(gA-m)\cos\phi\frac{1}{r} f^2$$

$$F^{12} = -\frac{1}{r} A'$$

$$\partial^\mu\partial_\mu \varphi = -e^{-in\phi}\left[f'' - \frac{m^2}{r^2} f + \frac{1}{r} f' \right]$$

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \qquad A^\mu \partial_\mu \varphi = -\frac{in}{r^2} A f e^{-in\phi}$$

de donde

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2 f(r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{df(r)}{dr} - \frac{[n + gA(r)]^2}{r^2} f(r) + a^2\lambda f(r) - \lambda f^3(r) = 0 \\ &\frac{d^2 A(r)}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{dA(r)}{dr} - g(gA-m) f^2(r) = 0 \end{aligned}\right. \tag{2}$$

que son las ecuaciones deseadas. Para

i) $g^2 > 2\lambda$: no hay solución

ii) $g^2 < 2\lambda$: se ha probado la existencia de soluciones, pero no se ha hallado ninguna solución exacta

iii) $g^2 = 2\lambda$: se ha encontrado una solución desarrollada en serie.

Ver referencias W. MARCIANO y H. PAGELS Phys. Rep C 36, 137 (1978)

b) Caso no Abeliano

No se conocen soluciones explícitas de energía finita pero el análisis topológico revela diferencias del caso Abeliano. En el caso anterior, la cuantificación del flujo (37.1) tiene un espectro discreto infinito, es decir el conjunto Z de todos los enteros. Esto proviene como una consecuencia a las correspondencias (37.2) $S_R^1 \longrightarrow U(1)$. En el lenguaje de los grupos de homotopía, las posibles cuantificaciones del flujo vienen dadas por

$$\pi_1 (U(1)) = Z \tag{1}$$

donde $U(1)$ es el grupo gauge Abeliano

Para $SU(N)$ se sabe que

$$\pi_1 (SU(N)) = 0 \tag{2}$$

y que

$$\pi_1 (SU(N) / Z_N) = Z_N \tag{3}$$

donde Z_N es el conjunto de enteros modulo N. Entonces para un escalar isodoblete (o representaciones semienteras de $SU(2)$) tenemos que $\pi_1 (SU(2)) = 0$ que demuestra la ausencia de soluciones vortice. Por otra parte para un triplete escalar (o representaciones enteras) se debe considerar $\pi_1 (SO(3)) = \pi_1 (SU(2) / Z_2) = Z_2$. Por tanto pueden existir vortices con $0, \pm 1$ unidades de flujo. De forma analoga uno

$$\pi_1 (SU(3)) = 0 \quad , \quad \pi_1 (SU(3) / Z_3) = Z_3$$

encontramos que vortices pueden existir solo para representaciones de cero trialidad.

V) Instantones [A. A. BELAVIN, A. M. POLYAKOV, A. S. SCHWARTZ y YU. S. TYUPKIN Phys. Lett. B59, 85 (1975)]

Hemos indicado antes que para $D=4$ existen, en principio, soluciones estáticas de energía finita para campos gauge solos. Vamos a estudiar estas soluciones pero interpretándolas como soluciones en un espacio-tiempo de Minkowski continuado a una métrica Euclídea. La condición de energía finita para soluciones puramente estáticas aparecen ahora como soluciones de acción finita para un tiempo imaginario y en una dimensión menos espacial.

La acción Euclídea es para un campo gauge $SU(2)$

$$S_E = \frac{1}{2} \int d^4x \ \mathrm{Tr} \left[F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] \tag{1}$$

$$A_\mu(x) = \frac{1}{2} \vec{\tau} \cdot \vec{A}_\mu(x) \quad , \quad F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) - ig \left[A_\mu(x), A_\nu(x) \right]$$

Las ecuaciones del movimiento son ahora

$$D_\nu F^{\nu\mu}(x) = 0 \tag{2}$$

Mientras que las identidades de Bianchi son

$$D_\nu {}^*F^{\nu\mu}(x) = 0 \qquad\qquad {}^*F^{\nu\mu}(x) = \frac{1}{2} \epsilon^{\nu\mu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}(x) \tag{3}$$

De aquí se deduce que para todos los

$$F_{\mu\nu}(x) = \pm \, {}^*F_{\mu\nu}(x) \tag{4}$$

las ecuaciones del movimiento se satisfacen idénticamente (Notar que esto equivale a $\vec{E} = \pm \vec{B}$). Lo importante es que en una métrica euclídea es posible satisfacer (4) con campos reales $A_a^\mu(x)$. Para la métrica de Minkowski esto no es posible pues la relación equivalente a (4) es $F_{\mu\nu} = \pm i \, {}^*F_{\mu\nu}$, pues en la métrica de Minkowski ${}^{**}F_{\mu\nu} = -F_{\mu\nu}$ mientras que en la euclídea ${}^{**}F_{\mu\nu} = + F_{\mu\nu}$. La continuación de una métrica a la otra implica

$$x^0 \longrightarrow i x^0 \quad , \quad A^0 \longrightarrow -i A^0 \tag{5}$$

Esto conduce a una métrica $g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu}$ pero el signo global negativo puede ser reabsorbido.

La ecuación (4) reduce el problema a resolver ecuaciones de primer orden. Además

$$2\,\mathrm{Tr}\,(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) = \mathrm{Tr} \left\{ F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + {}^*F_{\mu\nu} {}^*F^{\mu\nu} \right\} =$$

$$= \mathrm{Tr} \left\{ (F_{\mu\nu} \mp {}^*F_{\mu\nu})(F^{\mu\nu} \mp {}^*F^{\mu\nu}) \pm 2 F_{\mu\nu} {}^*F^{\mu\nu} \right\} \tag{6}$$

Entonces si se puede asociar la integral de $Tr\,(F_{\mu\nu}\,{}^*F^{\mu\nu})$ a un invariante topológico (digamos q_P) entonces para un dado q_P la acción es mínima para $F_{\mu\nu}$ satisfaciendo (40.4). Veamos que tal interpretación topológica existe. Notemos

$$\frac{1}{2}\,Tr\,({}^*F_{\mu\nu}\,F^{\mu\nu}) = \frac{1}{4}\,\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,Tr\,(F^{\alpha\beta}\,F^{\mu\nu}) =$$

$$= \frac{1}{4}\,\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,Tr\left\{\left[\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha \mp ig\,[A^\alpha, A^\beta]\right]\left[\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \mp ig\,[A^\mu, A^\nu]\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\,\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,Tr\left\{\partial^\alpha A^\beta\,\partial^\mu A^\nu - \partial^\alpha A^\beta\,\partial^\nu A^\mu \mp ig\,\partial^\alpha A^\beta A^\mu A^\nu + ig\,\partial^\alpha A^\beta A^\nu A^\mu\right.$$

$$- \partial^\beta A^\alpha\,\partial^\mu A^\nu + \partial^\beta A^\alpha\,\partial^\nu A^\mu + ig\,\partial^\beta A^\alpha A^\mu A^\nu \mp ig\,\partial^\beta A^\alpha A^\nu A^\mu +$$

$$\mp ig\,A^\alpha A^\beta\,\partial^\mu A^\nu + ig\,A^\alpha A^\beta\,\partial^\nu A^\mu - g^2 A^\alpha A^\beta A^\mu A^\nu + g^2 A^\alpha A^\beta A^\nu A^\mu$$

$$\left. + ig\,A^\beta A^\alpha\,\partial^\mu A^\nu \mp ig\,A^\beta A^\alpha\,\partial^\nu A^\mu + g^2 A^\beta A^\alpha A^\mu A^\nu - g^2 A^\beta A^\alpha A^\nu A^\mu\right\} =$$

$$= \frac{1}{4}\,\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,Tr\left\{4\,\partial^\alpha A^\beta\,\partial^\mu A^\nu \mp 8ig\,A^\mu A^\nu\,\partial^\alpha A^\beta - 4g^2 A^\alpha A^\beta A^\mu A^\nu\right\}$$

$$= \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,Tr\left\{\partial^\alpha A^\beta\,\partial^\mu A^\nu \mp 2ig\,A^\mu A^\nu\,\partial^\alpha A^\beta\right\}$$

$$= \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,\partial^\alpha\,Tr\left[A^\beta\,\partial^\mu A^\nu \mp \frac{2}{3}\,ig\,A^\mu A^\nu A^\beta\right]$$

Obtenemos pues

$$\frac{1}{2}\,Tr\,({}^*F_{\mu\nu}\,F^{\mu\nu}) = \partial_\mu\,\xi^\mu \tag{1}$$

$$\xi^\mu \equiv 2\,\epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}\,Tr\left\{\frac{1}{2}\,A_\alpha\,\partial_\beta A_\gamma \mp \frac{i}{3}\,g\,A_\alpha A_\beta A_\gamma\right\}$$

Además si S_E debe ser finito

$$F_{\mu\nu} \xrightarrow[|x|\to\infty]{} 0 \tag{2}$$

y por tanto

$$A_\mu(x) \longrightarrow +\frac{i}{g}\,f^{-1}(x)\,\partial_\mu f(x) \tag{3}$$

es decir debe ser un gauge puro. Definamos

$$q_E = \frac{2g^2}{32\pi^2}\int d^4x\;Tr\,[{}^*F_{\mu\nu}(x)\,F^{\mu\nu}(x)] = \frac{2g^2}{16\pi^2}\int d^4x\;\partial_\mu\,\xi^\mu(x) \tag{4}$$

Teniendo en cuenta (1) y (3) y usando el teorema de Stokes

$$q_P = \frac{g^2}{8\pi^2} \int_{S^3_R\,(R\to\infty)} d\sigma_\mu \, \xi^\mu$$

$$= \frac{g^2}{4\pi^2} \int_{S^3_R\,(R\to\infty)} d\sigma_\mu \, \epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} \, \mathrm{Tr} \left\{ -\frac{1}{2g^2} f^{-1}(\partial_\alpha f)\, \partial_\beta \left(f^{-1}(\partial_\gamma f)\right) - \frac{1}{3g^2} (f^{-1}\partial_\alpha f)(f^{-1}\partial_\beta f)(f^{-1}\partial_\gamma f) \right\}$$

$$q_P = \frac{1}{24\pi^2} \int_{S^3_R\,(R\to\infty)} d\sigma_\mu \, \epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} \, \mathrm{Tr} \left[(f^{-1}\partial_\alpha f)(f^{-1}\partial_\beta f)(f^{-1}\partial_\gamma f) \right] \tag{1}$$

lo cual es válido si $\partial_\mu \xi^\mu$ no es singular.

Intentemos ahora calcular esta cantidad (M. K. PRASAD "Instantons and Monopoles in Yang-Mills gauge field theories" ITP - S.B. - 79-99). En nuestro caso $f(x)$ es una matriz arbitraria 2×2 con determinante uno, y por tanto

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= I\, V_4(x) + i\,\vec{\tau}\cdot\vec{V}(x) \\ V_4^2(x) &+ \vec{V}^2(x) = 1 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Introduzcamos las matrices

$$\sigma_\mu = \begin{cases} I & \mu = 4 \\ i\tau_a & \mu = a = 1,2,3 \end{cases} \qquad \sigma_\mu^+ = \begin{cases} I & \mu = 4 \\ -i\tau_a & \mu = a = 1,2,3 \end{cases} \tag{3}$$

Se obtiene inmediatamente

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= V_\mu(x)\sigma_\mu \qquad f^{-1}(x) = V_\mu(x)\,\sigma_\mu^+ \\ V_\mu(x)\, &V_\mu(x) = 1 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Además

$$\sigma_\mu^+ \sigma_\nu + \sigma_\nu^+ \sigma_\mu = \sigma_\mu \sigma_\nu^+ + \sigma_\nu \sigma_\mu^+ = 2 I \delta_{\mu\nu} \tag{5}$$

Los tensores η y $\bar\eta$ de 't Hooft se definen como

$$\eta_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}\left(\sigma_\mu^+ \sigma_\nu - \sigma_\nu^+ \sigma_\mu\right) \quad , \quad \bar\eta_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}\left(\sigma_\mu \sigma_\nu^+ - \sigma_\nu \sigma_\mu^+\right) \tag{6}$$

Como

$$\begin{aligned} \sigma_\mu^+ \sigma_\nu &= I\,\delta_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\, \sigma_\lambda^+ \sigma_\rho \\ \sigma_\mu \sigma_\nu^+ &= I\,\delta_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\, \sigma_\lambda \sigma_\rho^+ \end{aligned} \tag{7}$$

donde $\epsilon_{1234} = +1$. Además una propiedad esencial es que η ($\bar\eta$) es ~~auto~~ dual (antiautodual)

$$\eta_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\,\eta_{\lambda\rho} = {}^*\eta_{\mu\nu} \quad , \quad \bar\eta_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\,\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\,\bar\eta_{\lambda\rho} = -{}^*\bar\eta_{\mu\nu} \tag{1}$$

Los tensores $\eta_{\mu\nu}$ y $\bar\eta_{\mu\nu}$ son matrices 2×2 antihermíticas y de traza cero y por tanto pueden escribirse

$$\eta_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2i}\,\eta^a_{\mu\nu}\,\tau_a \quad , \quad \bar\eta_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2i}\,\bar\eta^a_{\mu\nu}\,\tau_a \tag{2}$$

donde los tensores $\eta^a_{\mu\nu}$ tienen todas las componentes reales. Es fácil comprobar que

$$\left.\begin{aligned} \eta^a_{\mu\nu} &= \epsilon_{\mu\nu a 4} + \delta_{a\nu}\,\delta_{4\mu} - \delta_{a\mu}\,\delta_{4\nu} \\ \bar\eta^a_{\mu\nu} &= \epsilon_{\mu\nu a 4} - \delta_{a\nu}\,\delta_{4\mu} + \delta_{a\mu}\,\delta_{4\nu} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\eta^a_{ij} = \epsilon_{ija} \quad \eta^a_{i4} = \delta_{ia} \\ &\bar\eta^a_{ij} = \epsilon_{ija} \quad \bar\eta^a_{i4} = -\delta_{ia} \end{aligned} \tag{3}$$

De donde se deducen inmediatamente

i) $$\eta^a_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\,\eta^a_{\lambda\rho} \quad , \quad \bar\eta^a_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\,\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\,\eta^a_{\lambda\rho} \tag{4}$$

ii) $$\eta^a_{\mu\nu} = -\eta^a_{\nu\mu} \quad , \quad \bar\eta^a_{\mu\nu} = -\bar\eta^a_{\nu\mu} \tag{5}$$

iii) $$\eta^a_{\mu\nu}\,\eta^b_{\mu\nu} = \bar\eta^a_{\mu\nu}\,\bar\eta^b_{\mu\nu} = 4\,\delta_{ab} \tag{6}$$

iv) $$\eta^a_{\mu\nu}\,\eta^a_{\mu\tau} = \bar\eta^a_{\mu\nu}\,\bar\eta^a_{\mu\tau} = 3\,\delta_{\nu\tau} \tag{7}$$

v) $$\eta^a_{\mu\nu}\,\eta^a_{\mu\nu} = \bar\eta^a_{\mu\nu}\,\bar\eta^a_{\mu\nu} = 12 \tag{8}$$

vi) $$\begin{aligned} \eta^a_{\mu\nu}\,\eta^a_{\tau\rho} &= \delta_{\mu\tau}\,\delta_{\nu\rho} - \delta_{\mu\rho}\,\delta_{\nu\tau} + \epsilon_{\mu\nu\tau\rho} \\ \bar\eta^a_{\mu\nu}\,\bar\eta^a_{\tau\rho} &= \delta_{\mu\tau}\,\delta_{\nu\rho} - \delta_{\mu\rho}\,\delta_{\nu\tau} - \epsilon_{\mu\nu\tau\rho} \end{aligned} \tag{9}$$

vii) $$\begin{aligned} \eta^a_{\mu\nu}\,\eta^b_{\mu\tau} &= \delta_{ab}\,\delta_{\nu\tau} + \epsilon_{abc}\,\eta^c_{\nu\tau} \\ \bar\eta^a_{\mu\nu}\,\bar\eta^b_{\mu\tau} &= \delta_{ab}\,\delta_{\nu\tau} + \epsilon_{abc}\,\bar\eta^c_{\nu\tau} \end{aligned} \tag{10}$$

viii) $$\begin{aligned} \epsilon_{abc}\,\eta^b_{\mu\nu}\,\eta^c_{\tau\rho} &= \delta_{\mu\tau}\,\eta^a_{\nu\rho} - \delta_{\mu\rho}\,\eta^a_{\nu\tau} - \delta_{\nu\tau}\,\eta^a_{\mu\rho} + \delta_{\nu\rho}\,\eta^a_{\mu\tau} \\ \epsilon_{abc}\,\bar\eta^b_{\mu\nu}\,\bar\eta^c_{\tau\rho} &= \delta_{\mu\tau}\,\bar\eta^a_{\nu\rho} - \delta_{\mu\rho}\,\bar\eta^a_{\nu\tau} - \delta_{\nu\tau}\,\bar\eta^a_{\mu\rho} + \delta_{\nu\rho}\,\bar\eta^a_{\mu\tau} \end{aligned} \tag{11}$$

viiii) $$\eta^a_{\mu\nu}\,\bar\eta^b_{\mu\nu} = 0 \tag{12}$$

Nótese que

$$f^{-1}(\partial_\alpha f) = \frac{1}{2}\left[f^{-1}(\partial_\alpha f) - (\partial_\alpha f^{-1}) f \right] = \frac{1}{2} V_\mu (\partial_\alpha V_\nu) \left[\sigma_\mu^{+} \sigma_\nu - \sigma_\nu^{+} \sigma_\mu \right]$$

$$= -2\, \eta_{\mu\nu} V_\mu (\partial_\alpha V_\nu) = i\, \eta^a_{\ \mu\nu} V_\mu (\partial_\alpha V_\nu)\, \tau_a$$

$$\mathrm{Tr}\left[(f^{-1}\partial_\alpha f)(f^{-1}\partial_\beta f)(f^{-1}\partial_\gamma f) \right] = i^3\, \eta^a_{\ \mu\nu}\, \eta^b_{\ \tau\rho}\, \eta^c_{\ \lambda\sigma}\, V_\mu(\partial_\alpha V_\nu) V_\tau (\partial_\beta V_\rho) V_\lambda (\partial_\gamma V_\sigma) \cdot \mathrm{Tr}(\tau_a \tau_b \tau_c) = 2 V_\mu (\partial_\alpha V_\nu) V_\tau (\partial_\beta V_\rho) V_\lambda (\partial_\gamma V_\sigma)\, \epsilon_{abc}\, \eta^a_{\ \mu\nu}\, \eta^b_{\ \tau\rho}\, \eta^c_{\ \lambda\sigma}$$

$$= 2 V_\mu (\partial_\alpha V_\nu) V_\tau (\partial_\beta V_\rho) V_\lambda (\partial_\gamma V_\sigma)\, \eta^a_{\ \mu\nu} \left\{ \delta_{\tau\lambda}\, \eta^a_{\ \rho\sigma} - \cancel{\delta_{\tau\sigma}\, \eta^a_{\ \rho\lambda}} - \cancel{\delta_{\rho\lambda}\, \eta^a_{\ \rho\lambda}} + \delta_{\rho\sigma}\, \eta^a_{\ \tau\lambda} \right\}$$

$$= 2 V_\mu (\partial_\alpha V_\nu)(\partial_\beta V_\rho)(\partial_\gamma V_\sigma) \left[\cancel{\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma}} - \cancel{\delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\tau}} + \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \right]$$

$$+ 2 V_\mu (\partial_\alpha V_\nu) V_\tau (\partial_\beta V_\rho) V_\lambda (\partial_\gamma V_\rho) \left[\cancel{\delta_{\mu\tau}\delta_{\nu\lambda}} - \cancel{\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\tau}} + \cancel{\epsilon_{\mu\nu\tau\lambda}} \right] =$$

$$= +2\, \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} V_\mu (\partial_\alpha V_\nu)(\partial_\beta V_\rho)(\partial_\gamma V_\sigma)$$

De donde

$$q_P = \frac{1}{12\pi^2} \int_{S^3_R\,(R\to\infty)} d\sigma_\mu\, \epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\, \epsilon_{\tau\lambda\sigma\rho}\, V_\tau (\partial_\alpha V_\lambda)(\partial_\beta V_\sigma)(\partial_\gamma V_\rho) \qquad (1)$$

La esfera $\{ S^3_R : x_\mu x_\mu = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = R^2 \}$ puede parametrizarse mediante tres parámetros ξ_a $(a = 1, 2, 3)$: $x_\mu = x_\mu(\xi_a)$. Antes de continuar analicemos el teorema de Gauss: Considérese un espacio M dimensional y sea R_M una región de este espacio y R_{M-1} el subespacio $(M-1)$-dimensional que forma la frontera de R_M. Los puntos del espacio M-dimensional se pueden caracterizar mediante M parámetros ξ_a $(a = 1, 2 \dots M)$. Las coordenadas en este espacio vienen dadas por las ecuaciones paramétricas

$$x_\mu = x_\mu(\xi_1, \xi_2 \dots, \xi_M) \qquad \mu = 1, 2 \dots M \qquad (2)$$

Formemos el elemento de "área"

$$d\tau_{\mu_1 \dots \mu_M} = \epsilon_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_M} \frac{\partial x_{\mu_1}}{\partial \xi_{\nu_1}} \frac{\partial x_{\mu_2}}{\partial \xi_{\nu_2}} \cdots \frac{\partial x_{\mu_M}}{\partial \xi_{\nu_M}} (d^M \xi) \qquad (3)$$

$$d^M \xi \equiv d\xi_1\, d\xi_2 \dots d\xi_M$$

Entonces el teorema de Gauss dice que

$$\int_{R_M} \partial_\mu J_\mu(x)\, (d^M x) = \int_{R_{M-1}} J_\mu(x)\, (d^{M-1}\sigma_\mu) \qquad (4)$$

desde

$$(d^M x) \equiv dx_1\, dx_2 \ldots dx_M \tag{1}$$

$$(d^{M-1}\sigma_{\mu_1}) \equiv \frac{1}{(M-1)!}\, \epsilon_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_M}\, d\tau_{\mu_2 \mu_3 \ldots \mu_N}$$

Es útil recordar que los elementos de volumen en los espacios de $M=3$ y $M=4$ son

$$(d^3x) \equiv dx_1\, dx_2\, dx_3 \equiv r^2 dr\, (d^2\Omega_2) \qquad r = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2} \geq 0 \tag{2}$$

$$(d^4x) \equiv dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4 = R^3 dR\, (d^3\Omega_3) \qquad R \equiv (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^{1/2} \geq 0$$

y que

$$\Omega_2 = \int (d^2\Omega_2) = 4\pi \qquad \Omega_3 = \int (d^3\Omega_3) = 2\pi^2 \tag{3}$$

Usemos ahora (43.3) y (1) para $M=4$, el elemento de superficie $d^3\sigma_\mu$ es

$$d^3\sigma_\mu = \frac{1}{6}\, \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \frac{\partial x_\nu}{\partial \xi_a} \frac{\partial x_\alpha}{\partial \xi_b} \frac{\partial x_\beta}{\partial \xi_c}\, \epsilon_{abc}\, (d^3\xi) \tag{4}$$

y por tanto

$$q_\mu = \frac{1}{72\pi^2} \int_{S_R^3 (R\to\infty)} (d^3\xi)\, \epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} \frac{\partial x_\alpha}{\partial \xi_a} \frac{\partial x_\beta}{\partial \xi_b} \frac{\partial x_\gamma}{\partial \xi_c}\, \epsilon_{abc}\, \epsilon_{\mu\alpha'\beta'\gamma'}\, \epsilon_{\tau\lambda\sigma\rho}\, V_\tau\, (\partial_{\alpha'} V_\lambda)(\partial_{\beta'} V_\sigma)(\partial_{\gamma'} V_\rho)$$

$$= \frac{1}{72\pi^2} \int_{S_R^3 (R\to\infty)} (d^3\xi)\, \epsilon_{abc}\, \epsilon_{\tau\lambda\sigma\rho} \frac{\partial x_\alpha}{\partial \xi_a} \frac{\partial x_\beta}{\partial \xi_b} \frac{\partial x_\gamma}{\partial \xi_c}\, V_\tau\, (\partial_{\alpha'} V_\lambda)(\partial_{\beta'} V_\sigma)(\partial_{\gamma'} V_\rho) \,.$$

$$\{ \delta_{\alpha\alpha'}\delta_{\beta\beta'}\delta_{\gamma\gamma'} + \delta_{\alpha\beta'}\delta_{\beta\gamma'}\delta_{\gamma\alpha'} + \delta_{\alpha\gamma'}\delta_{\beta\alpha'}\delta_{\gamma\beta'} -$$

$$- \delta_{\alpha\alpha'}\delta_{\beta\gamma'}\delta_{\gamma\beta'} - \delta_{\alpha\gamma'}\delta_{\beta\beta'}\delta_{\gamma\alpha'} - \delta_{\alpha\beta'}\delta_{\beta\alpha'}\delta_{\gamma\gamma'} \}$$

$$= \frac{1}{12\pi^2} \int_{S_R^3 (R\to\infty)} d^3\xi\, \epsilon_{\tau\lambda\sigma\rho}\, \epsilon_{abc}\, V_\tau \left(\frac{\partial V_\lambda}{\partial \xi_a}\right)\left(\frac{\partial V_\sigma}{\partial \xi_b}\right)\left(\frac{\partial V_\rho}{\partial \xi_c}\right) \tag{5}$$

Consideremos ahora la cantidad

$$S \equiv \left[\epsilon_{\tau\lambda\sigma\rho}\, \epsilon_{abc}\, V_\tau \left(\frac{\partial V_\lambda}{\partial \xi_a}\right)\left(\frac{\partial V_\sigma}{\partial \xi_b}\right)\left(\frac{\partial V_\rho}{\partial \xi_c}\right) \right]^2 \tag{6}$$

Se obtiene inmediatamente que

$$S = 36\ \epsilon_{\tau\lambda\sigma\rho}\ \epsilon_{\tau'\lambda'\sigma'\rho'}\ V_\tau V_{\tau'}\ \frac{\partial V_\lambda}{\partial \xi_1}\frac{\partial V_{\lambda'}}{\partial \xi_1}\ \frac{\partial V_\sigma}{\partial \xi_2}\frac{\partial V_{\sigma'}}{\partial \xi_2}\ \frac{\partial V_\rho}{\partial \xi_3}\frac{\partial V_{\rho'}}{\partial \xi_3} =$$

$$= 36\ \frac{\partial V_\lambda}{\partial \xi_1}\frac{\partial V_{\lambda'}}{\partial \xi_1}\frac{\partial V_\sigma}{\partial \xi_2}\frac{\partial V_{\sigma'}}{\partial \xi_2}\frac{\partial V_\rho}{\partial \xi_3}\frac{\partial V_{\rho'}}{\partial \xi_3}\ [\delta_{\lambda\lambda'}\delta_{\sigma\sigma'}\delta_{\rho\rho'} - \delta_{\lambda\lambda'}\delta_{\sigma\rho'}\delta_{\rho\sigma'} + \delta_{\lambda\sigma'}\delta_{\sigma\rho'}\delta_{\rho\lambda'} - \delta_{\lambda\sigma'}\delta_{\sigma\lambda'}\delta_{\rho\rho'} + \delta_{\lambda\rho'}\delta_{\sigma\lambda'}\delta_{\rho\sigma'} - \delta_{\lambda\rho'}\delta_{\sigma\sigma'}\delta_{\rho\lambda'}]$$

$$= 36 \left\{ \left(\frac{\partial V_\lambda}{\partial \xi_1}\frac{\partial V_\lambda}{\partial \xi_1}\right)\left(\frac{\partial V_\sigma}{\partial \xi_2}\frac{\partial V_\sigma}{\partial \xi_2}\right)\left(\frac{\partial V_\rho}{\partial \xi_3}\frac{\partial V_\rho}{\partial \xi_3}\right) - \left(\frac{\partial V_\lambda}{\partial \xi_1}\frac{\partial V_\lambda}{\partial \xi_1}\right)\left(\frac{\partial V_\sigma}{\partial \xi_2}\frac{\partial V_\sigma}{\partial \xi_3}\right)\left(\frac{\partial V_\rho}{\partial \xi_2}\frac{\partial V_\rho}{\partial \xi_3}\right) + \right.$$

$$+ \left(\frac{\partial V_\lambda}{\partial \xi_1}\frac{\partial V_\lambda}{\partial \xi_2}\right)\left(\frac{\partial V_\sigma}{\partial \xi_2}\frac{\partial V_\sigma}{\partial \xi_3}\right)\left(\frac{\partial V_\rho}{\partial \xi_3}\frac{\partial V_\lambda}{\partial \xi_1}\right) - \left(\frac{\partial V_\lambda}{\partial \xi_1}\frac{\partial V_\lambda}{\partial \xi_2}\right)\left(\frac{\partial V_\sigma}{\partial \xi_2}\frac{\partial V_\sigma}{\partial \xi_1}\right)\left(\frac{\partial V_\rho}{\partial \xi_3}\frac{\partial V_\rho}{\partial \xi_3}\right) +$$

$$\left. + \left(\frac{\partial V_\lambda}{\partial \xi_1}\frac{\partial V_\lambda}{\partial \xi_3}\right)\left(\frac{\partial V_\sigma}{\partial \xi_2}\frac{\partial V_\sigma}{\partial \xi_1}\right)\left(\frac{\partial V_\rho}{\partial \xi_3}\frac{\partial V_\rho}{\partial \xi_2}\right) - \left(\frac{\partial V_\lambda}{\partial \xi_1}\frac{\partial V_\lambda}{\partial \xi_3}\right)\left(\frac{\partial V_\sigma}{\partial \xi_2}\frac{\partial V_\sigma}{\partial \xi_2}\right)\left(\frac{\partial V_\rho}{\partial \xi_3}\frac{\partial V_\rho}{\partial \xi_1}\right) \right\} =$$

$$\equiv 36 \det \left| \frac{\partial V_\lambda}{\partial \xi_a}\ \frac{\partial V_\lambda}{\partial \xi_b} \right| \equiv 36\ |g_{ab}| \qquad (1)$$

donde $|g_{ab}|$ es el determinante del tensor métrico g_{ab} de la esfera unidad $V_\mu V_\mu = +1$

Tenemos pues

$$q_P = \frac{1}{2\pi^2} \int_{S^3_R\,(R\to\infty)} d^3\xi \left[\det \left(\frac{\partial V_\lambda}{\partial \xi_a}\ \frac{\partial V_\lambda}{\partial \xi_b} \right) \right]^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2} \int_{S^3_R\,(R\to\infty)} d^3\xi \sqrt{|g_{ab}|} = \text{entero} \qquad (2)$$

pues mientras el punto (ξ_1, ξ_2, ξ_3) cubre la esfera unidad S^3_R una vez, el vector V_μ puede cubrir la esfera $V_\mu V_\mu = 1$ un número q_P de veces y cada vez contribuye con un ángulo sólido $2\pi^2$ (44.3).

Ha representado un gran esfuerzo el encontrar soluciones explícitas de las ecuaciones autoduales (4). Los esfuerzos empezaron con el trabajo pionero de A.A. BELAVIN, A.M. POLYAKOV, A.S. SCHWARTZ y Yu. S. TYUPKIN Phys. Lett. B59, 85 (1975) que encontraron una solución para $q_P = 1$ y que culminaron en el trabajo de M.F. ATIYAH, N.J. HITCHIN, V.G. DRINFIELD y Yu. I. MANIN Phys. Lett. A65, 185 (1978) encontrando soluciones para q arbitrario.

Antes de pasar a las soluciones explícitas elaboraremos algo más la notación: consideremos un tensor antisimétrico $T_{\mu\nu} = -T_{\nu\mu}$ el cual puede escribirse

$$T_{\mu\nu} \equiv -T_{\nu\mu} \equiv \frac{1}{2}\left(T_{\mu\nu} + {}^*T_{\mu\nu}\right) + \frac{1}{2}\left(T_{\mu\nu} - {}^*T_{\mu\nu}\right) \qquad (3)$$

$${}^*T_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\,\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,T_{\alpha\beta}$$

es decir como la suma de un tensor autodual y antiautodual. Notemos además que

$$T_{\mu\nu} \pm {}^{*}T_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta} - \delta_{\mu\beta}\delta_{\nu\alpha} \pm \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\right) T_{\alpha\beta} = P^{(\pm)}_{\mu\nu\alpha\beta}\, T_{\alpha\beta} \tag{1}$$

donde hemos definido los proyectores en las partes autoduales y anti-autoduales. Comparando con (43.9)

$$P^{(+)}_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2}\, \eta^{a}_{\mu\nu}\, \eta^{a}_{\alpha\beta} \qquad P^{(-)}_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2}\, \bar{\eta}^{a}_{\mu\nu}\, \bar{\eta}^{a}_{\alpha\beta} \tag{2}$$

Si $T_{\mu\nu}$ es autodual

$$T_{\mu\nu} = {}^{*}T_{\mu\nu} \iff \bar{\eta}^{a}_{\mu\nu}\, \bar{\eta}^{a}_{\rho\tau}\, T_{\rho\tau} = 0 \tag{3}$$

y multiplicando por $\bar{\eta}^{b}_{\mu\nu}$ se obtiene

$$T_{\mu\nu} = {}^{*}T_{\mu\nu} \iff \bar{\eta}^{a}_{\rho\tau}\, T_{\rho\tau} = 0 \tag{4}$$

La solución original de Belavin - Polyakov - Schwartz - Tyupkin para $q_P = 1$ viene dada por

$$\left.\begin{aligned} A^{a}_{\mu} &= + \frac{2}{g}\, \frac{\eta^{a}_{\mu\nu}\,(x - x_0)_\nu}{(x-x_0)^2 + \lambda^2} \\ (x - x_0)^2 &\equiv (x - x_0)_\mu (x - x_0)_\mu \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

siendo $(x_0)_\nu$ y λ cinco parámetros libres asociados con la posición y escala del instantón. Esta solución es no singular por doquier. De hecho se puede probar que una solución con carga topológica q_P depende al menos de $(8q_P - 3)$ parámetros

$$A_\mu = \frac{1}{2}\, \tau_a\, A^{a}_{\mu} = + \frac{2i}{g}\, \frac{\eta_{\mu\nu}\,(x - x_0)_\nu}{(x - x_0)^2 + \lambda^2} \tag{6}$$

Notemos que

$$\left.\begin{aligned} A_\mu &= + \frac{i}{g}\, \frac{(x - x_0)^2}{(x - x_0)^2 + \lambda^2}\, f^{-1} \partial_\mu f \\ f &= \frac{(x - x_0)_\nu\, \sigma_\nu}{\sqrt{(x - x_0)^2}} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

y para $x^2 \to \infty$ se tiene

$$A_\mu \simeq + \frac{i}{g}\, f^{-1} \partial_\mu f$$

Tomando coordenadas esféricas $(x_0=0)$

$$x_1 = R \sin \xi_3 \sin \xi_2 \cos \xi_1 \quad , \quad x_2 = R \sin \xi_3 \sin \xi_2 \sin \xi_1 \quad , \quad x_3 = R \sin \xi_3 \cos \xi_2 \quad , \quad x_4 = R \cos \xi_3 \qquad (1)$$

de donde

$$V_\mu \equiv (\sin \xi_3 \sin \xi_2 \cos \xi_1 \, , \; \sin \xi_3 \sin \xi_2 \sin \xi_1 \, , \; \sin \xi_3 \cos \xi_2 \, , \; \cos \xi_3) \qquad (2)$$

$$g_{11} = \sin^2 \xi_2 \sin^2 \xi_3 \quad , \quad g_{22} = \sin^2 \xi_3 \quad , \quad g_{33} = 1$$

$$g_{12} = 0 \qquad g_{13} = 0 \qquad g_{23} = 0$$

$$\sqrt{|g_{ab}|} = \sin^2 \xi_3 \sin \xi_2$$

y entonces se ve inmediatamente que $q_p = 1$. Notar además que de acuerdo con lo dicho antes la forma asintótica es singular en $x = x_0$. El correspondiente tensor campo es

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig [A_\mu , A_\nu] \qquad A_\mu = + \frac{2i}{g} [(x-x_0)^2 + \lambda^2]^{-1} \eta_{\mu\tau} (x-x_0)_\tau$$

$$\partial_\mu A_\nu = - \frac{4i}{g} [(x-x_0)^2 + \lambda^2]^{-2} (x-x_0)_\mu \eta_{\nu\tau} (x-x_0)_\tau + \frac{2i}{g} [(x-x_0)^2 + \lambda^2]^{-1} \eta_{\nu\mu}$$

$$ig [A_\mu , A_\nu] = - \frac{4i}{g} [(x-x_0)^2 + \lambda^2]^{-2} (x-x_0)_\tau (x-x_0)_\sigma [\eta_{\mu\tau} , \eta_{\nu\sigma}]$$

$$= - \frac{4i}{g} [(x-x_0)^2 + \lambda^2]^{-2} (x-x_0)_\tau (x-x_0)_\sigma [\delta_{\mu\nu} \eta_{\tau\sigma} - \delta_{\mu\sigma} \eta_{\tau\nu} - \delta_{\tau\nu} \eta_{\mu\sigma} + \delta_{\tau\sigma} \eta_{\mu\nu}]$$

$$F_{\mu\nu} = \cancel{- \frac{4i}{g} [(x-x_0)^2 + \lambda^2]^{-2} (x-x_0)_\mu \eta_{\nu\tau} (x-x_0)_\tau} + \frac{2i}{g} [(x-x_0)^2 + \lambda^2]^{-1} \eta_{\nu\mu}$$

$$+ \cancel{\frac{4i}{g} [(x-x_0)^2 + \lambda^2]^{-2} (x-x_0)_\nu \eta_{\mu\tau} (x-x_0)_\tau} - \frac{2i}{g} [(x-x_0)^2 + \lambda^2]^{-1} \eta_{\mu\nu}$$

$$+ \frac{4i}{g} [(x-x_0)^2 + \lambda^2]^{-2} [\cancel{+ (x-x_0)_\mu \eta_{\nu\tau} (x-x_0)_\tau - (x-x_0)_\nu \eta_{\mu\tau} (x-x_0)_\tau} + (x-x_0)^2 \eta_{\mu\nu}]$$

$$F_{\mu\nu}(x) = - \frac{4i}{g} \frac{\lambda^2}{[(x-x_0)^2 + \lambda^2]^2} \eta_{\mu\nu} \qquad (3)$$

que es manifiestamente autodual.

Para generalizar este resultado a q_p arbitrario empezaremos considerando el

Ansatz de E. CORRIGAN y D. FAIRLIE [Phys. Lett. 67B, 69 (1977)] G. 'T HOOFT (No publicado) F. WILCZEK [en "Quark confinement and field theory" ed. D. Stump. y D. Weingarten J. Wiley. N.Y 1977]. Consideremos

$$A_\mu(x) = -\frac{i}{g}\,\bar{\eta}_{\mu\tau}\,\partial_\tau \ln\phi(x) \tag{1}$$

donde ϕ es por el momento una función arbitraria de x_μ. Las intensidades de campo son

$$\partial_\mu A_\nu(x) = -\frac{i}{g}\,\bar{\eta}_{\nu\tau}\,\partial_\mu\partial_\tau \ln\phi(x) = -\frac{i}{g}\,\bar{\eta}_{\nu\tau}\left\{\frac{\partial_\mu\partial_\tau\phi}{\phi} - \frac{\partial_\mu\phi\,\partial_\tau\phi}{\phi^2}\right\}$$

$$ig\,[A_\mu, A_\nu] = -\frac{i}{g}\,\partial_\tau\ln\phi(x)\,\partial_\sigma\ln\phi(x)\,[\bar{\eta}_{\mu\tau}, \bar{\eta}_{\nu\sigma}]$$

$$= -\frac{i}{g}\,\partial_\tau\ln\phi(x)\,\partial_\sigma\ln\phi(x)\left[\cancel{\delta_{\mu\nu}\bar{\eta}_{\tau\sigma}} - \delta_{\mu\sigma}\bar{\eta}_{\tau\nu} - \delta_{\tau\nu}\bar{\eta}_{\mu\sigma} + \delta_{\tau\sigma}\bar{\eta}_{\mu\nu}\right]$$

$$F_{\mu\nu} = \mp\frac{i}{g}\,\bar{\eta}_{\nu\tau}\left\{\frac{\partial_\mu\partial_\tau\phi}{\phi} - \frac{\partial_\mu\phi\,\partial_\tau\phi}{\phi^2}\right\} + \frac{i}{g}\,\bar{\eta}_{\mu\tau}\left\{\frac{\partial_\nu\partial_\tau\phi}{\phi} - \frac{\partial_\nu\phi\,\partial_\tau\phi}{\phi^2}\right\}$$

$$+\frac{i}{g}\,\frac{\partial_\mu\phi}{\phi}\,\frac{\partial_\tau\phi}{\phi}\,\bar{\eta}_{\nu\tau} \mp \frac{i}{g}\,\frac{\partial_\nu\phi}{\phi}\,\frac{\partial_\tau\phi}{\phi}\,\bar{\eta}_{\mu\tau} + \frac{i}{g}\,\frac{\partial_\tau\phi}{\phi}\,\frac{\partial_\tau\phi}{\phi}\,\bar{\eta}_{\mu\nu}$$

$$F_{\mu\nu}(x) = +\frac{i}{g}\,\bar{\eta}_{\mu\tau}\left\{\frac{\partial_\nu\partial_\tau\phi(x)}{\phi(x)} - 2\,\frac{\partial_\nu\phi(x)\,\partial_\tau\phi(x)}{\phi^2(x)}\right\} +$$

$$\mp\frac{i}{g}\,\bar{\eta}_{\nu\tau}\left\{\frac{\partial_\mu\partial_\tau\phi(x)}{\phi(x)} - 2\,\frac{\partial_\mu\phi(x)\,\partial_\tau\phi(x)}{\phi^2(x)}\right\} + \frac{i}{g}\,\bar{\eta}_{\mu\nu}\,\frac{\partial_\tau\phi(x)}{\phi}\,\frac{\partial_\tau\phi(x)}{\phi}$$

Exigir que $F_{\mu\nu}(x)$ sea autodual es equivalente a imponer (56.6)

$$\bar{\eta}^b_{\mu\nu}\,F^a_{\mu\nu}(x) = 0$$

$$\bar{\eta}^b_{\mu\nu}\,F^a_{\mu\nu}(x) = +\frac{1}{g}\,\bar{\eta}^b_{\mu\nu}\,\bar{\eta}^a_{\mu\tau}\left\{\frac{\partial_\nu\partial_\tau\phi}{\phi} - 2\,\frac{\partial_\nu\phi\,\partial_\tau\phi}{\phi^2}\right\} \mp \frac{1}{g}\,\bar{\eta}^b_{\mu\nu}\,\bar{\eta}^a_{\nu\tau}\left\{\frac{\partial_\mu\partial_\tau\phi}{\phi} - 2\,\frac{\partial_\mu\phi\,\partial_\tau\phi}{\phi^2}\right\}$$

$$+\frac{1}{g}\,\bar{\eta}^b_{\mu\nu}\,\bar{\eta}^a_{\mu\nu}\,\frac{\partial_\tau\phi}{\phi}\,\frac{\partial_\tau\phi}{\phi}$$

$$= +\frac{1}{g}\left\{\frac{\partial_\nu\partial_\tau\phi}{\phi} - 2\,\frac{\partial_\nu\phi\,\partial_\tau\phi}{\phi^2}\right\}\left[\delta_{ab}\,\delta_{\nu\tau} - \epsilon_{abc}\,\bar{\eta}^c_{\nu\tau}\right]$$

$$\mp\frac{1}{g}\left\{\frac{\partial_\mu\partial_\tau\phi}{\phi} - 2\,\frac{\partial_\mu\phi\,\partial_\tau\phi}{\phi^2}\right\}\left[-\delta_{ab}\,\delta_{\tau\mu} - \epsilon_{abc}\,\bar{\eta}^c_{\tau\mu}\right] + \frac{1}{g}\,\frac{\partial_\tau\phi}{\phi}\,\frac{\partial_\tau\phi}{\phi}\,4\,\delta_{ab}$$

$$= -\frac{1}{g}\,\delta_{ab}\left\{ -\frac{1}{\phi}\,\Box\phi + \frac{2}{\phi^2}(\partial_\mu\phi)(\partial_\mu\phi) - \frac{1}{\phi}\,\Box\phi + \frac{2}{\phi^2}(\partial_\mu\phi)(\partial_\mu\phi) - \frac{4}{\phi^2}(\partial_\mu\phi)(\partial_\mu\phi)\right\}$$

y por tanto $F_{\mu\nu}(x)$ es autodual si

$$\Box\,\phi(x) = 0 \qquad\qquad \Box \equiv \partial_\mu\partial_\mu \tag{1}$$

't Hooft [no publicado] ha considerado la solución

$$\phi(x) = 1 + \sum_{j=1}^{N} \frac{\lambda_j^2}{(x - x_j)^2} \tag{2}$$

que es valida solo para $x \neq x_j$ $(j = 1, 2, \ldots N)$. Cuando $x \to x_j$ se tiene

$$\phi(x) \xrightarrow[x \to x_j]{} \frac{\lambda_j^2}{(x - x_j)^2} \tag{3}$$

Veamos sin embargo que esto es un puro efecto del gauge. En efecto cerca de la singularidad

$$A_\mu(x) \xrightarrow[x \to x_j]{} + \frac{i}{g}\,\bar\eta_{\mu\tau}\,\frac{2(x_0 - x_j)_\tau}{(x - x_j)^2} =$$

$$= + \frac{i}{g}\, f_j^{-1}(x)\,\partial_\mu\, f_j(x) \tag{4}$$

$$f_j(x) = \frac{(x - x_j)_\tau}{\sqrt{(x - x_j)^2}}\,\sigma_\tau^+$$

y por tanto $F_{\mu\nu}(x)$ se anula en la singularidad y por tanto esta es solo un artificio de gauge sin consecuencias físicas. Integrando la densidad de acción sobre una region del espacio Euclideo 4-dimensional que excluya las singularidades en orden a poder aplicar el teorema de Gauss se obtiene que $q_p = N$ y hemos por tanto construido soluciones con número q_p arbitrario que dependen de $5\,q_p$ parametros y como este es menor que $(8q_p - 3)$ no puede ser la solución general.

La solución general fué derivada por Atiyah y col. en el trabajo citado antes usando geometría diferencial y algebraica pero el resultado es simple y vamos a darlo aquí. Construyamos una matriz rectangular $(q+1) \times q$ que denominaremos $M(x)$

$$M(x) = \{ M_{\alpha i}(x) \} \tag{5}$$

$$\alpha = 1, 2, \ldots\, q+1 \qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, q$$

Supondremos además que

$$M_{\alpha i}(x) = (B^{\mu}_{\alpha i} - C_{\alpha i}\, x^{\mu})\, \sigma_{\mu}^{+} \tag{1}$$

donde $B^{\mu}_{\alpha i}$ y $C_{\alpha i}$ son independientes de x. Cada elemento de $M(x)$ es pues un quaternión. La ecuación (1) la escribiremos en forma compacta como

$$M(x) = B - C.[x] \tag{2}$$

donde $[x]$ es la matriz $q \times q$ identidad multiplicada por $x^{\mu}\sigma_{\mu}^{+}$. Definamos ahora una matriz $q \times q$

$$\left.\begin{aligned} R(x) &\equiv M^{+}(x)\, M(x) \\ R_{ij}(x) &= \sum_{\alpha=1}^{N+1} M^{+}_{\alpha i}(x)\, M_{\alpha j}(x) \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Evidentemente

$$\overset{+}{R}(x) = R(x) \tag{4}$$

Además supondremos que $M(x)$ ha sido elegido de tal forma que $R(x)$ tiene inversa y es además real, es decir

$$[\,R(x)\,,\,[x]\,] = 0 \tag{5}$$

Hallemos ahora un vector columna de dimensión $q+1$

$$N(x) = \{ N_{\alpha}(x) \} \tag{6}$$

tal que

$$\left.\begin{aligned} N^{+}(x)\, M(x) &= 0 \\ N^{+}(x)\, N(x) &= 1 \end{aligned}\right. \tag{7}$$

La primera ecuación tiene siempre solución y la segunda fija la norma de $N(x)$.

El potencial es ahora

$$A_{\mu}(x) \equiv + \frac{i}{g}\, N^{+}(x)\, \partial_{\mu} N(x) \tag{8}$$

Como es usual

$$F_{\mu\nu}(x) = [\, \partial_{\mu} A_{\nu}(x) + ig\, A_{\mu}(x)\, A_{\nu}(x)\,] - (\mu \leftrightarrow \nu) \tag{9}$$

$$F_{\mu\nu}(x) = + \frac{i}{g}\, \partial_\mu\, (N^+ \partial_\nu N) + \frac{i}{g}\, (N^+ \partial_\mu N)\,(N^+ \partial_\nu N) - (\mu \leftrightarrow \nu) =$$

$$= + \frac{i}{g} \left[(\partial_\mu N^+)(\partial_\nu N) + (N^+ \partial_\mu N)\,(N^+ \partial_\nu N) \right] - (\mu \leftrightarrow \nu)$$

$$= + \frac{i}{g} \left[(\partial_\mu N^+)\,(\partial_\nu N) - (\partial_\mu N^+)\, N N^+\, (\partial_\nu N) \right] - (\mu \leftrightarrow \nu)$$

$$F_{\mu\nu}(x) = + \frac{i}{g} \left\{ (\partial_\mu N^+(x))\, \left(I - N(x)\, N^+(x) \right) (\partial_\nu N(x)) - (\mu \leftrightarrow \nu) \right\} \qquad (1)$$

donde I es la matrix identidad quaternionica en $(q+1)\times(q+1)$. Consideremos ahora $1 - N^+N$. Es inmediato probar que es un proyector en el espacio ortogonal a N. Ademas

$$1 - N(x)\, N^+(x) = M(x)\, R^{-1}(x)\, M^+(x) \qquad (2)$$

de donde

$$F_{\mu\nu}(x) = + \frac{i}{g} \left[(\partial_\mu N^+(x))\, M(x)\, R^{-1}(x)\, M^+(x)\, (\partial_\nu N(x)) - (\mu \leftrightarrow \nu) \right]$$

$$= + \frac{i}{g} \left[N^+(x)\, (\partial_\mu M(x))\, R^{-1}(x)\, (\partial_\nu M^+(x))\, N(x) - (\mu \leftrightarrow \nu) \right]$$

$$= + \frac{i}{g} \left[N^+(x)\, C\, \sigma_\mu^+\, R^{-1}(x)\, \sigma_\nu\, C^+\, N(x) - N^+(x)\, C\, \sigma_\nu^+\, R^{-1}(x)\, \sigma_\mu\, C^+\, N(x) \right]$$

$$= + \frac{i}{g}\, N^+(x)\, C \left[\sigma_\mu^+\, R^{-1}(x)\, \sigma_\nu - \sigma_\nu^+\, R^{-1}(x)\, \sigma_\mu \right] C^+\, N(x) =$$

$$= + \frac{i}{g}\, N^+(x)\, C \left[\sigma_\mu^+ \sigma_\nu - \sigma_\nu^+ \sigma_\mu \right] R^{-1}(x)\, C^+ N(x) =$$

$$= - \frac{4i}{g}\, N^+(x)\, C\, \eta_{\mu\nu}\, R^{-1}(x)\, C^+\, N(x) \qquad (3)$$

que es evidentemente autodual. Esta construcción da la solución instanton completa dependiente de $(8q-3)$ parametros y con $q_p = q$.

Consideremos un ejemplo

$$M(x) \equiv \begin{vmatrix} (x-\xi_0)\lambda_1 & (x-\xi_0)\lambda_2 & \cdots & (x-\xi_0)\lambda_q \\ (x-\xi_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (x-\xi_2) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & & (x-\xi_q) \end{vmatrix}$$

$$(A) \equiv A^\mu \sigma_\mu^+$$

$$\lambda_i = \text{real}$$

Entonces

$$B = \begin{vmatrix} -\xi_0\lambda_1 & -\xi_0\lambda_2 & \cdots & -\xi_0\lambda_q \\ -\xi_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \xi_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \xi_q \end{vmatrix} \qquad -C = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_q \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & & 1 \end{vmatrix} \tag{1}$$

Además

$$R_{ij}(x) = (x-\xi_0)^2 \lambda_i \lambda_j + \delta_{ij} (x-\xi_i)^2 \tag{2}$$

where $(r)^2 = r_\mu r_\mu$. Se tiene además que $N^+(x) = (N_0^+, N_1^+ \cdots N_q^+)$ debe satisfacer

$$\sum_{i=0}^{q} N_i^+(x)\, N_i(x) = 1$$

$$N_0^+(x)\,\lambda_i\,(x-\xi_0) + N_i^+\,(x-\xi_i) = 0 \qquad i = 1, 2, \dots q \tag{3}$$

cuya solución es

$$N_0^+(x) = f(x)\,(x-\xi_0)^{-1}$$

$$N_i^+(x) = -f(x)\,\lambda_i\,(x-\xi_i)^{-1} \tag{5}$$

$$f(x) \equiv \left\{ \frac{1}{(x-\xi_0)^2} + \sum_{i=1}^{q} \frac{\lambda_i^2}{(x-\xi_i)^2} \right\}^{-1/2}$$

Recordar $(x)^{-1} = \frac{1}{x^2} x^+$. Se obtiene así una solución de $q_p = q$.

C. N. YANG Phys. Rev. Lett. 38, 1377 (1977)

M. F. ATIYAH y R. S. WARD Comm. Math Phys. 55, 117 (1977)

E. F. CORRIGAN, D. B. FAIRLIE, R. G. YATES y P. GODDARD Comm Math Phys. 58, 223 (1978)

y los citados antes.

Ya hemos hecho notar que las soluciones pseudopartículas señalan la existencia de un conjunto discreto infinito de vacíos del campo gauge topologicamente distintos ($q_p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Para explotar esto algo mas es conveniente trabajar con el gauge "temporal" esto es $A_0 = 0$. Consideremos en particular la solución (56.6) con $x_0 = 0$

$$A_\mu(x) = + \frac{2i}{g} \frac{\eta_{\mu\nu} x_\nu}{x^2 + \lambda^2} \tag{1}$$

que de acuerdo con (56.7) se puede escribir

$$A_\mu(x) = + \frac{i}{g} \frac{x^2}{x^2+\lambda^2} f^{-1}(x) \partial_\mu f(x) \qquad f(x) \equiv \frac{x_\nu \sigma_\nu}{\sqrt{x^2}} \tag{2}$$

Apliquemos ahora la transformación de gauge

$$A'_\mu(x) = S(x) A_\mu(x) S^{-1}(x) + \frac{i}{g} S(x) \partial_\mu S^{-1}(x)$$

$$S(x) = \exp\left\{ - i (\vec{x}.\vec{\varepsilon}) \frac{1}{(r^2+\lambda^2)^{1/2}} \left[\operatorname{arctg} \frac{x_0}{(r^2+\lambda^2)^{1/2}} - \frac{\pi}{2} \right] \right\} \tag{3}$$

donde $r = (\vec{x}^2)^{1/2}$. Se tiene que

$$\left. \begin{aligned} S(x) &\equiv e^{+i(\hat{x}.\vec{\varepsilon})\varphi} = \cos\varphi + i(\hat{x}.\vec{\varepsilon}) \sin\varphi \equiv V_\mu \sigma_\mu \\ V_0 &= \cos\varphi \quad , \quad \vec{V} = \hat{x} \sin\varphi \end{aligned} \right\} \tag{5}$$

Veamos el valor de $A'_0(x)$. De (1) se deduce que al ser $\eta_{0\nu} x_\nu = -\frac{i}{2}(\vec{\varepsilon}.\vec{x})$

$$A_0(x) = + \frac{1}{g} \frac{(\vec{\varepsilon}.\vec{x})}{x^2+\lambda^2}$$

$$S A_0 S^{-1} = + \frac{1}{g} \frac{1}{x^2+\lambda^2} V_\mu \sigma_\mu (\vec{\varepsilon}.\vec{x}) V_\mu \sigma_\mu^+ = + \frac{1}{g} \frac{1}{x^2+\lambda^2} (V_0 + i \vec{\varepsilon}.\vec{V})(\vec{\varepsilon}.\vec{x})(V_0 - i\vec{\varepsilon}.\vec{V})$$

$$= + \frac{1}{g}\frac{1}{x^2+\lambda^2} \left\{ \cos\varphi + \frac{i}{r}(\vec{x}.\vec{\varepsilon}) \sin\varphi \right\} (\vec{\varepsilon}.\vec{x}) \left\{ \cos\varphi - \frac{i}{r}(\vec{x}.\vec{\varepsilon}) \sin\varphi \right\} =$$

$$= + \frac{1}{g}\frac{1}{x^2+\lambda^2} \left\{ \cos\varphi\, (\vec{\varepsilon}.\vec{x}) + r\, i \sin\varphi \right\} \left\{ \cos\varphi - \frac{i}{r}(\vec{x}.\vec{\varepsilon}) \sin\varphi \right\} =$$

$$= + \frac{1}{g}\frac{1}{x^2+\lambda^2} \left\{ (\vec{x}.\vec{\varepsilon}) \cos^2\varphi - i r \sin\varphi \cos\varphi + i r \sin\varphi \cos\varphi + (\vec{x}\vec{\varepsilon}) \sin^2\varphi \right\} = + \frac{1}{g}\frac{1}{x^2+\lambda^2} (\vec{x}.\vec{\varepsilon})$$

$$+ \frac{i}{g} S \partial_0 S^{-1} = + \frac{i}{g} (V_0 + i \vec{V}\vec{\varepsilon})(\partial_0 V_0 - i \vec{\varepsilon}.\partial_0 \vec{V}) =$$

$$= + \frac{i}{g} \left(\cos\varphi + \frac{i}{r} (\vec{x}\cdot\vec{\tau}) \sin\varphi \right) \left(- \sin\varphi\, \partial_0 \varphi - \frac{i}{r} (\vec{\tau}\cdot\vec{x}) \cos\varphi\, \partial_0 \varphi \right)$$

$$= + \frac{i}{g} \left(- \sin\varphi \cos\varphi - \frac{i}{r} (\vec{\tau}\cdot\vec{x}) \cos^2\varphi - \frac{i}{r} (\vec{\tau}\cdot\vec{x}) \sin^2\varphi + \sin\varphi\cos\varphi \right) \partial_0 \varphi = + \frac{1}{g r} (\vec{x}\cdot\vec{\tau})\, \partial_0 \varphi$$

y por tanto

$$A_0'(x) = + \frac{1}{g} (\vec{x}\cdot\vec{\tau}) \left[\frac{1}{x^2 + \lambda^2} + \frac{1}{r} \partial_0 \varphi \right]$$

Como

$$\partial_0 \varphi = - \partial_0 \left\{ \frac{r}{(r^2+\lambda^2)^{1/2}} \left[\operatorname{arctg} \frac{x_0}{(r^2+\lambda^2)^{1/2}} - \frac{\pi}{2} \right] \right\} = - \frac{r}{x^2 + \lambda^2}$$

y por tanto $A_0'(x) = 0$ que es lo que deseábamos. La forma de $A_k'(x)$ es complicada pero no la necesitaremos más que en los límites $x_0 \to \pm\infty$. Se tiene que

$$\lim_{x_0 \to \pm\infty} \operatorname{arctg} \frac{x_0}{(r^2+\lambda^2)^{1/2}} = \pm \frac{\pi}{2} + (n+1)\pi \qquad (1)$$

donde n es un entero. Introduciendo

$$g_1(\vec{x}) \equiv \exp \left\{ - i \pi \frac{\vec{x}\cdot\vec{\tau}}{(r^2+\lambda^2)^{1/2}} \right\} \qquad (2)$$

se obtiene

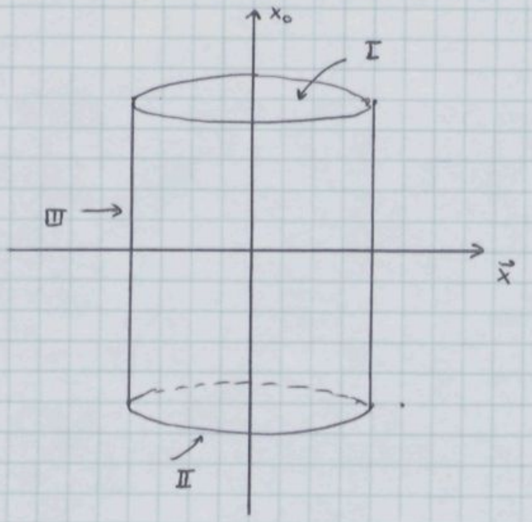
$$\left.\begin{aligned} \vec{A}' &\underset{x_0 \to +\infty}{\sim} - \frac{i}{g}\, g_{n+1}(\vec{x})\, \vec{\nabla} \left(g_{n+1}^{-1}(\vec{x}) \right) \\ \vec{A}' &\underset{x_0 \to -\infty}{\sim} - \frac{i}{g}\, g_{n}(\vec{x})\, \vec{\nabla} \left(g_{n}^{-1}(\vec{x}) \right) \end{aligned}\right\} \qquad g_n(\vec{x}) \equiv [\, g_1(\vec{x}) \,]^n \qquad (3)$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{A}'(x) &\underset{x_0 \to +\infty}{\sim} \frac{i}{g}\, g_{n+1}^{-1}(\vec{x})\, \vec{\nabla}\, g_{n+1}(\vec{x}) \\ \vec{A}'(x) &\underset{x_0 \to -\infty}{\sim} \frac{i}{g}\, g_{n}^{-1}(\vec{x})\, \vec{\nabla}\, g_{n}(\vec{x}) \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Para calcular q_P explícitamente en el gauge temporal es útil tomar en

$$q_P = \frac{g^2}{8\pi^2} \oint_S d\sigma_\mu\, \xi^\mu \qquad (5)$$

S como un hipercilindro del siguiente tipo. (recordemos que las superficies que puedan ser obtenidas las unas de las otras por deformaciones continuas dan origen al mismo q_p)



Tomaremos las caras planas para $x_0 \to \pm\infty$. Entonces de (42.1)

$$q_p = \frac{1}{24\pi^2}\left\{ i^3 g^3 \int_{I-II} d^3x\, \epsilon_{0ijk}\, \mathrm{Tr}\left[A_i'(x)\, A_j'(x)\, A_k'(x) \right] \right.$$

$$\left. + i^3 g^3 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 \int_{III} d^2\sigma_i\, \epsilon_{i\nu\mu\lambda}\, \mathrm{Tr}\left[A_\nu'\, A_\mu'\, A_\lambda' \right] \right\} \qquad (1)$$

El ultimo termino es nulo pues ν, μ, ó λ seran cero y como $A_0' \equiv 0$ Queda pues

$$q_p = \frac{1}{24\pi^2} \int d^3x\, \epsilon_{ijk}\, \mathrm{Tr}\left[(g_{m+1}^{-1}\partial_i g_{m+1})(g_{m+1}^{-1}\partial_j g_{m+1})(g_{m+1}^{-1}\partial_k g_{m+1}) \right]$$

$$- \frac{1}{24\pi^2} \int d^3x\, \epsilon_{ijk}\, \mathrm{Tr}\left[(g_m^{-1}\partial_i g_m)(g_m^{-1}\partial_j g_m)(g_m^{-1}\partial_k g_m) \right] \equiv n_+ - n_- \qquad (2)$$

Consideremos ahora

$$I_m \equiv \frac{1}{24\pi^2} \int d^3x\, \epsilon_{ijk}\, \mathrm{Tr}\left[(g_m^{-1}\partial_i g_m)(g_m^{-1}\partial_j g_m)(g_m^{-1}\partial_k g_m) \right]$$

$$g_m = \exp\left\{ -i m\pi \frac{\vec{x}\cdot\vec{\tau}}{(r^2+\lambda^2)^{1/2}} \right\} = V_\mu \sigma_\mu \qquad (3)$$

$$V_4 = \cos\varphi \qquad \vec{V} = \frac{\vec{x}}{r}\sin\varphi \qquad \varphi = -m\pi \frac{r}{(r^2+\lambda^2)^{1/2}}$$

Entonces como en (56.5) y (55.2)

$$I_m = \frac{1}{12\pi^2}\int d^3x \; \epsilon_{ijk}\,\epsilon_{\tau\lambda\sigma\rho}\; V_\tau\,(\partial_i V_\lambda)\,(\partial_j V_\sigma)\,(\partial_j V_\rho) =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2}\int d^3x \; [\,|g_{ij}|\,]^{1/2} \tag{1}$$

Procedamos a calcular $|g_{ij}|$

$$g_{ij} \equiv \frac{\partial V_\lambda}{\partial x_i}\frac{\partial V_\lambda}{\partial x_j} = \frac{x_i x_j}{r^2}\varphi'^2 \sin^2\varphi + \left\{\frac{\delta_{ik}}{r}\sin\varphi - \frac{x_i x_k}{r^3}\sin\varphi + \frac{x_i x_k}{r^2}\cos\varphi\cdot\varphi'\right\}\cdot$$

$$\left\{\frac{\delta_{jk}}{r}\sin\varphi - \frac{x_j x_k}{r^3}\sin\varphi + \frac{x_j x_k}{r^2}\cos\varphi\,\varphi'\right\} \qquad \varphi' \equiv \frac{d\varphi}{dr}$$

$$g_{ij} = \frac{x_i x_j}{r^2}\varphi'^2 + \left(\delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{r^2}\right)\frac{\sin^2\varphi}{r^2} \tag{2}$$

de donde

$$|g_{ij}| = \frac{\sin^4\varphi}{r^4}\varphi'^2$$

$$\sqrt{|g_{ij}|} = \lambda^2 m\pi \frac{1}{r^2\,(r^2+\lambda^2)^{3/2}}\sin^2\left[\frac{m\pi r}{(r^2+\lambda^2)^{1/2}}\right]$$

Entonces

$$I_m = 2\lambda^2 m\int_0^\infty dr\;(r^2+\lambda^2)^{-3/2}\sin^2\left[\frac{m\pi r}{(r^2+\lambda^2)^{1/2}}\right]$$

$$I_m = 2m\int_0^\infty dx\;(x^2+1)^{-3/2}\sin^2\left[\frac{m\pi x}{(x^2+1)^{1/2}}\right]$$

Si $t \equiv m\pi x\,(1+x^2)^{-1/2} \Leftrightarrow x = t\,(m^2\pi^2 - t^2)^{-1/2}$

$$I_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{m\pi} dt\,\sin^2 t = m. \tag{3}$$

De todo esto y de (55.2)

$$q_p = (m+1) - m = 1 \tag{4}$$

Las formas asintóticas $g_m(x)$ (56.3) tienen la propiedad de que $g_m(\vec{r}) \underset{r\to\infty}{\sim}$ cte.

El espacio Euclídeo E_3 con todos los puntos del infinito identificados es topológicamente equivalente a S^3, la tri-esfera. De nuevo tenemos correspondencias $S^3 \to SU(2)$ o $S^3 \to S^3$ con clases de homotopía caracterizables por números enteros.

Tenemos pues la siguiente situación: La solución de pseudopartícula conecta un estado gauge puro (vacío) en $x_0 = -\infty$ caracterizado por un cierto número n con otro estado de este tipo en $x_0 = +\infty$ correspondiente al número $(n+1)$. Los números n o $(n+1)$ no son separadamente invariantes gauge pero sí lo es su diferencia q_p. Soluciones multiinstantón corresponden a $q_p = n_+ - n_- = N$. Para las soluciones multiinstantón el tensor Euclídeo energía-momento es

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{2} \mathrm{Tr} \left[F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] \tag{1}$$

$$\Rightarrow \quad \Theta^{\mu\nu}(x) = -2 \, \mathrm{Tr} \left[F^{\mu\alpha} F^{\nu}{}_{\alpha} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right]$$

que se anula idénticamente debido a las condiciones de autodualidad. Éstas son pues soluciones de energía cero para tiempo imaginario y pueden interpretarse y pueden ser interpretadas como señales de efecto túnel cuántico. Volveremos más adelante sobre este punto

VI. Merones

V. DE ALFARO, S. FUBINI y G. FURLAN Phys. Lett. 65B, 1631 (1977)
C. CALLAN, R. DASHEN, D. GROSS . Phys. Lett. 66B, 375 (1977)
D. GROSS Nucl. Phys. B132, 439 (1978)

Consideremos de nuevo soluciones para campos gauge Euclideos. Supongamos que

$$A_\mu (x) = + \frac{i}{2g} f^{-1}(x) \partial_\mu f(x) \tag{1}$$

que difiere en un factor 1/2 de un gauge puro. Recordemos

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) + ig [A_\mu(x), A_\nu(x)]$$

Entonces

$$\partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) = + \frac{i}{2g} [(\partial_\mu f^{-1}(x))(\partial_\nu f(x)) - (\partial_\nu f^{-1}(x))(\partial_\mu f(x))]$$

$$ig [A_\mu(x), A_\nu(x)] = - \frac{i}{4g} [(f^{-1}(x)\partial_\mu f(x))(f^{-1}(x)\partial_\nu f(x)) - (f^{-1}(x)\partial_\nu f(x))(f^{-1}(x)\partial_\mu f(x))]$$

$$= + \frac{i}{4g} [(\partial_\mu f^{-1}(x)) f(x) f^{-1}(x) (\partial_\nu f(x)) - (\partial_\nu f^{-1}(x)) f(x) f^{-1}(x)(\partial_\mu f(x))]$$

$$= + \frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x))$$

y por tanto

$$F_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)) = + ig [A_\mu(x), A_\nu(x)]$$

Entonces

$$D(x) \equiv + \frac{g^2}{2} \mathrm{Tr} [{}^*F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x)]$$

(llamada densidad de Pontryagin) vale

$$D(x) = + \frac{g^2}{4} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \mathrm{Tr} [F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu}] = -\frac{1}{4} g^4 \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \mathrm{Tr} [(A^\alpha A^\beta - A^\beta A^\alpha)(A^\mu A^\nu - A^\nu A^\mu)] =$$

$$= - g^4 \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \mathrm{Tr} [A^\mu A^\nu A^\alpha A^\beta] = 0$$

es decir que $D(x) = 0$ excepto en los puntos singulares. Esto queda garantizado si bien otras propiedades de $D(x)$ dependerían de la elección de $f(x)$. Por ejemplo elijamos

$$f(x) = \frac{1}{|x|} x_\mu \sigma_\mu \quad \Rightarrow \quad f^{-1} = \frac{1}{|x|} x_\mu \sigma_\mu^+$$

Entonces

$$A_\mu(x) = -\frac{i}{2g}\frac{1}{|x|}\cancel{x}_\lambda\,\sigma_\lambda^+\,\partial_\mu\left(\frac{1}{|x|}x_\tau\sigma_\tau\right) =$$

$$= -\frac{i}{2g}\frac{1}{|x|}x_\lambda\sigma_\lambda^+\left\{-\frac{x_\mu x_\tau\sigma_\lambda}{|x|^3} + \frac{1}{|x|}\sigma_\mu\right\} = -\frac{i}{2g}\left\{-\frac{x_\mu}{|x|^2} + \frac{1}{|x|^2}x_\lambda\sigma_\lambda^+\sigma_\mu\right\}$$

$$= -\frac{i}{2g}\frac{1}{|x|^2}\left\{-\delta_{\lambda\mu} + \sigma_\lambda^+\sigma_\mu\right\}x_\lambda$$

$$A_\mu(x) = -\frac{i}{g}\frac{1}{|x|^2}\eta_{\mu\lambda}x_\lambda \tag{1}$$

que es singular en el origen. Let us now try to compute the topological number. We start from (41.1)

$$\xi^\mu = -\frac{1}{g^2}\frac{x_\lambda}{x^2}\partial_\beta\left(\frac{x_\rho}{x^2}\right)\epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}\,\mathrm{Tr}\,(\eta_{\alpha\lambda}\eta_{\gamma\rho}) +$$

$$+\frac{2}{3}\frac{1}{g^2}\frac{1}{x^6}x_\lambda x_\rho x_\sigma\,\epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}\,\mathrm{Tr}\,(\eta_{\alpha\lambda}\eta_{\beta\rho}\eta_{\gamma\sigma})$$

$$\epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}\,\mathrm{Tr}\,(\eta_{\alpha\lambda}\eta_{\gamma\rho}) = -\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\,\eta^a_{\alpha\lambda}\eta^a_{\gamma\rho} =$$

$$= -\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\left(\cancel{\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\lambda\rho}} - \delta_{\alpha\rho}\delta_{\lambda\gamma} + \epsilon_{\alpha\lambda\gamma\rho}\right) = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\rho\beta\lambda} - \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\alpha\lambda\gamma\rho}$$

$$= \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\rho\beta\lambda} - \delta_{\mu\rho}\delta_{\beta\lambda} + \delta_{\mu\lambda}\delta_{\beta\rho} \simeq -\delta_{\mu\rho}\delta_{\beta\lambda} + \delta_{\mu\lambda}\delta_{\beta\rho}$$

$$x_\lambda x_\rho x_\sigma\,\epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}\,\mathrm{Tr}\,(\eta_{\alpha\lambda}\eta_{\beta\rho}\eta_{\gamma\sigma}) = \frac{i}{8}x_\lambda x_\rho x_\sigma\,\epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}\,\eta^a_{\alpha\lambda}\eta^b_{\beta\rho}\eta^c_{\gamma\sigma}\,2i\,\epsilon_{abc}$$

$$= -\frac{1}{4}\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\,x_\lambda x_\rho x_\sigma\,\eta^a_{\alpha\lambda}\,\epsilon_{abc}\,\eta^b_{\beta\rho}\eta^c_{\gamma\sigma}$$

$$= -\frac{1}{4}\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\,x_\lambda x_\rho x_\sigma\,\eta^a_{\alpha\lambda}\left\{\cancel{\delta_{\beta\gamma}\eta^a_{\rho\sigma}} - \delta_{\beta\sigma}\eta^a_{\rho\gamma} - \delta_{\rho\gamma}\eta^a_{\beta\sigma} + \delta_{\rho\sigma}\eta^a_{\beta\gamma}\right\}$$

$$= +\frac{1}{4}\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\,x_\lambda x_\rho x_\beta\left(\delta_{\alpha\rho}\cancel{\delta_{\lambda\gamma}} - \cancel{\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\lambda\rho}} + \cancel{\epsilon_{\alpha\lambda\rho\gamma}}\right)$$

$$+\frac{1}{4}\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\,x_\lambda x_\gamma x_\sigma\left(\cancel{\delta_{\alpha\beta}}\,\delta_{\lambda\sigma} - \cancel{\delta_{\alpha\sigma}\delta_{\lambda\beta}} + \cancel{\epsilon_{\alpha\lambda\beta\sigma}}\right)$$

$$-\frac{1}{4}\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\,x_\lambda x^2\left(\cancel{\delta_{\alpha\beta}\delta_{\lambda\gamma}} - \cancel{\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\lambda\beta}} + \epsilon_{\alpha\lambda\beta\gamma}\right) = +\frac{1}{4}x_\lambda x^2\,\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\lambda\alpha\beta\gamma}$$

$$= \frac{3}{2}x_\mu x^2$$

$$\xi^\mu = +\frac{1}{g^2}\frac{x_\lambda}{x^2}\partial_\lambda\left(\frac{x_\mu}{x^2}\right) - \frac{1}{g^2}\frac{x_\mu}{x^2}\partial_\lambda\left(\frac{x_\lambda}{x^2}\right) + \frac{1}{g^2}\frac{1}{x^4}x_\mu$$

$$\xi^\mu = -\frac{2}{g^2}\frac{x_\mu}{x^4} = \frac{1}{g^2}\partial_\mu\frac{1}{x^2}$$

Entonces de acuerdo con (51. 1)

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,({}^*F_{\mu\nu}\,F_{\mu\nu}) = \partial_\mu \mathcal{J}_\mu = \frac{1}{g^2}\,\Box\,\frac{1}{x^2} \tag{1}$$

Tengase en cuenta que $\Box(1/x^2) = 0$ si $x \neq 0$. Calculemos ahora $\Box(1/x^2)$ en el sentido de distribuciones. Supongamos que $f(x)$ es una función de sólo $|x|$ regular en $x=0$ y de soporte compacto.

$$I[f] \equiv \int d^4x\, f(x)\,\partial_\mu\partial_\mu \frac{1}{x^2} = \int d^4x\,(\partial_\mu\partial_\mu f(x))\,\frac{1}{x^2} =$$

$$\partial_\mu\partial_\mu f(x) = \partial_\mu \left\{ x_\mu \frac{f'(x)}{x} \right\} = 4\,\frac{f'(x)}{x} + x\,\frac{d}{dx}\left(\frac{f'(x)}{x}\right) = \frac{4}{x} f'(x) + f''(x) - \frac{1}{x} f'(x)$$

$$= \frac{3}{x} f'(x) + f''(x) =$$

$$I[f] = 2\pi^2 \int_0^\infty dx\, x^3\,\frac{1}{x^2}\left(\frac{3}{x} f'(x) + f''(x)\right) = 2\pi^2 \int_0^\infty dx\,[3 f'(x) + x f''(x)] =$$

$$= 2\pi^2 \int_0^\infty dx\,\frac{d}{dx}\left(x f'(x) + 2 f(x)\right) = 2\pi^2\left[x f'(x) + 2 f(x)\right]_0^\infty = -4\pi^2$$

y por tanto

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,({}^*F_{\mu\nu}\,F_{\mu\nu}) = -\frac{4\pi^2}{g^2}\,\delta^{(4)}(0) \tag{2}$$

Entonces usando (56. 4) se obtiene $q_P = -\frac{1}{2}$. Tal valor fraccionario es posible debido a la naturaleza singular de la solución. Estas soluciones con carga topológica semientera se denominan merones (antimerones) y fueron introducidas por Alfaro, Fubini y Furlan. Posteriormente han sido usadas para intentar explicar el confinamiento de los quarks por Callan, Dashen y Gross. De acuerdo con ellos las interacciones generadas ~~de~~ los quarks generadas por contribuciones de pseudopartículas no confinan pues $F_{\mu\nu}$ cae demasiado rápidamente con la distancia ($\simeq 1/x^4$). Por ello se consideraron posibles contribuciones merónicas en las que $F_{\mu\nu}$ cae sólo como x^{-2}. Otras soluciones mas generales de tipo merónico se encuentran en

V. DE ALFARO, S. FUBINI y G. FURLAN Phys. Lett. 73B, 463 (1978)

GLIMM y JAFFE Phys. Lett. 73B, 167 (1978).

VI.2 ¿Por qué hablar de clases de homotopía?

La causa de este papel dominante de los conceptos de homotopía puede ser hallado en la creciente libertad concerniente al comportamiento a grandes distancias que introducen los campos de gauge. Para energía finita o acción finita es necesario que $F_{\mu\nu}(x) \to 0$ asintóticamente, donde la región "asintótica" es convenientemente definida en cada caso. Pero los potenciales de gauge $A_\mu(x)$ no es necesario que tiendan hacia cero tan rápidamente para que se anulen todas las contribuciones superficiales. Es suficiente que $A_\mu(x) \to -i/g\,(f^{-1}(x)\,\partial_\mu f(x))$, una forma de gauge pura. Cuando hay escalares las derivadas covariantes $D_\mu \varphi(x)$ dan de nuevo un aumento de libertad. En ausencia de campos gauge no sólo se debe tener (para un potencial no negativo) que $V(\varphi) \to 0$ asintóticamente sino que $\partial_\mu \varphi(x)$ debe tender hacia cero. Lo cual permite a lo sumo un comportamiento asintótico constante para $\varphi(x)$. En presencia de campos gauge $\partial_\mu \varphi(x) \to 0$ debe reemplazarse por $D_\mu \varphi(x) \to 0$ que permite comportamiento asintótico no trivial para $\varphi(x)$.

Las derivadas covariantes aparecen tan pronto se introducen simetrías locales. A través de ellas se logra una relación entre las variaciones espacio-temporales y ~~el~~ grupo de rotaciones de los campos. Esto queda reflejado en la estructura de las soluciones donde los índices del grupo y las coordenadas espacio-temporales salen ligadas de formas particulares. Entonces llegamos a la noción de mappings de una superficie en la variedad espacio-temporal sobre el conjunto de los elementos de un grupo de simetrías. Así es como la homotopía entra en el juego, siendo esta la rama de las matemáticas donde los mappins continuos entre dos variedades son estudiados.

Consideremos las correspondencias continuas (f) entre dos variedades X e Y

$$f : X \longrightarrow Y \tag{1}$$

i.e.

$$f(x) = y \qquad x \in X, \quad y \in Y$$

Consideremos una familia continua de correspondencias $F(x;t)$ parametrizadas por t $(0 \le t \le 1)$, tales que

$$F(x;0) = f_1(x) \qquad\qquad F(x;1) = f_2(x) \tag{2}$$

Entonces se dice que f_1 y f_2 son homotópicas (es decir continuamente deformables la una en la otra) y suele escribirse $f_1 \sim f_2$.

La relación de homotopía es una relación de equivalencia: Si $f_1 \sim f_2$ y $f_2 \sim f_3$ entonces $f_1 \sim f_3$. En efecto por ser $f_1 \sim f_2$ existe una función continua $F(x,t)$ tal que

$$F(x,0) = f_1(x) \qquad , \qquad F(x,1) = f_2(x)$$

y por ser $f_2 \sim f_3$ existe otra función continua $F'(x,t)$ tal que

$$F'(x,0) = f_2(x) \qquad\qquad F'(x,1) = f_3(x)$$

y por tanto podemos definir la función continua

$$F''(x;t) = \begin{cases} F(x, 2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ F'(x, 2t-1) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

y $F''(x,0) = f_1(x)$ y $F''(x;1) = f_3(x)$ lo cual prueba que $f_1 \sim f_3$.

Correspondencias homotópicamente equivalentes forman una clase que se indica por $\{f\}$.

Veamos a continuación un ejemplo específico que muestra claramente como a las clases de homotopía se las puede dotar de estructura de grupo. Empecemos considerando un ejemplo simple en el que el espacio X se toma como el intervalo de línea cerrado $[0,1]$ en el que se han identificado los puntos finales. Esta variedad es topológicamente equivalente a un círculo S^1 con un punto de referencia x_0 en su frontera identificado con 0 y 1. Consideremos ahora solo las correspondencias continuas que cumplen $f(0) = f(1) = y_0$, un punto fijo de Y, entonces las clases de correspondencias equivalentes $\{f\}, \{g\}, \ldots$ de $S^1 \to Y$ se las puede dotar de la estructura de grupo. El elemento identidad $\{e\}$ es la clase de las correspondencias homotópicas a la correspondencia constante C:

$$C(x) = y_0 \qquad \forall x \in S^1 \tag{1}$$

La inversa de $\{f\}$ se define como $\{f^{-1}\}$, donde

$$f^{-1}(x) = f(1-x) \tag{2}$$

Finalmente la ley de multiplicación es

$$\{f\} * \{g\} = \{f \cdot g\}$$

$$f \cdot g\,(x) = \begin{cases} f\,(2x) & 0 \leq x \leq 1/2 \\ g\,(2x-1) & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases} \qquad (1)$$

Notemos que esta operación de multiplicación es independiente de la elección de las correspondencias elegidas en $\{f\}$ y $\{g\}$, esto es debido que es fácil probar que si $f_1 \sim f_2$ y $g_1 \sim g_2$ entonces $f_1 g_1 \sim f_2 g_2$. Vemos entonces fácilmente que hemos dotado a las clases de homotopías de una estructura de grupo. Este ejemplo particular se llama el primer grupo de homotopía de Y (o grupo fundamental) y se designa por $\Pi_1(Y)$.

Un ejemplo elemental es considerar que Y es el círculo de radio unidad centrado en el origen (factores de fase que forman un grupo $U(1)$) y que $X = S_1 = [0, 2\pi]$. Algunas correspondencias características son

$$f^{(0)}(\theta) = 1 \qquad \forall\, \theta \in S_1 \qquad \text{(identidad)}$$

$$f^{(1)}(\theta) = e^{i\theta} \qquad \forall\, \theta \in S_1$$

$$f^{(\nu)}(\theta) = [\,f^{(1)}(\theta)\,]^{\nu} = e^{i\nu\theta} \qquad \forall\, \theta \in S_1$$

y siendo ν un número entero cualquiera. Es evidente que $f^{(\nu)} \not\sim f^{(\nu')}$ si $\nu \neq \nu'$. Por razones obvias ν se llama número de winding. Se puede probar que cada clase está caracterizada por un número de winding y que $\Pi(U(1)) = Z$ es decir el conjunto de los enteros con ley de multiplicación la de suma.

El primer grupo de homotopía es una herramienta importante en el estudio de las propiedades globales de los grupos de Lie compactos. El invariante $\Pi_1(G)$ (que clasifica las correspondencias de S_1 en el conjunto de los elementos de G) es una medida de cuan conecto es el grupo G. Despues de haber clasificado los grupos de Lie compacto de acuerdo a sus propiedades locales (algebras de Lie), $\Pi_1(G)$ es el único invariante necesario para completar la clasificación. Así por ejemplo

$$\Pi_1(SU(2)) = 0 \qquad \text{(i.e. la identidad)}$$

$$\Pi_1(O(3)) = \Pi_1(SU(2)/Z_2) = Z_2 \qquad \text{(el conjunto de los enteros modulo 2)}$$

esto es, $SU(2)$ es simplemente conexo mientras que $O(3)$ es doblemente conexo.

Si en lugar de limitarnos a $X = S^1$, generalizamos lo anterior a $X = S^n$ (la esfera n-dimensional) o su equivalente topologico I^n

$$I^n = \{ (x_1, x_2 \ldots x_n) \in R^n \mid 0 \leq x_i \leq 1 \}$$

el cubo n-dimensional con sus fronteras (caras) identificadas y equivalentes al polo norte x_0 de S^n, entonces de nuevo las clases de correspondencias con un punto fijo $f(x_0) = y_0$ forman un grupo que se llama el n-grupo de homotopia y se designa por $\Pi_n(Y)$

En la tabla siguiente damos algunos grupos de homotopia

Y	$U(1)$	$SU(2)$	$N \geq 3$ $SU(N)$	$SO(3)$	$SO(4)$	$SO(5)$	$SO(6)$	$N \geq 7$ $SO(N)$	$Sp(N)$
$\Pi_1(Y)$	Z	0	0	Z_2	Z_2	Z_2	Z_2	Z_2	0
$\Pi_2(Y)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\Pi_3(Y)$	0	Z	Z	Z	Z, Z	Z	Z	Z	Z
$\Pi_4(Y)$	0	Z_2	0	Z_2	Z_2, Z_2	Z_2	0	0	Z_2
$\Pi_5(Y)$	0	Z_2	Z	Z_2	Z_2, Z_2	Z_2	Z	0	Z_2

El número de winding

La convergencia de la integral de acción está controlada por el comportamiento de A_μ para grandes r, donde r es la variable radial en el cuadriespacio Euclídeo. Para mantener los argumentos tan simples como sea posible supondremos que para grandes r, A_μ se puede expresar como una serie asintótica de potencias de $1/r$ (En realidad bastaría suponer que el campo gauge carece de singularidades invariantes gauge si hacemos una proyección estereográfica del cuadriespacio en la cuadriesfera). Entonces para que la acción sea finita $F_{\mu\nu}(x)$ debe ir a cero mas rapidamente que $1/r^2$ cuando $r\to\infty$, es decir $F_{\mu\nu} \sim O(1/r^3)$. De entrada se puede pensar que esto implica que $A_\mu \sim O(1/r^2)$, pero esto es falso: que se anule $F_{\mu\nu}$ no implica que se anule A_μ, sino meramente que A_μ es una transformación gauge de cero. Entonces A_μ puede ser de la forma

$$A_\mu = + \frac{i}{g} f^{-1} \partial_\mu f + O(1/r^2) \qquad (1)$$

donde f es una función del cuadriespacio en G de orden uno, esto es, una función de las variables angulares únicamente (G es el grupo gauge).

Entonces con cada configuración de campo de acción finita hay asociada una correspondencia de la hiperesfera tridimensional S^3 sobre el grupo de gauge G. Por supuesto esta correspondencia no es invariante gauge. Bajo una transformación de gauge

$$A_\mu \longrightarrow S\, A_\mu(x)\, S^{-1} + \frac{i}{g} S\, \partial_\mu S^{-1}$$

Si se pudiera elegir $S(x)$ igual a $f(x)$ en el infinito entonces $A_\mu \sim O(1/r^2)$. En general esto no es posible. La razón es que $S(x)$ debe ser una función continua no solo en S^3 sino en todo el espacio cuadridimensional, es decir, en una familia de hiperesferas metidas una dentro de la otra con radios que van de $r=0$ a $r=\infty$. En particular, en el origen, $S(x)$ debe ser una constante independiente de los angulos. Entonces, $S(x)$ en el infinito no será en general una función sobre S^3, sino que debe ser obtenida por deformación continua a partir de una función constante. Como cualquier transformación de gauge constante puede ser trivialmente obtenida por deformación continua a la transformación identidad (todos los grupos gauge son conexos) podemos decir que $S(x)$ en el infinito debe ser obtenible de $S(x)=1$ por una transformación continua.

Dadas dos correspondencias de un espacio topologico en el otro, tales que una correspondencia sea continuamente deformable en otra, los matematicos dicen que estas dos funciones son homotópicas y pertenecen a la misma clase de homotopía. Lo que hemos visto es que mediante una transformación de gauge

$$f \longrightarrow f S^{-1}$$

es decir podemos transformar $f(x)$ en una correspondencia homotópica a $f(x)$, pero no puede transformarse en una función de otra clase de homotopía. Entonces, la cantidad invariante gauge asociada con una configuración de campo de acción finita no es una correspondencia de S^3 en G sino una clase de homotopía de todas correspondencias. Debemos pues hallar las clases de homotopía para los G de interés.

Consideremos por ejemplo $G \equiv SU(2)$

i) $SU(2)$ es el grupo de matrices unimodulares dos por dos y tales matrices pueden ser escritas en forma única como

$$f(x) = I\, V_4(x) + i\, \vec{\sigma} \cdot \vec{V}(x) \qquad (1)$$

$$V_\mu(x)\, V_\mu(x) = 1$$

Entonces topológicamente $SU(2)$ es S^3 y debemos estudiar las correspondencias de S^3 en S^3.

ii) Algunas correspondencias útiles son

$$f^{(0)}(x) = I$$

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{r}\left(x_4 + i\, \vec{x} \cdot \vec{\sigma} \right) \qquad (2)$$

$$f^{(\nu)}(x) = \left[f^{(1)}(x) \right]^{\nu}$$

donde ν es un entero llamado número de winding o de Pontryagin. Este mide el número de veces que la hiperesfera del infinito es envuelta alrededor de G.

iii) Se puede probar que toda correspondencia de S^3 en S^3 es homotópica a una de las correspondencias standard $f^{(\nu)}(x)$, $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. El número de Pontryagin que es invariante gauge puede definirse de la forma standard.

Vemos pues que para una teoría gauge basada en el $SU(2)$, cada configuración de campo de acción finita en el espacio Euclídeo cuadridimensional tiene un entero asociado: el número de winding. Notemos además que si $G \equiv U(1)$ es fácil ver que cada correspondencia de S^3 en $U(1)$ es continuamente deformable en una correspondencia trivial (todo S^3 es representado en un solo punto). Entonces, para una teoría de campos gauge abelianos, no hay análogo al número de winding. Por otra parte para un grupo de Lie simple cualquiera G se puede probar que

[R. BOTT Bull. Soc. Math. France 84, 251 (1956)] que cualquier correspondencia continua de S^3 en G puede deformarse continuamente en una correspondencia de un subgrupo SU(2) de G. Entonces, todo lo que hemos dicho para SU(2) es cierto para cualquier grupo de Lie simple; en particular para SU(n). Finalmente como cualquier grupo de Lie compacto es localmente equivalente a un producto directo de un grupo Abeliano y un conjunto de grupos simples para una teoría gauge cualquiera, hay un número de winding independiente para cada grupo factor simple.

Veamos que para una caja suficientemente grande la única reliquia de las condiciones impuestas en las paredes de la caja es el número de winding. Consideremos una caja rectangular en el espacio euclídeo cuadridimensional, con paredes $L_1 \ldots L_4$. Designaremos los ocho hiperplanos que delimitan la caja por sus vectores normales.; entonces diremos la pared superior 1, la pared inferior 1, la pared superior 2, ... (superior e inferior se refieren a los valores mas altos o mas bajos de la coordenada apropiada). Sobre las paredes de la caja las componentes tangenciales de A_μ vienen dadas en una forma consistente con el hecho de que la acción sea finita, es decir, consistentes con

$$A_\mu = + \frac{i}{g} f^{-1}(x)\, \partial_\mu f(x)$$

Entonces dar las las componentes tangenciales de A_μ sobre las paredes es equivalente a dar $f(x)$ en las paredes (salvo una constante multiplicativa irrelevante). La condición de gauge $A_3(x) = 0$ aun permite transformaciones de gauge arbitrarias independientes de x_3. Usaremos esta libertad para elegir $f(x) = 1$ en la pared inferior 3. Como $A_3 = 0$ implica que $\partial_3 f(x) = 0$, $f(x)$ es automáticamente la unidad en todas las paredes excepto en la pared superior 3. En esta pared f es una función $f(x_1, x_2, x_4)$ que vale uno en la frontera de la pared. (La elección de este gauge es no esencial pero simplifica los argumentos)

Ahora pongamos nuestra caja original con condiciones frontera $f_1(x_1 x_2 x_4)$ en una caja mayor, con el vértice mas bajo coincidente (lo tomaremos como origen de coordenadas) y con los mismos lados L_1, L_2, y L_4 pero con el tercer lado $L_3 + \Delta$. Sean las condiciones frontera en la caja mayor alguna función $f_2(x_1 x_2 x_4)$.

Teorema: Si f_1 y f_2 están en la misma clase de homotopía cualquier configuración de campo definida en la caja original consistente con las condiciones frontera puede extenderse a una configuración de campo en la caja mayor, consistente con las condiciones frontera y la condición de gauge $A_3 = 0$, al coste de incrementar la acción en una cantidad de orden $1/\Delta$.

Antes de demostrar este teorema vamos a hacer algunas observaciones

i) El teorema no sería cierto si g_1 y g_2 estuvieran en distintas clases de homotopía. En este caso para pasar de g_1 a g_2 deberíamos poner al menos un instantón en el nuevo volumen; esto aumentaría la acción en al menos $8\pi^2/g^2$, independiente de Δ.

ii) Somos libres de elegir Δ proporcional, por ejemplo, a $L_3^{1/2}$. Entonces para una gran caja el cambio fraccional en el volumen de la caja es despreciable, como lo es el cambio en la acción. En el lenguaje de la física estadística, cambiar las condiciones frontera manteniendo el número de winding fijo es un efecto de superficie y no un efecto de volumen.

iii) Hay una paradoja aparente: para cualquier configuración fija de instantones y anti-instantones $f(x_1 x_2 x_4)$ es fija. ¿Cómo podemos obtener todas las configuraciones consistentes con un número de winding fijo con un solo un conjunto de condiciones frontera? El teorema da la contestación: no obtenemos todas estas configuraciones; solo una pequeña porción de ellas. Sin embargo, obtenemos configuraciones cercanas a todas ellas, configuraciones que difieren solo en una pequeña distorsión cerca a la cara superior 3. La diferencia causada por esta pequeña distorsión es despreciable para una caja suficientemente grande.

Pasemos a la prueba: Por hipótesis, f y f' are en la misma clase de homotopía. Entonces existe una función $f(x_1 x_2 a x_4)$ con $0 \le a \le 1$ tal que

$$f(x_1 x_2\ 0\ x_4) = f_1(x_1 x_2 x_4) \qquad f(x_1 x_2\ 1\ x_4) = f_2(x_1 x_2 x_4) \tag{1}$$

Sea $\mathfrak{f}(x)$ una función definida en el volumen adicional por

$$\mathfrak{f}(x) = f(x_1, x_2, (x_3 - L_3)/\Delta, x_4) \tag{2}$$

Si pudiéramos elegir

$$A_\mu(x) = +\frac{i}{g} f^{-1}(x)\, \partial_\mu f(x) \tag{3}$$

entonces podríamos efectuar la transición deseada sin coste adicional de acción. Sin embargo esto no es posible. La ecuación (3) es inconsistente con la condición $A_3 = 0$. Sin embargo,

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &= +\frac{i}{g} f^{-1}(x)\, \partial_\mu f(x) && \mu \neq 3 \\ A_3(x) &= 0 && \mu = 3 \end{aligned} \tag{5}$$

es consistente con la condición gauge y efectúa la transición. Calculemos la acción asociada a (4). Si hacemos una transformación $f^{-1}(x)$ en (4) obtenemos

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &= 0 && \mu \neq 3 \\ A_\mu(x) &= +\frac{i}{g} f(x)\, \partial_\mu f^{-1}(x) && \mu = 3 \end{aligned} \tag{5}$$

De esta relación vemos que A_3 es proporcional a $1/\Delta$. Además la única componente de $F_{\mu\nu}$ no nula es $F_{\mu 3}$ que es proporcional al $1/\Delta$. Luego la acción es proporcional a $1/\Delta^2$ y como el volumen es sólo proporcional a Δ, el teorema queda probado.