V. LOS USOS DE LOS INSTANTONES

S. COLEMAN. "The uses of instantons" HUTP-78/A004

M. J. TEPER "Instantons, θ-Vacua, Confinement ... A Pedagogical Introduction" R.L.-80-004.

I) Mecánica cuántica

Consideremos una partícula sin spin que se mueve en un pozo unidimensional:

$$H = \frac{1}{2M} p^2 + V(x) \tag{1}$$

Vamos a rederivar algunas propiedades bien conocidas de este sistema aplicando métodos menos familiares. En este caso estos métodos son menos convenientes que los métodos standard de la mecánica cuántica convencional pero tienen la ventaja de ser fácilmente generalizables a teoría cuántica de campos. La herramienta básica será la versión Euclídea de la integración de caminos de Feynman

$$\langle x_f | e^{-HT/\hbar} | x_i \rangle = \int_{x(-\frac{T}{2}) = x_i}^{x(\frac{T}{2}) = x_f} \mathcal{D}[x(t)]\; e^{-\frac{1}{\hbar} S_E[x]} \tag{2}$$

$$S_E[x] = \int_{-T/2}^{T/2} dt \left[\frac{M}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + V(x) \right]$$

La continuación del espacio Minkowskiano al Euclídeo es válido orden por orden en teoría de perturbaciones pero no sabemos que existan resultados más generales. En el miembro de la izquierda $|x_i\rangle$ y $|x_f\rangle$ son estados propios del operador posición, H es el Hamiltoniano y T es un número positivo. Este término nos interesa pues si consideramos el conjunto completo $\{|m\rangle\}$ de estados propios de H

$$H|m\rangle = E_m |m\rangle \tag{3}$$

entonces

$$\langle x_f | e^{-HT/\hbar} | x_i \rangle = \sum_m e^{-E_m T/\hbar} \langle x_f | m \rangle \langle m | x_i \rangle \tag{4}$$

y el término dominante para grandes T nos da la energía y función de onda del estado propio de menor energía. En el miembro de la derecha la integración se halla extendida a las trayectorias $x(t)$ que cumplen las

las condiciones $x(-T/2) = x_i$ y $x(-T/2) = x_f$.

Debemos ahora especificar el sentido de la integración sobre caminos. Consideremos una función $\bar{x}(t)$ que satisface las condiciones de contorno. Entonces podemos escribir una función general que satisfaga dichas condiciones como

$$x(t) = \bar{x}(t) + \sum_n c_n x_n(t) \tag{1}$$

donde $x_n(t)$ son un conjunto completo de funciones reales ortogonales que se anulan en las fronteras

$$\int_{-T/2}^{T/2} dt\; x_n(t)\, x_m(t) = \delta_{nm} \quad , \quad x_n(\pm T/2) = 0 \tag{2}$$

Entonces definimos

$$\mathcal{D}[x] = N \prod_n (2\pi\hbar)^{-1/2} c_n \tag{3}$$

Veremos más adelante la razón de introducir explícitamente los factores $(2\pi\hbar)^{-1/2}$, encontraremos que para el oscilador armónico N es independiente de $\hbar$ y como se puede probar que N es independiente del potencial $V(x)$, tomamos que N es independiente de $\hbar$ para todos los potenciales.

El miembro de la derecha de (1.2) puede calcularse en el límite semiclásico $\hbar \to 0$. En este caso la integral funcional viene dominada por los puntos estacionarios de S_E. Supongamos por sencillez que solo hay uno de estos puntos, que indicaremos por $\bar{x}(t)$. ($n=1$)

$$\frac{\delta S}{\delta \bar{x}(t)} = -\frac{d^2\bar{x}}{dt^2} + V'(\bar{x}) = 0 \tag{4}$$

donde la prima indica diferenciación con respecto a x. Mas aún, elijamos las x_n de forma que sean las funciones propias de la segunda derivada funcional de S en $\bar{x}$.

$$-\frac{d^2 x_n}{dt^2} + V''(\bar{x})\, x_n = \lambda_n x_n \tag{5}$$

Entonces en el límite de $\hbar$ pequeño la integral se convierte en un producto de gaussianas y se encuentra inmediatamente que

$$\langle x_f | e^{-HT/\hbar} | x_i \rangle = N\, e^{-S_E(\bar{x})/\hbar} \prod_n \lambda_n^{-1/2} \left[1 + O(\hbar) \right] \tag{6}$$

donde hemos supuesto que $\lambda_n > 0$, $\forall n$. Esto también puede escribirse

$$\langle x_f | e^{-HT/\hbar} | x_i \rangle = N\, e^{-S_E(\bar{x})/\hbar} \left[\det\left(-\partial_t^2 + V''(\bar{x}) \right) \right]^{-1/2} \tag{7}$$

Si existen varios puntos estacionarios

$$\langle x_f | e^{-HT/\hbar} | x_i \rangle = N \sum_{\alpha} e^{-S_E(\bar{x}_\alpha)/\hbar} \left[\det \left(-\partial_t^2 + V''(\bar{x}_\alpha) \right) \right]^{-1/2} \qquad (1)$$

Más adelante consideraremos lo que sucede si alguno de los λ_m no es positivo.

Antes de continuar quisiéramos hacer algunos comentarios. Empecemos analizando el problema de contar doble. Cuando tomamos fluctuaciones gaussianas alrededor de un camino $\bar{x}_\alpha$ incluímos todas las fluctuaciones posibles y los pesamos con un factor gaussiano y en particular incluimos caminos $\bar{x}_\beta$ ($\beta \neq \alpha$). Por tanto cada camino es contado tantas veces como puntos estacionarios haya en (1), aunque cada vez con un peso distinto. En general si todo el procedimiento es útil para algo cuando $\hbar \to 0$ entonces solo los caminos cercanos a algún $\bar{x}_\alpha$ deberían dar contribuciones significantes. Entonces cualquier camino importante estará cerca de sólo uno de los caminos estacionarios, y aunque también ha contado en las fluctuaciones de otros caminos estacionarios distantes el peso que recibirá, debido a la distancia, será despreciablemente pequeño. Por tanto el contaje multiple es despreciable cuando $\hbar \to 0$. Por supuesto en la práctica estamos interesados en $\hbar \neq 0$ y hay que ser cuidadosos. Volveremos más adelante sobre este punto.

La validez de nuestra aproximación parece ser que depende crucialmente del hecho que solo las fluctuaciones de acción pequeña son importantes ya que las fluctuaciones de acción grande son pesadas inconscientemente en nuestra aproximación. Coleman ha hecho notar sin embargo que son los caminos de acción arbitrariamente grande los que dominan la integral de camino. Veamos esto con algo más de detalle. Consideremos un potencial armónico simple $V(x) = \frac{1}{2}\omega^2 x^2$. Consideremos $x_i = x_f = 0$. Es evidente que la única solución de la ecuación (2.6) es $\bar{x}(t) = 0$ en cuyo caso $S_E(\bar{x}) = 0$. Las funciones $x_m(t)$ son las soluciones de

$$\left.\begin{aligned} -\frac{d^2 x_m}{dt^2} + \omega^2 x_m &= \lambda_m x_m \\ x_m(\pm T/2) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

En este caso se tiene exactamente que

$$I \equiv \langle 0 | e^{-HT/\hbar} | 0 \rangle = N \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{dC_n}{(2\pi\hbar)^{1/2}} e^{-C_m^2 \lambda_m / 2\hbar} =$$

$$= N \left(\prod_{m=1}^{\infty} \lambda_m^{-1/2} \right) \prod_{m=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{db_m}{(\pi)^{1/2}} e^{-b_m^2} = N \left(\prod_{m=1}^{\infty} \lambda_m \right)^{-1/2} \qquad (3)$$

Nos podemos preguntar ahora ¿cuál es la contribución de los caminos con acción $\leq L^2$? Denominemos por $I(L)$ esta contribución. Como queremos que

$$\frac{1}{2} \sum c_m^2 \lambda_m = \sum b_m^2 \hbar < L^2 \qquad (1)$$

Entonces los caminos con acción menor que L^2 deberán cumplir necesariamente $b_m \leq L/(\hbar)^{1/2}$ para todo n y por tanto

$$I(L) < N \left(\prod \lambda_m \right)^{-1/2} \prod_{m=1}^{\infty} \int_{-L/(\hbar)^{1/2}}^{L/(\hbar)^{1/2}} \frac{d b_m}{\sqrt{\pi}} e^{-b_m^2} = N \left(\prod \lambda_m \right)^{-1/2} \prod_{m=1}^{\infty} \operatorname{erf} \frac{L}{(\hbar)^{1/2}}$$

de donde

$$\frac{I(L)}{I} \leq \prod_{m=1}^{\infty} \operatorname{erf} \frac{L}{(\hbar)^{1/2}} \qquad (2)$$

y como $\operatorname{erf} L/(\hbar)^{1/2} < 1$ se tiene que $I(L)/I = 0$ para todo L. Vemos pues que los caminos de acción $< L^2$, para L arbitrario, dan una contribución nula, es decir que son precisamente los caminos de acción infinita los que dominan la integral de camino. Este resultado es totalmente obvio : El camino puede caracterizarse por la secuencia $(b_1, \dots b_m \dots)$. Se puede calcular la integral generando arbitrariamente los b_m y dándoles un peso $e^{-b_m^2}$. Una secuencia en la que todos los $b_m \leq L/\hbar^{1/2}$ tiene una probabilidad nula.

Parece que tenemos pues un problema. Si los caminos de acción infinita dominan entonces es de esperar que la física sea sensible a las regiones del espacio alejadas de un mínimo donde el potencial es totalmente distinto de un oscilador armónico simple y por tanto la aproximación Gaussiana es inútil. Probablemente no hemos entendido bien lo que sucede pues el método da buenos resultados. Parte del problema estriba en la forma de evaluar I que no permite un análisis detallado de lo que sucede. Volvamos a calcular I. Las soluciones de (3.2) vienen dadas por

$$x_m(t) = \left(\frac{2}{T} \right)^{1/2} \sin \frac{m \pi}{T} \left(t - \frac{T}{2} \right) \qquad (3)$$

$$\lambda_m = \omega^2 + \left(\frac{m \pi}{T} \right)^2$$

Entonces

$$I = N \left(\prod_{m=1}^{\infty} \lambda_m \right)^{-1/2} = N \left(\prod_{m=1}^{\infty} \left(\omega^2 + \frac{m^2 \pi^2}{T^2} \right) \right)^{-1/2} \qquad (4)$$

Notemos que $\prod_{m=1}^{\infty} \lambda_m = \infty$ por lo cual para I finita debe ser $N = \infty$. Podemos escribir

$$I = \left\{ N \prod_{m=1}^{\infty} \frac{T}{m\pi} \right\} \prod_{m=1}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{T\omega}{m\pi} \right)^2 \right]^{-1/2} \qquad (1)$$

El último factor vale 1 para $\omega = 0$, es decir cuando $V \equiv 0$ por doquier y por tanto

$$N' = N \prod_{m=1}^{\infty} \frac{T}{m\pi} \qquad (2)$$

es la integral de camino para una partícula libre $N' = \langle 0 | e^{-p^2 T/2} | 0 \rangle$. Por tanto N no sólo es infinito sino que depende de T y es de fundamental importancia al intentar evaluar los niveles energéticos. La exponencial en T se origina del último término de (1)

$$\prod_{m=1}^{\infty} \left\{ 1 + \left(\frac{T\omega}{\pi} \right)^2 \frac{1}{m^2} \right\} = \exp \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \ln \left(1 + \left(\frac{\omega T}{\pi} \right)^2 \frac{1}{m^2} \right) \right\} \sim$$

$$\sim \exp \left\{ \int_1^{\infty} dx \ln \left[1 + \left(\frac{\omega T}{\pi} \right)^2 \frac{1}{x^2} \right] \right\} =$$

$$= \exp \left\{ \int_1^{\infty} dx \left[\ln \left[x^2 + \left(\frac{\omega T}{\pi} \right)^2 \right] - \ln x^2 \right] \right\} =$$

$$= \exp \left\{ x \ln \left[x^2 + \left(\frac{\omega T}{\pi} \right)^2 \right] + 2 \frac{\omega T}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x\pi}{\omega T} - \cancel{2x} - 2x \ln x + \cancel{2x} \right\}_1^{\infty} =$$

$$= \exp \left\{ x \ln \left[1 + \left(\frac{\omega T}{\pi x} \right)^2 \right] + 2 \frac{\omega T}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi x}{\omega T} \right\}_1^{\infty} =$$

$$= \exp \left\{ \omega T - \ln \left[1 + \left(\frac{\omega T}{\pi} \right)^2 \right] - 2 \frac{\omega T}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{\omega T} \right\} \underset{T \to \infty}{\sim} \frac{\pi^2}{\omega^2 T^2} \frac{1}{e^2} e^{\omega T}$$

como debe ser. (Para obtener el resultado correcto es necesario valuar con más cuidado este producto y calcular N').

$b_m \equiv \frac{cm}{\sqrt{2\hbar}} \sqrt{\omega^2 + \frac{m^2\pi^2}{T^2}}$

En (4.3) vemos que al aumentar m, las funciones $x_m(t)$ oscilan más y más rápidamente. Consideremos ahora un camino típico $(b_1, b_2, \ldots, b_m, \ldots)$ se puede entonces ver que es casi seguro (en sentido probabilístico) que para un camino importante típico se tendrá que $b_i \leq L/\hbar^{1/2}$ para $\forall i \leq O(e^{L^2/\hbar})$. Así pues la conclusión de que $I(L)/I = 0$ es debida totalmente a "grandes fluctuaciones" de camino de frecuencia muy alta $O(e^{(L^2/\hbar)})$. Si bien las contribuciones de alta frecuencia parecen tan importantes como cualquier otra en (3.3) no es realmente así pues el factor N asegura que el factor asociado con la n-ésima función propia no es

$$\left[\omega^2 + \left(\frac{\pi n}{T} \right)^2 \right]^{-1/2} \qquad \text{sino} \qquad \left[1 + \left(\frac{\omega T}{n\pi} \right)^2 \right]^{-1/2}$$

El primero tiende a ∞ cuando $n \to \infty$, mientras que el segundo tiende a 1 en este límite.

Entonces en el producto $\prod_{n=1}^{\infty} [1 + (\omega T/n\pi)^2]$ para $\omega T/n$ finito, las piezas con frecuencias $\omega \simeq 0(e^{L^2/\hbar})$ tienden efectivamente a la unidad

$$\lim_{\hbar \to 0} \prod_{N = e^{L^2/\hbar}}^{\infty} (1 + (\omega T/n\pi)^2) = 1$$

Es decir que el problema parece residir en n grandes y estos no parecen ser muy importantes.

Como son los caminos de alta frecuencia los que contribuyen a la acción infinita debemos reconsiderar nuestro prejuicio de que

acción grande $\Leftrightarrow$ fluctuaciones grandes (en distancias)

Un camino de alta frecuencia tiene una gran componente $(dx/dt)^2$ y gran parte de la acción proviene de las oscilaciones y no de que el camino se aparte de la vecindad de un camino de mínima acción. Si podemos probar que esto es así no debemos preocuparnos mas. En primer lugar vamos a considerar la acción del camino $x_n(t)$

$$S_E(x_n) = \int_{-T/2}^{T/2} dt \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dx_n}{dt} \right)^2 + V(x_n) \right]$$

Acción cinética Acción potencial

$$A.C. = \int_{-T/2}^{T/2} dt \, \frac{1}{2} \left(\frac{dx_n}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{T/2} dt \left(\frac{n\pi}{T} \right)^2 \left(\frac{2}{T} \right) \cos \frac{n\pi}{T} \left(t - \frac{T}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{n\pi}{T} \right)^2$$

$$A.P = \int_{-T/2}^{T/2} dt \, \frac{1}{2} \omega^2 x_n^2 = \frac{1}{2} \omega^2$$

Entonces en ortonormalidad para un camino $\sum C_n x_n(t)$ obtenemos

$$A.C = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{T} \right)^2 C_n^2$$

$$A.P = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \omega^2 C_n^2$$

Es evidente que para caminos de alta frecuencia $A.P \ll A.C \simeq$ Acción total. Puesto que es la acción potencial la que mide cuanto se alejan las fluctuaciones del camino mínimo $\bar{x}(t)$, debemos demostrar que la integral I viene dominada por caminos de acción potencial finita. A este fin consideremos

$$J(\delta_n) \equiv \prod_{n=1}^{\infty} \int_{-\delta_n}^{\delta_n} \frac{dC_n}{(2\pi\hbar)^{1/2}} e^{-C_n^2 \lambda_n / 2\hbar} \qquad (1)$$

y $J(\infty)$ es proporcional a I. La $J(\delta_n)$ incluye más fluctuaciones de la acción potencial

tales que

$$A.P = \frac{1}{2} \sum_m \omega^2 c_m^2 \leq \frac{1}{2} \sum_m \omega^2 \delta_m^2 \qquad (1)$$

Elegiremos

$$\delta_m^2 = \epsilon \frac{1}{m (\ln m)^2} \qquad (2)$$

donde ϵ es elegido suficientemente pequeño para que el camino $x(t) = \delta_m x_m(t)$ quede confinado a una región $\bar{x}(t)$ en la que la aproximación del oscilador armónico simple sea buena. Entonces

$$A.P \leq \frac{1}{2} \epsilon \omega^2 \sum \frac{1}{m (\ln m)^2} = \text{finito}.$$

Entonces

$$J(\delta_m) = \prod_{m=1}^{\infty} (\lambda_m^{-1/2}) \operatorname{erf} \left(\frac{\lambda_m \delta_m^2}{2\hbar} \right)^{1/2}$$

de donde

$$\frac{J(\delta_m)}{J(\infty)} = \prod_{m=1}^{\infty} \operatorname{erf} \frac{\lambda_m \delta_m^2}{2\hbar} = \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \operatorname{erfc} \left(\frac{\lambda_m \delta_m^2}{2\hbar} \right)^{1/2} \right)$$

Para $\hbar$ suficientemente pequeña se puede usar la forma asintótica

$$\frac{J(\delta_m)}{J(\infty)} \simeq \prod_{m=1}^{\infty} \left\{ 1 - \sqrt{\frac{2\hbar}{\pi}} \frac{1}{\delta_m \sqrt{\lambda_m}} e^{-\frac{\lambda_m \delta_m^2}{2\hbar}} \right\} =$$

$$= \exp \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \ln \left(1 - \sqrt{\frac{2\hbar}{\pi}} \frac{1}{\delta_m \sqrt{\lambda_m}} e^{-\lambda_m \delta_m^2 / 2\hbar} \right) \right\} \simeq$$

$$\simeq \exp \left\{ - \sqrt{\frac{2\hbar}{\pi}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\delta_m \sqrt{\lambda_m}} e^{-\lambda_m \delta_m^2 / 8\hbar} \right\} \simeq$$

$$\simeq \exp \left\{ - \sqrt{\frac{2\hbar}{\pi}} \int_1^{\infty} dm \frac{1}{\delta_m \sqrt{\lambda_m}} e^{-\lambda_m \delta_m^2 / 8\hbar} \right\} =$$

$$= \exp \left\{ - \sqrt{\frac{2\hbar}{\pi}} \int_1^{\infty} dm \frac{m^{1/2} \ln m}{\epsilon^{1/2} \left[\omega^2 + \left(\frac{\pi m}{T} \right)^2 \right]^{1/2}} e^{-\frac{\epsilon [\omega^2 + (m\pi/T)^2]}{2\hbar m (\ln m)^2}} \right\}$$

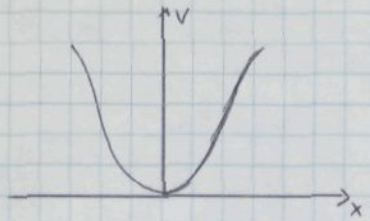
Se tiene pues

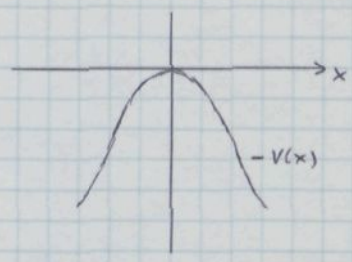
$$\lim_{\hbar \to 0} \frac{J(\delta_m)}{J(\infty)} = 1$$

Es decir que para T finito se encuentra que en el límite semiclásico la integral de camino viene dominada por caminos de acción potencial arbitrariamente pequeña. Recordando la integral de camino viene realmente dominada por fluctuaciones de acción infinita. Esto viene totalmente originada de la parte cinética de las componentes de frecuencia infinita

Hasta que tenté una fluctuación no desvía del camino de acción mínima viene determinado por la parte de la acción debido al camino potencial y hemos probado que para las fluctuaciones dominantes esta pieza es finita.

Volveremos de nuevo a (3.6) y veamos como usar esta formula para un pozo de potencial del tipo dado en la figura. Vamos a empezar calculando la energía del estado fundamental. De (1.6) es evidente que debemos tomar $|x_i\rangle$ y $|x_f\rangle$ de forma que tengan una superposición no nula con $|g.s.\rangle$. Esperamos una gran superposición entre $|g.s.\rangle$ y el "estado fundamental" clásico (la partícula en $x=0$) y por tanto elegimos $|x_i\rangle = |x_f\rangle = 0$. Busquemos ahora los caminos estacionarios. Debido al cambio de signo relativo entre la energía cinética y la potencial, la ecuación $\delta S/\delta x = 0$ es de una partícula moviendose en el potencial $-V(x)$





$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\bar{x}(t)}{dt^2} &= V'(\bar{x}(t)) \\ \bar{x}(\pm T/2) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Obviamente $\bar{x}(t) = 0 \Rightarrow S[\bar{x}] = 0$ y

$$\langle 0|\, e^{-HT/\hbar}\, |0\rangle = N\left[\det\left(-\partial_t^2 + \omega^2\right)\right]^{-1/2} \tag{1}$$

$$\omega^2 \equiv V''(0)$$

Procedamos ahora al cálculo del determinante. Sea $W(t)$ una función acotada de t. Consideremos la ecuación

$$\left.\begin{aligned} &\left(-\partial_t^2 + W(t)\right)\psi_\lambda(t) = \lambda\,\psi_\lambda(t) \\ &\psi_\lambda(-T/2) = 0 \qquad \partial_t\psi_\lambda(-T/2) = 1 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

El operador $(-\partial_t^2 + W(t))$, actuando sobre el espacio de funciones que se anulan en $\pm T/2$, tiene un valor propio λ_m, sí y solo si,

$$\psi_{\lambda_m}(+T/2) = 0. \tag{3}$$

Ahora consideremos dos funciones $W^{(1)}(t)$ y $W^{(2)}(t)$ y sea $\psi_\lambda^{(1,2)}$ las soluciones asociadas de (2). Probaremos que

$$\det\left[\frac{-\partial_t^2 + W^{(1)}(t) - \lambda}{-\partial_t^2 + W^{(2)}(t) - \lambda}\right] = \frac{\psi_\lambda^{(1)}(T/2)}{\psi_\lambda^{(2)}(T/2)} \tag{4}$$

El miembro de la izquierda de esta expresión es una función meromorfa de λ, con

un cero simple en cada $\lambda_m^{(1)}$ y un polo simple en cada $\lambda_m^{(2)}$. Además se puede probar que tiende hacia uno cuando $\lambda \to \infty$ en cualquier dirección salvo a lo largo del eje real positivo. El miembro de la derecha es una función meromorfa con los mismos ceros y polos y tiende también al mismo límite por tanto el cociente de ambos miembros es una función analítica de λ que tiende a 1 cuando $\lambda \to \infty$ en cualquier dirección salvo el eje real positivo y por tanto es la unidad. Notemos que la cantidad

$$\frac{\det\left(-\partial_t^2 + W(t)\right)}{\psi_0(T/2)} \tag{1}$$

es independiente del potencial. Consideremos $W(t) = 0$ entonces para la partícula libre

$$N\left[\det\left(-\partial_t^2\right)\right]^{-1/2} = \langle 0 | e^{-\frac{T}{2\hbar}p^2} | 0 \rangle = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} dp\, e^{-Tp^2/2\hbar} = (2\pi\hbar T)^{-1/2}$$

Además en este caso $\psi_0(t) = T/2 + t$ y por tanto

$$\frac{\det\left(-\partial_t^2\right)}{\psi_0(T/2)} = \frac{2\pi\hbar T N^2}{T} = 2\pi\hbar N^2$$

Tenemos pues

$$\frac{\det\left(-\partial_t^2 + W(t)\right)}{\psi_0(T/2)} = 2\pi\hbar N^2 \tag{2}$$

con lo que vemos que N es independiente del potencial. Entonces la fórmula deseada para evaluar (8.1) es

$$N\left[\det\left(-\partial_t^2 + W(t)\right)\right]^{-1/2} = \left[2\pi\hbar\,\psi_0(T/2)\right]^{-1/2} \tag{3}$$

En nuestro caso $W(t) \equiv \omega^2$ y por tanto

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \psi_0(t)}{\partial t^2} - \omega^2 \psi_0(t) = 0 \\ &\psi_0(-T/2) = 0 \quad , \quad \partial_t \psi_0(-T/2) = 1 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Cuya solución

$$\psi_0(t) = \frac{1}{\omega}\sinh\omega(t + T/2) \tag{5'}$$

y por lo tanto

$$N\left[\det\left[-\partial_t^2 + \omega^2\right]\right]^{-1/2} = \sqrt{\frac{\omega}{2\pi\hbar}}\left(\sinh\omega T\right)^{-1/2} \tag{6}$$

Tenemos pues lo tanto

$$\langle 0 | e^{-H\mathcal{T}/\hbar} | 0 \rangle = \sqrt{\frac{\omega}{\pi\hbar}} \; e^{-\omega T/2} \; (1 - e^{-2\omega T})^{-1/2}$$

i.e.

$$\langle 0 | e^{-HT/\hbar} | 0 \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\omega}{\pi^2 \hbar} \right)^{1/2} \frac{\Gamma(m+1/2)}{\Gamma(m+1)} \; e^{-\omega T \left(\frac{1}{2} + 2m\right)} \tag{1}$$

Comparando con (1.5) se obtiene

$$\left.\begin{aligned} E_{2m} &= \hbar\omega \left(\tfrac{1}{2} + 2m \right) \\ |\langle 0 | 2m \rangle|^2 &= \left(\frac{\omega}{\pi^2 \hbar} \right)^{1/2} \frac{\Gamma(m+1/2)}{\Gamma(m+1)} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

que son los resultados bien conocidos para el oscilador armónico (niveles pares). Es fácil darse cuenta de la razón por la que no han aparecido los niveles antisimétricos $\langle 0 | 2m+1 \rangle \equiv 0$.

Para obtener algo mas sabemos por ejemplo calcular $x_i = -x_f = -a$. Entonces $\bar{x}(t)$ viene determinado por

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2 \bar{x}(t)}{dt^2} + \omega^2 \bar{x}(t) = 0 \\ &\bar{x}(-T/2) = -a \qquad \bar{x}(+T/2) = +a \end{aligned}\right\}$$

y por tanto

$$\bar{x}(t) = \frac{a}{e^{\omega T/2} - e^{-\omega T/2}} \left(e^{\omega t} - e^{-\omega t} \right)$$

y por tanto

$$S_E(\bar{x}) = \int_{-T/2}^{T/2} dt \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{x}(t)}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \omega^2 \bar{x}^2 \right] = \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{+T/2} dt \; \frac{d}{dt} \left[\bar{x}(t) \frac{d\bar{x}(t)}{dt} \right]$$

$$= \frac{1}{2} a \frac{a\omega}{e^{\omega T/2} - e^{-\omega T/2}} \left(e^{\omega T/2} + e^{-\omega T/2} \right) + \frac{1}{2} a \frac{a\omega}{e^{\omega T/2} - e^{-\omega T/2}} \left(e^{-\omega T/2} + e^{+\omega T/2} \right)$$

$$= a^2 \omega \; \frac{e^{\omega T/2} + e^{-\omega T/2}}{e^{\omega T/2} - e^{-\omega T/2}} = \omega a^2 \; (1 - e^{-2\omega T}) \, (1 + e^{-\omega T})^{-2}$$

Entonces

$$\langle a | e^{-H\mathcal{T}/\hbar} | -a \rangle = \sum_m \langle a | m \rangle \langle m | -a \rangle \, e^{-E_m T/\hbar} \tag{3}$$

$$= \sqrt{\frac{\omega}{\pi\hbar}} \; e^{-\omega T/2} \; (1 - e^{-2\omega T})^{-1/2} \exp\left\{ -\frac{\omega a^2}{\hbar} \, (1 - e^{-2\omega T}) \, (1 - e^{-\omega T})^{-2} \right\}$$

Haciendo un desarrollo en potencias de $e^{-\omega T}$ se pueden calcular de aquí los valores propios y funciones propias.

$$\langle a | e^{-HT/\hbar} | -a \rangle = \sqrt{\frac{\omega}{\pi\hbar}}\, e^{-\omega a^2/\hbar}\, e^{-\omega T/2} + \cdots$$

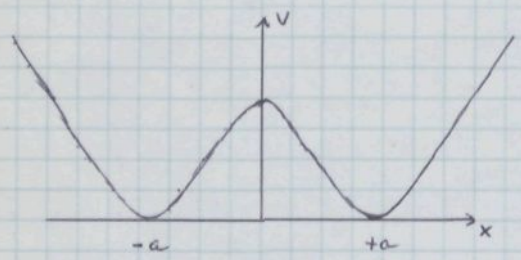
y vemos que para el estado fundamental ($n=0$)

$$E_0 = \frac{1}{2}\omega\hbar \tag{1}$$

$$|\psi_0(a)|^2 = \sqrt{\frac{\omega}{\pi\hbar}}\, e^{-\omega a^2/\hbar}$$

que es un resultado bien conocido.

Vamos ahora a considerar un caso menos trivial el pozo unidimensional doble



Suponemos $V(x) = V(-x)$ y los mínimos están en $x = \pm a$. Ahora aún tenemos las oscilaciones alrededor del mínimo a cada potencial pero en adición tenemos fluctuaciones grandes y lentas que comunican por efecto túnel ambos mínimos.

Para calcular la energía del estado fundamental buscamos como siempre caminos que minimicen la acción Euclídea y después incluimos las fluctuaciones Gaussianas alrededor de estos caminos.

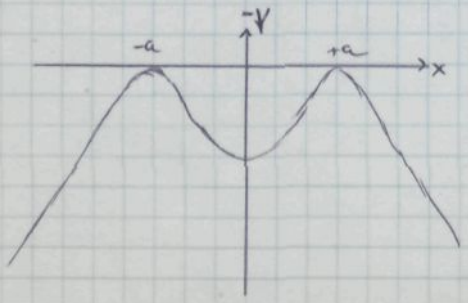
Como antes las condiciones $x_i = x_f = a$ ó $x_i = x_f = -a$, esto es para

$$\langle \pm a | e^{-HT/2} | \pm a \rangle \tag{2}$$

estamos en la misma situación de antes y esperamos que las energías más bajas sean simplemente las de un oscilador armónico simple $\hbar\omega/2$ ($\omega^2 = V''(\pm a)$) y así sucede. Supongamos que consideramos

$$\langle \pm a | e^{-HT/2} | \mp a \rangle \tag{3}$$

La integral de camino vendrá dominada por el camino de acción menor que va desde $x = \mp a$ a $x = \pm a$. El camino más simple es aquel en el que la partícula comienza en $x = -a$ ($+a$), baja al pozo y sube al otro lado hasta $x = +a$ ($-a$).



Este camino se denomina instantón: este es el camino que conecta los estados fundamentales clásicos, contribuyendo a la continuación analítica a la amplitud de efecto túnel $\langle +a | e^{-HT/\hbar} | -a \rangle$ al espacio-tiempo imaginario.

Antes de pasar a un calculo detallado veamos el interés de $\langle +a | e^{-HT/\hbar} | -a \rangle$. Como hemos dicho antes ya sabemos que al orden dominante en $\hbar$ los niveles energéticos son los del oscilador armónico simple. Por otra parte como $\langle a | e^{-HT/\hbar} | -a \rangle$ venia dominada por un camino de acción no nula, tendria un valor $e^{-c/\hbar}$, $c>0$ que cuando $\hbar \to 0$ es menor que cualquiera de los terminos de orden no perturbativo de $\hbar$ que hemos despreciado. ¿Por que' la queremos calcular? Su interés está en que es la contribución dominante al desdoblamiento de los dos niveles fundamentales. La simetría del pozo indica que hay dos conjuntos de estados propios: simetricos y antisimetricos. Cada conjunto tiene un estado de mínima energia que denotaremos por $|+\rangle$ y $|-\rangle$, en notación obvia, y sus energias son $E_\pm$. Entonces

$$E_\pm = -\lim_{T\to\infty} \frac{\hbar}{T} \ln \left[\left(\langle a | \pm \langle a | \right) e^{-HT/\hbar} \left(|a\rangle \pm |-a\rangle \right) \right] \tag{1}$$

de donde

$$E_+ - E_- = -\lim_{T\to\infty} \frac{\hbar}{T} \ln \frac{\langle a | e^{-HT/\hbar} | a \rangle + \langle -a | e^{-HT/\hbar} | -a \rangle + \langle a | e^{-HT/\hbar} | -a \rangle + \langle -a | e^{-HT/\hbar} | a \rangle}{\langle a | e^{-HT/\hbar} | a \rangle + \langle -a | e^{-HT/\hbar} | -a \rangle - \langle a | e^{-HT/\hbar} | -a \rangle - \langle -a | e^{-HT/\hbar} | -a \rangle}$$

Notemos que $\langle a | e^{-HT/\hbar} | a \rangle = \langle -a | e^{-HT/\hbar} | -a \rangle$ y $\langle a | e^{-HT/\hbar} | -a \rangle = \langle -a | e^{-HT/\hbar} | a \rangle$ y además

$$\langle a | e^{-HT/\hbar} | -a \rangle \ll \langle a | e^{-HT/\hbar} | a \rangle$$

por lo cual

$$E_+ - E_- \simeq -\lim_{T\to\infty} \frac{\hbar}{T} \, 2 \, \frac{\langle a | e^{-HT/2} | -a \rangle}{\langle a | e^{\mp HT/2} | a \rangle} \tag{2}$$

Ya sabemos que

$$\langle a | e^{-HT/2} | a \rangle = \sqrt{\frac{\omega}{\pi\hbar}} \, e^{-\omega T/2} \left(1 - e^{-2\omega T} \right)^{-1/2} \tag{3}$$

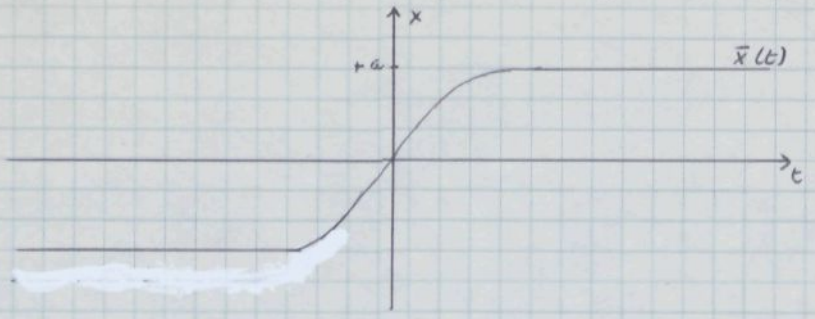
Debemos ahora calcular

$$\langle a | e^{-HT/\hbar} | -a \rangle = \int_{x(-T/2) = -a}^{x(T/2) = a} \mathcal{D}[x(t)] \; e^{-\frac{1}{\hbar} S_E[x]}$$

$$= N \sum_\alpha e^{-S_E[\bar{x}_\alpha]/\hbar} \det \left[\left(-\partial_t^2 + V''(\bar{x}_\alpha) \right) \right]^{-1/2} \tag{4}$$

donde $\bar{x}_\alpha$ son las trayectorias clásicas para una partícula en el potencial $-V(x)$

que empieza en $-T/2$ en $x=-a$ y termina en $T/2$ en $x=+a$. El camino más simple de este Gpo es el llamado instantón y cuya forma es



Instantón.

Este es llamado instantón. La solución anti-instantón es cuando $x(-T/2) = +a$ y $x(+T/2) = -a$

Veamos un par de propiedades importantes del instantón que son soluciones de

$$\frac{d^2 \bar{x}(t)}{dt^2} = V'[\bar{x}(t)] \tag{1}$$

con $\bar{x}(-T/2) = -a$ y $\bar{x}(T/2) = +a$. La energía de la partícula clásica en este estado de movimiento es

$$E = \frac{1}{2}\left(\frac{d\bar{x}(t)}{dt}\right)^2 - V[\bar{x}(t)] \tag{2}$$

y como para $\bar{x} = \pm a$, la energía es infinitesimal (para $T \to \infty$), a todos los $\bar{x}$ por conservación de energía

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \sqrt{2V(\bar{x})} \tag{3}$$

Entonces cerca de $x = \pm a$ la velocidad de la partícula es muy pequeña y permanece en estos puntos la mayor parte del tiempo. En efecto para grandes t

$$\frac{d\bar{x}}{dt} \simeq \omega(a - \bar{x}) \tag{4}$$

$$\Rightarrow \quad (a - \bar{x}) \simeq e^{-\omega t}$$

Por lo que el camino difiere del vacío ($x = \pm a$ donde tiene densidad de acción nula) solo en una región de tiempo $\Delta t \sim 1/\omega$. Así pues el camino es un objeto (donde se emplea el término objeto en el sentido de acción no nula) con extensión finita en el tiempo y por tanto se le llama instantón.

También podemos evaluar la acción Euclídea

$$S_E[\bar{x}] = \int_{-T/2}^{T/2} dt \left[\frac{1}{2}\left(\frac{d\bar{x}}{dt}\right)^2 + V[\bar{x}]\right] = \int_{-T/2}^{T/2} dt \left(\frac{d\bar{x}}{dt}\right)^2 = \int_{-a}^{+a} d\bar{x}\, \sqrt{2V(\bar{x})} \tag{5}$$

Necesitamos ahora evaluar el determinante que aparece en (12.4). Lo primero cosa a notar es que $\bar{x}(t)$ difiere de $x = \pm a$ solo en una región finita de tiempo

de orden $1/\omega$. En la escala de T ($T \to \infty$) el cambio tiene lugar instantaneamente (instantón). Las fluctuaciones alrededor de las partes constantes de $\bar{x}(t)$ deben ser análogas a las del pozo simple y dan por tanto, en el límite de intervalos (en el determinante) grandes, un factor $e^{-\omega T/2}$ como antes (9.6). En realidad $\det(-\partial_t^2 + \omega^2) \propto \sinh \frac{\omega T}{2}$ (comp. mitad) $\sinh \frac{\omega T}{2}$ (un factor por $x=-a$ y otro por $x=+a$) y por tanto $[\det(-\partial_t^2+\omega^2)]^{-1/2} \propto e^{-\omega T/2}(1 + O(e^{-\omega T}))$ pero el término despreciado no afecta la dependencia dominante en T.

Debemos ahora calcular el efecto de las fluctuaciones alrededor del trozo de camino que va de $x=-a$ a $x=+a$, es decir del instantón. Representemos este factor por $\tilde{K}$ de forma que

$$N \det\left[(-\partial_t^2 + V''(\bar{x}))\right]^{-1/2} = \sqrt{\frac{\omega}{\hbar \pi}}\, e^{-\omega T/2}\, \tilde{K} \qquad (1)$$

A primera vista podemos esperar que $\tilde{K}$ sea independiente de T; la pieza importante del camino se extiende sobre un tiempo finito del orden de $1/\omega$ y no sobre nada de los límites lejanos $\pm T/2$. Hay sin embargo una fluctuación para la que esto no sucede, aquella que corresponde a una simple traslación temporal del instantón. Debido a la invariancia traslacional (salvo pequeños efectos)

$$S[\bar{x}(t)] = S[\bar{x}(t - t_0)] \qquad (2)$$

Como t_0 puede recorrer el intervalo $[-T/2, T/2]$ esperamos que este tipo de fluctuación contribuya en un factor T a $\tilde{K}$ y esta será la única dependencia en T, esto es

$$\tilde{K} \propto T \qquad (3)$$

pues es la única fluctuación que es finita en la escala de T. (Una fluctuación puede solo ser de orden T si S cambia en una cantidad finita en una escala $O(T \to \infty)$ esto es si la fluctuación es en una dirección de una simetría de la teoría) Como estas fluctuaciones son grandes deben tratarse con mucho cuidado y volveremos a ellas inmediatamente. Procedamos de momento al calculo de la fluctuación en la aproximación gaussiana. Como antes

$$N \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_n \frac{dc_n}{(2\pi\hbar)^{1/2}}\, e^{-\frac{1}{\hbar} S_E[\bar{x}(t) + \sum_n c_n x_n(t)]} \approx$$

$$\approx N\, e^{-\frac{1}{\hbar} S_E[\bar{x}(t)]} \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_n \frac{dc_n}{(2\pi\hbar)^{1/2}}\, e^{-\lambda_n c_n^2/2\hbar} \qquad (4)$$

Para $\lambda_n > 0$ tenemos que $c_n \sim O(\hbar^{1/2})$ y la aproximación viene justificada sin

embargo, como hemos visto antes, la invariancia traslacional implica que existe una fluctuación que no cambia S'_E en segundo orden (ni en ningun orden) y para esta fluctuación, llamemosla $x_1(t)$, esperamos que $\lambda_1 = 0$ y la integral sobre c_1 da infinito. La $x_1(t)$ apropiada es claramente el generador infinitesimal

$$\bar{x}_1(t+\delta t) = \bar{x}(t) + \delta t \frac{d\bar{x}}{dt} = x_1(t) = S_E[\bar{x}]^{-1/2} \frac{d\bar{x}(t)}{dt} \tag{1}$$

donde la normalización se ha calculado usando (13.5). Directamente

$$\left(-\partial_t^2 + V''(\bar{x})\right) x_1(t) = S_E[\bar{x}]^{-1/2} \left\{ -\frac{d^2}{dt^2}\frac{d\bar{x}(t)}{dt} + V''(\bar{x})\frac{d\bar{x}(t)}{dt} \right\} =$$

$$= S_E(\bar{x})^{-1/2} \frac{d}{dt}\left[-\frac{d^2\bar{x}(t)}{dt^2} + V'(\bar{x}) \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0 \tag{2}$$

Por supuesto no obtenemos una verdadera divergencia al integrar con respecto a c_1 pues para $c_1 \cong O(T)$ empezamos a perder invariancia traslacional debido a las condiciones de contorno. y en lugar de la divergencia obtenemos solo un termino del orden de T.

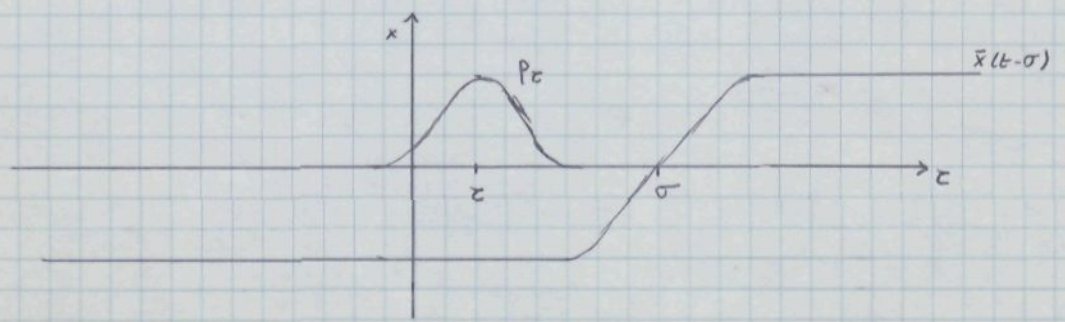
[Si bien el argumento es basicamente correcto fue vuelto a presentado de forma más elegante [J.C. COLLINS y D.E. SOPER Ann. Phys. 112, 209 (1978)] [A. JEVICKI Nucl. Phys. B117, 365 (1976)]. Para cualquier función $x(t)$ indiquemos su trasladada temporalmente por $x_\tau(t) = x(t-\tau)$ y definamos la función

$$p(t) = \| \dot{\bar{x}}(t) \|^{-1} \dot{\bar{x}}(t) \tag{3}$$

donde $\| \cdot \|$ es el simbolo para la norma y $\bar{x}(t)$ es el instantón. Definamos ahora una coordenada temporal τ: para cada $x(t)$, $\tau[x]$ es la solución a la ecuación

$$\langle p_\tau \mid x \rangle = 0 \qquad x(t) \to \tau \qquad \text{Para cada camino en el espacio} \tag{4}$$

Para $x(t) = \bar{x}(t-\sigma)$ se tiene



La simetría de p_τ alrededor de $t=\tau$ y la antisimetría de $\bar{x}(t-\sigma)$ alrededor de σ asegura que $\langle p_\tau \mid \bar{x}(t-\sigma)\rangle = 0$ si y solo si $\tau = \sigma$.

Entonces podemos escribir la integral deseada como $[\mathcal{D}[x] \equiv N[dx]]$

$$I = N \int [dx]\; e^{-S_E[x]/\hbar} =$$

$$= N \int_{-T/2}^{+T/2} d\sigma \int [dx]\; \delta(\sigma + \tau[x])\; e^{-\frac{1}{\hbar} S_E[x]} \qquad (1)$$

(la unicidad del parámetro τ es evidente para los instantones ; ¿ es también obvio para las fluctuaciones alrededor de un camino instantón ?. Primero observemos que para pequeñas fluctuaciones no hay doble cuenta de caminos, es decir que las fluctuaciones alrededor de $\bar{x}(t)$ no se cuentan también como fluctuaciones alrededor de $\bar{x}(t+\epsilon)$ para ϵ pequeño. Esto es debido a que las pequeñas fluctuaciones alrededor de $\bar{x}(t)$ pueden ser siempre escritas, por definición, como $\sum_{n=2}^{\infty} c_n x_n(t)$ donde no incluimos $x_1(t)$ que es lo que genera las traslaciones temporales. y una pequeña fluctuación alrededor de $\bar{x}(t+\epsilon)$ es igual a una fluctuación de $\bar{x}(t)$ del tipo $\epsilon x_1(t) + \sum_{n=2}^{\infty} c'_n x_n(t)$, que no puede ser del tipo anterior. Por tanto pequeñas fluctuaciones pertenecen a un único instantón y como en el límite $\hbar \to 0$ solo fluctuaciones más y más pequeñas sobreviven vemos que no hay doble cuenta. Consideremos ahora un camino arbitrario $x(t)$, como hemos argumentado antes hay un único camino instantón $\bar{x}(t-\sigma)$ alrededor del que $x(t)$ es una pequeña fluctuación, esto es

$$\bar{x}(t-\sigma) - x(t) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n x_n(t) \qquad (2)$$

Claramente

$$\langle p_\sigma \mid x(t) \rangle = \underbrace{\langle p_\sigma \mid \bar{x}(t-\sigma) \rangle}_{\text{según vimos antes}} + \sum_{n=2}^{\infty} c_n \underbrace{\langle p_\sigma \mid x_n \rangle}_{\text{pues } p_\sigma \propto x_1(t)} = 0$$

y por tanto la definición de la variable temporal actúa en el sentido deseado).

Por los argumentos anteriores

$$\tau[x_\sigma(t)] = \tau[x(t)] + \sigma \qquad (3)$$

y por tanto la delta de (1) puede escribirse como $\delta[\tau[x_\sigma])$ Si en (1) cambiamos $x(t) \to x_\sigma(t)$ como $S_E[x] = S_E[x_\sigma]$ y $d[x] = d[x_\sigma]$ encontramos que

$$I = N T \int dx\; \delta[\tau[x]])\; e^{-\frac{1}{\hbar} S_E[x]} \qquad (4)$$

donde T proviene de la integración sobre σ. Ahora bien de (15.5) se tiene que $\tau[x] = 0 \iff \langle p \mid x \rangle = 0$ y

$$\delta(\tau[x]) = \frac{d}{d\tau} \langle p_\tau | x \rangle \quad \delta(\langle p|x\rangle) = -\langle \hat{p} | x\rangle \, \delta\xi \langle p|x\rangle)$$

El primer factor nos da los restantes factores que aparecen al ir de $\int dc \to \int dt$ y $\delta(\langle p|x\rangle) \propto \delta(\langle \dot{\hat{x}}|x\rangle)$ es simplemente el aserto de que solo debemos incluir fluctuaciones del tipo $\sum_{n=2}^{\infty} c_n x_n(t)$ sin término $n=1$.]

Veamos este paso de $\int dc \to \int dt$. Indiquemos las fluctuaciones de traslaciones temporales por un parámetro t_1 tal que $\bar{x}(t_1) = 0$. Entonces

$$dx = x_1 \, dc_1 \qquad dx = \frac{d\bar{x}}{dt} \, dt_1 = x_1 \, S_E^{1/2} \, dt_1$$

y por tanto

$$\int \frac{dc_1}{(2\pi\hbar)^{1/2}} = \int dt_1 \left(\frac{S_E}{2\pi\hbar}\right)^{1/2} = T \left(\frac{S_E}{2\pi\hbar}\right)^{1/2} \tag{1}$$

se tiene por tanto

$$\langle a | e^{-HT/\hbar} | -a \rangle_{inst} = N \, T \left(\frac{S_E}{2\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{-S_E/\hbar} \left[\det'(-\partial_t^2 + V''(\bar{x}))\right]^{-1/2} \tag{2}$$

donde la prima indica que el valor propio nulo no debe ser tenido en cuenta. Teniendo en cuenta (9.6) $N\left[\det(-\partial_t^2 + \omega^2)\right] = \sqrt{\frac{\omega}{\pi\hbar}} \, e^{-\omega T/2}$

$$\langle a | e^{-HT/\hbar} | -a \rangle_{inst} = \sqrt{\frac{\omega}{\pi\hbar}} \, e^{-S_E/\hbar} \, T \, e^{-\omega T/2} \, K \tag{3}$$

$$K \equiv \left(\frac{S_E}{2\pi\hbar}\right)^{1/2} \left\{ \frac{\det'(-\partial_t^2 + V''(\bar{x}))}{\det(-\partial_t^2 + \omega^2)} \right\}^{-1/2}$$

Entonces recordando

$$E_\pm = \frac{1}{2}\hbar\omega \mp \hbar K e^{-S_E/\hbar} \tag{4}$$

es decir que $E_+ < E_-$ como debe ser, si $K > 0$. Es fácil ver que $K > 0$ pues la función propia correspondiente a $\lambda_1 = 0$ es $x_1(t) \propto d\bar{x}/dt$ la cual no tiene nodos en $(-\infty, +\infty)$ y por tanto es el estado fundamental. Luego $\lambda_i > 0 \ \forall i \neq 0$. y $K > 0$.

Vamos un par de puntos antes de continuar

i) Para calcular las fluctuaciones debidas a traslaciones hubiéramos podido proceder también de la siguiente forma. Consideremos el instanton y las pequeñas fluctuaciones a su alrededor sin incluir las traslaciones temporales. La contribución de todos ellos es de la forma

$$N \, e^{-S_E/\hbar} \left[\det'(-\partial_t^2 + V''(\bar{x}))\right]^{-1/2} \tag{5}$$

Consideremos ahora el instantón trasladado de forma que para $\tau = 0$ no es en $t = 0$ sino en $t = t_1$: $\bar{x}(t - t_1)$. Esta configuración no fué incluida en las pequeñas fluctuaciones ya calculadas. Por otra parte su acción es la misma de antes salvo términos $O(e^{-\omega T})$ y por tanto no puede despreciarse. El problema se ha originado porque $\bar{x}(t-t_1)$ no es una solución exacta clásica y por tanto no está incluida en (3.1). Sin embargo es obvio que $\delta S / \delta x \big|_{x = \bar{x}(t-t_1)} \simeq 0$ en muy buena aproximación $O(e^{-\omega T})$ y por tanto para todas las finalidades es un camino estacionario tan bueno como $\bar{x}(t)$. Podemos pensarlo como el instantón trasladado. Podemos pensar a todos $\bar{x}(t-t_1)$ como un camino estacionario y incluir todas las fluctuaciones pequeñas. Entonces

$$\langle a | e^{-HT/\hbar} | -a \rangle_{inst} = N \int \frac{dc_1}{(2\pi\hbar)^{1/2}} e^{-S_E/\hbar} \left[\det' \left(-\partial_t^2 + V''(\bar{x}) \right) \right]^{-1/2} =$$

$$= \left(\frac{S_E}{2\pi\hbar} \right)^{1/2} N e^{-S_E/\hbar} \left[\det' \left(-\partial_t^2 + V''(x) \right) \right]^{-1/2} \int_{-T/2}^{T/2} dt_1$$

$$= N T \left(\frac{S_E}{2\pi\hbar} \right)^{1/2} e^{-S_E/\hbar} \left[\det' \left(-\partial_t^2 + V''(x) \right) \right]^{-1/2}$$

que coincide con el resultado hallado antes.

(c) En la ecuación (17.3) debemos tener en cuenta que T viene acompañado por un factor $\hbar^{-1/2}$ que se ha originado por el cambio $dc_1 \to dt_1$: el tamaño natural de c_n es $O(\hbar^{1/2})$ y el de c_1 es $O(T)$ y así ha aparecido el factor $T/\hbar^{1/2}$. Esto sucederá siempre que tengamos un valor propio nulo y obtengamos un valor propio nulo por cada simetría de la teoría. En las teorías de campos en que estamos interesados $\hbar$ aparece siempre en la combinación $\hbar g^2$ y por tanto obtendremos factores tales como $g^{-N} e^{-S_E/g^2}$ para los efectos de los instantones donde N es el número de simetrías del instantón. Para N grande esto hace que el efecto de los instantones sea grande aunque g sea pequeño. Notar que si

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2(x) - g^2 \phi^4(x)$$

y entonces $\phi'(x) \equiv g \phi(x)$ se tiene

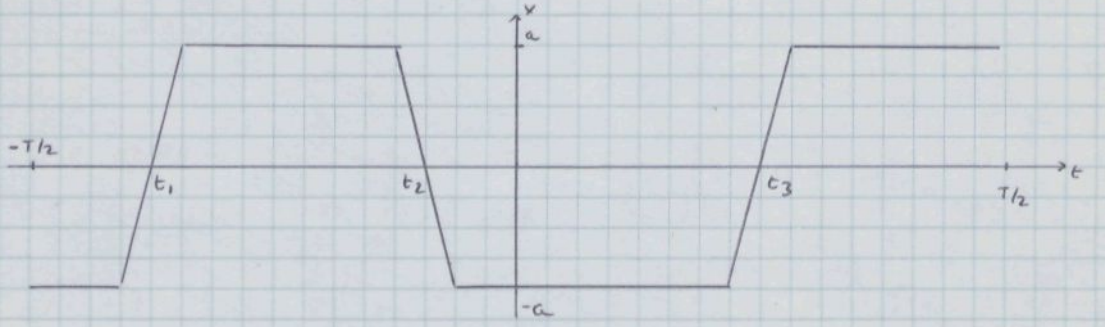
$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{g^2} \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi'(x) \partial^\mu \phi'(x) - \frac{1}{2} m^2 \phi'^2(x) - \phi'^4(x) \right) \equiv \frac{1}{g^2} \mathcal{L}'(x)$$

Notar que en nuestros cálculos lo importante es $\hbar g^2$. y por tanto $\hbar \to 0$ es equivalente a la aproximación de acoplamiento débil

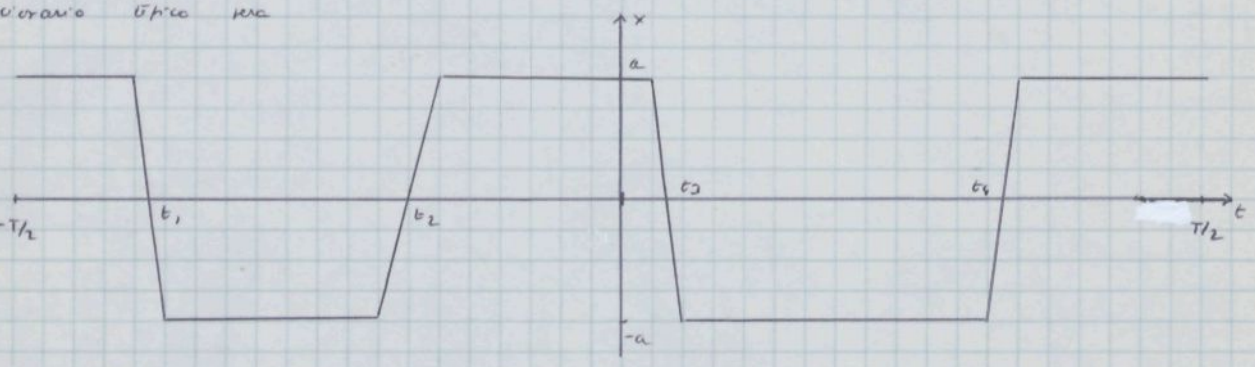
Acabamos de calcular la contribución de un instantón a $\langle a | e^{-HT/\hbar} | -a \rangle$ y hemos encontrado que

$$\frac{\langle a|\, e^{-HT/\hbar}\, |-a\rangle_{ins.}}{\langle a|\, e^{-HT/\hbar}\, |a\rangle} = KT\, e^{-S_E/\hbar} \qquad (1)$$

y por tanto si $T \to \infty$ la condición $\langle a|e^{-HT/\hbar}|a\rangle \gg \langle a|e^{-HT/2}|-a\rangle$ es falsa por pequeño que sea $\hbar$. Esto es por supuesto otra manifestación de la invariancia traslacional del instantón: la probabilidad de transición por efecto túnel es muy pequeña $\sim \exp(-S_E/\hbar)$, pero si el intervalo de tiempo es suficientemente largo entonces debe suceder por improbable que sea. Por la misma razón si sucede una vez, puede suceder muchas veces y para T suficientemente grande sucederá un número de veces proporcional a T. Entonces una aproximación típica a un camino estacionario contribuyendo a $\langle a|e^{-HT/\hbar}|-a\rangle$ puede ser



Cuando T es suficientemente largo debemos también considerar $\langle a|e^{-HT/\hbar}|a\rangle$. Un camino estacionario típico será



Como en la evaluación de las energías de los estados fundamentales haremos $T \to \infty$, iremos a calcular los elementos de matriz relevantes en este límite. Consideremos

$$\langle a|\, e^{-HT/\hbar}\, |-a\rangle = N \int [dx]\, e^{-S_E/\hbar}$$

Un camino típico viene dado en la figura anterior. Supongamos que tal camino consiste de n transiciones túnel que cruzan $x=0$ en $t = t_1, t_2, \ldots, t_n$ respectivamente. Sea $\hbar$ suficientemente pequeño para que estas transiciones sean finas y muy separadas, es decir que n/T es muy pequeño para la mayor parte de caminos estacionarios importantes. Si volvemos a nuestras ideas de que un instantón es un objeto que existe en una región de tiempo donde la densidad de acción es no nula, entonces los caminos que estamos considerando son aquellos que consisten en objetos puntuales distribuidos arbitrariamente en el tiempo, pero teniendo presente que los caminos importantes consisten en configuraciones de objetos muy separados. Entonces hablamos de un gas diluido de

instantones. Veamos ahora como calcular

c) Para n objetos separados la acción es

$$S = n S_E \tag{1}$$

donde S_E es la contribución de un instantón. Esto es obvio: todo la acción proviene de las fluctuaciones túnel que hemos supuesto que eran tan separadas que son independientes.

(ii) Entre las fluctuaciones túnel el camino está horizontalmente en $x=a$ o en $x=-a$. Puesto que los saltos por efecto túnel son prácticamente instantáneos comparados con los tiempos entre saltos ($T/n \gg 1/\omega$), en primera aproximación vemos así que el camino está en $x = \pm a$ todo el tiempo. Entonces las fluctuaciones alrededor de este camino dan un factor

$$\left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{-\omega T/2} \quad K^n \tag{2}$$

donde los primeros factores son los que aparecerían si el camino estuviera siempre en $x = \pm a$. Hemos insertado un factor K para las fluctuaciones alrededor de cada uno camino en que $x \neq \pm a$. La cantidad K es independiente del tiempo mientras $T/n \gg \frac{1}{\omega}$, es decir no hay correlaciones entre las fluctuaciones de los distintos instantones.

(iii) Los instantones pueden ocurrir en los instantes $t_1, t_2 \dots t_n$ y debemos sumar sobre estos tiempos distintos ya que representan distintos caminos que no pueden ser obtenidos por fluctuaciones gaussianas las unas de las otras. Como ninguna otra parte depende de t_i obtenemos un factor

$$\int_{-T/2}^{T/2} dt_1 \int_{-T/2}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{-T/2}^{t_{n-1}} dt_n = \frac{1}{n!} T^n \tag{3}$$

(iv) No somos libres de distribuir los instantones y antiinstantones de forma arbitraria. Si empezamos en $x=-a$ debemos terminar en $x=+a$ o en $x=-a$ según n que queramos calcular y por tanto n debe ser impar o par respectivamente. Entonces

$$\langle a | e^{-HT/\hbar} | a \rangle = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{-\omega T/2} \sum_{n=\text{par}} \frac{(K e^{-S_E/\hbar} T)^n}{n!} \tag{4}$$

$$\langle a | e^{-HT/\hbar} | -a \rangle = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{-\omega T/2} \sum_{n=\text{impar}} \frac{(K e^{-S_E/\hbar} T)^n}{n!}$$

y por tanto

$$\langle \pm a | e^{-HT/\hbar} | \pm a \rangle = \sqrt{\frac{\omega}{\pi\hbar}}\, e^{-\omega T/2}\, \frac{1}{2} \left\{ \exp\left(K e^{-S_E/\hbar} T \right) + \exp\left(-K e^{-S_E/\hbar} T \right) \right\}$$

$$\langle \pm a | e^{-HT/\hbar} | \mp a \rangle = \sqrt{\frac{\omega}{\pi\hbar}}\, e^{-\omega T/2}\, \frac{1}{2} \left\{ \exp\left(K e^{-S_E/\hbar} T \right) - \exp\left(-K e^{-S_E/\hbar} T \right) \right\} \tag{1}$$

De donde

$$E_{\pm} = \frac{1}{2}\hbar\omega \mp \hbar K e^{-S_E/\hbar} \tag{2}$$

Notar que no tenemos ningún derecho de mantener el segundo término de la expresión de la derecha de (2) pues no solo es exponencialmente pequeño comparado con el primero sino también con los términos de orden $O(\hbar^2)$ que no han sido tenidos en cuenta. Sin embargo lo hemos mantenido pues es la contribución dominante a $E_+ - E_-$.

Antes de continuar queríamos considerar con algo más de detalle las aproximaciones que nos han conducido a (1) es decir la validez de la aproximación de gas diluido de instantones i) En primer lugar debemos tener en cuenta que los caminos multi-instantones no son estacionarios. Por tanto el término lineal en el desarrollo de la acción es no nulo y como solo es lineal en las pequeñas fluctuaciones puede parecer que quizá alterará significativamente nuestros resultados. Esto no es así estos caminos son estacionarios en una aproximación suficientemente buena para que los errores sean muy pequeños.

ii) El tamaño finito del instantón tiene también algunas implicaciones. En particular hay un número máximo de instantones que pueden meterse en un intervalo finito T, y por tanto deberíamos truncar las series (20.6), y encontramos que el error consiguiente implica que usando este método no podemos decir nada sobre los estados de energía excitados del potencial iii) Finalmente debemos hacer algún esfuerzo para tener en cuenta el efecto de interacción entre instantones. Esta es otra manifestación del hecho que un camino multiinstantón no es precisamente un camino clásico. Las interacciones entre instantones son una medida de esta discrepancia. Sin embargo como estas interacciones caen exponencialmente con la distancia, todos los errores asociados se anulan rápidamente en el límite semiclásico

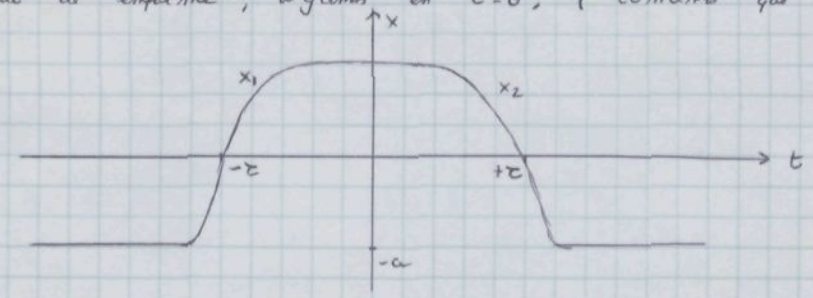
c) Los multiinstantones no son exactamente caminos estacionarios: es decir para ellos $\delta S/\delta x \neq 0$, pero sí $\delta S/\delta x \simeq 0$. La presencia de un término lineal

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dc_n \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, e^{-\lambda_n c_n^2/2\hbar} \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} dc_n \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, e^{-\frac{\lambda_n c_n^2}{2\hbar} + \frac{a c_n}{\hbar}} = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_n}}\, e^{\frac{a^2}{2\hbar\lambda_n}} \tag{3}$$

Debemos estimar a y ver si las correcciones son pequeñas. El término buscado es de la forma

$$\exp\left\{ -\frac{1}{\hbar}\int dt \left.\frac{\delta S}{\delta x}\right|_{x=\tilde{x}} \sum c_m x_m \right\} \tag{1}$$

Sospechamos que $\tilde{x}$ es totalmente análogo a la solución instantón excepto en una pequeña región donde se empalman estos y por tanto $\delta S/\delta x|_{x=\tilde{x}}$ es nulo casi por doquier. Consideremos un típico punto de empalme, digamos en $t=0$, (tomamos que el empalme tiene lugar



en una región infinitesimal del espacio-tiempo de forma que $\tilde{x}$ sea continua pero no lo sea $d\tilde{x}/dt$) con instantones en $t = \pm\tau$. Entonces para τ grandes se tiene en la vecindad de $t\simeq 0$

$$\frac{dx_1}{dt} = \omega(a - x_1) \qquad \frac{dx_2}{dt} = -\omega(a - x_2) \tag{2}$$

esto es

$$x_1 = a\left[1 - e^{-\omega(t+\tau)}\right] \qquad x_2 = a\left[1 + e^{+\omega(t-\tau)}\right]$$

de donde

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} \underset{t\simeq 0}{=} \epsilon(t)\, a\omega\, e^{-\omega\tau}\, e^{\omega|t|} \qquad \epsilon(\gtrless 0) = \pm 1 \tag{3}$$

De aquí

$$\frac{d^2\tilde{x}}{dt^2} \underset{t\simeq 0}{=} \frac{d}{dt}\left(\frac{d\tilde{x}}{dt}\right) \underset{t\simeq 0}{=} -2a\omega\, e^{-\omega\tau}\,\delta(t) + a\omega^2\, e^{+\omega|t|}\, e^{-\omega\tau} \tag{4}$$

Ahora bien

$$\left.\frac{\delta S}{\delta x}\right|_{x=\tilde{x}} = -\frac{d^2\tilde{x}}{dt^2} + V'(\tilde{x}) \underset{t\simeq 0}{=} 2a\omega\, e^{-\omega\tau}\,\delta(t) \tag{5}$$

pues la última pieza de (4), la no singular, se debe cancelar con $V'(\tilde{x})$. Entonces el factor que aparece es (ver (1))

$$\exp\left\{ -\frac{2a\omega}{\hbar} \sum_i \left[e^{-\omega\tau_i} \sum_m c_m x_m(\bar{t}_i)\,(-1)^{\frac{i}{\hbar}} \right] \right\} \tag{6}$$

donde $\bar{t}_i$ es el punto medio entre el instantón y el antiinstantón y $2\tau_i$ es la distancia entre ellos. El $(-1)^{\frac{i}{\hbar}}$ es debido a la alternancia de instantones y antiinstantones que dan al empalmar antisoluciones de signo opuesto. Para simplificar supondremos todos los tiempos iguales

y $\tau_i \simeq T/2\langle m\rangle$ donde $\langle m\rangle$ es el número medio de instantones ($m_{max} \simeq \omega T$)

$$\langle m\rangle \simeq KT\, e^{-S_E/\hbar} \simeq \Delta E \cdot \frac{T}{\hbar} \qquad (1)$$

Entonces la contribución al camino de las fluctuaciones es

$$I = \prod_m \prod_i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dc_{mi}}{(2\pi\hbar)^{1/2}}\; e^{-\lambda_m c_{mi}^2/2\hbar + \frac{2a\omega}{\hbar} e^{-\omega T/2\langle m\rangle} (-1)^i \bar{x}(i)\, c_{mi}}$$

donde hemos tomado fluctuaciones independientes alrededor de cada instantón y los c dependen tanto de los m y de los i (instantón). Entonces

$$I = \prod_{line} \prod_m \frac{1}{\sqrt{\lambda_m}}\, exp\left\{ \frac{2a^2\omega^2}{\hbar}\, e^{-\omega T/\langle m\rangle}\, \frac{\bar{x}_m^2(i)}{\lambda_m} \right\}$$

y el factor corrector es pues

$$F.C. = exp\left\{ \frac{2a^2\omega^2}{\hbar}\, e^{-\frac{\omega}{2k} e^{S_E/\hbar}}\, \frac{\bar{x}_m^2(i)}{\lambda_m} \right\}$$

que claramente tiende hacia cero cuando $\hbar \to 0$ y la corrección es del orden

$$O\left(exp - \frac{\omega}{2k}\, e^{S_E/\hbar} \right) \qquad (1)$$

Vemos pues que en la aproximación de gas diluido de instantones el hecho de que estemos usando caminos aproximadamente clásicos tiene un efecto despreciable sobre los niveles energéticos y sus desdoblamientos

ii) En nuestro cálculo hemos permitido que el número de instantones n varíe de 0 a ∞. De hecho como el instantón ocupa un tiempo $O(1/\omega)$, el número máximo es $n_{max} = \omega T$ y no tiene sentido el usar todos los términos. Algo bien en una serie de este tipo

$$\langle m\rangle \sim KT\, e^{-S_E/\hbar} \sim \Delta E \cdot \frac{T}{\hbar}$$

y por tanto la pista de la serie única de n_{max} (y hasta ∞) con respecto a lo que estamos incluyendo representa una energía $E \sim \hbar n_{max}/T \simeq \hbar\omega$ Esta energía es similar a la del próximo estado excitado y de aquí es evidente que la aproximación de gas diluido de instantones es incapaz de dar información sobre cualquier estado distinto del fundamental

iii) En el gas diluido de instantones supusimos que tienen tamaño nulo y $S_1 = n S_E$ mientras que en caso realista tienen un tamaño y $S \neq n S_E$, en realidad $S < n S_E$ pues la pista del i-ésimo instantón desde $\frac{1}{2}(t_i + t_{i-1})$ hasta ∞ no está incluida.

$$S = n S_E - \sum_i \left\{ \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}(t_i + t_{i-1})} + \int_{\frac{1}{2}(t_i + t_{i+1})}^{\infty} \right\} dt\, 2V \qquad (1)$$

Para estimar esta cantidad tomemos espaciados medios $t_i - t_{i-1} = \frac{T}{n}$, en los que

$$S = n \left\{ S_E - 4 \int_{T/2n}^{\infty} dt\, V \right\} \qquad (2)$$

Usando $V = (\omega^2/2)(x-a)^2 \simeq (\omega^2 a^2)\, e^{-2\omega t}/2$ donde resultados de la pag 22. y este resultado es valido para $x \simeq \pm a$. (hemos calculado por simplicidad un instantón centrado en t)

Entonces

$$S = n \left(S_E - \omega a^2 e^{-\omega T/n} \right) \qquad (3)$$

El desdoblamiento de niveles (que viene dominado por $n = \langle n \rangle$) es

$$\Delta E = E_- - E_+ = 2K\hbar \exp\left\{ \frac{1}{\hbar} \left(S_E - \omega a^2 e^{-\omega T/\langle n \rangle} \right) \right\} \qquad (4)$$

y usando (23.1)

$$\frac{\delta(\Delta E)}{\Delta E} = \left\{ e^{-\frac{\omega a^2}{\hbar} e^{-\frac{\omega}{K}} e^{S_E/\hbar}} - 1 \right\}$$

$$\frac{\delta(\Delta E)}{\Delta E} \simeq -\frac{\omega a^2}{\hbar} e^{-\frac{\omega}{K}} e^{S_E/\hbar} \qquad (5)$$

que es muy pequeño y no debe afectar incluso los cálculos de niveles mas altos.

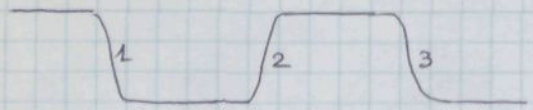
(vi) Hemos supuesto frecuentemente que los instantones son equidistantes. Este es en si mismo una aproximación ya que los instantones interaccionan. La interacción decae exponencialmente con la distancia $\sim \exp -\omega(t_i - t_{i-1})$ y como

$$e^{-\omega t/n} + e^{-\omega \frac{n-1}{n} t} \gg e^{-\omega t/2} + e^{-\omega t/2} \quad \text{si } n > 2 \qquad (6)$$

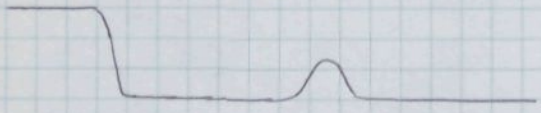
los instantones tenderan a no estar equidistantes; configuraciones donde algunos estan más juntos y otros más separados serán más probables. ¿Mucho más probables? ¿Tendrá eso efecto en la energía del estado fundamental? No vamos a intentar contestar esta pregunta en detalle. Sin embargo como la interacción es de alcance muy corto, consideremos la parte que es de más corto alcance; el hecho de que cuando un instantón y un anti-instantón se acercan mucho se aniquilan entre si. Ahora para los términos dominantes en el gas diluido de instantones la situación es que lo que ganamos aniquilando un instantón $\sim K e^{-S_E/\hbar}$ es precisamente lo que perdemos en entropía $\sim T/n$ ya que para el término dominante $n \sim KT e^{-S_E/\hbar}$, y por tanto el estado fundamental es "estable" frente

a la variación del número de instantones y por tanto deberá ser estable frente a interacciones de corto alcance

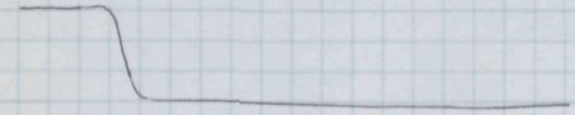
Vamos a intentar calcular los efectos cuando n no está en el valor más probable. Lo que vamos a considerar es



una configuración típica bien definida



lo que sucede cuando los instantones 2 y 3 se alejan mucho



la configuración anterior puede perfectamente estar incluida como fluctuación gaussiana alrededor de esta configuración más simple, también incluida en el gas diluido de instantones

Vamos a estimar esto. Si el instantón y el antiinstantón están a una distancia $1/\omega$ se aniquilan y n y $\bar{n}$ se reducen en una unidad

$$\text{probabilidad de estar unca} \simeq \frac{\text{tamaño instantón}}{\text{tiempo total}} \simeq \frac{1/\omega}{T/n} = \frac{n}{T\omega} \qquad (i)$$

$$\Rightarrow \text{número de cercanos} \sim n\,\frac{n}{\omega T} = \frac{n^2}{\omega T}$$

Ahora bien el efecto de la aniquilación es que perdemos la corrección $K^2 e^{-2S_E/\hbar}$ y la serie "mejorada" es parecida a

$$\sum_n \frac{(K e^{-S_E/\hbar}\, T)^n}{n!} \left[K^2 e^{-2S_E/\hbar} \right]^{-n^2/\omega T}$$

y cuando $n/T \simeq K e^{-S_E/\hbar}$ obtenemos

$$E_- - E_+ \simeq 2\hbar K e^{-S_E/\hbar} \frac{\left\{ \frac{1}{K^2} e^{2S_E/\hbar} \right\}^{\frac{K}{\omega} e^{-S_E/\hbar}}}{1 + \frac{2S_E K}{\hbar\omega} e^{-S_E/\hbar}}$$

que es una corrección despreciable cuando $\hbar \to 0$.

v) En el cálculo del determinante hemos supuesto que la mayor parte del tiempo $\bar{x} = \pm a$. Esto no es exactamente así y en realidad

$$\bar{x} = a + O\left(e^{-\omega T/\langle n \rangle}\right) = a + O\left(e^{-\frac{\omega}{K} e^{S_E/\hbar}}\right)$$

y esto implica un error en el determinante. El hecho de que $x = \pm a$ es equivalente a

que V no es un oscilador armónico simple. Es decir

$$V(x) = \frac{1}{2}\omega^2 (x-a)^2 + O((x-a)^3)$$

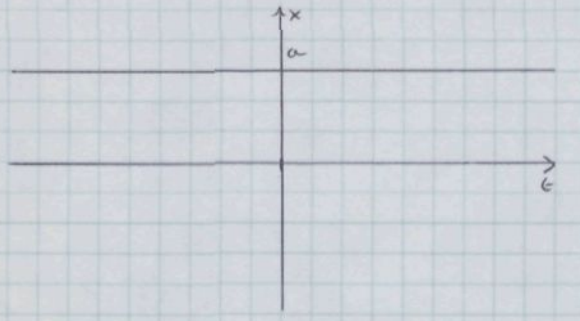
$$V''(\bar{x}) = \omega^2 + O(\bar{x}-a) = \omega^2 + O\left(e^{-\omega T/\langle n\rangle}\right)$$

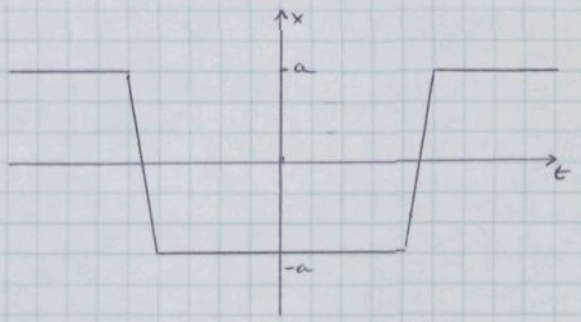
es decir tenemos un cambio $\omega^2 \to \omega^2 + O(e^{-\omega T/\langle n\rangle})$ y por tanto la corrección al determinante es

$$\delta(\det^{-1/2}) \sim e^{-\delta\omega\, T/2} \sim e^{-T e^{-\omega T/\langle n\rangle}}$$

y por tanto un cambio en la energía $\delta E \sim e^{-\omega T/\langle n\rangle}$ que es muy pequeño cuando $\hbar \to 0$.

vi) Hemos visto que la forma de calcular la integral de camino ha sido la de aislar los caminos estacionarios y llevar a cabo la aproximación gaussiana a las fluctuaciones alrededor de cada camino y esto implica que hemos contado cada camino muchas veces: cada camino ha sido incluido en cada una de las integraciones gaussianas. Vamos a ver lo que sucede en el pozo doble. Consideremos el cálculo de $\langle a|e^{-HT/\hbar}|a\rangle$ y consideremos separadamente las fluctuaciones ~~de~~ de los caminos





que calcularemos en la aproximación gaussiana. Es claro que estamos contando doble: El segundo camino ha sido ya incluido como fluctuación del primero y de hecho han sido incluidos todos los caminos multiinstantones. ¿Es serio el error cometido? Consideremos las fluctuaciones gaussianas alrededor de $x=a$. Lo que uno hace en la aproximación gaussiana es tomar todos los caminos posibles y pesarlos con lo que sería la acción si el potencial fuera un oscilador armónico simple en $x=a$ $V_{SHO}(x)$, esto es con un factor

$$\exp\left\{-\frac{1}{\hbar}\int_{-T/2}^{T/2} dt\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + V_{SHO}(x)\right\}\right\} \qquad (1)$$

Esto es un procedimiento totalmente erróneo para caminos que no están enteramente

en la región $V(x) \simeq V_{SHO}(x)$. Para un instantón se cumple (13.3) y un instantón considerado como fluctuación alrededor de $x=a$ tiene un peso

$$\exp\left\{ -\frac{1}{\hbar} \int dt \left[V(\bar{x}) + V_{SHO}(\bar{x}) \right] \right\} \tag{1}$$

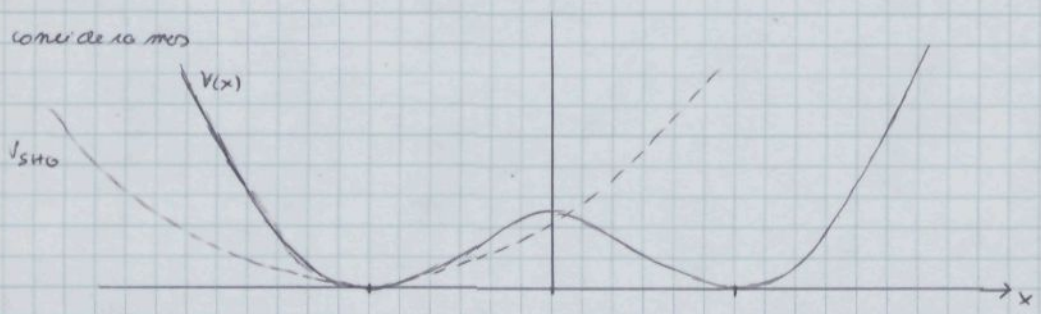
mientras que el peso conjunto del instantón es

$$\exp\left\{ -\frac{2}{\hbar} \int dt\, V(\bar{x}) \right\} \tag{2}$$

Por tanto el contaje doble no es importante si

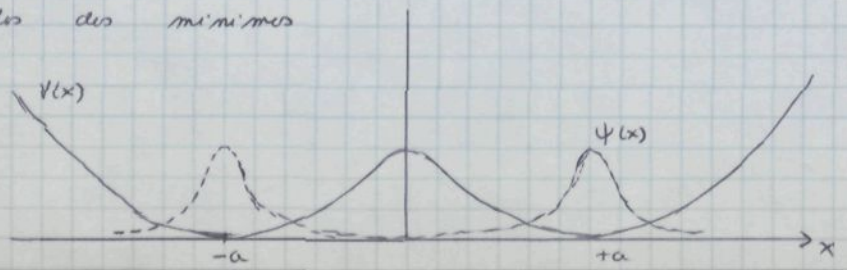
$$\exp\left\{ -\frac{1}{\hbar} \int dt\, V_{SHO}(\bar{x}) \right\} \ll \exp\left\{ -\frac{1}{\hbar} \int dt\, V(\bar{x}) \right\} \tag{3}$$

Si consideramos



es claro que cuanto menor sea ω mayor es la importancia del contaje doble. Hay un efecto de contaje doble es independiente de $\hbar$. Sin embargo independientemente de lo pequeño que sea ω, para configuraciones que están un tiempo suficiente en $x=-a$, el contaje doble es despreciable, de forma que en el límite $\hbar \to 0$ no hay problema. El problema aparece para $\hbar$ finito (o g^2 finito) y entonces uno debe comprobar que (3) se satisface pues de lo contrario el cálculo es mera ficción.

Tal como han sido introducidos los instantones parecen tener un carácter muy formal. Son soluciones clásicas en un espacio-tiempo Euclídeo, pero no es claro a priori si tienen alguna manifestación física en el espacio-tiempo Minkowskiano en el que la física tiene lugar. Afortunadamente las funciones de onda reflejan directamente el instantón según vamos a ver. Consideremos para empezar el pozo doble unidimensional. La función de ondas del estado fundamental estará formada por dos gaussianas y una forma que decrece rapidamente entre los dos mínimos

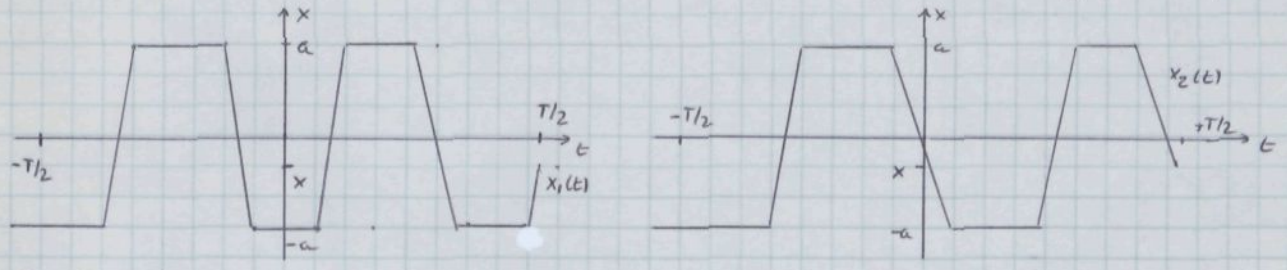


Es la función de ondas que decae exponencialmente en la región prohibida la que está relacionada directamente con el instantón. Para calcular $\psi(x)$ usemos

$$\lim_{T\to\infty} \langle x | e^{-HT/\hbar} | -a \rangle = \psi(x)\,\psi^*(-a)\, e^{-E_+ T/\hbar} = \tag{1}$$

$$= N \int_{x(-T/2)=-a}^{x(T/2)=x} d[x]\; e^{-\frac{1}{\hbar} S[x]}$$

Habrá dos clases de caminos extremos que contribuirán y son típicamente



Si sumamos sobre todos los instantones obtenemos un factor $\langle -a | e^{-HT/\hbar} | -a \rangle$ en el primer caso y $\langle +a | e^{-HT/\hbar} | -a \rangle$ en el segundo y ambos son iguales en en orden dominante en T. Entonces (1) vale

$$\langle x | e^{-HT/\hbar} | -a \rangle = \langle a | e^{-HT/\hbar} | a \rangle \left\{ K_1(x)\, e^{-\frac{1}{\hbar} S_E(\bar{x}_1)} + K_2(x)\, e^{-\frac{1}{\hbar} S_E(\bar{x}_2)} \right\} \tag{2}$$

El primer factor proviene de sumar sobre todas las piezas que provienen de los caminos anteriores al trozo incompleto que va desde $\pm a$ hasta x. El último trozo del camino es

$$\bar{x}_1(t) \quad \text{tal que} \quad \bar{x}_1(-T/2) = -a \qquad \bar{x}_1(+T/2) = x \tag{3}$$

$$\bar{x}_2(t) \quad \text{tal que} \quad \bar{x}_2(-T/2) = +a \qquad \bar{x}_2(+T/2) = x$$

(Podemos tomar el tiempo $-T/2$, puesto que toda la acción no nula de $S[\bar{x}]$ proviene del tiempo $t \simeq +T/2$ donde $\bar{x}(t) \neq \pm a$). $K_1(x)$ y $K_2(x)$ son los cocientes usuales de determinantes y esperamos que su dependencia en x sea relativamente débil. Finalmente

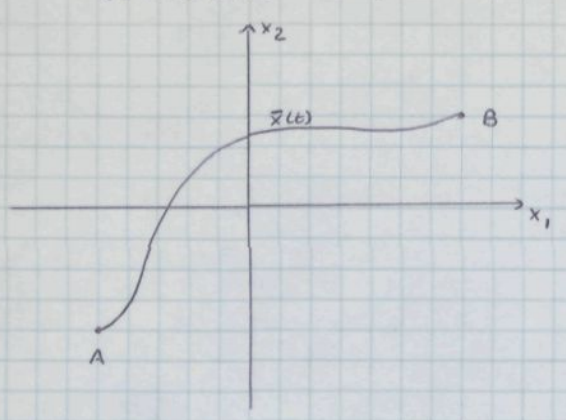
$$S(\bar{x}_c) = \int_{-T/2}^{+T/2} dt \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{x}_c}{dt^2} \right)^2 + V(\bar{x}_c) \right\} = \int_{-T/2}^{+T/2} dt\, \frac{d\bar{x}_c}{dt}\, \frac{d\bar{x}_c}{dt} = \int_{(-1)^c a}^{x} d\bar{x}_c\, \frac{d\bar{x}_c}{dt}$$

Estos factores dan la caída exponencial de la función de ondas en la región clásicamente prohibida

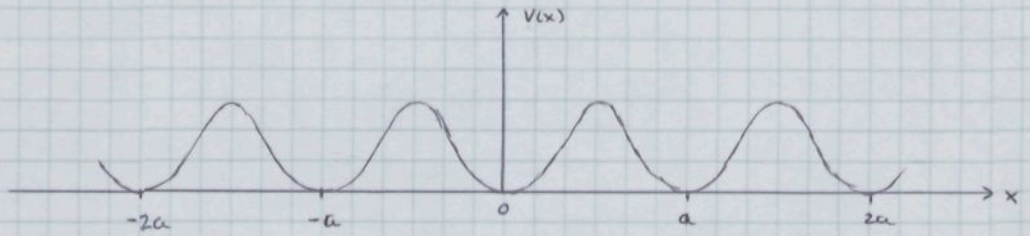
$$\psi(x) \sim K_1(x)\, e^{-\frac{1}{\hbar} S_E(\bar{x}_1)} + K_2(x)\, e^{-\frac{1}{\hbar} S_E(\bar{x}_2)} \tag{5}$$

de una forma doble.

Consideremos la situación del pozo cuadrado en dos dimensiones. Los pozos están en A y B. El instantón es $\bar{x}(t)$ A diferencia del caso 1+1 el instantón no cubre ahora todo el espacio. Como en el caso anterior la función de onda consistirá de gaussianas centradas alrededor de A y B, más una parte que decaerá exponencialmente extendiendose en la zona prohibida clásicamente. Por argumentos similares a los del caso anterior la función de onda estará localizada principalmente alrededor del camino instantón. decreciendo rapidamente en las direcciones ortogonales a $\bar{x}(t)$ y por tanto el mapa de niveles de la función de onda en la región prohibida traza directamente el camino instantón.



Consideremos ahora un potencial periodico:



Por simplicidad hemos tomado los mínimos en na. Si ignoramos el efecto túnel los estados propios de la energía serán infinitamente degenerados, con funciones de onda concentradas en los puntos $x = na$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. El efecto túnel cambia esta situación y convierte cada valor propio en una banda de valores propios; los estados propios son estados propios de la traslación a, las ondas de Bloch. Veamos como este resultado se puede obtener usando instantones.

Indiquemos por T el operador traslación en a. La teoría es invariante bajo T.

$$T\,|\text{estado físico}\rangle = \text{fase}\;|\text{estado físico}\rangle$$

Indicaremos la fase por $\exp(i\theta a)$ y los estados por θ (eliminando todos los otros números cuánticos) ($a \equiv 1$)

$$T\,|\theta\rangle = e^{i\theta}\,|\theta\rangle \qquad (1)$$

Si indicamos por $|n\rangle$ el estado propio de la posición en el fondo del n-esimo mínimo, un estado típico es

$$|\theta\rangle = \sum_n e^{in\theta}\,|n\rangle \qquad (2)$$

Claramente $\langle\theta|\theta'\rangle \propto \delta(\theta-\theta')$, por lo que la base de energías del espacio de los estados físicos se descompone en sectores mutuamente ortogonales cada uno de los cuales está determinado por un valor de θ. Ninguna interacción que tenga la simetría de las traslaciones en a permitirá transiciones entre los distintos sectores de forma que podemos razonablemente hablar del estado fundamental en cada sector, $|\theta\rangle_{vac}$, como siendo el estado vacío.

La presencia de los vacío θ no tiene nada que ver con el efecto túnel y es una simple consecuencia de la simetría del problema. El efecto túnel rompe la degeneración del vacío y como sabemos calcular efecto túnel, al menos en la aproximación semiclásica, podemos calcular $E(\theta)$. Como antes usaremos la aproximación de gas diluido de instantones, que es válida en el límite semiclásico. Los instantones son análogos al caso anterior. La única novedad es que los instantones pueden empezar en cualquier posición inicial $x = ja$ y ir a la próxima $x = (j+1)a$; igualmente los antiinstantones van de $x = ja$ a $x = (j-1)a$.

Vamos a intentar calcular $\langle n_+|e^{-HT/\hbar}|n_-\rangle$ que corresponde a una situación en que $x(-T/2) = n_- a$ y $x(+T/2) = n_+ a$. Notemos que ahora no hay la restricción de que los instantones y antiinstantones se deben alternar. Evidentemente cada instantón o antiinstantón debe empezar donde terminó su predecesor. Además el número total de instantones (n) y el de antiinstantones $(\bar{n})$ debe ser tal que

$$n - \bar{n} = n_+ - n_- \tag{1}$$

Así obtenemos

$$\langle n_+|e^{-HT/\hbar}|n_-\rangle = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{-\omega T/2} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\bar{n}=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,\bar{n}!}\left(KTe^{-S_E/\hbar}\right)^{n+\bar{n}} \delta_{n-\bar{n}-n_++n_-,0} \tag{2}$$

Tengamos en cuenta que

$$\delta_{ab} = \int_0^{2\pi} d\theta\, \frac{1}{2\pi}\, e^{i\theta(a-b)} \tag{3}$$

$$\Rightarrow \langle n_+|e^{-HT/\hbar}|n_-\rangle = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{-\omega T/2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi}\, e^{i(n_+-n_-)\theta} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\bar{n}=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,\bar{n}!}\left(KTe^{-S_E/\hbar}\right)^{n+\bar{n}} e^{-i(n-\bar{n})\theta}$$

$$\Rightarrow \langle n_+|e^{-HT/\hbar}|n_-\rangle = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{-\omega T/2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi}\, e^{i(n_+-n_-)\theta} \exp\left\{2KT\cos\theta\, e^{-S_E/\hbar}\right\} \tag{4}$$

Para obtener la energía de los distintos vacíos deseamos realmente $\langle\theta| e^{-HT/\hbar} |\theta\rangle$ donde $|\theta\rangle$ es cualquier estado en el sector θ. Un ejemplo de tal estado es

$$|\theta\rangle = \sum_n e^{in\theta} |n\rangle \tag{1}$$

y por tanto

$$\langle\theta'| e^{-HT/\hbar} |\theta\rangle = \sum_n \sum_{n'} e^{-in'\theta' + in\theta} \langle n'| e^{-HT/\hbar} |n\rangle =$$

$$= \sum_{n,n'} e^{in\theta - in'\theta'} \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{-\omega T/2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta''}{2\pi} e^{in'\theta'' - in\theta''} \exp\left\{ 2KT \cos\theta'' e^{-S\varepsilon/\hbar} \right\}$$

$$= \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{-\omega T/2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta''}{2\pi} 2\pi\, \delta(\theta - \theta'')\, 2\pi\, \delta(\theta' - \theta'') \exp\left\{ 2KT \cos\theta'' e^{-S\varepsilon/\hbar} \right\}$$

$$= 2\pi\, \delta(\theta - \theta') \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{-\omega T/2} e^{2KT\cos\theta e^{-S\varepsilon/\hbar}}$$

y por tanto la energía del estado $|\theta\rangle_{vacío}$ es

$$E(\theta) = \frac{\hbar\omega}{2} - 2K\hbar \cos\theta\, e^{-S\varepsilon/\hbar} \tag{2}$$

que es el resultado deseado.

De estos ejemplos podemos formular una estrategia para descubrir los estados propios aproximados de sistemas cuánticos

i) Enumerar todas las configuraciones clásicas de energía nula

ii) Construir paquetes de ondas gaussianos centrados alrededor de las configuraciones de energía cero

iii) A partir de superposiciones lineales de estos estados gaussianos (si es necesario) construir estados que respeten las simetrías del problema

iv) Buscar las soluciones euclídeas de energía cero de las ecuaciones clásicas

v) Si existen tales soluciones e interpolar para tiempo imaginario nuestras soluciones clásicas de energía cero y tiempo real entonces

- tenemos efecto túnel
- se deshace la degeneración del estado fundamental
- los desdoblamientos pueden calcularse en la aproximación de gas diluido de instantones para $\hbar \to 0$.

III) El modelo de Higgs abeliano en dimensión 1+1

Vamos a discutir una teoría de campos en la que el efecto de los instantones cambia totalmente el espectro de partículas: el modelo de Higgs abeliano en dimensión 1+1. En cualquier número de dimensiones esta es una teoría de un campo escalar complejo con interacciones de cuarto orden, acoplado de forma mínima con un campo de gauge Abeliano cuya constante de acoplamiento e es llamada carga eléctrica. En la métrica usual de Minkowski la densidad Lagrangiana es (IV.13.1)

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) + (D_\mu \varphi(x))^+ (D^\mu \varphi(x)) + \mu^2 \varphi^+(x) \varphi(x) - \frac{\lambda}{4} (\varphi^*(x) \varphi(x))^2 \quad (1)$$

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) \quad , \quad D_\mu \varphi(x) = \partial_\mu \varphi(x) - i e A_\mu(x) \varphi(x)$$

i) $\mu^2 > 0$ En este caso la teoría es simplemente la electrodinámica de un mesón escalar cargado. En general el espectro de masas consiste de un mesón cargado, su antipartícula y un mesón vectorial sin masa: el fotón. La fuerza entre cargas externas muy separadas debe ser la fuerza de Coulomb. Estas afirmaciones exigen algunos cambios en dimensión 1+1 que son importantes. En primer lugar la constante de acoplamiento e tiene dimensiones L^{-1} la fuerza de Coulomb $e^2 f(r)$ debe ser tal que $f(r) = cte.$ y por tanto no podemos tener partículas libres cargadas: los mesones están confinados en estados ligados mesón - antimesón. Por otra parte en dos dimensiones no hay direcciones espaciales transversales y por tanto no hay fotones libres. El espectro de la teoría consiste de una secuencia de estados ligados mesón - antimesón, los cuales no pueden desintegrarse electromagnéticamente pues no hay fotones libres sino únicamente a través de los términos de cuarto orden de (1), y por tanto los más bajos de estos estados serán estables. Finalmente como el potencial Coulombiano entre fuentes externas aumenta linealmente con la distancia tenemos, en este sentido, confinamiento.

ii) $\mu^2 < 0$. El potencial es

$$V(\varphi) = \mu^2 \varphi^*(x) \varphi(x) + \frac{\lambda}{4} (\varphi^*(x) \varphi(x))^2 \quad (2)$$

tiene un mínimo en

$$|\varphi(x)|^2 = -\frac{2\mu^2}{\lambda} > 0 \quad (3)$$

y tiene lugar el fenomeno de Higgs. El vacio ya no consiste de fluctuaciones alrededor de $\varphi = 0$ sino alrededor de un valor φ_0 tal que $|\varphi_0|^2 = -2\mu^2/\lambda$. Las fluctuaciones en la dirección radial sufren una fuerza recuperadora y por tanto corresponden a un meson escalar neutro con masa $M_S = 2\sqrt{-\mu^2}$. Las fluctuaciones ortogonales en la dirección tangencial y por tanto a lo largo del mínimo del potencial, no sufren fuerza recuperadora y por tanto deberían corresponder a partículas sin masa (el bosón de Goldstone), excepto por el hecho de que tales fluctuaciones son meramente transformaciones de gauge y por tanto esta partícula sin masa es un artilugio de gauge: la fase cambiante de φ que se origina de las pequeñas fluctuaciones angulares es solo una densidad de carga fluctuante que es amortiguada por las interacciones electromagnéticas de largo alcance, originando un boson vectorial con masa $M_V = 2e\sqrt{-2\mu^2/\lambda}$. Por tanto el espectro consiste de un meson escalar neutro con masa y un meson vectorial neutro con masa y la fuerza entre cargas externas muy separadas cae exponencialmente con la distancia.

Vamos a intentar ahora demostrar que lo que hemos dicho para $\mu^2 < 0$ es mentira; contrariamente a las predicciones de la teoría de perturbaciones, las propiedades cualitativas para el modelo con $\mu^2 > 0$ y $\mu^2 < 0$ son idénticas; el modelo de Higgs abeliano bidimensional no presenta el fenómeno de Higgs. Presuponemos, demostraremos que para $\mu^2 < 0$ la teoría admite instantones, y, que cuando el efecto de los instantones es tenido en cuenta la fuerza de largo alcance entre cargas externas no depende de la distancia. También será posible argumentar, a partir del comportamiento de las fuerzas de largo alcance, que la teoría contiene partículas cargadas confinadas. Hay una diferencia cuantitativa para $\mu^2 > 0$ y $\mu^2 < 0$: para $\mu^2 > 0$ la intensidad de la fuerza de largo alcance es independiente de $\hbar$, mientras que para $\mu^2 < 0$ la intensidad de la fuerza de largo alcance es exponencialmente pequeña en $\hbar$, la masa del instanton.

Como estamos interesados en energías mas que en elementos de matriz S usaremos la continuación Euclidea de (32.1) que para $\mu^2 < 0$ puede escribirse

$$\mathcal{L}_E(x) = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) + (D_\mu \varphi(x))^\dagger (D_\mu \varphi(x)) + \frac{\lambda}{4} \left[\varphi^\dagger(x) \varphi(x) - a^2 \right]^2 \qquad (1)$$

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) \quad , \quad D_\mu \varphi(x) = \partial_\mu \varphi(x) - ie A_\mu(x) \varphi(x)$$

$$a^2 = \frac{2\mu^2}{\lambda}$$

Este Lagrangiano es invariante bajo transformaciones U(1) locales

$$\left.\begin{aligned} A_\mu(x) &\longrightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x) \\ \varphi(x) &\longrightarrow e^{ie\Lambda(x)}\,\varphi(x) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Nosotros deseamos calcular la energía mas baja de dos cargas externas situadas a una distancia r en un mundo descrito por las ecuaciones (32.1); Queremos saber como la energía $E(r)$ cambia con la distancia r. Para ello calcularemos la integral de camino euclidea

$$\int \mathcal{D}[A_\mu]\,\mathcal{D}[\varphi]\; e^{-\frac{1}{\hbar} S_E[A,\phi]} \tag{2}$$

insertando las fuentes en la acción. Como es usual solo esperamos poder calcular en el límite $\hbar \to 0$, cuando podemos calcular (2) encontrando los caminos que minimizan S_E y tomando fluctuaciones gaussianas. Si seguimos exactamente el camino anterior debemos enumerar los estados fundamentales clásicos de la teoría y calcular (2) para caminos que empiezan en $-T/2$ en un estado fundamental clásico y terminan en otro para $T/2$.; en particular tendremos que hallar caminos de acción mínimos con estas condiciones de contorno. No vamos a seguir este procedimiento sino que vamos a discutir primero los estados túnel antes que los estados de vacío por razones pedagógicas.

Volvamos a nuestro ejemplo mecánico cuántico del pozo doble de potencial y consideremos

$$I = \int \mathcal{D}[x]\; e^{-S_E[x]/\hbar} \tag{3}$$

donde sumaremos sobre todos los caminos sin especificar las condiciones fronteras y hagamos $T \to \infty$. También tomaremos $\hbar \to 0$ y buscaremos caminos de acción mínima. Empezaremos considerando caminos de acción mínima; de lo contrario $e^{-S_E/\hbar} = e^{-\infty/\hbar} = 0$. Para caminos de acción finita debemos tener que $x(t)$ tiende para $t \to \pm\infty$ a un camino de acción nula y por tanto $x(t) \to \pm a$. Entonces todos nuestros caminos empezaran en a o en $-a$ y terminaran en a o en $-a$ en cualquier orden y por tanto

$$\int_{\text{todos los caminos}} \mathcal{D}[x]\, e^{-S_E[x]/\hbar} = \left\{ \int_{x(-\infty)=a}^{x(+\infty)=a} + \int_{x(-\infty)=-a}^{x(+\infty)=-a} + \int_{x(-\infty)=-a}^{x(+\infty)=+a} + \int_{x(-\infty)=a}^{x(+\infty)=-a} \right\} \mathcal{D}[x]\, e^{-S_E[x]/\hbar} =$$

$$\equiv \left(\langle a| + \langle -a| \right) e^{-HT/\hbar} \left(|a\rangle + |-a\rangle \right)$$

que dará la energía conocida del estado fundamental. Podemos pues integrar sobre todos los caminos finitos, y entonces el principio de acción finita nos dará automáticamente las condiciones de contorno adecuadas

Consideremos

$$I = \int \mathcal{D}[A_\mu]\, \mathcal{D}[\varphi]\; e^{-\frac{1}{\hbar} S_E[A,\varphi]} \tag{1}$$

$$S_E[A,\varphi] = \int d^2x\; \mathcal{L}_E(x)$$

Tomaremos $T \to \infty$ de forma que la integral es sobre todos los campos y sobre todo el espacio-tiempo. Notar que $\mathcal{L}_E(x)$ es la suma de tres términos definidos positivos y para que $S_E < \infty$ debemos exigir que la integral de cada término sea finita. Esto implica que para $r \equiv (x^2 + t^2)^{1/2} \to \infty$

$$\varphi(r,\theta) \longrightarrow a\, g(\theta) \tag{2}$$

$$A_\mu(r,\theta) \longrightarrow -\frac{i}{e}\, g^{-1}(\theta)\, \partial_\mu g(\theta)$$

donde $g(\theta)$ es una fase pura

$$g(\theta) = e^{i\alpha(\theta)} \qquad 0 \le \theta \le 2\pi \tag{3}$$

Para clasificar estas configuraciones introduciremos el llamado número de "winding" definido como

$$\nu = \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta\; g(\theta)\, \frac{d\, g^{-1}(\theta)}{d\theta} \tag{4}$$

Veamos que tal número es entero.

$$\nu = -\frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta\; g^{-1}(\theta)\, \frac{d\, g(\theta)}{d\theta} = -\frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta\; \frac{d}{d\theta} \ln g(\theta) =$$

$$= -\frac{i}{2\pi} \left[\ln g(2\pi) - \ln g(0) \right] = -\frac{i}{2\pi} \left[i\alpha(2\pi) - i\alpha(0) \right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\alpha(2\pi) - \alpha(0) \right] \qquad \text{Q.E.D.}$$

El número de winding es una propiedad global de la configuración de los campos y da el número de veces que $g(\theta)$ recorre el círculo unidad cuando θ varía de $0 < 2\pi$. Caracteriza totalmente las clases de homotopía. Para un

número de winding ν , $g(\theta)$ es homotópico a

$$g_\nu(\theta) = e^{i\nu\theta} \tag{1}$$

Interesa a veces introducir una densidad relacionada al número de winding cuya integral sobre todo el espacio tiempo nos de ν. Teniendo en cuenta (35.2) se ve inmediatamente que

$$\nu = \frac{e}{2\pi} \oint dx_\mu \, A_\mu(x) \tag{2}$$

donde la integración se debe llevar a cabo a lo largo del círculo del infinito según el sentido positivo. Se tiene que $\epsilon_{\mu\nu} A_\nu$ es el vector A_μ girado $\pi/2$ y por tanto integrar A_μ a lo largo del círculo es lo mismo que integrar a lo largo de el $\hat{r}_\mu \epsilon_{\mu\nu} A_\nu$, donde $\hat{r}_\mu$ es el vector unidad radial

$$\nu = \frac{e}{2\pi} \lim_{r\to\infty} \int_0^{2\pi} d\theta \, r \, \hat{r}_\mu \, \epsilon_{\mu\nu} A_\nu \equiv \lim_{r\to\infty} \int_0^{2\pi} d\theta \, r \, \hat{r}_\mu \, G_\mu(x) \tag{3}$$

donde hemos definido una corriente

$$G_\mu(x) \equiv \frac{e}{2\pi} \epsilon_{\mu\nu} A_\nu(x) \tag{4}$$

Entonces aplicando a (3) el teorema de Gauss

$$\nu = \int d^2x \, \partial_\mu G_\mu(x) \tag{5}$$

Además

$$\partial_\mu G_\mu(x) = \frac{e}{4\pi} \epsilon_{\mu\nu} F_{\mu\nu}(x) \tag{6}$$

y por tanto

$$\nu = \frac{e}{4\pi} \int d^2x \, \epsilon_{\mu\nu} F_{\mu\nu}(x) \tag{7}$$

y la cantidad (6) se llama densidad de número de winding. De esta última expresión es evidente que ν es independiente del gauge.

Hemos visto que una configuración de campo de acción finita debe satisfacer las condiciones de contorno (35.2) y tener por tanto un número de winding ν bien definido. Dos campos de ν distinto no pueden deformarse continuamente el uno en el otro manteniendo (35.2) , es decir a través de campos de acción finita . Es pues evidente que cada clase de homotopía

tendrá sus propios caminos característicos de mínima acción que usaremos como puntos estacionarios para evaluar la integral de camino Euclídea. Como las pequeñas fluctuaciones gaussianas son deformaciones de acción finita del camino de acción mínima, poseerán necesariamente el mismo número de winding y no surgirán problemas de doble contaje.

Consideremos ahora las configuraciones de acción mínima con algo más de detalle. Demos nos cuenta que nuestro problema en 1+1 Euclídea es equivalente al de los vortices en 1+2 Minkowskiana y estacionaria. La densidad Lagrangiana es

$$\mathcal{L}_E(x) = \frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial_\mu A_\nu - \frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial_\nu A_\mu + \partial_\mu \varphi^+ \partial_\mu \varphi - ie\,\partial_\mu \varphi^+ \varphi A_\mu + ie\,\varphi^+ \partial_\mu \varphi A_\mu$$
$$+ e^2 \varphi^+ \varphi A_\mu A_\mu + \frac{\lambda}{4}(\varphi^+\varphi - a^2)^2 \qquad (1)$$

de donde

$$\partial_\nu F_{\nu\mu}(x) = ie\,[\varphi^+(x)\partial_\mu \varphi(x) - \varphi(x)\partial_\mu \varphi^+(x)] + 2e^2 \varphi^+(x)\varphi(x) A_\mu(x) \equiv j_\mu \qquad (2)$$

$$\partial_\mu \partial_\mu \varphi(x) - ie\,\varphi(x)\partial_\mu A_\mu(x) - 2ie\,A_\mu(x)\partial_\mu \varphi(x) - e^2 \varphi(x) A_\mu(x) A_\mu(x) = \frac{\lambda}{2}[\varphi^+(x)\varphi(x) - a^2]\varphi(x)$$

Las llamadas soluciones vortice corresponden al ansatz [H.B. NIELSEN y P. OLESEN Nucl. Phys. B 61, 45 (1973) y A.A. BELAVIN, A. POLYAKOV, A. SCHWARTZ y Y. TYUPKIN. Phys. Lett. 59B, 85 (1975)]

$$\vec{A} = (A_x, A_t) = \frac{1}{r} A(r)\,\hat{\theta} \qquad \varphi = f(r)\, e^{+im\theta}$$

$$x_1 \equiv x = r\cos\theta \qquad x_2 \equiv t = r\sin\theta \Rightarrow r = (x^2 + t^2)^{1/2}, \quad \hat{\theta} = (-\sin\theta, \cos\theta)$$

$$\partial_1 = \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \sin\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}, \qquad \partial_2 = \sin\theta \frac{\partial}{\partial r} + \cos\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$\partial_1 \varphi = \left[f' \cos\theta + im f \frac{1}{r}\sin\theta\right] e^{+im\theta}, \qquad \partial_2 \varphi = \left[f' \sin\theta + im f \frac{1}{r}\cos\theta\right] e^{+im\theta}$$

$$j_1 = e f^2(r) \frac{2}{r} \sin\theta\,(m - eA(r)), \qquad j_2 = -e f^2(r) \frac{2}{r}\cos\theta\,(m - eA(r))$$

$$F^{12} = \frac{1}{r} A'(r)$$

$$\partial_\mu \partial_\mu \phi = \left[f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) - \frac{m^2}{r^2} f(r)\right] e^{im\theta}$$

$$\partial_\mu A_\mu = 0 \qquad A_\mu \partial_\mu \varphi = \frac{im}{r^2} f(r) A(r) e^{im\theta}$$

de donde

$$A''(r) - \frac{1}{r} A'(r) + 2e^2 [n - e A(r)] f^2(r) = 0 \qquad (1)$$

$$f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) - \frac{[n - e A(r)]^2}{r^2} f^2(r) + \frac{1}{2} \lambda a^2 f(r) - \frac{\lambda}{2} f^3(r) = 0$$

No se conocen soluciones analíticas de estas ecuaciones pero se sabe algunas propiedades generales y se han estudiado mediante calculadoras [A.A. ABRIKOSOV Zh. Eksp. Teor. Fiz 32, 1442 (1957) Sov. Phys. JETP 5, 1174 (1957)] [Review article by A. FETTER y P. HOHENBERG en "Superconductivity" Ed. R.D. PARKS y J.R. SCHRIEFFER Benjamin N.Y. 1969]

Si $n=0$ una solución exacta es

$$\vec{A} = 0 \quad , \quad \varphi = a \qquad (2)$$

que es el vacío "naive". En general para $r \to \infty$ podemos escribir

$$f(r) = a\,(1 - h(r)) \qquad A(r) = \frac{n}{e} + B(r) \qquad (3)$$

y sustituyendo en (1) los términos dominantes son

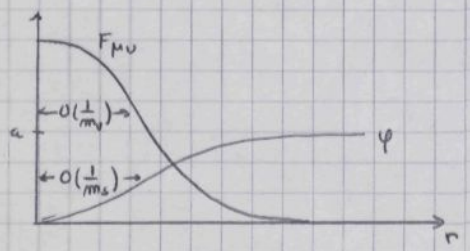
$$B''(r) - 2a^2 e^2 B(r) \simeq 0 \qquad h''(r) + \lambda a^2 h(r) \simeq 0$$

de donde

$$f(r) \xrightarrow[r\to\infty]{} a\left[1 + O\left(e^{-a\sqrt{\lambda}\, r}\right)\right]$$

$$A(r) \xrightarrow[r\to\infty]{} \frac{n}{e} + O\left(e^{-ae\sqrt{2}\, r}\right) \qquad (4)$$

Esto demuestra que el campo magnético difiere apreciablemente de cero solo a una distancia $\frac{1}{m_V} = \frac{1}{ae\sqrt{2}}$ del origen. Similarmente el campo φ tiene su valor asintótico a distancias $\frac{1}{m_S} = \frac{\sqrt{2}}{a\sqrt{\lambda}}$ del origen. La relación $K \equiv \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}e}$ es el llamado parámetro de Ginsburg - Landau.



Consideremos ahora una solución (A'_μ, φ') con número de winding ν' y otra (A''_μ, φ'') con número ν'', introduzcamos la llamada superposición de estas dos soluciones $(A'_\mu + A''_\mu, \frac{1}{a}\varphi'\varphi'')$ la cual tiene número de winding $\nu' + \nu''$. Si las dos primeras soluciones están muy separadas (esto es, si las regiones del espacio-tiempo en que la acción es no nula están muy separadas) entonces la superposición es una solución aproximada entendiéndose en el mismo sentido en que lo eran las multiinstantones

De todo esto se deduce

$\nu = 0$) La configuración de acción menor es ($A_\mu = 0$, $\varphi = a$) que el vacío naïve de la teoría. También podríamos tomar una configuración de número de winding $\nu = -n$ y superponerla con otra de $\nu = +n$. Sin embargo estas configuraciones tendrían acción mayor que el vacío que tiene densidad de acción nula por doquier. Sin embargo serán importantes en el cálculo de la integral de camino porque si bien su mayor acción las hace menos probables que el vacío (39.2), su entropía (el hecho que puedan estar en cualquier lugar del espacio-tiempo) compensa ampliamente.

$\nu = 1$) Este es el instantón (o antiinstantón). Como en el caso anterior existen multitud de otras configuraciones que consisten de un instantón mas un gas de instantones y antiinstantones con $\nu = 0$.

$\nu = N > 1$) Se pueden tener soluciones genuinas de $\nu = N$ o bien obtener $\nu = N$ mediante un gas de N instantones muy separados. Como la acción es $\propto (F_{\mu\nu})^2$ y además $F_{\mu\nu} \propto \nu$ se espera que la solución genuina tenga una acción $S_{EN} \sim N^2$, mientras que la superposición tendría $S_E \sim N$. Así pues para $\nu = N > 1$ la configuración de campo de acción menor se obtendría superponiendo N instantones. Mas aún haciendo esto se obtiene una enorme ganancia en entropía

$$\sim \frac{1}{N!} \left(\text{Volumen espacio-tiempo} \right)^N \qquad (1)$$

Todo esto nos dice que para calcular la integral de camino podemos olvidarnos de todas las configuraciones de acción mínima salvo del instantón: la contribución dominante a cualquier número de winding es el gas diluido de instantones y antiinstantones apropiado.

Para obtener el vacío cuántico, vamos primero a enumerar los estados fundamentales clásicos es decir las configuraciones de campo clásicas de energía nula. Para que la energía sea nula se debe cumplir

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x,t) &= a\, g(x,t) \qquad A_\mu(x,t) = -\frac{i}{e}\, g^{-1}(x,t)\, \partial_\mu g(x,t) \\ g(x,t) &= \text{una fase} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Fijemos ahora el gauge de forma que $A_t(x,t) = 0$ entonces

$$\varphi(x,t) = a\, e^{i\alpha(x)}, \qquad A_t(x,t) = 0, \qquad A_x(x,t) = \frac{1}{e}\frac{d\alpha(x)}{dx} \qquad (3)$$

El problema es ahora determinar cuántas configuraciones (3) son vacío de energía que genuinamente separados.

Este problema está relacionado con la elección del gauge. Si consideramos como campos independientes todas las posibles transformaciones de gauge de un campo dado entonces todas nuestras integrales de camino serían divergentes debido a la invariancia gauge de la acción y al volumen del grupo de gauge. El procedimiento usual es poner alguna condición sobre los campos que seleccione un conjunto discreto de campos de cada clase de campos que son repeticiones gauge de uno dado. Entonces nuestra condición $A_t = 0$ es parte de nuestro procedimiento de fijar el gauge; sin embargo en general necesitaremos condiciones extras. Todo esto nos dice que dada cualquier configuración de campos, deberemos incluir aquellas réplicas del mismo que no puedan ser obtenidas mediante una transformación de gauge continua. Así nuestros vacíos clásicos distintos son aquellos campos de la forma (29.3) tales que ningún miembro de $\{ g(x) \equiv \exp(i\alpha(x)) \}$ pueda ser unido a cualquier otro $\{ g'(x) \}$ mediante una familia de transformaciones que dependa de un parámetro

$$g(x;\beta) \;:\; g(x,1) = g(x) \quad , \quad g(x;0) = g'(x) \tag{1}$$

Vamos ahora a intentar identificar estos vacíos.

Una condición frontera sobre φ es que

$$\varphi(x) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} a \tag{2}$$

(volveremos a esto más adelante). Esto implica que

$$\begin{aligned} \alpha(\infty) &= 2m\pi \qquad m = \text{entero} \\ \alpha(\infty) - \alpha(-\infty) &= 2n\pi \qquad n \text{ entero} \end{aligned} \tag{3}$$

Como antes podemos decir que $\alpha(x)$ envuelve n veces el grupo gauge $U(1)$ cuando x varía sobre todo el espacio. El teorema que dos funciones $g(x)$ y $g'(x)$ no pueden conectarse mediante una familia continua de transformaciones $g(x,\beta)$ a menos que $m = m'$ y $n = n'$. Por otra parte cualquier par de funciones $g(x)$ y $g'(x)$ con idéntico número de winding n pueden ser conectadas mediante una transformación. De aquí que tengamos un número infinito de distintas configuraciones clásicas de energía nula cada una caracterizada por un entero n que puede tomar todos los valores de $-\infty$ a $+\infty$. Elijamos una para $g(x)$

$$g(x) = e^{i\alpha(x)} \qquad \alpha(-\infty) = 0 \qquad \alpha(\infty) = 2\pi \tag{4}$$

Entonces los distintos vacíos dados son

$$\varphi_n(x) = a\,[g(x)]^n \quad , \quad (A_n)_x = -\frac{i}{e}\,[g(x)]^{-n}\frac{d}{dx}[g(x)]^n \quad , \quad (A_n)_t = 0 \tag{1}$$

Antes de continuar justifiquemos (40.2). Concentremonos en $x \to +\infty$ y consideremos dos campos de energía cero para los que las fases tienen límites distintos

$$\alpha_1(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \qquad\qquad \alpha_2(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \alpha \ (\neq 2\pi n) \tag{2}$$

Supongamos que para $x > x_0$ se tiene $\alpha_1(x) = 0$ y $\alpha_2(x) = \alpha$. Probaremos que a pesar de que ambas configuraciones de energía cero son conectas, sin embargo no se comunican la una con la otra; la amplitud para que un estado evolucione al otro es nula. Esto es como el pozo doble con una barrera infinita; hay dos estados fundamentales pero nunca se comunican y por tanto toda la física tiene lugar en uno de los pozos; hay dos espacios de estados idénticos que no se comunican. Vamos a probar que los campos de energía cero

$$\varphi = a\,e^{i\alpha_1(x)} \quad , \quad A_x = \frac{1}{e}\frac{d\alpha_1(x)}{dx} \quad , \quad A_t = 0$$
$$\varphi' = a\,e^{i\alpha_2(x)} \quad , \quad A'_x = \frac{1}{e}\frac{d\alpha_2(x)}{dt} \quad , \quad A'_t = 0 \tag{3}$$

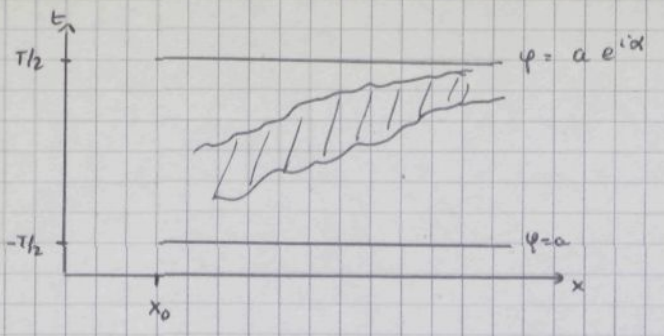
están separados por una barrera de energía infinita y para ello debemos encontrar una solución de las ecuaciones del movimiento que empiece en (A_μ, φ) en $t = -T/2$ y que termine en (A'_μ, φ') en $t = +T/2$ y demostrar que la energía de tal campo es infinita. No vamos a escribir tal solución pero vamos a hacer plausible que su energía es infinita. Sabemos que

$$\varphi = a \qquad A_x = 0 \qquad A_t = 0 \qquad x > x_0$$
$$\varphi' = a\,e^{i\alpha} \qquad A'_x = 0 \qquad A'_t = 0 \qquad x > x_0 \tag{4}$$

Como $A_t = 0$ en nuestro gauge una pieza de la energía es

$$\int dx\ |\partial_t \varphi|^2 < \text{Energía total} \tag{5}$$

y vamos a ver que esta es infinita. Como φ debe cambiar en $a(e^{i\alpha} - 1)$ en el intervalo T para todo $x > x_0$, podemos imaginar una región típica del espacio tiempo donde $\partial_t \varphi$ no finita como la región sombreada

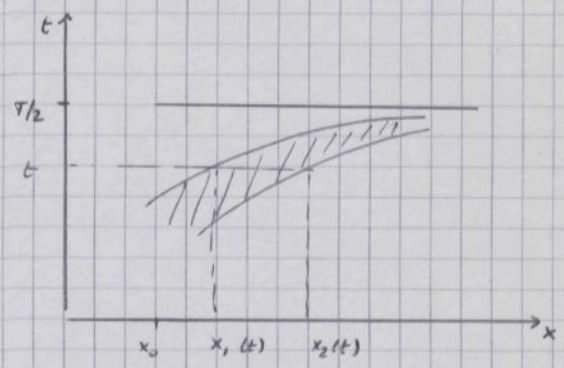


Típicamente para cada t la región sombreada se extiende desde $x_1(t)$ a $x_2(t)$ cuando $x_2(t) \to \infty$ esperamos en general

$$x_2(t) - x_1(t) \to \infty$$

y por tanto

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \; |\partial_t \varphi|^2 \xrightarrow[x_2(t)\to\infty]{} \infty \qquad (1)$$



Por supuesto se puede imaginar una situación tal que $x_2(t) - x_1(t) \not\to \infty$ para $x_2(t) \to \infty$. Debería asemejarse a la figura adjunta. Para que esto ocurra es necesario que ambas fronteras de la región sombreada se aproximen a sus asíntotas al menos tan rapidamente como e^{-cx}. En este caso para cualquier x fijo el intervalo de tiempo en el que $|\partial_t \varphi| \neq 0$ es $O(e^{-cx})$ y por tanto $\partial_t \varphi \sim O(e^{+cx})$ y de aquí (1) continua siendo cierto. Debemos por tanto considerar solo aquellos campos que tienen las mismas condiciones de contorno en ∞. Los campos con otras condiciones de contorno son replicas redundantes del mundo físico.

Hemos encontrado que el modelo de Higgs abeliano en 1+1 dimensiones tiene un infinito discreto de estados dáricos de energía nula (41.1). La transformación de gauge es una simetría de la teoría de forma que nuestros estados físicos deben ser superposiciones de los estados $(\vec{A}_m, \varphi_m)$ con propiedades de transformación bien definidas bajo el operador G que ejecuta $g(x)$. Esto es si $|\vec{A}, \varphi\rangle$ es un estado físico entonces

$$G\,|\vec{A}, \varphi\rangle = e^{i\theta}\,|\vec{A}, \varphi\rangle \qquad (2)$$

Así pues la superposición apropiada de (41.1) es

$$|\theta\rangle = \sum_n e^{in\theta}\,|\vec{A}_m, \varphi_n\rangle \qquad (3)$$

Claramente

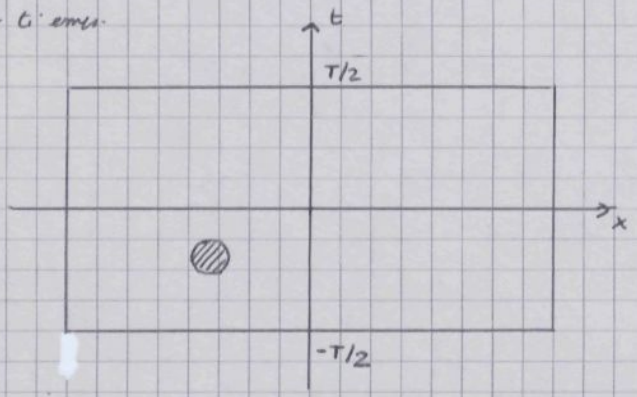
$$\langle\theta|\theta'\rangle = 0 \qquad \theta \neq \theta' \qquad (4)$$

Por tanto el espacio de Hilbert de los estados se rompe en sectores distintos ortogonales entre sí caracterizables por el valor del ángulo θ. Cualquiera de

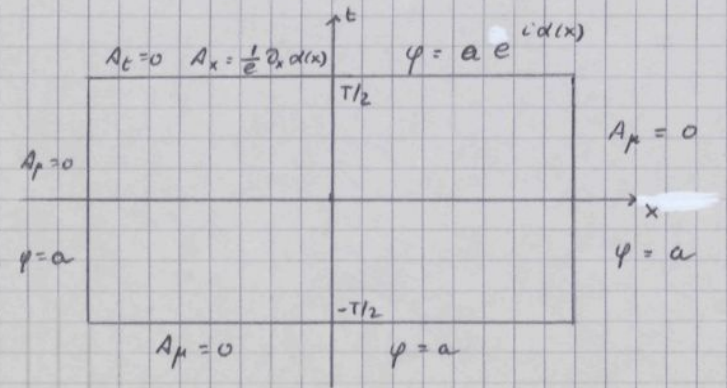
estos sectores poseerá un estado de menor energía, el vacío θ, $|\theta\rangle_0$ que puede ser obtenido aproximadamente formando el estado $|\widetilde{\vec{A}_m, \varphi_m}\rangle$ que consiste de las oscilaciones de punto cero alrededor de $(\vec{A}_m, \varphi_m)$ y formando una suma análoga a (§2.3). Esto es por supuesto una aproximación mejor y mejor cuando $\hbar \to 0$ y todas las fluctuaciones se hacen más pequeñas. El mundo existe en un sector $\theta = \theta_0$ (que θ_0 no lo sabemos) y siempre permanecerá en él mientras las interacciones sean invariantes gauge.

Por supuesto formar los estados Bloch sólo tiene sentido si existe efecto túnel entre los estados fundamentales clásicos. Vamos a ver que esto existe y que es precisamente el instantón el responsable del efecto túnel.

Consideremos el instantón $(\vec{A}_I, \varphi_I)$. Cuando el campo φ_I hace el vínculo del espacio tiempo en el infinito envuelve alrededor de $U(1)$ cero veces. Como estamos interesados en estados fijos en el tiempo interpolados por el instantón, es conveniente reemplazar el vínculo del infinito por una caja en el espacio-tiempo.



La área sombreada indica la región donde está localizado el instantón. En las fronteras del cuadrado el campo es el dado en (35.2). Como estamos trabajando en el gauge $A_t = 0$ la fase $g(\theta) \equiv g(x)$ pues debe ser independiente de t. La fase es pues constante en los lados verticales. Podemos realizar una transformación de gauge que deje constante la fase en el lado inferior e igual a cero. En este caso el campo del instantón es



$\alpha(-\infty) = 0 \qquad \alpha(+\infty) = 2\pi$

Por lo tanto el instantón interpola entre el vacío clásico de $\nu = 0$ en $t = -T/2$

y el vacío clásico de $\nu = 1$ en $t = T/2$. Además tiene acción finita y por tanto hay efecto túnel entre los distintos vacíos clásicos (44.1). Por supuesto podríamos aplicar el mismo argumento a cualquier configuración de acción finita con $\nu = 1$, y por tanto todas ellas contribuyen al efecto túnel. En el límite semiclásico saturaríamos la integral de camino

$$\langle \vec{A}_1 \varphi_1 | e^{-HT/\hbar} | \vec{A}_0 \varphi_0 \rangle = \int_{\vec{A},\varphi|_{t=-T/2} = \vec{A}_0,\varphi_0}^{\vec{A},\varphi|_{t=T/2} = \vec{A}_1,\varphi_1} \mathcal{D}[\vec{A}]\,\mathcal{D}[\varphi]\; e^{-S_E/\hbar} \tag{1}$$

mediante caminos de acción mínima (el gas diluido de instantones con número total de winding igual a uno) y las fluctuaciones gaussianas alrededor de estos caminos.

Mediante una transformación de gauge podemos siempre desplazar el winding a distintas partes de la frontera. Así por ejemplo el campo del instantón podría transformarse mediante el gauge $g(x,t) = [g(x)]^m$ de forma que

$$\begin{aligned}
&\alpha(-\infty, t) = 0 \qquad\qquad -T/2 < t < +T/2 \\
&\alpha(+\infty, +T/2) - \alpha(-\infty, T/2) = 2(m+1)\pi \\
&\alpha(+\infty, t) = 2(m+1)\pi \qquad\qquad -T/2 < t < +T/2 \\
&\alpha(-\infty, -T/2) - \alpha(+\infty, -T/2) = -2m\pi
\end{aligned} \tag{2}$$

El winding total a lo largo de la frontera es aun la unidad. Pero ahora a $t = -T/2$ tenemos (A_m, φ_m) y a $t = +T/2$ tenemos (A_{m+1}, φ_{m+1}), y por tanto el instantón interpola entre dos vacíos clásicos cualesquiera que difieran en una unidad de ν. Esto es lo que era de esperar debido a la invariancia gauge. Así en general

$$\langle \vec{A}_m \varphi_m | e^{-\frac{HT}{\hbar}} | \vec{A}_n \varphi_n \rangle = \int_{\vec{A},\varphi|_{t=-T/2} = \vec{A}_n \varphi_n}^{\vec{A},\varphi|_{t=T/2} = \vec{A}_m \varphi_m} \mathcal{D}[\vec{A}]\,\mathcal{D}[\varphi]\; e^{-S_E/\hbar} \tag{3}$$

donde saturaremos la integral de camino mediante un gas diluido de instantones de número de winding $\nu = m - n$.

Resumiendo lo realizado hasta aquí obtenemos:

i) Los campos clásicos de energía cero (vacíos clásicos) son

$$\varphi_n = a\,[g(x)]^n \qquad A_{\mu n} = -\frac{i}{e}\,[g(x)]^{-n}\,\partial_\mu\,[g(x)]^n \tag{1}$$

$$g(x) = e^{i\alpha(x)}, \quad \alpha(-\infty) = 0, \quad \alpha(+\infty) = 2\pi \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Los otros campos de energía cero o bien son réplicas gauge de los anteriores que son eliminables en el procedimiento de fijar el gauge; o son reproducciones gauge que tienen condiciones frontera distintas y que no se comunican con los (1) en la teoría cuántica

ii) Construyamos paquetes gaussianos $\Psi_n(A_\mu, \varphi)$ centrados alrededor de cada configuración $(\vec{A}_n\ \varphi_n)$: $|\Psi_n(A_\mu, \phi)|^2$ cae rapidamente al aumentar $A_\mu - A_{\mu n}$ o $\varphi - \varphi_n$.

iii) La teoría es simetrica bajo transformaciones de gauge. Hay dos clases

a) pequeñas : están dentro de la misma clase de homotopía (i.e. tienen número de winding igual a cero) y son tenidas en cuenta al fijar el gauge

b) grandes : cambian el número de winding y ellas misma tienen por tanto número de winding no nulo. Consideremos el operador G que cambia ν en una unidad $G\,|\vec{A}_n\ \varphi_n\rangle = |\vec{A}_{n+1}\ \varphi_{n+1}\rangle$. Como la teoría es invariante bajo G cualquier probabilidad física debe ser invariante bajo G. Sea $\Psi(\vec{A}, \varphi)$ un estado físico, entonces $G\,\Psi(\vec{A}, \varphi\rangle = e^{i\theta}\,\Psi(\vec{A}, \varphi)$ donde θ es algún angulo. Podemos caracterizar cualquier estado físico por este θ, ya que la simetría nos dice que no hay transiciones entre θ distintos. Toda sector de estados caracterizados por un θ tiene su propio vacío, el vacío θ. En el limite $\hbar \to 0$ el vacío θ será la superposición de los $\Psi_n(\vec{A}, \varphi)$ que cumplen $G\Psi_n = e^{i\theta}\,\Psi_n$:

$$\Psi_\theta(\vec{A}, \varphi) = \sum_n e^{in\theta}\,\Psi_n(\vec{A}, \varphi) \tag{2}$$

iv) Tenemos soluciones de energía finita, el instantón, que interpola entre vacíos clásicos que forma que existe efecto túnel

v) Los $\Psi_\theta(\vec{A}, \varphi)$ no son degenerados : por tanto el vacío de la electrodinámica escalar en la fase de Higgs es un estado de Bloch.

Vamos ahora a intentar calcular los desdoblamientos energéticos de los estados $\Psi_\theta(\vec{A}, \varphi)$ en la aproximación de gas diluido de instantones. Queremos

$$E_\theta = -\lim_{T\to\infty} \frac{\hbar}{T} \ln \langle\theta|\, e^{-HT/\hbar}\,|\theta\rangle \tag{3}$$

donde $|\theta\rangle$ es un estado representativo que definimos como

$$|\theta\rangle = \sum_n e^{in\theta} |\vec{A}_n, \varphi_n\rangle \equiv \sum_n e^{in\theta} |n\rangle \tag{1}$$

Tenemos

$$\langle\theta| e^{-HT/\hbar} |\theta\rangle = \sum_n \sum_{n'} e^{i(n-n')\theta} \langle n'| e^{-HT/\hbar} |n\rangle =$$

$$= \sum_n \sum_{n'} e^{i(n-n')\theta} \int_{\vec{A},\varphi|_{-T/2} = \vec{A}_n \varphi_n}^{\vec{A},\varphi|_{T/2} = \vec{A}_{n'} \varphi_{n'}} [\mathcal{D}\vec{A}][\mathcal{D}\varphi] \, e^{-S_E/\hbar} = \int [\mathcal{D}\vec{A}][\mathcal{D}\varphi] \, e^{-\frac{1}{\hbar} S_E + i\nu\theta} \tag{2}$$

donde $\nu (\equiv n - n')$ donde la última integral se extiende a todos los campos sin condiciones de contorno. Entonces tomar valores esperados en el vacío θ es equivalente a hacer la integral de camino sobre todos los campos, sin ninguna condición frontera, con la acción cambiada

$$S_E \longrightarrow S_E - i\hbar\nu\theta \tag{3}$$

donde ν es el número de winding de una configuración del campo

$$\nu = \int d^3x \, \partial_\mu G_\mu(x) = \frac{e}{4\pi} \int d^3x \, \epsilon_{\mu\nu} F_{\mu\nu}(x) \tag{4}$$

o equivalentemente

$$\mathcal{L}_E(x) \longrightarrow \mathcal{L}_E(x) - i \frac{e\hbar\nu}{4\pi} \epsilon_{\mu\nu} F_{\mu\nu}(x) \tag{5}$$

El último término es invariante gauge y nos podemos preguntar porque no fue considerado como candidato a formar parte de la teoría inicial. En realidad este término es $\partial_\mu G_\mu$ y las divergencias son normalmente no consideradas. Esto es un procedimiento peligroso: si la teoría tiene campos de estructura topológica no trivial son precisamente estos términos de superficie los que reflejan tal estructura.

Vemos pues que (2) es una forma alternativa de introducir el parámetro θ en la teoría que no depende de las sutiles cuestiones concernientes a qué aplicas gauge de $\vec{A}, \varphi$ deben ser retenidas y cuales deben ser eliminadas por el procedimiento de fijar el gauge: daño dimos simplemente el término $i\nu\theta$ y encontramos que la física depende de θ. Tenemos además que

$$E_\theta = -\lim_{T\to\infty} \frac{\hbar}{T} \ln \int [\mathcal{D}\vec{A}][\mathcal{D}\varphi] \, e^{-\frac{1}{\hbar} S_E} e^{i\nu\theta} \tag{6}$$

que calcularemos en la aproximación de gas diluido de instantones.

Consideremos una configuración típica de n instantones y $\bar{n}$ anti-instantones muy separados entre sí. La integral sobre las posiciones en el espacio y en el tiempo da un factor

$$\frac{1}{n!}\,\frac{1}{\bar{n}!}\int d^2x_1 \cdots d^2x_n\, d^2x_1 \cdots d^2x_{\bar{n}} = \frac{(VT)^{n+\bar{n}}}{n!\,\bar{n}!} \tag{1}$$

Si S_I es la acción de un instantón al reponer el gas diluido obtenemos de la acción estacionaria un factor

$$e^{-\frac{1}{\hbar} S_I (n+\bar{n})} \tag{2}$$

No falta ahora considerar las fluctuaciones gaussianas. Como en el caso del potencial mucha parte del espacio tiempo es el vacío: siendo las regiones de densidad de acción no nula pocas y lejanas. Muchas de las fluctuaciones gaussianas serán alrededor del vacío y darán una energía de punto cero para el oscilador armónico sin instantones comparado al estado fundamental clásico. Esta parte es irrelevante para nuestros propósitos ya que no depende de θ. Quedan sin embargo las fluctuaciones gaussianas alrededor de los instantones que dan origen a un factor K (análogo a (17.3)) por instantón. Entonces la parte de interés para nosotros de la integral que aparece en (46.6) es

$$\sum_n \sum_{\bar{n}} \frac{1}{n!\,\bar{n}!} (V.T)^{\bar{n}+\bar{n}}\, e^{-\frac{1}{\hbar}(n+\bar{n}) S_I}\, K^{n+\bar{n}}\, e^{i\theta(n-\bar{n})} =$$

$$= \exp\left\{ 2VTK \cos\theta\, e^{-\frac{1}{\hbar} S_I} \right\} \tag{3}$$

y por tanto

$$\frac{E_0}{V} = -2\hbar K \cos\theta\, e^{-\frac{1}{\hbar} S_I} \tag{4}$$

donde el término dominante independiente de θ ha sido omitido.

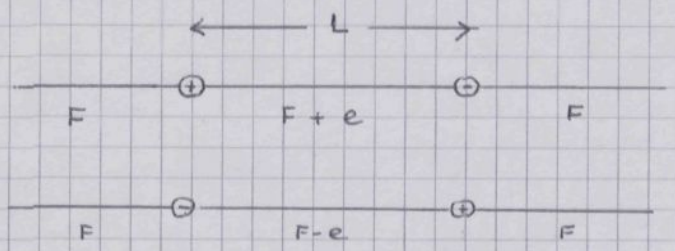
El instantón es un objeto en el espacio-tiempo Euclídeo pero no tiene existencia real en un espacio-tiempo Minkowskiano, pero como en el caso del potencial tiene una manifestación directa en las funciones de onda Minkowskianas. Sea $\Psi[A_\mu(x), \varphi(x)]$ la función de ondas del estado fundamental: si hacemos una medida de los campos la cantidad Ψ da la amplitud de probabilidad de hallar los campos en $(A_\mu(x), \varphi(x))$. $\Psi[A_\mu, \varphi]$ está centrada en los vacíos clásicos $(\vec{A}_m, \varphi_m)$ y es apreciablemente grande solo para $(\vec{A}, \varphi)$ que son fluctuaciones pequeñas alrededor de

$(\vec{A}_m, \varphi_m)$. Sin embargo Ψ no disminuirá a partir de un $(\vec{A}_m, \varphi_m)$ por un igual en todas las direcciones. La función de ondas al alejarnos de $(\vec{A}_m, \varphi_m)$ quedará localizada en dos tubos uno que conduce a $(\vec{A}_{m+1}, \varphi_{m+1})$ y otro a $(\vec{A}_{m-1}, \varphi_{m-1})$ bosónicamente.

Volvamos ahora a nuestro modelo para $\mu^2 > 0$ es decir a la fase normal no de Higgs. El vacío clásico obvio es $A_\mu = \varphi = 0$. Ahora superpongamos un campo eléctrico constante a este vacío naïve

$$F_{01}(x) = F \qquad (1)$$

Podemos pensar este campo como generado por una carga q en $x = -\infty$ y otra carga $-q$ a $x = +\infty$. Este estado es el de menor energía con el campo de fondo F. Vayamos ahora a la teoría cuántica y preguntemonos si tal campo de fondo es estable bajo fluctuaciones cuánticas. Consideremos para ello un par de mesones cargados que se materializan a partir del vacío:



donde hemos indicado el valor del campo electromagnético en las distintas zonas del espacio. El incremento neto de energía sobre el vacío sin pares es

$$\Delta E = \frac{1}{2} \int dx \left[F_{01}^2 - F^2 \right] = \frac{1}{2} L \left[(F \pm e)^2 - F^2 \right] \qquad (2)$$

Para $|F| < e/2$ vemos que $\Delta E \geq 0$ y por lo tanto la producción de pares cuesta energía (cuando incluimos el costo de la masa entonces $\Delta E > 0$). En particular eliminar este campo de fondo cuesta una cantidad infinita de energía. Por tanto en el vacío cuántico $\langle F_{01} \rangle = F$. Si $|F| > e/2$ entonces la producción de pares es favorecida energéticamente hasta que $|F|$ es reducido por debajo de $e/2$. Por tanto la física es una función periódica de F con periodo e, o equivalentemente de la variable angular $\theta = 2\pi F/e$, con periodo 2π. Y tenemos una serie de vacíos cuánticos que podemos representar por $|\theta\rangle$ para los que

$$\langle \theta | F_{01} | \theta \rangle = F = \frac{e}{2\pi} \theta \qquad (3)$$

al menos para pequeños F y θ donde los efectos no lineales del Lagrangiano no son de mucha importancia. Al hacer F y θ pequeños podemos esperar que la no linealidad

veza : en realidad la producción de pares induce una periodicidad en θ de forma que el miembro de la derecha es algo así como $\sin\theta$ en lugar de θ. Vemos pues que también en la fase normal aparece un vacío θ, si bien este no tiene nada que ver con la topología. Notar que en $1+3$ dimensiones la situación es distinta pues es fácil dar cuenta que la creación de pares es siempre favorecida energéticamente para eliminar un campo de fondo constante : por tanto un vacío clásico con un campo de fondo no nulo es inestable y la cuantificación tiende a eliminarlo de forma que el vacío cuántico no tiene traza de tal campo.

2) Qué sucede en la fase de Higgs $\mu^2<0$? Supongamos que insertamos nuestras cargas $\pm q$ en $x=\pm\infty$. Como ahora el fotón tiene masa el campo generado por las cargas caerá exponencialmente con la distancia y por tanto estará enteramente localizado en $x=\pm\infty$. Por tanto no podemos esperar generar los vacíos θ por este mecanismo en la teoría clásica y no sabemos cual es el procedimiento clásico adecuado. Vamos a calcular $\langle\theta|F_{01}|\theta\rangle$. Recordemos que

$$\nu=\frac{e}{4\pi}\int\epsilon_{\mu\nu}F_{\mu\nu}\,d^2x=\frac{e}{2\pi}\int d^2x\,F_{01} \tag{1}$$

En el gauge $A_t=0$ $\quad F_{01}=\partial_0A_1=\partial_tA_x$. Entonces usando la invariancia traslacional de $\langle\theta|F_{01}(x)|\theta\rangle$ obtenemos

$$\langle\theta|F_{01}|\theta\rangle=\frac{2\pi}{eVT}\langle\theta|\nu|\theta\rangle \tag{2}$$

Ahora bien

$$\langle\theta|\nu|\theta\rangle=\frac{\int[\mathcal{D}\vec{A}][\mathcal{D}\varphi]\;e^{-\frac{1}{\hbar}S_E}\;e^{i\nu\theta}}{\int[\mathcal{D}\vec{A}][\mathcal{D}\varphi]\;e^{-\frac{1}{\hbar}S_E}\;e^{i\nu\theta}}=$$

$$=\frac{1}{i}\frac{d}{d\theta}\ln\int[\mathcal{D}\vec{A}][\mathcal{D}\varphi]\;e^{-\frac{1}{\hbar}S_E+i\nu\theta}$$

$$=-\frac{1}{i}\frac{d}{d\theta}\left(TE_0/\hbar\right)=+i\,2KTV\sin\theta\;e^{-\frac{1}{\hbar}S_I} \tag{3}$$

y usando (2)

$$\langle\theta|F_{01}|\theta\rangle=i\frac{4\pi}{e}K\sin\theta\;e^{-\frac{1}{\hbar}S_I} \tag{5}$$

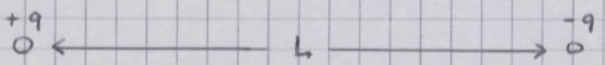
En (1) $F_{\mu\nu}$ es la intensidad de campo Euclídea y lo mismo es cierto en (5). Continuando al espacio de Minkowski $F_{01}\to -iF_{01}$ y por tanto en el espacio-tiempo

real

$$\langle \theta | F_0 | \theta \rangle = -\frac{4\pi}{e} K \operatorname{sen}\theta \, e^{-\frac{1}{\hbar} S_I} \qquad (1)$$

Vemos pues que el vacío de Higgs también posee un campo eléctrico de fondo con dependencia periódica en θ como en el caso de no-Higgs. Sin embargo aquí el mecanismo usa los instantones. Entonces todos los efectos son no perturbativos a diferencia de lo que sucedía en el sector normal. Tenemos pues que otra forma de buscar los vacíos θ es como estados fundamentales con distintos campos de fondo. Esto no debe ser ninguna sorpresa. En el caso del potencial periódico el vacío θ es la transformada de Fourier de los estados p y por tanto se caracterizan por un momento que es la variable conjugada a la posición. En este caso comenzamos por estados propios del campo, y el campo eléctrico es conjugado al campo de gauge y por tanto no es sorprendente que los vacíos θ puedan ser convenientemente caracterizados por ciertos valores del campo eléctrico. Así hemos descubierto una rica estructura no perturbativa de la electrodinámica escalar en el sector de Higgs. Esto sugiere que la imagen naïve perturbativa de esta fase y en particular en relación al problema del confinamiento de cargas externas debe ser reexaminada a esta nueva luz.

Introduzcamos dos cargas externas muy separadas en el vacío θ



El vacío sufre un cambio energético (si es necesario $\epsilon \equiv E/L$)

$$\Delta_\theta(L) = \bar{E}_\theta(L) - \bar{E}_\theta \qquad (1)$$

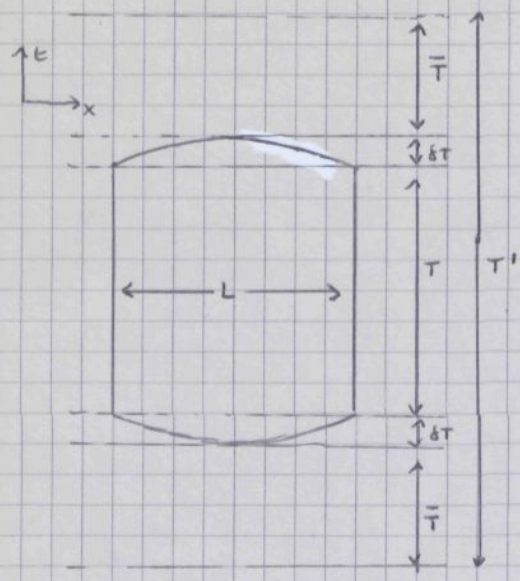
donde $\epsilon_\theta(L)$ es la densidad de energía cuando hay las cargas presentes. En teoría de perturbaciones la fuerza de Coulomb es exponencial

$$\Delta_\theta(L) \xrightarrow[L\to\infty]{} \text{cte} + O\left(e^{-m_v L}\right) \qquad (2)$$

Vamos a ver que el efecto del instantones es $\Delta_\theta(L) \sim L$ y por tanto las cargas quedan confinadas. Notemos que las cargas de los mantos, incluso perturbativamente, están confinadas en el mecanismo de Higgs y no las discutiremos.

Vamos a insertar las cargas de la siguiente forma: Durante un tiempo $\overline{T}$ desde el tiempo inicial no hay fuentes. En el tiempo $\overline{T}$ el par de fuentes es

separado adiabáticamente a una distancia L. Este proceso dura δT. Ahora las fuentes son estáticas durante un tiempo T' y entonces se las vuelve adiabáticamente en un tiempo δT y después se deja transcurrir un tiempo $\bar{T}$ con fuentes. Consideremos ahora



$$\langle \theta | e^{-\frac{i}{\hbar} H_J T'} | \theta \rangle \qquad (1)$$

donde el término fuente apropiado $J^\mu(x) A_\mu(x)$ ha sido añadido al Hamiltoniano. Insertemos un conjunto completo de estados

$$\langle \theta | e^{-\frac{i}{\hbar} H_J T'} | \theta \rangle = \sum_{z, z'} \langle \theta | e^{-\frac{i}{\hbar} H_J \bar{T}} | \theta \rangle$$

$$\langle \theta | e^{-\frac{i}{\hbar} H_J \delta T} | z \rangle \langle z | e^{-\frac{i}{\hbar} H_J T} | z' \rangle \langle z' | e^{-\frac{i}{\hbar} H_J \delta T} | \theta \rangle \langle \theta | e^{-\frac{i}{\hbar} H_J \bar{T}} | \theta \rangle \qquad (2)$$

donde en el primero y último paso se ha tenido en cuenta que $|\theta\rangle$ es un estado propio de H_J sin fuentes. El estado $|z\rangle$ es un estado con las fuentes distribuidas en L. Entonces

$$\langle \theta | e^{-\frac{i}{\hbar} H_J T'} | \theta \rangle = e^{-\frac{2}{\hbar} E_\theta \bar{T}} \sum_{z z'} \langle \theta | e^{-\frac{i}{\hbar} H_J \delta T} | z \rangle \langle z | e^{-\frac{i}{\hbar} H_J T} | z' \rangle \langle z' | e^{-\frac{i}{\hbar} H_J \delta T} | \theta \rangle \qquad (3)$$

Dejemos que $\bar{T}$ y T tiendan hacia infinito, L fijo de forma que δT es fijo. Entonces

$$\langle z | e^{-\frac{i}{\hbar} H_J T} | z \rangle = |\langle z | z_\theta \rangle|^2 e^{-\frac{i}{\hbar} E_\theta(L) T}$$

donde $E_\theta(L)$ es la energía del estado de menor energía $|z_\theta\rangle$ con las fuentes presentes. Tomando logaritmos

$$\ln \langle \theta | e^{-\frac{i}{\hbar} H_J T'} | \theta \rangle = -\frac{2}{\hbar} E_\theta \bar{T} - \frac{i}{\hbar} E_\theta(L) T + \text{term. independientes de } T \text{ y } \bar{T} \qquad (4)$$

De aquí

$$\Delta_\theta(L) = -\frac{\hbar}{T} \left\{ \ln \langle \theta | e^{-\frac{i}{\hbar} H_J T'} | \theta \rangle + \frac{i}{\hbar} E_\theta (2\bar{T} + T) \right\} \qquad (5)$$

Como $2\bar{T} + T = T'$ tenemos

$$\Delta_\theta(L) = -\frac{\hbar}{T} \left\{ \ln \langle \theta | e^{-\frac{i}{\hbar} H_J T'} | \theta \rangle - \ln \langle \theta | e^{-\frac{i}{\hbar} H T'} | \theta \rangle \right\}$$

$$\Delta_\theta(L) = -\lim_{T' \gg T \to \infty} \frac{\hbar}{T} \ln \frac{\langle \theta | e^{-\frac{i}{\hbar} H_J T'} | \theta \rangle}{\langle \theta | e^{-\frac{i}{\hbar} H T'} | \theta \rangle} \qquad (6)$$

y usando las integrales de camino

$$\Delta_\theta(L) = -\lim_{T\to\infty} \frac{\hbar}{T} \ln \frac{\int [\mathcal{D}\vec{A}][\mathcal{D}\varphi]\, W\, e^{-\frac{1}{\hbar}S_E} e^{i\nu\theta}}{\int [\mathcal{D}\vec{A}][\mathcal{D}\varphi]\, e^{-\frac{1}{\hbar}S_E} e^{i\nu\theta}} \tag{4}$$

donde las integrales están extendidas a todo el espacio y W es el factor que contiene la parte de la fuente en la acción. Si insertamos un término fuente en la acción de Minkowski llevamos a cabo la sustitución

$$iS \longrightarrow iS + i\int d^2x\, j_\mu(x)\, A^\mu(x) \tag{2}$$

donde

$$j_\mu(x) = q\int_{-\infty}^{+\infty} dx_\mu(\tau)\, \delta[x - x(\tau)] \tag{3}$$

para una carga q recorriendo un camino (en este caso un lazo) $x(\tau)$, siendo τ el tiempo propio. Así

$$i\int d^2x\, j_\mu(x)\, A^\mu(x) = iq\int dx_\mu(\tau)\, A^\mu[x(\tau)] = iq\oint dx_\mu\, A^\mu(x) \tag{5}$$

tomando la última integral alrededor del loop. Al continuar al plano complejo

$$W = \exp\left\{-\frac{1}{\hbar} iq\oint dx_\mu\, A_\mu(x)\right\} \tag{5}$$

Por tanto la cantidad a evaluar es (1) con W dada por el lazo de Wilson (5).

Hemos derivado (1) para una fuente que es un c-número. Por supuesto estas fuentes no son de interés físico directo; la pregunta que realmente deseamos contestar es si las cargas cuantificadas de la teoría están confinadas. Wilson [K. WILSON Phys. Rev. D10, 2445 (1974)] ha sugerido que un criterio para confinamiento de los quarks en Q.C.D. puede ser obtenido calculando

$$\langle\theta|W|\theta\rangle = \frac{\int [\mathcal{D}A]\, W\, e^{-\frac{1}{\hbar}S_E} e^{i\nu\theta}}{\int [\mathcal{D}A]\, e^{-\frac{1}{\hbar}S_E} e^{i\nu\theta}} \tag{6}$$

donde W es el operador lazo de Wilson (5) con algunos factores de color y spin y donde la integración es en la teoría gauge pura no abeliana, sin grados de libertad para los quarks. El potencial entre los quarks viene dado como en (51.6) por

$$V(r) = - \lim_{T\to\infty} \frac{\hbar}{T} \ln \langle 0 | W | 0 \rangle \qquad (1)$$

Si $V(r)$ crece con r hay confinamiento de los quarks.

Podemos dar una prueba sucinta de esto para quarks muy pesados. El punto esencial es que cuanto más pesados sean los quarks mas difícil es que se produzcan pares a partir del vacío. Consideremos una teoría abeliana con cargas pesadas. El propagador para las partículas libres q y $\bar{q}$ es

$$\int \mathcal{D}[\vec{x}(t)]\, e^{\frac{i}{\hbar}\int dt\, \frac{m\dot{\vec{x}}^2}{2}} \int \mathcal{D}[y(t)]\, e^{\frac{i}{\hbar}\int dt\, \frac{m\dot{\vec{y}}^2}{2}}$$

Si imponemos un campo abeliano externo $\vec{A}$ entonces el propagador es

$$P = \int \mathcal{D}[\vec{x}(t)]\, e^{\frac{i}{\hbar}\int dt\, \left[\frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 + Q A^0 - Q\vec{A}\dot{\vec{x}}\right]} \cdot$$

$$\int \mathcal{D}[\vec{y}(t)]\, e^{\frac{i}{\hbar}\int dt\, \left[\frac{1}{2}m\dot{\vec{y}}^2 - Q A^0 + Q\vec{A}\dot{\vec{y}}\right]} \qquad (1)$$

Ahora bien para el caso de campos muy pesados no relativistas no hay producción de pares y por tanto el propagador para tal par es

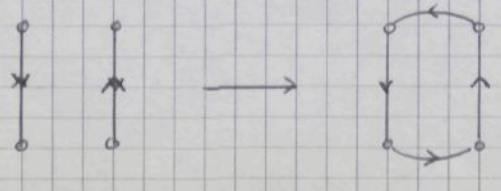
$$\langle P \rangle = \frac{\int [\mathcal{D}A]\, e^{\frac{i}{\hbar}S}\, P}{\int [\mathcal{D}A]\, e^{\frac{i}{\hbar}S}}$$

Notemos que si $\dot{\vec{x}} = \dot{\vec{y}} = 0$ obtenemos la interacción coulombiana. Invertimos el orden de las integraciones

$$\langle P \rangle = \int [\mathcal{D}\vec{x}(t)][\mathcal{D}\vec{y}(t)]\, e^{\frac{i}{\hbar}\int dt\, \frac{m}{2}(\dot{\vec{x}}^2 + \dot{\vec{y}}^2)} \left\langle e^{i\frac{Q}{\hbar}\int dx_\mu A^\mu} \right\rangle \qquad (2)$$

El último factor posee una integral sobre las líneas de propagación de ambos quarks. Este factor no es gauge invariante lo cual complica mucho el cálculo. Si el propagador se extiende a un tiempo T muy largo y entonces dobra consideramos $O(1/T)$ podemos reemplazar

$$\int dx_\mu A^\mu \longrightarrow \oint dx_\mu A^\mu$$



que es lo que queremos gauge. Notemos además que como los quarks son no relativistas y muy pesados las coordenadas $\vec{x}(t)$, $\vec{y}(t)$ son esencialmente rectas y por tanto $\vec{x}(t) - \vec{y}(t)$ es independiente de t y por tanto

$$\langle e^{i\frac{q}{\hbar}\oint dx_\mu A_\mu^M} \rangle = f(\vec{x} - \vec{y}) \tag{1}$$

con lo cual (2) es análogo a

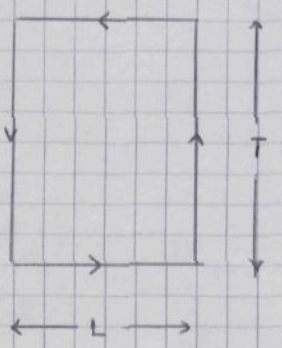
$$\langle P \rangle = \int [\mathcal{D}\vec{x}(t)][\mathcal{D}\vec{y}(t)]\, e^{\frac{i}{\hbar}\int dt \left[\frac{1}{2}m(\dot{\vec{x}}^2 + \dot{\vec{y}}^2) - V(\vec{x}-\vec{y})\right]} \tag{2}$$

y por tanto

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\int dt\, V(\vec{x}-\vec{y})} \sim \langle e^{i\frac{q}{\hbar}\oint dx_\mu A^M(x)} \rangle \tag{3}$$

lo cual nos da (53.1). Para quarks ligeros debemos considerar fluctuaciones del loop. Sin embargo normalmente se trabaja en la hipótesis que la masa del quark no afecta el confinamiento. Así pues el cálculo que estamos realizando para fuentes estáticas es equivalente a insertar un mesón cargado muy pesado en un modelo de Higgs abeliano y nuevo si los quarks están confinados.

Deseamos pues calcular (52.1) en el límite semiclásico $\hbar \to 0$ donde los caminos dominantes son los del gas diluido de instantones. Consideremos un loop de Wilson de dimensiones L, T con $T \gg L$, inmerso en un rectángulo de dimensiones L_0, T_0. El denominador de (52.1) daría de acuerdo con (46.6) una contribución $\exp(-E_0 T_0 L_0/\hbar)$. El numerador puede dividirse en dos partes: una sobre la región del espacio-tiempo interior e incluyendo el lazo y la otra sobre la región exterior al lazo. Esto es posible pues S como ν son integrales sobre el espacio tiempo



$$S = S_{ex} + S_{in}\,, \quad \nu = \nu_{ex} + \nu_{in} \tag{5}$$

La parte exterior no contiene el loop de Wilson y por tanto su contribución es $\exp(-E_0(T_0 L_0 - TL)/\hbar)$. Entonces

$$\nu_{in} = \frac{e}{2\pi}\oint dx_\mu A^r(x) \tag{5}$$

donde suponemos que no hay instantones sobre el lazo. Entonces

$$W = e^{-\frac{2\pi i q}{e}\nu_{in}} \tag{6}$$

y sustituyendo en nuestra integral

$$\int_{\text{inv.}} [\mathcal{D}A][\mathcal{D}\varphi]\, e^{-\frac{1}{\hbar} S_{\text{inv}}}\, e^{+i\nu_{\text{inv}}\left(\theta - \frac{2\pi q}{e}\right)} \propto$$

$$\propto \exp\left\{ -\frac{LT}{\hbar}\, \epsilon_\theta - \frac{2\pi q}{e\hbar} \right\}$$

y por tanto

$$\Delta_\theta(L) = -\lim_{T\to\infty} \frac{\hbar}{T} \left\{ -\frac{1}{\hbar}\epsilon(\theta)(T_0 L_0 - TL) + \frac{1}{\hbar}\epsilon(\theta) T_0 L_0 - \frac{1}{\hbar} LT\, \epsilon\left(\theta - \frac{2\pi q}{e}\right) \right\}$$

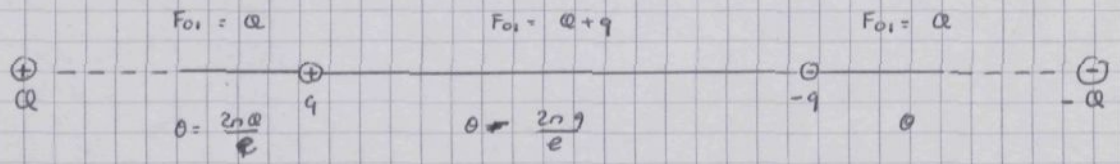
$$= L\left[\epsilon\left(\theta - \frac{2\pi q}{e\hbar}\right) - \epsilon(\theta)\right] = \left[E\left(\theta - \frac{2\pi q}{e}\right) - E(\theta) \right]$$

es decir

$$\Delta_\theta(L) = L\left[\cos\theta - \cos\left(\theta - \frac{2\pi q}{e}\right)\right] 2K\hbar\, e^{-\frac{1}{\hbar} S_I} \qquad (1)$$

por tanto $\Delta_\theta(L)$ aumenta linealmente con la distancia y por tanto tendremos confinamiento. Los instantones han restaurado una fuerza de largo alcance en la teoría pero una intensidad pequeña no perturbativa $\exp(-S_I/\hbar)$.

Podemos interpretar fácilmente este resultado



Supongamos que inicialmente tenemos un vacío θ correspondiente a un campo F (una carga $+Q$ en $x=+\infty$). Insertamos cargas $\pm q$ en este vacío, F_{01} entre ellas aumenta en q unidades y por tanto entre ellas hay un vacío θ donde θ ha cambiado por $2\pi q/e$. Entonces (1) se deduce inmediatamente. Vemos la periodicidad en q/e: quanta de carga e se producirán en pares a partir del vacío para reducir la carga de la fuente hasta que sea energéticamente favorecido hacerlo. En particular, si q/e = entero, las cargas $\pm q$ serán completamente apantalladas por los quanta de la teoría; esta es la razón por la que vemos en (1) que no hay un potencial entre las cargas externas. Por tanto tanto si q/e es entero o no, no podemos hallar cargas aisladas en la teoría.

Lo que ha sucedido físicamente es lo siguiente: en la fase de Higgs tenemos una rotura espontánea de la invariancia gauge; los vacíos n no son invariantes gauge. En cada vacío n $|\vec{A}_n\, \varphi_n\rangle$ la fase del campo escalar tiene una longitud

de correlación infinita. Sin embargo un instantón cambiara la fase en todos los puntos a la derecha en π relativa a los de los puntos de la izquierda; por tanto los instantones desordenan esta correlación de fase de larga distancia. El estado físico, el vacio θ, contiene un gas diluido de instantones que restaura la invariancia gauge global, y en efecto también la local sobre una escala de tamaños comparable a la que caracteriza la separación media entre instantones. Por tanto la teoría contendra particulas sin masa. Sin embargo en escalas de menor tamaño el vacio contendra no instantones en promedio y por tanto no es invariante gauge y por tanto habra también un boson gauge con masa.

III. Lecciones para la Q.C.D.

Vamos a considerar una teoria de Yang-Mills Euclidea basada en el grupo $SU(2)$ y en cuatro dimensiones. Entonces (incluimos un factor g dentro de A_μ)

$$\mathcal{L}(x) = + \frac{1}{4g^2} F^a_{\mu\nu}(x) F^a_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{2g^2} \mathrm{Tr}\left[F_{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) \right] \tag{1}$$

$$F_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{2} \tau_a F^a_{\mu\nu}(x)$$

y

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) + i \left[A_\mu(x), A_\nu(x) \right] \tag{2}$$

Esta teoria es invariante bajo las transformaciones de gauge

$$A_\mu(x) \longrightarrow S(x) A_\mu(x) S^{-1}(x) - i S(x) \partial_\mu S^{-1}(x) \tag{3}$$

$$S(x) = \exp\left\{ \frac{i}{2} \vec{\tau} \cdot \vec{\theta}(\vec{x}) \right\}$$

La acción Euclidea es

$$S_E = \frac{1}{g^2} \int d^4x \, \frac{1}{2} \mathrm{Tr}\left[F_{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) \right] \tag{4}$$

Vamos a considerar ahora los vacios clásicos de la teoria. Estos deben ser configuraciones de energia cero y por tanto deben cumplir $F_{\mu\nu}(x) = 0$ y por lo tanto deben ser replicas gauge de $A_\mu = 0$, esto es

$$A_\mu(x) = - i S(x) \partial_\mu S^{-1}(x) \tag{5}$$

Debemos ahora, como antes, cuales de estas replicas son distintas despues de fijado el gauge. Procederemos como antes a clasificar topologicamente los campos (5)

Los vacíos pueden tomarse estáticos $S = S(\vec{x})$. Entonces $S(\vec{x})$ es un mapping $R^3 \longrightarrow SU(2)$. Se puede argumentar que $S(\vec{x}) \xrightarrow[|\vec{x}|\to\infty]{} I$ en todas las direcciones (De la misma forma que en el modelo de Higgs argumentamos que $\varphi(-\infty) = 2n\pi$). Esto compactifica R^3 a una esfera tridimensional S^3. Como $SU(2)$ es también homeomorfico a S^3, $S(\vec{x})$ define un mapping

$$S : S^3 \longrightarrow S^3 \tag{1}$$

y podemos clasificar $S(x)$ a través del número de winding n, que nos da cuantas veces $S(\vec{x})$ cubre $SU(2)$ cuando $\vec{x}$ recorre el tiespacio. Entonces se prueba que al fijar el gauge nos queda un vacío clásico por cada número de winding. Si incluimos algunas fluctuaciones cuánticas alrededor de cada solución de energía cero obtenemos un vacío cuántico aproximado $|n\rangle$. Ahora la invariancia gauge nos dice que cualquier estado físico debe ser invariante bajo transformaciones de fase que cambien $n \to n+1 \ \forall n$, de forma que el verdadero vacío son como antes los estados de Bloch, el vacío θ

$$|\theta\rangle \underset{\hbar\to 0}{=} \sum_n e^{in\theta} |n\rangle \tag{2}$$

Por supuesto solo tiene sentido formar las superposiciones (2) si hay efecto túnel Consideremos $\langle 1| e^{-HT} |0\rangle$. Buscamos configuraciones de campo $A_\mu(\vec{x}, t)$ que interpolen entre $A_\mu(\vec{x}, t) = 0$ a $t = -T/2$ y $A_\mu(\vec{x}) = -i S_1(\vec{x}) \partial_\mu S^{-1}(\vec{x})$ en $t = T/2$ donde $S(\vec{x})$ envuelve una vez $SU(2)$ cuando $\vec{x}$ traza R^3 y las configuraciones de acción mínima de este tipo son los instantones $A_{\mu I}(\vec{x}; t)$, que tendrán una acción S_I / g^2. Todo se calculará en la aproximación del gas diluido de instantones de forma que

$$E(\theta) \sim e^{-S_I/g^2} \tag{3}$$

Notemos que en este caso en que hay una única constante de acoplamiento $\hbar$ y g^2 aparecerán siempre en la combinación $\hbar g^2$.

Demostremos cuenta que hemos obtenido esta estructura en una teoría gauge pura y esto es posible solo en 4 dimensiones y no en dos. Como en el modelo anterior podemos introducir la dependencia en θ sustituyendo $S \to S + i\nu\theta$ y en este caso

$$\nu = \frac{1}{16\pi^2} \int d^4x \ \mathrm{Tr}\left[{}^*F_{\mu\nu}(x) \, F_{\mu\nu}(x) \right]$$

Este método demuestra que la teoría tiene una dependencia en θ en general. Bajo supuesto independiente de la forma de introducir θ, los cálculos solo son realizables en la aproximación de gas diluido de instantones.

Hasta aquí todo ha sido análogo al caso anterior pero hay una diferencia crucial ahora y caso de dimensiones y la falta de una escala intrínseca de masas tiene consecuencias importantes:

i) El tamaño del instantón, ρ, no queda fijado; puede tomar cualquier valor de 0 a ∞

ii) La constante de acoplamiento no es realmente un parámetro libre; podemos hacerlo más pequeño para una cierta escala de masas, pero esto solo redefine la escala de masas de la teoría. Puesto que la teoría posee libertad asintótica g^2 varía de 0 a ∞. g^2 dependerá de la escala y por tanto los efectos de los instantones serán $\propto \exp(-S_I / g^2(\rho))$. Esto significa que solo podemos aproximarnos al límite semiclásico probando escalas más pequeñas en tamaño $g^2(\rho) \xrightarrow[\rho \to 0]{} 0$. Inversamente no hay límite semiclásico para problemas de la estructura de los hadrones, ya que en la escala a la que los quarks y los gluones forman los hadrones necesariamente el acoplamiento es $O(1)$. Para el confinamiento estamos interesados en distancias grandes y el problema es aun más difícil.

iii) Las interacciones entre instantones ya no decaen exponencialmente con la distancia (lo cual requeriría una escala de masas) sino solo como potencias; consecuentemente aun si nos abstuviéramos a usar la aproximación del gas diluido de instantones, todas las correcciones se hacen más importantes.

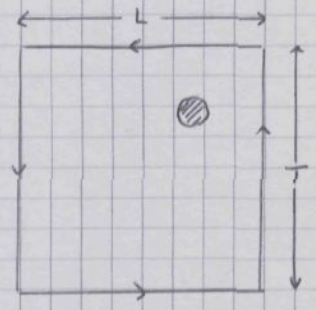
Así pues todo intento de calcular las implicaciones de los instantones en el problema del confinamiento deben resolver este problema: a priori todos los instantones cuyo tamaño sea igual o menor que el loop de Wilson son importantes (instantones mayores que sean esencialmente constante en la escala del loop no afectarán su valor), pero solo para instantones pequeños podemos justificar la aproximación de gas diluido. Una forma de "resolver" este problema es la siguiente. Obviamente solo puede hablar de instantones solo cuando no se superponen, i.e. la fracción del espacio-tiempo ocupada por los instantones es menor que la unidad. En particular supongamos que integramos sobre instantones de tamaño $0 \leq \rho \leq \rho_c$; Sea $f(\rho_c)$ la fracción del espacio-tiempo ocupada por estos instantones. Al imponer

$$f(\rho_c) < 1 \qquad (1)$$

tenemos un límite en ρ_c. Instantones de tamaño mayor implicarían configuraciones con superposiciones para las que nuestro procedimiento de cálculo es una pura ficción matemática. Por tanto si mantenemos un gas diluido debemos contar $\int_0 d\rho / \rho$ de alguna forma. Por supuesto el criterio no es muy preciso. Si Elegimos ρ_c de forma que $f(\rho_c) = 1$ o $f(\rho_c) = 1/10$? Cualquier número que calculemos dependerá de la elección de ρ_c y por tanto no será muy preciso. La cuestión del confinamiento sin embargo debería ser independiente de la elección precisa de ρ_c. Por tanto veamos las consecuencias de cara al confinamiento de un gas diluido de instantones con un corte en algún ρ_c.

Volvamos por un momento al modelo anterior y la cantidad de interés es (52.1) que puede escribirse

$$E(L) = -\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \left\langle e^{+i\frac{q}{g}\oint dx_\mu A_\mu(x)} \right\rangle \tag{1}$$



Si hay un instantón dentro del loop de Wilson al recorrer el loop obtenemos un factor

$$e^{2\pi i \frac{q}{g}(C\,L\,T)}$$

donde $C \sim K e^{-S_I/g^2}$, pasando (LT) del lado de que el instantón produce el mismo efecto cualquiera que sea su posición en el interior del loop. Si este fuera del loop da una contribución nula. Para n instantones y $\bar n$ antiinstantones obtenemos

$$e^{2\pi i (n-\bar n)\frac{q}{g}} \frac{(CLT)^{n+\bar n}}{n!\,\bar n!} \tag{2}$$

y por tanto

$$\left\langle e^{+i\frac{q}{g}\oint A_\mu dx_\mu} \right\rangle \sim \frac{\sum_{n\bar n} e^{2\pi i (n-\bar n)\frac{q}{g}} \frac{(CLT)^{n+\bar n}}{n!\,\bar n!}}{\sum_{n\bar n} \frac{(CLT)^{n+\bar n}}{n!\,n!}} =$$

$$= e^{-CLT} e^{-CLT} \exp\left(CLT\, e^{2\pi i \frac{q}{g}}\right) \exp\left(CLT\, e^{-2\pi i \frac{q}{g}}\right) =$$

$$= \exp\left\{-2CLT + 2CLT \cos 2\pi \frac{q}{g}\right\} = \exp\left\{-2CLT\left(1-\cos 2\pi\frac{q}{g}\right)\right\}$$

$$E(L) \sim 2CL\left(1-\cos 2\pi \frac{q}{g}\right) \tag{3}$$

Podemos interpretar esto de la forma siguiente: Puesto que el loop encierra una región del espacio - tiempo, la fase cambiante de un instantón interior necesariamente juega un papel a través del loop, desordenando los valores de las fases relativas sobre los distintos puntos del loop. Cualquier número de instantones interiores tendría independientemente tal efecto desordenador en el loop, adquiriendo una fase global por cada instantón. Los instantones son dispuestos arbitrariamente sobre un volumen LT y por tanto el efecto total de las interferencias de fase es que $\langle e^{i\frac{q}{g}\oint A_\mu dx_\mu} \rangle$ cae exponencialmente con LT y el potencial aumenta linealmente con L. Notemos algo importante es que el instantón ejerza el mismo efecto independientemente del punto de LT en que se encuentre. En efecto suponemos que el instantón afectara el loop solo si se encontrara a una distancia δ de él. Entonces deberíamos reemplazar

$$LT \longrightarrow 2\delta(L+T)$$

y por tanto

$$E(L) \sim \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\, 2c\, 2\delta(L+T)\left(1-\cos 2\pi \frac{q}{g}\right) \sim cte$$

y no habría confinamiento.

Volvamos a la Q.C.D. Tenemos como antes un loop de Wilson y un instantón. ¿Está el instantón en el interior del loop? En cuatro dimensiones el loop de Wilson no encierra una región del espacio - tiempo; la fase variante del instantón no influye necesariamente a lo largo del loop. En efecto es siempre posible elegir un gauge tal que la fase variante está en un cono fuera del plano del loop y el instantón no desordena el loop y no da ningún factor de fase comparable a (59.2). Vemos pues que los instantones no confinan en Q.C.D. Estas afirmaciones son independiente de cualquier valor particular de g_c. Es claro que la única forma de salir del impase sería si los instantones del tamaño del loop fueran los causantes del confinamiento. Sin embargo es plausible que tales instantones solo existan en nuestro formalismo matemático, en realidad las configuraciones no son de la forma de instantones apropiables en esta escala de tamaños.

Debemos concluir que en cuatro dimensiones los instantones no confinan. Sin embargo esto no significa que los instantones no jueguen un papel en la estructura de los hadrones. Ver C. G. CALLAN, R. DASHEN y D. J. GROSS Phys. Rev. 17D, 2717 (1978)

¿ Si los instantones no confinan, cuál es la solución? Consideremos nuestro criterio de confinamiento

$$\langle e^{i\frac{q}{\hbar}\oint A_\mu dx_\mu} \rangle \sim e^{-\text{Area del loop}} \qquad (1)$$

Si los quarks no se confinan entonces el potencial entre ellos es constante y su término

$$\langle e^{i\frac{q}{\hbar}\oint A_\mu dx_\mu} \rangle \sim e^{-\text{cte } T} \sim e^{-\text{perímetro del loop}} \qquad (2)$$

Así pues para tener confinamiento debemos lograr que el valor esperado que aparece en (1) decaiga tan rapidamente como sea posible con L, es decir hacerlo tan pequeño como sea posible para L grandes. Como esta cantidad es una fase, cuanto más fluctuantes sean las configuraciones de campo sobre las que promediemos mas pequeña se hará el miembro de la derecha de (1). Para obtener confinamiento no bastan con los instantones sino que debemos hallar otras configuraciones de campo que nos den mas fluctuaciones sobre el loop. En efecto cuantas más fluctuaciones identifiquemos mas pequeño será el valor del perado deseado. Sin embargo esto será cierto únicamente si las fluctuaciones no son correlacionadas. Y este es el problema: si identificamos un conjunto de fluctuaciones que nos dan confinamiento sera muy difícil probar que no hay fluctuaciones correlacionadas que hemos perdido y que deshacían el confinamiento. Con los instantones al menos tenemos el límite $\hbar \to 0$ (o $g \to 0$) en el que son ciertamente las fluctuaciones dominantes. Sin embargo cuando empecemos a buscar fluctuaciones fuera de la región de acoplamiento débil será difícil demostrar su dominancia.

El ejemplo de dimensión 1+1 sugiere que la forma de tener una ley tipo (1) es tener el vacío lleno de "objetos" tales que cuando uno de estos objetos cortó el plano encerrado por el loop queda "encerrado" por el loop y produce una diferencia de fase finita a lo largo del loop. Un objeto unidimensional como el instantón es obviamente no encerrado en el loop de Wilson. Supongamos que el vacío es un condensado de lazos de algún flujo, de todas las formas posibles, y que un tal loop es dual del loop de Wilson en el sentido que si los loops se entrelazan entonces la fase del loop de Wilson queda multiplicada por (-1), mientras que si no es así no producen ningún efecto. Entonces para un loop que se entrelaza obtenemos $(-1)\,(c'LT)$, para dos $(-1)^2\,(c'LT)^2/2!$ y para n $(-1)^n\,(c'LT)^n/n!$ sumando sobre n

$$\langle e^{i\frac{q}{\hbar}\oint dx_\mu A_\mu} \rangle \sim e^{-E(L)T} \sim e^{-c'LT} \qquad (3)$$

y por tanto hay confinamiento. Los loops que no se entrelazan se cancelarán en el numerador y denominador de $\langle\ \rangle$. Esto es todo muy esquemático. Tales loops duales que desordenan el loop de Wilson pueden ser construídos y este tipo de ideas nos permiten entender como puede tener lugar el confinamiento en Q.C.D [G 't HOOFT Nucl. Phys. B138, 1 (1978)], aunque mucho no se ha demostrado que se obtenga realmente confinamiento.

En lo dicho hasta aquí no hemos usado totalmente holonomía. Siempre hemos empezado con la observación de que las únicas configuraciones de campo relevantes son las de acción finita, puesto que $\exp[-(S=\infty)] = 0$. Esto nos ha permitido ver que las configuraciones relevantes deben ir a una transformación de gauge del vacío naïve en cualquier dirección hacia el infinito y esto nos ha conducido a los instantones como las configuraciones de acción mínima donde tales transformaciones de gauge son no triviales. Entonces vimos que en el límite semiclásico debe

$$\exp\left(-\frac{1}{\hbar} S_I\right) \ll \text{tamaño instantón} \left(\sim \frac{1}{M_S}, \frac{1}{M_V}\right) \qquad (1)$$

podíamos representar una configuración típica del campo como conteniendo en promedio un instantón o antiinstantón cada $\exp(+S_I/\hbar)$ unidades de volumen. (Por supuesto hay un determinante multiplicando todas estas exponenciales; en general no lo escribiremos explícitamente). Sin embargo observemos ahora que tal configuración típica de campo tiene una acción infinita, ya que tiene un número infinito de instantones y antiinstantones, y además la configuración ciertamente no va hacia una transformación de gauge del vacío en el infinito: cuando nos acercamos a infinito siempre encontramos instantones o antiinstantones a intervalos regulares de $O(\exp S_I/\hbar)$ y por tanto no hay un límite suave. Esto contradice nuestra hipótesis inicial de donde provienen los instantones; claramente la situación exige una clarificación.

Veremos que todo es autoconsistente; al mismo tiempo aprenderemos más acerca de configuraciones de acción infinita y porqué y cuando la aproximación semiclásica es válida. Mucho de lo que presentaremos es muy especulativo pero así entenderemos algunas preguntas interesantes y sus posibles contestaciones.

Como hemos hecho notar la configuración media del campo tiene acción infinita. Una gran fluctuación de la acción S_I, tal como un instantón, tiene un gran factor de supresión $\exp(-S_I/\hbar)$, pero como el volumen disponible del espacio-tiempo es infinito (aun para un intervalo finito $[-T/2, T/2]$)

y como está gran fluctuación está localizada en el espacio-tiempo, de forma que se obtienen contribuciones aditivas localizadas a distintas posiciones en el espacio-tiempo, es claro solo en términos de probabilidades que encontraremos en promedio una fluctuación de este tipo en cualquier región del espacio tiempo del tamaño

$$\sim \exp\left(S_I/\hbar\right) \times \text{tamaño de la fluctuación} \tag{1}$$

y por tanto un número infinito en todo el espacio tiempo y por tanto la acción total es $S = \infty \times S_I = \infty$. Vemos que lo que es realmente relevante al decidir la contribución de alguna configuración de campo no es solo la acción sino también el número de formas distintas de que una configuración de campo de este tipo contribuye a la integral de camino, esto es la entropía de la configuración. Esto es como en mecánica estadística donde el peso relevante de una configuración no viene dado por su energía E, sino por su energía libre $F = E - TS$ donde la entropía S es el logaritmo del número de veces que esta configuración contribuye a la función de partición, y la temperatura T juega el papel que aquí juega $\hbar$. Es decir, para un tipo de configuración I la contribución a la integral de camino es

$$\sim (\text{número de tales configuraciones} \equiv N_I)\, e^{-S_I/\hbar} \sim \exp\left\{-\frac{1}{\hbar}\left[S_I - \hbar \ln N_I\right]\right\} \tag{2}$$

Por ejemplo para la configuración de un instantón obtenemos una configuración distinta trasladando el instantón en el espacio-tiempo una distancia mayor que su tamaño, de forma que

$$N_I = \text{volumen espacio-tiempo} \;/\; O\left(\tfrac{1}{M_S} \text{ o } \tfrac{1}{M_V}\right) \tag{3}$$

Vemos de (2) que aun cuando $S_I = \infty$, la acción libre $S_I - \hbar \ln N_I$ puede ser finita y por tanto la configuración de acción infinita contribuirá. Un ejemplo de la matemática del proceso (después discutiremos la física) es el siguiente. Supongamos que el volumen del espacio-tiempo es inicialmente finito y es R^2. Supongamos que tenemos una configuración de campo con acción $S_0 = a \ln R$ tal que $S_0 \to \infty$ para $R \to \infty$. Supongamos además que obtenemos una configuración distinta trasladando una configuración en una cantidad finita, de forma que $N_0 \simeq R^2$. Entonces la contribución a la integral de camino para $R \to \infty$ es

$$\lim_{R\to\infty} \exp\left\{-\frac{1}{\hbar}\left[a \ln R - 2\hbar \ln R\right]\right\} = \begin{cases} 0 & \hbar < a/2 \\ \neq 0 & \hbar \geq a/2 \end{cases} \tag{4}$$

(Por supuesto en la práctica trasladamos las regiones de $\hbar$ en regiones de valores de la constante de acoplamiento). Es característico de tales fluctuación supergrandes que para $\hbar \to 0$ están congeladas; para que aparezcan la constante de acoplamiento debe sobrepasar un valor. Así pues en el límite semiclásico no contribuyen.

Un segundo ejemplo es el gas de instantones. Aquí una configuración típica tiene n instantones y $\bar{n}$ antiinstantones con $n = aR^2$, $\bar{n} = bR^2$ de forma que la acción total es

$$S = (a+b) R^2 S_I \tag{1}$$

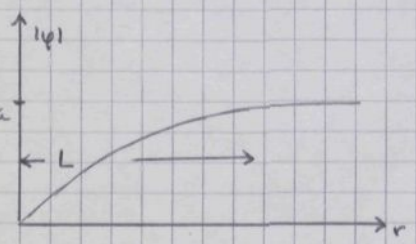
Por otra parte el número de tales configuraciones es

$$N = \frac{(R^2)^{n+\bar{n}}}{n!\,\bar{n}!} \sim \frac{(R^2)^{(a+b)R^2}}{(aR^2)!\,(bR^2)!} \tag{2}$$

Así la contribución a la integral de camino es $\lim_{R\to\infty} \exp\left(-\frac{1}{\hbar}\left[S - \hbar \ln N\right]\right)$. Se ve fácilmente que esta alcanza su máxima contribución para valores no nulos de a y b que son $O(e^{-S_I/\hbar})$. (El cálculo realista necesita incluir los factores que provienen de las fluctuaciones gaussianas así como también dividir R^2 en (2) por el tamaño del instantón).

Veamos ahora qué implicaciones tiene todo esto para nuestra definición y aplicación de los conceptos de instantón. Empecemos categorizando las fluctuaciones posibles en dos tipos: grandes y pequeñas. Las fluctuaciones pequeñas son las de punto cero y las fluctuaciones perturbativas que son de tamaño $O(\hbar)$. De forma que en el límite semiclásico son muy pequeñas comparadas con el valor esperado en el vacío de φ. Diremos que una fluctuación es grande si φ llega a ser ~ 0 en algún punto (o $A \sim 0$). Por tanto un instantón es típicamente una fluctuación grande.

Consideremos una fluctuación típica grande: supongamos que $\varphi \to 0$ en algún punto mientras que $A_\mu \sim O(\hbar)$ por doquier. Como estamos en 2 dimensiones la acción cinética es (con $\langle \varphi^2 \rangle = a^2$)



$$\int |\partial_\mu \varphi|^2 \sim \int_0^L dr \left(\frac{a}{L}\right)^2 \simeq \frac{1}{2} a^2 \tag{3}$$

independientemente de la extensión de L. Por otra parte la energía potencial es

$$\int (\varphi^2 - a^2)^2 \sim a^2 L^2 \tag{4}$$

Así pues todas fluctuaciones grandes tienden a estar muy localizadas: esto al mismo tiempo que minimiza la acción hace máxima la entropía. Un instantón difiere de esto en que el winding del campo fuerza a $A_\mu(x)$ a sufrir también una fluctuación grande; esto fuerza al instantón a tener una extensión finita $O(1/M_S, 1/M_W)$ que es un de los parámetros adimensionados de la teoría.

Las fluctuaciones grandes aparecerán de dos tipos; aquellas con carácter topológico y las que no lo tienen. Las últimas serán solo las colas finales de las fluctuaciones perturbativas, no serán mínimos de la acción y no darán nada nuevo en física. Las primeras, puesto que hacen jugar distintos campos no solo localmente sino sobre todo el espacio-tiempo, pueden darnos física interesante tal como el confinamiento. Así pues las fluctuaciones grandes que deben ser singularizadas son las topológicas.

Para acoplamiento pequeños (límite semiclásico) la acción grande de una fluctuación grande debe venir compensada por una entropía grande correspondiente, que se origina en las traslaciones espacio-temporales. De aquí que el gas de estas fluctuaciones grandes se haga cada vez más diluido y las fluctuaciones grandes de menor extensión son las más probables, ya que ellas maximizan la entropía. Entonces en el límite semiclásico solo los instantones, que son los objetos topológicos de menor extensión, sobreviven. Por ejemplo alguna clase de loop vacío con una línea de ceros a lo largo de su núcleo tendría una acción $S \sim a^2$. Longitud. y ocuparía un volumen mayor y tendría una entropía menor.

Estos argumentos demuestran que cuando $\hbar \to 0$ el vacío cuántico consiste del campo de vacío clásico en el que están superpuestas pequeñas fluctuaciones perturbativas y muy raramente grandes fluctuaciones. Las fluctuaciones grandes tenderán a tener una extensión pequeña y en cualquier caso estarán separadas las unas de las otras por grandes regiones del espacio-tiempo donde el vacío no tendría fluctuaciones grandes. En resumen

$$\text{vacío} \xrightarrow[\hbar \to 0]{} \text{campo vacío clásico} + \text{pequeñas fluctuaciones } O(\hbar) + \text{grandes fluctuaciones separadas en media } O(e^{-a^2/\hbar}).$$

Ahora que tenemos una idea general del vacío cuántico semiclásico, podemos replantear la pregunta de cual es el papel de los instantones. Consideremos un loop encerrando una área dada y dejemos que el loop no intersecione ninguna fluctuación grande. Esto es siempre posible pues ya hemos visto que las fluctuaciones grandes están muy localizadas y separadas por grandes distancias. Entonces el campo φ en este loop puede expresarse como

$$\varphi = a\, e^{i f(s)} + O(\hbar) \text{ fluctuaciones}$$

donde s es alguna coordenada a lo largo del loop. Hay una única contestación entera a la pregunta de cuántas veces $f(s)$ recorre $U(1)$ cuando s recorre el loop. Lo mismo es cierto para $\oint dx_\mu A_\mu$; en efecto sabemos que cuando tenemos sólo el vacío clásico esta cantidad es entera. Fluctuaciones perturbativas pueden sólo cambiarlo en $O(\hbar)$ y por tanto el número de winding es aun una cantidad bien definida en el límite $\hbar \to 0$. Ahora bien para la parte del campo que no contiene fluctuaciones grandes (y esto es la mayor parte del espacio-tiempo) cualquier número de winding para los campos clásicos de fondo es igualmente probable: así todo el peso relativo proviene del hecho que si $\nu = 1$, la continuidad de los campos implica que A_μ y φ vayan a cero en algún punto en el interior del loop y por tanto una fluctuación grande. De lo anterior es claro que la acción mínima para tal fluctuación es precisamente el instantón con acción S_I. La probabilidad de que un loop de volumen V tenga número de winding 1 es $V \exp(-S_I/\hbar)$ y por tanto para un loop suficientemente grande no hay supresión de número de winding no nulo. En realidad por las razones combinatoriales usuales un loop suficientemente grande encerrará un gas diluido totalmente desarrollado de instantones y anti-instantones.

Hemos continuamente puesto énfasis en los instantones frente a otras fluctuaciones grandes que tienen una acción comparable y por tanto una densidad comparable en el espacio-tiempo. De estas otras clases de fluctuaciones grandes algunas, como los instantones, actúan como fuentes o sumideros de número de winding, mientras que otras no. Como un gas diluido es siempre, para cualquier número de winding dado, la configuración con acción mínima, y con máxima entropía para esta acción podemos despreciar como corrección de orden $\exp(-S_I/\hbar)$ todos los otros tipos de fuentes y sumideros de winding. Con respecto a las otras fluctuaciones grandes, ya que son tan poco frecuentes y por tanto tienen una probabilidad despreciable de superponerse con un instantón, su contribución da un factor que no depende del instantón o del contenido en número de winding de la configuración del campo, y por tanto no afectará a cantidades tales como las energías relativas del vacío 0. Por supuesto fuera del límite semiclásico el gas puede convertirse en denso y entonces las cosas son distintas.

Resumiendo, en el límite semiclásico ($\hbar \to 0$) una parte rápidamente decreciente del espacio-tiempo estará ocupada por grandes fluctuaciones. La mayor parte del espacio-tiempo estará ocupado por pequeñas fluctuaciones $O(\hbar)$ superimpuestas a alguna configuración de campo clásica subyacente. El winding del campo clásico subyacente alrededor de cualquier curva cerrada es irrelevado a $O(\hbar)$ por otras pequeñas fluctuaciones. El hecho de que las grandes fluctuaciones consistan en el límite semiclásico de "grumos"

aislado y distantes entre sí de acción grande, significa que podemos dibujar nuestros loops cerrados sin cruzar ninguna fluctuación grande, y por tanto en general a cualquier área del espacio-tiempo se le podría asignar de forma no ambigua un número de winding y la aproximación de gas diluido de instantones se sigue.

En tanto a las configuraciones de campo en el límite semiclásico hemos recuperado la imagen del gas diluido de instantones si bien hemos perdido la forma matemática elegante, pero simplista físicamente, de la derivación de los instantones.

Habiéndonos asegurado que no estábamos equivocados con relación a las configuraciones de campo dominantes ¿y qué más podemos comprobar? Los instantones son relevantes en el vacío θ y en realidad nos dan una motivación para este vacío. Como vimos hay dos formas de realizar el cálculo: bien sea a través de los vacíos n o bien añadiendo un término $i\int d^3x\, \varepsilon_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \cdot \theta$ (exactamente $i\oint A_\mu dx_\mu$ en ∞) a la acción. Usamos el segundo método.

Vimos antes que la integral de camino debe ser periódica en θ. Esto era así porque las configuraciones de campo, al ser de acción finita, necesariamente iban a configuraciones de energía cero en el ∞, y por tanto $\oint A_\mu dx_\mu$ tomado sobre el círculo del infinito debía ser entero. Sin embargo ahora que hemos relajado la hipótesis de acción finita, de forma que la configuración típica de campo consiste de un gas diluido de instantones, esa configuración de campo no está ya bien definida en el límite $r\to\infty$. En efecto definamos $\oint A_\mu dx_\mu$ en el límite $r\to\infty$ como $\lim_{r\to\infty} \oint_r A_\mu dx_\mu$ donde la integral se toma sobre un círculo de radio r. Al aumentar r la integral $\oint_r A_\mu dx_\mu$ permanecerá constante hasta encontrar una fluctuación grande. Cuando el loop la atraviese la integral saltará por valores no enteros y cuando el loop la haya atravesado la integral habrá variado un número entero de unidades si la fluctuación es una fuente o sumidero de ν. La integral será ahora constante hasta que encuentre una nueva fluctuación grande. Cuando r aumenta, el perímetro aumenta y el ritmo con el que se encuentran los instantones crece linealmente con r. Eventualmente el loop estará siempre encontrando fluctuaciones grandes y la integral una cierta función de r, en la que los valores enteros no juegan ningún papel privilegiado y está claro que $\lim \oint_r A_\mu dx_\mu$ no existe y además deja de estar cuantizada en ν enteros; es evidente que tenemos un problema.

Empecemos de nuevo asegurándonos que la cantidad $\oint A_\mu dx_\mu$ está al menos bien definida. Pongamos el universo en una caja de lado R. Ahora $\oint A_\mu dx_\mu$ está bien definida para todo R: es la integral a lo largo del perímetro de la caja. Procedemos ahora a colocar en el interior de la caja instantones y antiinstantones para formar una configuración típica semiclásica del campo. Para una tal configuración

típica, el perímetro ocasionalmente contiene un instantón; en promedio contiene $O(R)$ instantones para R grande. Así pues $\oint A_\mu dx_\mu$ dependerá de R como $\oint_r A_\mu dx_\mu$ dependía de r. Lo único que hemos hecho hasta ahora es replantear el problema.

Aislemos el problema. Como los instantones están ausentes y distantes podemos expresar la integral de camino como el producto de dos factores: el primer factor es una suma sobre todos los instantones o antiinstantones que no contienen el perímetro de la caja, mientras que el segundo es la suma sobre los que lo contienen. Esto es posible porque tanto la acción como $\oint A_\mu dx_\mu$ (que puede expresarse como $\int d^2x\, \epsilon_{\mu\nu} F_{\mu\nu}$) se puede dividir en la suma de dos términos, uno de cada clase. Notemos que tal factorización es válida sólo en el límite clásico. El primer factor será como es usual

$$\sum_{n\,\bar{n}} \frac{\left\{ K e^{-S_I/\hbar} \left[R^2 - O(R) \right] \right\}^{n+\bar{n}}}{n!\ \bar{n}!} e^{i(n-\bar{n})\theta} \sim \exp\left[-R^2 \epsilon_0(\theta) \left[1 + O\left(\tfrac{1}{R}\right) \right] \right] \qquad (1)$$

donde $\epsilon_0(\theta)$ es la densidad de energía (47.4). Hemos usado un volumen de espacio $R^2 - O(R)$ ya que los instantones que no interactúan con el perímetro deben tener sus centros alejados en más de $O(1/M_S, 1/M_V)$ de este perímetro. Notemos que $\epsilon_0(\theta)$ es periódica en θ ya que el coeficiente de θ es siempre entero en la suma. En el segundo factor aparecerá un volumen $O(R)$ ya que los instantones que contienen el perímetro deben estar a una distancia $O(1/M_S, 1/M_V)$ de él. Como cada instantón es independiente de los otros dará un factor

$$\left[R \int dr\, K(r)\, e^{i\alpha(r)\theta}\, e^{-S(r)} \right] \qquad (2)$$



donde $K(r = \text{radio inst})$ es el factor determinante usual, $\alpha(r = \text{rad. inst}) = \pm 1$ y $S(r = \text{radio inst}) = S_I$. Así pues el segundo factor será

$$\sum_{m\,\bar{m}} \frac{1}{m!}\frac{1}{\bar{m}} \left[R \int dr\, K(r)\, e^{i\alpha(r)\theta} e^{-S(r)} \right]^m \left[R \int dr\, K(r)\, e^{-i\alpha(r)\theta} e^{-S(r)} \right]^{\bar{m}} =$$

$$\simeq \sum_{n,\,\bar{n}} \frac{\left[R\tilde{z} \right]^{n+\bar{n}} e^{i\alpha\theta n} e^{-i\alpha\theta\bar{n}}}{n!\ \bar{n}!} \sim \exp\left[2R\tilde{z} \cos\alpha\theta \right] \qquad (3)$$

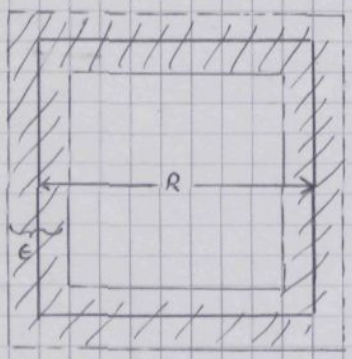
donde $\alpha\theta$ es algún valor medio de $\alpha(r)\theta$, y $\tilde{z}$ representa el resto del factor (2). Como α no es necesariamente entero, este factor no será periódico en θ. Sin embargo la densidad de energía

$$\epsilon(\theta) = \epsilon_0(\theta) + O\left(\tfrac{1}{R}\right) \underset{R\to\infty}{\sim} \epsilon_0(\theta) \qquad (4)$$

es periódica en θ. Veremos claramente la razón. En el límite semiclásico las

grandes fluctuaciones están aisladas de forma que el problema es un efecto de superficie que contiene solo una fracción $O(1/R)$ de todo el espacio tiempo. Cualquier cantidad intensiva Euclídea $E(\theta)$ no puede quedar afectada por ella. Por tanto cualquier variable intensiva continua y cerrada periódica en θ y $\oint A_\mu dx_\mu$ es efectivamente entera.

Antes de dejar el problema de la periodicidad en θ, veamos si las fluctuaciones pequeñas pueden despreciarse en $\oint dx_\mu A_\mu$. El por qué de esta pregunta es que aun cuando para un loop finito las pequeñas fluctuaciones cambian de integral de camino en $O(\hbar) \to 0$ en el límite semiclásico, para muchos loop aparecerían como $RO(\hbar) \to \infty$ independientemente de $\hbar$ y por tanto no son necesariamente triviales. Empecemos considerando el efecto de las fluctuaciones gaussianas sobre el loop. Consideremos un loop cuadrado de lado R, en un campo de fondo $\vec{A}=0$ $\varphi=a$ en el gauge $A_0=0$. Una fluctuación típica sea



$$A_1 \sim C_m \sin \frac{\pi m s}{4R} \tag{1}$$

donde s se mide a lo largo del cuadrado y la fluctuación tiene una dimensión transversal ϵ (región sombreada) centrada en el perímetro del loop. Entonces

$$\oint A_\mu dx_\mu \sim C_m \frac{R}{m} \tag{2}$$

Ahora en la acción tenemos, entre otros términos,

$$\int d^2x \left[(\partial_0 A_1)^2 + a^2 A_1^2 \right] \sim C_m^2 \left(\frac{1}{\epsilon^2} + a^2 \right) \epsilon R \tag{3}$$

dando un factor

$$\exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} C_m^2 \left(\frac{1}{\epsilon^2} + a^2 \right) \epsilon R \right\} \tag{4}$$

de forma que

$$C_m \sim R^{-1/2} \tag{5}$$

y por tanto

$$\oint A_\mu dx_\mu \sim \frac{R^{1/2}}{m} \tag{6}$$

Ahora si en m es una medida de la longitud de onda de la fluctuación, y como los campos están en la fase de Higgs sabemos que el vacío no mantiene fluctuaciones de longitud de onda largas esto es $m \sim O(R)$, de forma que

$$\oint dx_\mu A_\mu \sim R^{-1/2} \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{7}$$

Vemos pues que una fluctuación única de tipo gaussiano no afecta al valor de un loop muy grande.

Esto no es suficiente. Deberíamos sumar sobre todas las fluctuaciones, hacer un desarrollo perturbativo más allá de la aproximación gaussiana y renormalizar todas las divergencias. Por suerte ya sabemos la contestación a todo esto. Recordemos que $\exp\left(i\oint dx_\mu A_\mu\ \theta\right)$ es el loop de Wilson para una carga θ (excepto que tenemos una larga sección espacial en el loop). Así pues

$$\exp\left(i\,\theta\oint dx_\mu A_\mu\right) \sim \exp\left[-E(R)\right] \tag{1}$$

donde $E(R)$ es el desplazamiento energético del vacío debido a la inserción de este loop de carga de tamaño R. Si, como aquí, trabajamos en el vacío naïve de Higgs, $\langle A_\mu\rangle = 0$ $\langle\varphi\rangle = a$, que no soporta interacciones de largo alcance, entonces sabemos que el único efecto de las fluctuaciones pequeñas en este loop de carga será renormalizar la masa de la partícula sobre el loop. De donde

$$E(R) = M\,R \tag{2}$$

para algun $M(\theta)$ (la dependencia en θ pague la autoenergía dependerá claramente de la intensidad de las interacciones de las partículas que vienen parametrizadas por su carga θ). Ahora bien, como $\oint dx_\mu A_\mu$ es lineal en A_μ es obvio que las contribuciones del winding del campo de fondo y de las fluctuaciones pequeñas sobre el persimotte del universo contribuyen independientemente (consideramos sólo el caso donde los instantones no certan el persimotte puesto que ya hemos visto que este es lo único importante en física interesante). Por tanto la integral de camino adquiere un factor global $\exp(-MR)$ que contribuye a la densidad de energía con una corrección

$$\delta\epsilon(\theta) \sim \frac{M(\theta)\,R}{R^2} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0 \tag{3}$$

Por tanto la contribución de las fluctuaciones pequeñas es despreciable. Sin embargo notemos que si insistimos en poblar el espacio-tiempo mediante solo un número finito de instantones, encontraríamos que su contribución al número de winding total sería soberanado por las fluctuaciones pequeñas perturbativas, esto es a grandes distancias la teoría de perturbaciones elimina los efectos de un número finito de instantones.

Con esto hemos visto que todos los resultados obtenidos son convergentes y la razón fundamental es que en el límite semiclásico las fluctuaciones grandes están muy alejadas las unas de las otras, separadas por cien mas de fluctuaciones de fondo cero.

¿Qué pasaría si aumentáramos b (o equivalentemente g^2 con M_s y M_v fijos)? La supresión de las grandes fluctuaciones decrecería y por tanto su separación media decrecería y simultáneamente el tamaño de las fluctuaciones pequeñas aumentaría. En algún instante, a medida que b aumentara, ya no nos será posible hacer loops evitando todas las fluctuaciones grandes (y las fluctuaciones perturbativas a lo largo de estos loops serán lo suficientemente grandes para eliminar el número de winding). Como hemos visto la acción del instantón es próxima a ser la acción mínima posible para cualquier fluctuación grande (es la acción mínima para fluctuaciones topológicas). Por tanto las configuraciones de campo típicas empiezan a estar densamente empaquetadas con fluctuaciones grandes precisamente cuando el gas de instantones deja de estar diluido. Inversamente, mientras el gas de instantones esté diluido, cualquier otro tipo de fluctuación grande será también improbable. Cuando b es grande fluctuaciones grandes que tienen la forma de líneas de ceros de φ empezarán a ser probables y pronto resulta imposible construir loops cerrados sólo en regiones de campo de fondo clásico no perturbado, y las fluctuaciones grandes dejan de factorizarse en el espacio-tiempo. La física no será necesariamente periódica en θ y nuestras expresiones para $E(\theta)$ dejan de ser válidas. Mas aún no podemos creerse cálculos en los que sólo intervengan instantones. Así pues concluimos que el criterio de cuando los cálculos con instantones pueden ser útiles es dado por el gas diluido: cuando el gas está diluido, las fluctuaciones de instantones dominan la física θ; cuando las correcciones instánticas al gas diluido no son significativas es señal de que otras fluctuaciones grandes empiezan a ser importantes, y no podemos usar los cálculos con instantones. Todo esto nos dice, que en los cálculos con sólo instantones cabe un sentido in mas allá de la aproximación de gas diluido.

Veamos ahora un ejemplo de una fluctuación grande totalmente distinta de los instantones: los merones. En nuestro cálculo anterior hemos encontrado que la energía entre fuentes de carga q separadas en una distancia L era (55.4)

$$E(L) \sim c\,L\left(1 - \cos\frac{2\pi q}{e}\right) \tag{1}$$

y por tanto hay confinamiento. Esto no es totalmente cierto pues si q es un multiplo entero de la carga e del campo φ entonces al orden dominante en L, $E(L) = 0$. Lo habríamos podido esperar: cuando $q = e$ el loop de Wilson es

$$\oint A_\mu\, dx_\mu = 2\pi\,(m - \bar{m}) \tag{2}$$

de forma que

$$\exp\left\{ i \oint dx_\mu A_\mu(x) \right\} = 1$$

Esto es, para cargas enteras las inserciones no desordenan el loop de Wilson y perdemos la ley de la área. Físicamente es fácil de entender: una carga entera puede ser apantallada por las cargas enteras de φ a un costo de energía independiente de L, de la misma forma que en la fase no-Higgs. Las cargas enteras a $x = \pm\infty$ quedan apantalladas por cargas que surgen del vacío. (Notemos que a causa de que la dimensión espacial es 1 cargas fraccionales no pueden ser apantalladas).

Hay sin embargo una diferencia entre apantallamiento y confinamiento. Podríamos imaginar que los quarks pesados que aquí hemos tratado como fuentes, tienen de hecho algún otro número cuántico aditivo además de la carga, llamémosle "acarga". Entonces para $q/e \neq$ entero nunca podremos observar acarga aislada a causa de la propiedad del confinamiento. Sin embargo para $q/e =$ entero, mientras la carga del quark es apantallada, sin embargo la acarga no está confinada; se observarían "gluones" de acarga.

¿Podemos localizar fluctuaciones grandes que desordenen el loop de Wilson? La ecuación (71.2) sugiere una posibilidad inmediata: configuraciones de campo con un número de winding localizado de media unidad darían

$$\oint dx_\mu A_\mu(x) = \pi (m - \bar{m}) \qquad (2)$$

donde m ($\bar{m}$) es el número de tales fluctuaciones (antifluctuaciones) en el interior del loop de Wilson. Entonces

$$\exp\left(i \oint dx_\mu A_\mu(x) \right) \sim (-1)^{m-\bar{m}} \qquad (3)$$

de forma que estos objetos (llamados merones) desordenan un loop de Wilson de carga unidad si no tiene un gas libre de tales merones. Sabemos ya que un meron aislado tendrá acción infinita, ya que acción finita exige un número de winding entero. Sin embargo ahora ya estamos familiarizados con el hecho de que una configuración de campo de acción infinita puede ser importante si su entropía es alta.

Un par de merones a una distancia R tendrá $v = 1$ y por tanto para $r \gg R$ el campo de gauge puede ser puro y el par de merones aparecer como un instanton (si bien muy alargado). Así pues la acción de un par de merones no es infinita, sino alguna función creciente de R, $S(R)$. Podemos imaginar $S(R)$ como la energía de interacción entre merones. Similarmente un meron y antimeron tendrán energía de interacción $\bar{S}(R)$. Ahora bien para un tal par meron-antimeron la entropía será de

orden $(R^4)(R^4)$. De forma que cada merón contribuye a la acción "libre" en

$$F \sim \frac{1}{2\bar{g}^2} S(R) - 4 \ln R \qquad (1)$$

donde $\bar{g}^2$ es la constante de acoplamiento de un par meronico separado en R. En Q.C.D a causa de la libertad asintótica es claramente una función creciente con R de forma que si

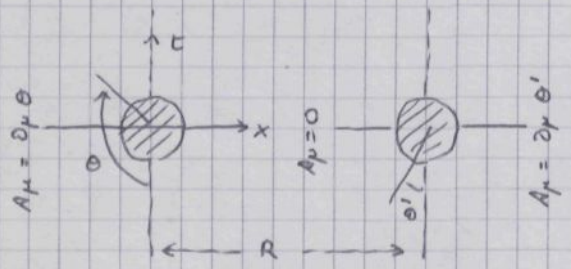
$$S(R) \leq \text{cte en } R \qquad (2)$$

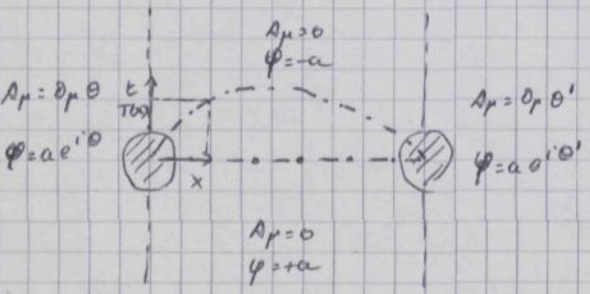
tendremos que la acción libre decrece con R para R suficientemente grande.

$$F(R) \alpha - \ln R \qquad (3)$$

de forma que obtenemos algo como un gas de merones. La situación (2) se da en Q.C.D. En el caso Higgs abeliano la situación es distinta en el sentido de que la constante de acoplamiento en un parámetro libre, pero las conclusiones son parecidas: si (2) es cierta entonces haciendo la constante de acoplamiento suficientemente grande obtenemos un gas de merones en interacción.

Vamos a ver si en el caso 1+1 discutido antes la ecuación (2) es cierta. Deseamos que un merón sea un "quiste" de número de winding no nulo, lo cual implica que mas allá de una región limitada del espacio-tiempo exigimos que $F_{\mu\nu} = 0$, es decir A_μ es un gauge puro. Una configuración de campo característica de dos merones a una distancia R será del tipo indicado aquí. Es claro que el par meronico tiene $\nu = 1$ y que el loop que rodea un solo merón tiene $\nu = 1/2$. Consideremos ahora el campo φ. Sobre la mayor parte del espacio tiempo tendrá $|\varphi|^2 = a^2$. Ahora el problema que tenemos con un meron es que tiene $\nu = 1/2$ de forma que si φ fuera un gauge puro por doquier para de las regiones sombreadas entonces por el carácter univaluado de φ no podemos tener $|D_\mu \varphi|^2 = 0$ por doquier, esto es φ y A_μ son copias gauge distintas de un mismo meron. (esto es porque $-a = a e^{i\pi} \neq a e^{i\cdot 0} = a$). Otra opción es hacer que φ no sea un puro gauge entre los dos merones.





Pero entonces $\int dx\, dt\, (\varphi^2 - a^2)^2$ daría una acción αR. Obviamente debemos algo más barato en términos de la acción. Entonces mantenemos $|\varphi| = a$ por doquier, pero dejamos que $D_\mu \varphi \neq 0$ en alguna región entre los dos merones por continuidad de φ en esta región cambiará de $\varphi = a$ en donde inferior a $\varphi = -a$ en el superior. Sea

$$\varphi(x;t) = a \exp\left(i n t / T(x)\right) \tag{1}$$

en esta región. De forma que fuera de la regiones sombreadas tenemos

$$|\varphi|^2 = a^2 \quad , \quad F_{\mu\nu} = 0 \tag{2}$$

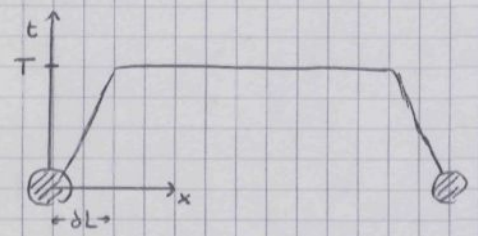
y por tanto la acción es enteramente debida a $|D_\mu \varphi|^2$

$$S = \int dx\,dt \left\{ |D_x \varphi|^2 + |D_t \varphi|^2 \right\} \tag{3}$$

Ahora de (1)

$$\int dx\,dt\, |D_t \varphi|^2 \sim \frac{R}{T} \tag{4}$$

donde T es el valor medio de $T(x)$. Para minimizar esto nos gustaría que T fuera muy grande. Sin embargo para $x < \delta L$ tenemos también $T = T(x)$ de forma que $|D_x \varphi|^2 \neq 0$.



Es facil ver contribuye a la acción

$$\int_0^{\delta L} dx \int_0^{T(x) = \frac{TK}{\delta L}} dt \left[\partial_x\, a \exp\left(i n \frac{\delta L}{Tx} t\right) \right]^2 \simeq \frac{T}{\delta L} \ln \delta L \tag{5}$$

Por tanto la acción total es

$$S \propto \frac{T}{\delta L} \ln \delta L + \frac{R}{T} \tag{6}$$

y por tanto si elegimos $\delta L \sim O(R)$ y $T \sim O(R)$ entonces $S(R) \sim \ln R$ y obtenemos la situación (73.2). Es claro que no se puede construir una configuración de campo mas económica fuera de la región sombreada.

Así pues si el acoplamiento se hace suficientemente grande el vacio contendrá un gas de mesones además del gas de instantones y las fuentes con carga entera quedaran confinadas. (Todos estos resultados se deben tomar con una cierta precaución; sin embargo los argumentos son de interés pedagogico)

En Q.C.D uno encuentra pares mesónicos como soluciones de las ecuaciones euclideas del movimiento. La acción de un par mesónico aumenta como $\ln R$, y el acoplamiento crece como R, de forma que los grandes loops de Wilson se encuentran en un gas de mesones. Para una teoría de gauge pura el campo de un meson es la mitad de un gauge puro

$$A_\mu^I \sim -\frac{i}{2} S\, \partial_\mu S^{-1} \tag{7}$$

Lejos de un par mesónico es simplemente

$$A_\mu \sim A_\mu^I + A_\mu^{II} \sim -i S\, \partial_\mu S^{-1} = \text{gauge puro} \tag{8}$$

Pero A_μ^I no es un gauge puro tendrá un efecto no-trivial en un loop de Wilson, y puede probar que confina. Sin embargo este mecanismo solo empieza a funcionar

cuando la constante de acoplamiento es suficientemente grande y entonces todas las fluctuaciones grandes son importantes, y por tanto no hay nada físico que nos pueda afirmar con certeza para el papel de los mesones.

El punto crucial de la Q.C.D. es que en ella no hay una escala de masas intrínseca. Consecuentemente no tenemos la libertad de variar la constante de acoplamiento a la escala de algunos fenómenos físicos de la teoría, tales como la estructura hadrónica: Si disminuimos la constante a 1 fermi meramente aumentamos la escala a la que se forman los hadrones a una región donde el acoplamiento es el mismo que era antes a 1 fm. Así pues la teoría no posee un límite semiclásico de interés. Sin embargo la misma invariancia de escala de la teoría conduce a un hecho que en parte restaura la validez de los métodos semiclásicos: Q.C.D. es asintóticamente libre en teoría de perturbaciones. Esto es, la constante de acoplamiento, calculada en teoría de perturbaciones, se anula a distancias pequeñas $g^2(p) \to 0$ para $p \to \infty$. Se cree que la constante de acoplamiento es ya muy pequeña para $Q^2 \geq 1\ GeV^2$. Así pues la Q.C.D. es una teoría en la que la constante de acoplamiento es pequeña a pequeñas distancias, con lo que las fluctuaciones de tamaño pequeño tienen un carácter semiclásico, y aumentan a grandes distancias, donde los fenómenos no triviales tales como los hadrones y el confinamiento.

Como el acoplamiento es pequeño a pequeñas distancias, empezaremos considerando estos tamaños. Nuestra experiencia nos dice que si $p \to \infty$, las fluctuaciones dominantes son las pequeñas perturbativas y superpuestas a ellas un gas de instantones con tamaño desde 0 hasta ρ. Aumentemos ahora ρ. El gas de instantones adquiere instantones de mayor tamaño los cuales como $g^2(p)$ crece al crecer ρ conduce a un gas más y más denso. Algún momento, $\rho = \rho_c$, la fracción del espacio tiempo ocupada por instantones de tamaños entre 0 y ρ_c llega a ser $O(1)$, el gas ha dejado de ser diluido y por nuestra experiencia anterior tomamos esto como señal de que otras fluctuaciones grandes son importantes, de forma que nuestras técnicas semiclásicas no pueden usarse para $\rho > \rho_c$.

Si todo esto tiene algún interés depende del valor de ρ_c. Si por este método seremos capaces de aprender algo sobre la estructura hadrónica es necesario que ρ_c sea $O(1\ fm)$. Tenemos alguna razón para creer, antes de empezar los cálculos, que esto es así: el éxito de los modelos de quarks para hadrones sugiere fuertemente que la constante efectiva a la escala de tamaño hadrónico es aun relativamente pequeña; pues de lo contrario los modelos de potencial no relativistas no serían probablemente de ninguna utilidad. Por supuesto si el acoplamiento es lo suficientemente débil para controlar las correcciones radiativas, se puede esperar que los efectos instantón

que vienen controlados por factores $\exp(-S_I / g^2(\rho))$ son aún más difíciles. Esto no es así y la razón es que el grupo de gauge, $SU(3)$, es muy grande. Esta gran invariancia local produce 7 modos nulos en el determinante de los instantones cada uno de los cuales da origen a un factor $1/g(\rho)$. Juntamente con los modos cero de scaling y traslaciones, esto significa que los efectos instantón vienen controlados por factores

$$\sim \left[\frac{1}{g^2(\rho)}\right]^6 e^{-8\pi^2/g^2(\rho)} \qquad (1)$$

que puede ser grande incluso si $g^2(\rho)$ es pequeño a causa de la libertad asintótica del acoplamiento. En otras palabras, mientras que un acoplamiento pequeño implica que un efecto túnel individual es improbable, el hecho de que el grupo de gauge sea grande nos dice que hay muchas formas de poder realizarse el efecto túnel, y que por tanto la probabilidad total de efecto túnel no es necesariamente pequeña.

Cálculos detallados sugieren que la situación es la siguiente: el gas de instantones es aun tratable para escalas del tamaño de una fracción de 1 fm; el acoplamiento es suficientemente débil para que las correcciones perturbativas estén bajo control; el efecto del gas sobre pares quark-antiquark produce en el de ligarlos con energías de ligaduras grandes. En la escala de tamaño de alrededor de 1 fm, el gas parece tener una transición de fase a una fase densa, donde los métodos desarrollados aquí no son aplicables. Pero esto no importa ya que a esta escala de tamaño, otras fluctuaciones grandes son importantes y por tanto el sector instantónico ha perdido importancia.

Notemos que a causa del grupo grande, el gas se hace lo suficientemente denso para afectar la estructura hadrónica mientras que las fluctuaciones perturbativas son aun relativamente inocuas; y al mismo tiempo como los instantones son las fluctuaciones grandes en términos de acción y entropía, se puede esperar que otras fluctuaciones grandes, tales como las que conducen al confinamiento, serán aun muy raras en la escala de tamaño en que el gas de instantones se ha hecho suficientemente denso para empezar a dar los hadrones. Notar en particular la útil separación entre los fenómenos de estructura hadrónica y el confinamiento: es seguramente el caso de que en el mundo de los hadrones de menos masa las cosas no cambiarían mucho si en lugar de confinamiento exacto, tuviéramos solo grandes energías de ligadura de forma que los quarks y gluones libres tuvieran masas de unos pocos GeV. Todo esto se ha considerado en detalle.

Pero una idea del carácter de los efectos instantón en Q.C.D. las configuraciones

que dominan el gas diluido de instantones y antiinstantones posee una densidad espacial de instantones con escala de tamaño que va desde ρ a $\rho + d\rho$ que es

$$D(\rho)\,\frac{d\rho}{\rho^5} = C_0 \left(\frac{8\pi^2}{g^2(\rho)}\right)^6 e^{-8\pi^2/g^2(\rho)}\,\frac{d\rho}{\rho^5} \tag{1}$$

La forma en que los instantones aparecen en las cantidades físicas es en un factor

$$\int_0^\infty d\rho\;\frac{D(\rho)}{\rho^5} \tag{2}$$

Por supuesto $D(\rho)$ coincide con (1) solo para el gas diluido. La fracción del espacio Euclideo ocupado por instantones de tamaño entre 0 y $\bar\rho$ es en media

$$f(\bar\rho) = 2\int_0^{\bar\rho}\frac{d\rho}{\rho^5}\,D(\rho)\,\frac{\pi^2}{2}\,\rho^4 = \pi^2\int_0^{\bar\rho}\frac{d\rho}{\rho}\,D(\rho) \tag{3}$$

y por tanto el gas es diluido en tanto $f(\rho) \ll 1$. Habrá algún tamaño crítico $\rho = \rho_c$ tal que $f(\rho_c) = O(1)$ mas allá del cual no sabemos calcular $D(\rho)$, por tanto no sabemos calcular (2) sino únicamente

$$\int_0^{\rho_c} d\rho\;\frac{D(\rho)}{\rho^5} \tag{4}$$

Esto puede ser o no una cantidad útil en una determinada situación. Parte del arte del juego es buscar lugares donde esta parte de (2) da información útil.

Hemos hecho notar que el ocupamiento es relativamente pequeño en toda aquella región donde el gas de instantones está relativamente diluido. Entonces podemos usar

$$g^2(\rho)/8\pi^2 \simeq -\frac{1}{11\,\ln\rho\Lambda} \tag{5}$$

y usando (4)

$$-\int_0^{\rho_c} d\rho\;\rho^6\,(\ln\rho\Lambda)^6 \tag{6}$$

Para ρ pequeño el integrando es muy pequeño: las escalas de tamaño pequeño están muy diluidas. Para escalas grandes la integral parece ser divergente; sin embargo esta divergencia es aparente por dos razones

i) Para grandes ρ la expresión de 1-loop para $g^2(\rho)$ es falsa

ii) Pero $\rho \gg \rho_c$, $D(\rho)$ ya no tiene la forma (1)

Notemos en particular que cuando ρ aumenta, la expresión de un loop para $g^2(\rho)$ tiene un polo a $\rho = \Lambda^{-1}$; por tanto la expresión a loop invalida antes de este punto. El integrando en (6) es poco grande para la región de ρ donde $g^2(\rho)$ decrece como $1/\ln\rho$ y es negativa de acuerdo con (5); esto es donde no es válida.

Si por ejemplo $g^2(p) \xrightarrow[p\to 0]{} cte$, entonces $D(p) \xrightarrow[p\to 0]{} cte$ y por tanto (77.2) es muy convergente y esto es también cierto si $g^2(p)$ aumenta. Por tanto no hay divergencias infrarrojas de las que preocuparse. Es simplemente el problema que no podemos calcular $D(p)$ para $p > p_c$.

Un problema más interesante aparece a distancias cortas si tenemos demasiados sabores. Si tenemos M sabores en (77.5) debemos cambiar $11 \to 11 - 2M/3$. De forma que para $10 < M < 17$ tenemos

i) la teoría es asintóticamente libre en teoría de perturbaciones de forma que para p pequeña la expresión (77.5) es buena

ii) $f(\bar{g})$ es convergente y tan pequeña como deseemos para $\bar{g}$ pequeño y por tanto (77.4) es válida para p pequeña

iii) $\int_0^{p_c} dp\, p^{-5} D(p)$ diverge en la integración en $p \to 0$.

Notemos que como el gas es diluido y el acoplamiento decrece hacia cero, nuestro argumento mediante acción / entropía prueban que las fluctuaciones para perturbaciones dominantes serán el gas diluido de instantones. Esto nos da un interesante problema de renormalización no perturbativa.

El método de Wilson los efectos instantón en Q.C.D. que acabamos de describir contiene una hipótesis oculta; que podemos discutir fluctuaciones de distintas escalas de tamaños independientemente las unas de las otras. Esto no puede ser así: una configuración típica de campo contiene fluctuaciones de todas las escalas de tamaños, y esto debe ser tenido en cuenta en cualquier discusión de las fluctuaciones en una escala dada. En Q.C.D creemos que en escalas de tamaño mayores que $0(1\,fm)$, el vacío es algún condensado denso de grandes fluctuaciones que nos dan el confinamiento. Estas fluctuaciones no aparecen en escalas de tamaño mucho menores que $1\,fm$, por las razones usuales de acción / entropía. A pequeñas distancias la teoría se hace casi libre, dominando las pequeñas fluctuaciones de punto cero. En la región de tamaños intermedios, donde podemos realizar cálculos útiles con nuestros métodos semiclásicos, es lo que nos interesa. ¿Podemos hablar de un gas diluido de instantones a estos tamaños intermedios? El punto es que si deseamos discutir un instantón de tamaño ρ, no podemos suponer que está inmerso en un vacío neutro, $A_\mu = 0$, con el apropiado winding superpuesto. El campo de fondo es necesariamente no trivial y originado en fluctuaciones grandes y pequeñas. Hemos visto que debido a la libertad asintótica las fluctuaciones de escala menor son crucialmente débiles. Así pues debemos tener en cuenta que nuestro instantón

está inmerso en un campo de fondo de fluctuaciones de mayor escala.

Supongamos que consideramos un tamaño de escala ρ al cual nuestro gas nair de instantones fuera muy diluido. Entonces es muy poco probable que un instantón puesto sobre una fluctuación que es solo moderadamente mayor en la escala de tamaños. Así pues tal instantón estará puesto en un fondo de campos que son de escalas de tamaño mucho mayores; y de aquí que en la escala de tamaño de ρ, el campo de fondo total originado por estas fluctuaciones grandes es simplemente $A_\mu = \text{cte}$.

¿Como altera la naturaleza de nuestro gas de instantones el hecho que se hallen en unos campos de fondo no triviales? Primero debemos preguntarnos si en este caso hay instantones. La contestación es obviamente afirmativa. Si tenemos un campo de fondo constante A_μ su número de winding neto es cero al rededor de cualquier superficie cerrada en el espacio-tiempo. Ahora bien si hubiéramos tenido un campo cero de fondo el instantón habría consistido en una región de tamaño ρ de densidad de acción no nula rodeada por una configuración de gauge pura

$$\tilde{A}_\mu = -\frac{i}{c}\, \bar{S}^{-1}(\tau,\theta)\, \partial_\mu\, S(\tau,\theta) \qquad (1)$$

donde S cubre $SU(2)$ una vez cuando θ cubre la superficie S^3 a una distancia τ del centro del instantón. Como $\tilde{A}_\mu$ es gauge puro no se paga precio en términos de la acción para este campo. Para el caso de campo de fondo constante, el instantón será de nuevo una configuración de campo donde alrededor de $r=0$, por ejemplo, y en un volumen de radio ρ, la configuración del campo tendrá una densidad de acción distinta de la del fondo, mientras que fuera de esta región el campo es de la forma

$$A'_\mu = S_2^{-1} A_\mu S_1 + \frac{i}{c} S_1^{-1} \partial_\mu S_1 \qquad (2)$$

que tiene la misma densidad de acción que A_μ., pero tiene número de winding uno. Lo que es distinto es que ahora la acción total depende no solo de ρ sino también de A_μ: $S_I = S_I(A_\mu; \rho)$. Ahora para un instantón de escala de tamaños pequeña ρ, vemos de (27.3) que la distancia media entre instantones de esta escala o menores es $O(\rho^{-7/4}) \to \infty$ para $\rho \to 0$ aun en unidades laboratorio. Entonces cualesquiera dos instantones pequeños de escala ρ estarán muy alejados en la escala de las fluctuaciones largas que varían lentamente y que generan el campo de fondo de los instantones. Es decir: aun cuando el campo de fondo es constante para cualquier instantón dado, será distinto para distintos instantones. Entonces el carácter de un gas diluido de instantones a cualquier escala de tamaños, por pequeña que sea, quedará fuertemente

afectado por la naturaleza de las fluctuaciones (confinantes?) de gran escala que son efectivamente constantes en la escala de tamaño de un dado cristalito.

Hemos llegado a una imagen mucho mas complja del gas de cristalitos en el que empezamos nuestra discusión. En particular cualquier trabajo detallado numerico sobre estructura hodrónica debe examinar su sensibilidad a quizá campos de fondo importantes. Esto aun no ha sido hecho y por tanto todo lo dicho sobre Q.C.D. es muy preliminar.