VALUATIONS, INTERSECTIONS ET FONCTIONS DE BELYI

RĂZVAN LIŢCANU

Résumé. We present in this article several possibilities to approach the height of an algebraic curve defined over a number field : as an intersection number via the Arakelov theory, as a limit point of the heights of its algebraic points and, finally, using the minimal degree of Belyi functions.

0. Introduction

Le but de ces notes est de présenter différentes possibilités d'approcher la notion de hauteur d'une courbe algébrique définie sur un corps de nombres.

Dans la première partie on rappelle la définition de la hauteur de Weil d'un point d'une variété projective, ainsi que la hauteur de Néron-Tate définie sur une variété abélienne.

Nous présentons ensuite le point de vue d'Arakelov, la hauteur étant définie comme le degré d'Arakelov d'un faisceau inversible hermitien restreint au diviseur horizontal induit par le point. Quelques rappels de théorie de l'intersection sur les variétés arithmétiques permettent d'étendre cette notion aux sous-variétés de dimension arbitraire d'une variété définie sur un corps de nombres. Dans le cas des variétés abéliennes, on obtient une hauteur normalisée, qui étend la hauteur de Néron-Tate, par un procédé de passage à la limite par Philippon et Zhang, procédé inspiré par la construction de Tate. En particulier, on obtient la hauteur d'une courbe (de genre au moins 2) en la regardant comme une sous-variété de sa jacobienne. Notons aussi que cette hauteur est comparable à l'autointersection (au sens d'Arakelov) de son dualisant relatif.

On pourrait aussi définir la hauteur d'une courbe C de genre au moins 2, définie sur un corps de nombres K, comme étant la limite supérieure des

---

2000 *Mathematics Subject Classification.* 14G40, 14H25, 14H30.

Key words and phrases. height, Arakelov theory, Bogomolov conjecture, Belyi function.

valeurs de $\varepsilon > 0$ ayant la propriété que l'ensemble

$$\{P \in C(\overline{K}) \ / \ \hat{h}(\phi_{D_0}(P)) \leq \varepsilon\} \tag{0.1}$$

soit fini. Ici $\hat{h}$ est la hauteur de Néron-Tate et on a noté ϕ_{D_0} le plongement de C dans sa jacobienne induit par un diviseur D_0 de degré 1 sur la courbe C. Autrement dit, on considère la limite supérieure des rayons, par rapport à la distance définie par la hauteur de Néron-Tate, des boules centrées en l'élément neutre de J qui contiennent au plus un nombre fini de points algébriques de la courbe. Notons que l'énoncé connu sous le nom de "Conjecture de Bogomolov", démontré par Ullmo (Annals of Math., 147 (1) (1998), 81-95), implique le fait que cette limite est strictement positive.

Enfin, la propriété de la courbe C d'être définie sur un corps de nombres est caractérisée par l'existence d'un revêtement $\beta : C \to \mathbb{P}^1$ non ramifié en dehors de 0, 1 et ∞ (Belyi, Math. USSR-Izv., 14 (1980), 247-256). On essaie de suivre dans la dernière partie de ces notes une intuition de Szpiro et de Bogomolov, qui ont suggéré que le degré minimal d'un tel revêtement pourrait être utilisé comme principal ingrédient pour une possible définition de la hauteur de C. Cette approche est encore conjecturale, et on passe en revue les résultats partiels dont nous disposons pour le moment.

En essayant de donner une image d'ensemble sur le sujet, les details techniques ont été laissés de côté. Ils ont été remplacés par une bibliographie étendue qui pourra boucher les trous.

Notations : dans ce qui suit, K sera un corps de nombres et $\mathcal{O}_K$ son anneau d'entiers. On notera $\mathcal{M}_K$ l'ensemble des valeurs absolues de K qui étendent les valeurs absolues usuelles sur $\mathbb{Q}$: $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}} = \{p \ / \ p \text{ premier}\} \cup \{\infty\}$; si $x = \pm \prod_p p^{v_p(x)}$, alors $|x|_p = p^{-v_p(x)}$. On notera $\mathcal{M}_{f,K}$ l'ensemble des valeurs absolues non-archimédiennes et $\mathcal{M}_{\infty,K}$ l'ensemble des places archimédiennes. Chaque élément de $\mathcal{M}_{\infty,K}$ est associé soit à un plongement $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{R}$ (appelé place réelle), soit à une paire de plongements conjugués $\sigma, \overline{\sigma} : K \hookrightarrow \mathbb{C}$. Soit $S_{\infty,K}$ l'ensemble des tous les plongements $K \hookrightarrow \mathbb{C}$. Le cardinal de $\mathcal{M}_{\infty,K}$ est $r_1 + r_2$, et celui de $S_{\infty,K}$ est $r_1 + 2r_2$, égal au degré de l'extension $[K : \mathbb{Q}]$ (r_1 étant le nombre des place réelles). On note K_v le complété de K par rapport à la valuation v, et $\mathbb{Q}_v$ sera le complété de $\mathbb{Q}$ par rapport à la trace de v. Si $v \in \mathcal{M}_K$, on pose $\varepsilon_v = [K_v : \mathbb{Q}_v]$ et $\| \ \|_v = | \ |_v^{[K_v:\mathbb{Q}_v]}$. La formule du produit est alors vérifiée :

$$\prod_{v \in \mathcal{M}_K} \|x\|_v = 1 \quad , \quad \forall x \in K \ , \ x \neq 0 \ .$$

1. Hauteurs de Weil et hauteur de Néron-Tate

Nous rappelons dans ce paragraphe des définitions et des résultats concernant la hauteur des points d'une variété algébrique définie sur un corps de nombres, ainsi que la hauteur de Néron-Tate sur une variété abélienne.

Définition 1.1. *Soit* $P = (x_0 : x_1 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n(K)$ *un point de l'espace projectif. La hauteur de* P *est le nombre réel*

$$H_K(P) = \prod_{v \in \mathcal{M}_K} \max\{\|x_0\|_v, \|x_1\|_v, \ldots, \|x_n\|_v\} \ . \tag{1.2}$$

On appelle hauteur absolue de P *le nombre réel*

$$H(P) = H_K(P)^{\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}} \tag{1.3}$$

et hauteur logarithmique de P*,* $h(P) = \log H(P)$*.*

Remarque 1.1. (i) La formule du produit assure l'indépendance par rapport au choix des coordonnées.
(ii) Pour tout $P \in \mathbb{P}^n(K)$, $H_K(P) \geq 1$, et donc $h(P) \geq 0$. $\diamondsuit$

Exemple 1.1. Si $P = (x_0 : x_1 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{Q})$ avec $x_i \in \mathbb{Z}$ premiers entre eux, alors

$$H(P) = \max\{|x_0|, |x_1|, \ldots, |x_n|\} \ .$$

En général, si $P = (x_0 : x_1 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n(K)$, soit $\mathfrak{a} = x_0\mathcal{O}_K + \cdots + x_n\mathcal{O}_K$ l'idéal fractionnaire de $\mathcal{O}_K$ engendré par les coordonnées de P. Alors

$$H(P) = \frac{1}{N(\mathfrak{a})^{1/[K:\mathbb{Q}]}} \prod_{v \in \mathcal{M}_{\infty,K}} \max_{i=0,\ldots,n} \{\|x_i\|_v\} \ , \tag{1.4}$$

où $N(\mathfrak{a})$ est la norme de l'idéal fractionnaire $\mathfrak{a}$.

Théorème 1.1 (Northcott [6], [7])**.** *Soit* n*,* d*,* M *des réels positifs fixés. Alors l'ensemble*

$$\{P \in \mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{Q}}) \quad , \quad H(P) \leq M \ , \ [\mathbb{Q}(P) : \mathbb{Q}] \leq d\}$$

est fini (on a noté $\mathbb{Q}(P)$ *le corps de nombres de définition de* P*).*

Remarque 1.2. Il existe des versions effectives du Théorème de Northcott. Par exemple

$$\#\{P \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}) \quad , \quad H(P) \leq M\} \approx M^2$$

(asymptotiquement). $\diamondsuit$

Remarque 1.3 (Hauteur des polynômes)**.** Soit $f \in \overline{\mathbb{Q}}[X]$, $f \neq 0$, $\deg f = n$. On peut voir l'ensemble de ses coefficients $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ comme un point dans $\mathbf{P}^n$, et prendre la hauteur de f :

$$H(f) := H((a_0 : a_1 : \ldots : a_n)) \ .$$

On a des relations entre, par exemple, la hauteur d'un point x dans $\overline{\mathbb{Q}}$, celle d'un polynôme f et celle de l'image $f(x)$; des inégalités entre la hauteur d'un nombre algébrique et celle de son polynôme minimal sur $\mathbb{Q}$ ou entre la hauteur d'un polynôme et celle de ses racines (voir [2], [11]). $\diamondsuit$

Soient X une variété algébrique définie sur K et $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sans point base sur X. Alors chaque choix d'une famille de sections globales qui engendrent $\mathcal{L}$ fournit un morphisme $\Phi : X \to \mathbb{P}^n$, et pour tout $P \in X(\overline{\mathbb{Q}})$ on définit $h_\Phi(P) = h(\Phi(P))$. Si on choisit une autre famille de sections, qui induit un morphisme Ψ, alors $h_\Phi - h_\Psi$ est une fonction bornée sur $X(\overline{\mathbb{Q}})$. On obtient donc une correspondance

$$\mathcal{L} \longmapsto h_{\mathcal{L}} \in \{f : X(\overline{\mathbb{Q}}) \to \mathbb{R}\}/\{\text{fonctions bornées}\}$$

qui a les propriétés ([2], [11], [12]) :

(i) $h_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{M}} - h_{\mathcal{L}} - h_{\mathcal{M}}$ est une fonction bornée (ce qui permet d'étendre cette correspondance à $\mathrm{Pic}(X)$) ;

(ii) pour toute fonction $h_{\mathcal{L}}$ dans la classe associée à $\mathcal{L}$ il existe une constante C telle que $h_{\mathcal{L}}(P) \geq C$ pour tout $P \in X(\overline{\mathbb{Q}})$;

(iii) si $f : X \to Y$ est un morphisme de variétés, alors $h_{f^*\mathcal{L}} - h_{\mathcal{L}} \circ f$ est une fonction bornée, pour tout $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(Y)$;

(iv) pour tout $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(X)$ ample

$$\#\{P \in X(\overline{\mathbb{Q}}) \quad , \quad h_{\mathcal{L}}(P) \leq M \ , \ [\mathbb{Q}(P) : \mathbb{Q}] \leq d\} < \infty$$

si M et d sont fixés.

Dans le cas d'une variété abélienne A, dans la famille de fonctions $h_{\mathcal{L}}$ associée à un faisceau inversible et symétrique $\mathcal{L}$ on peut choisir de manière unique une fonction $\hat{h}_{\mathcal{L}}$ qui est quadratique : la forme

$$< P, Q >= \hat{h}_{\mathcal{L}}(P + Q) - \hat{h}_{\mathcal{L}}(P) - \hat{h}_{\mathcal{L}}(Q)$$

est bilinéaire. Cette fonction est appelée la hauteur de Néron-Tate (on n'indique plus le faisceau si A est plongée dans un espace projectif et on considère la restriction de $\mathcal{O}(1)$, ou bien si on dispose d'un choix canonique pour $\mathcal{L}$). Par exemple, si $\mathcal{L}$ est ample et symétrique ($[n]^*\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}^{\otimes n^2}$ - le cas qui nous intéressera), alors

$$\hat{h}_{\mathcal{L}}(P) = \lim_{n\to\infty} \frac{h_{\mathcal{L}}([p]^n P)}{p^{2n}} \tag{1.5}$$

pour tout entier $p \geq 2$ et toute fonction hauteur $h_{\mathcal{L}}$ associée à $\mathcal{L}$, uniformément en P. Dans ce cas la hauteur de Néron-Tate a la propriété

$$\hat{h}_{\mathcal{L}}(P) \geq 0 \quad , \quad \forall P \in A(\overline{\mathbb{Q}}) \tag{1.6}$$

avec égalité si et seulement si P est un point de torsion.

Remarque 1.4. On peut construire de telles fonctions hauteur sur des variétés définies sur un corps K arbitraire, une fois que celui-ci est muni d'une famille de valeurs absolues qui sont toutes, sauf un nombre fini, ultramétriques ($|x|_v = c^{-v(x)}$) et qui vérifient la formule du produit “avec multiplicités” (dans le cas d'un corps de nombres ces multiplicités sont $[K_v : \mathbb{Q}_v]$). Prenons par exemple le corps des fonctions $K = K(V)$ d'une variété V projective et normale. On sait alors que tout diviseur irréductible W (i.e. sous-variété irréductible de codimension 1) définit une valuation discrète $v_W : K^* \to \mathbb{Z}$, $v_W(f) = \mathrm{ord}_W(f)$. Soit donc $\mathcal{M}_K = \{|\ |_W = c^{-v_W(\ )}\ /\ W \subset V$ diviseur irréductible$\}$ et soit C une courbe qui ne contient aucune singularité de V (V est normale !). Alors la formule du produit est satisfaite avec les multiplicités $\lambda_W = C.W$. On peut définir la hauteur d'un point $P \in \mathbb{P}^n(K)$ comme dans la Définition 1.1, où $\|\ \|_W = |\ |^{\lambda_W}$. Dans ce cas, la hauteur admet l'interprétation géométrique suivante, qui fait penser au degré : le point P peut être vu comme une fonction rationnelle $V \to \mathbb{P}^n$, et si on prend un hyperplan général H de $\mathbb{P}^n$ alors

$$h(P) = C.P^*H$$

(voir [11] pour des détails). $\diamondsuit$

Philippon a étendu la hauteur de Weil et a défini la hauteur d'une sous-variété de dimension quelconque [8], [9]. Soit X une variété projective et soit L un faisceau très ample sur X tel que le plongement $X \overset{\varphi}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^N$ induit par L fait de X une sous-variété projectivement normale. Soient $Y \subset X$ une sous-variété définie sur le corps de nombres K et f une forme de Chow de $\varphi(Y)$. Philippon définit

$$h_\varphi(Y) = h(f) \tag{1.7}$$

où $h(f)$ est la hauteur invariante de f ([8], [9]) :

$$h(f) = \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_v [K_v : \mathbb{Q}_v] \log M_v(f)\ .$$

Ici, v parcourt l'ensemble des places du corps de nombres K et $M_v(f)$ est le maximum des valeurs absolues v-adiques des coefficients de f si v est non-archimedienne et une mesure de Mahler du conjugué de f correspondant si v est une place à l'infini (le lecteur notera que pour la cohérence avec la hauteur arakelovienne du paragraphe suivant on pourrait normaliser la hauteur définie en (1.7) en divisant par le degré géométrique de $\varphi(Y)$ et, aussi, modifier la mesure de f aux places archimédiennes par le nombre de Stoll).

Si Y est une sous-variété de dimension d_0 d'une variété abélienne A, alors on peut définir la hauteur normalisée

$$\widehat{h}_\varphi(Y) = \lim_{\substack{m\to\infty \\ m\in S^\wedge}} \frac{h_\varphi([m]Y)\#(\ker[m]\cap \mathrm{Stab}_Y)}{m^{2(d_0+1)}} \tag{1.8}$$

où Stab_Y est le stabilisateur de Y dans A et $S^\wedge$ est le monoïde libre sur un ensemble fini de nombres premiers S. Cette hauteur ne dépend pas des sections de L choisies pour définir φ, et on peut définir

$$\widehat{\mathfrak{h}}_L(Y) = \frac{\widehat{h}_\varphi(Y)}{\deg\varphi(Y)} \ .$$

Si L est un faisceau ample et symétrique quelconque, la fonction hauteur $\widehat{\mathfrak{h}}_L$ est

$$\widehat{\mathfrak{h}}_L = \frac{\widehat{\mathfrak{h}}_{L^{\otimes n}}}{n} \quad , \quad n\in\mathbb{N}\ ,\ n\geq 3\ .$$

Pour en savoir plus

La hauteur est devenue un invariant incontournable dans la géométrie arithmétique. Introduite par Weil en [14] (où il développe la théorie dont les racines se trouvent dans sa thèse [13]), elle a eu un rôle important dans les preuves de certains des plus remarquables résultats du dernier siècle : le Théorème de Mordell-Weil (1929), la preuve de Faltings de la Conjecture de Mordell (1984) ou les différentes démonstrations de la Conjecture de Bogomolov (1995, 1996). La théorie de la hauteur (y compris la construction "axiomatique" basée sur les propriétés (i)-(iv) - la "machine des hauteurs") est présentée en détail dans plusieurs ouvrages consacrées à la géométrie arithmétique, comme par exemple [2], [11] ou [12]. Ils contiennent aussi les preuves du Théorème de Northcott ([6], [7]) et de sa variante explicite due à Schanuel [10].

L'existence d'une fonction hauteur quadratique dans la famille associée à tout faisceau inversible et symétrique sur une variété abélienne a été conjecturé par Néron en 1958 au Congrès International des Mathématiciens (Edinburgh) [4]. La preuve, due à Tate, a été publiée par Lang [3]. Néron a publié ensuite une deuxième preuve [5].

La construction de Philippon est présentée dans les articles [8], [9]. La hauteur ainsi construite a été utilisée dans plusieurs travaux importants, dont une preuve effective de la conjecture de Bogomolov [1].

Références

[1] David, S. ; Philippon, P. : *Minoration des hauteurs normalisées des sous-variétés des variétés abéliennes*, dans *Number Theory* (ed. : V. Kumar Murty, M. Waldschmidt), Contemporary Math. **210**, 1998, 333–364

[2] Lang, S. : *Fundamentals of Diophantine Geometry*, Springer-Verlag, New York, 1983

[3] Lang, S. : *Les formes bilinéaires de Néron et Tate*, Séminaire Bourbaki, 1963/64, Fasc. 3, Exposé 274, Secrétariat mathématique, Paris

[4] Néron, A. : *Valeur asymptotique du nombre des points rationnels de hauteur bornée sur une courbe elliptique*, communication dans "Proc. Internat. Congr. Mathematicians" (1958) Edinburgh, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1960

[5] Néron, A. : *Quasi-fonctions et hauteurs sur les variétés abéliennes*, Ann. of Math. (2) **82** (1965), 249–331

[6] Northcott, D. G. : *An inequality in the theory of arithmetic on algebraic varieties*, Proc. Cambridge Phil. Soc. **45** (1949), 502–509

[7] Northcott, D. G. : *A further inequality in the theory of arithmetic on algebraic varieties*, Proc. Cambridge Phil. Soc. **45** (1949), 510–518

[8] Philippon, P. : *Critères pour l'indépendance algébrique*, Publ. Math. IHES **64** (1986), 5–57

[9] Philippon, P. : *Sur les hauteurs alternatives I, II, III*, Math. Ann **289** (1991) 255–283 ; Ann. Inst. Fourier **44** (1994) 1043–1065 ; J. Math. Pures et Appl. **74** (1995) 345–365

[10] Schanuel, S. H. : *Heights in number fields*, Bull. Soc. Math. France, **107** (1979), 433–449

[11] Serre, J. P. : *Lectures on the Mordell-Weil Theorem*, Aspects of Mathematics, E15, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1989

[12] Silverman, J. : *The theory of height functions*, dans *Arithmetic Geometry* (ed. : G. Cornell, J. Silverman), Springer-Verlag, New York, 1986, 151–166

[13] Weil, A. : *L'arithmétique sur les courbes algébriques*, Acta Math. **52** (1929), 281–315

[14] Weil, A. : *Arithmetic on algebraic varieties*, Ann. of Math. (2) **53** (1951), 412–444

2. Approche d'Arakelov : intersections arith-métiques

Une approche "géométrique" de la hauteur des points sur une variété définie sur un corps de nombres, analogue à celle vue dans la Remarque 1.4 pour les corps des fonctions, est possible grâce à Arakelov, qui a étendu la structure entière à l'infini en introduisant des métriques hermitiennes [2]. Il a construit ainsi une théorie des intersections sur les surfaces arithmétiques, qui a été développée ensuite par Faltings, Szpiro, Deligne, Zhang, etc. Gillet et Soulé [13] ont généralisé cette théorie en dimension quelconque, ce qui a permis en particulier la définition de la hauteur des sous-variétés de dimension strictement positive (voir [4], [11]). Quelques mots aussi sur les variétés abéliennes : par un procédé limite "à la Tate", Zhang [26] construit, à partir d'intersections arithmétiques, une hauteur normalisée qui étend la hauteur de Néron-Tate ; notons le fait que dans le cas de la bonne réduction cette hauteur normalisée est elle même un nombre d'intersection.

2.1. Hauteurs et nombres d'intersection.

Définition 2.1. Une variété arithmétique est un schéma $\mathcal{X}$ plat et projectif sur $S = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$, dont la fibre générique $X = \mathcal{X} \times_S \operatorname{Spec} K$ est lisse.

Pour tout $\sigma \in S_{\infty,K}$, soit $X_\sigma = X \times_\sigma \operatorname{Spec}\mathbb{C}$. Les schémas X_σ sont appelés les fibres à l'infini de la variété arithmétique $\mathcal{X}$. L'ensemble des points $\mathbb{C}$-rationnels de X est alors

$$X(\mathbb{C}) = \coprod_{\sigma \in S_{\infty,K}} X_\sigma(\mathbb{C}) \ .$$

Définition 2.2. Un faisceau inversible hermitien $\overline{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}, \| \ \|_\sigma)$ sur $\mathcal{X}$ est la donnée d'un faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{X}$ et, pour tout $\sigma \in S_{\infty,K}$, d'une métrique $\| \ \|_\sigma$ de classe C^∞, invariante par conjugaison complexe, sur $L_\sigma = \mathcal{L} \otimes_\sigma \mathbb{C}$.

On note $\overline{L}_\sigma$ le faisceau inversible hermitien sur $X_\sigma(\mathbb{C})$ ainsi donné et L la trace de $\mathcal{L}$ sur la fibre générique X. Si $c_1(L)$ est la première classe de Chern de L, alors "le degré" permet de voir $c_1(L)^d$ ($d = \dim X$) comme un entier naturel. D'autre part, pour tout $\sigma \in S_{\infty,K}$ on note $c_1(\overline{L}_\sigma)$ la $(1,1)$-forme fermée $\frac{i}{2\pi}K$, où K est la forme de courbure de $(L_\sigma, \| \ \|_\sigma)$.

En particulier, un faisceau inversible hermitien (ou compactifié) sur $S = \operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ n'est autre qu'un $\mathcal{O}_K$-module projectif de rang 1, muni pour chaque σ d'une forme hermitienne $< \ , \ >_\sigma$ invariante par conjugaison complexe.

Définition 2.3. Le degré d'Arakelov d'un faisceau inversible hermitien $\overline{\mathcal{L}}$ sur S est

$$\deg_{Ar} \overline{\mathcal{L}} = \log \frac{\#(\mathcal{L}/s\mathcal{O}_K)}{\prod_{\sigma \in S_{\infty,K}} \|s\|_\sigma} \tag{2.9}$$

où s est une section arbitraire non nulle de $\mathcal{L}$.

Il est facile de voir que cette quantité ne dépend pas du choix de la section s (encore une fois grace à la formule du produit).

Soient maintenant $P \in X(\overline{K})$ un point sur une variété algébrique propre et lisse définie sur le corps de nombres K, $\mathcal{X}$ un modèle de X sur $\mathcal{O}_K$ et $\overline{\mathcal{L}}$ un faisceau inversible métrisé sur $\mathcal{X}$. Alors il existe une unique section $\varepsilon_P : \operatorname{Spec}\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(P)} \to \mathcal{X}$ qui étend P.

Définition 2.4. La hauteur d'Arakelov de P par rapport à $\overline{\mathcal{L}}$ est le nombre réel

$$h_{\overline{\mathcal{L}}}(P) = \frac{\deg_{Ar}(\varepsilon_P^* \overline{\mathcal{L}})}{[\mathbb{Q}(P) : \mathbb{Q}]} \ . \tag{2.10}$$

On remarque l'analogie avec la formule 1.4, l'inversion nominateur - dénomi-nateur étant due à la dualité sections-coordonnées.

Exemple 2.1. *(voir pour les détails* [7] *; voir aussi* [21] *pour un exemple similaire, avec un autre choix des métriques)* Soit $P \in X = \mathbb{P}^n_K$ et ε_P : $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K \to \mathbb{P}^n_{\mathcal{O}_K}$ la section qui étend P. On prend un système de générateurs $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ du faisceau inversible $\mathcal{O}(1)$ et on considère les métriques à l'infini

$$\|f(P)\|_\sigma = \min_{\substack{0 \leq i \leq n \\ x_i(P) \neq 0}} \left\{ \left| \frac{f}{x_i}(P) \right|_\sigma \right\} \ , \ \forall f \in H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(1)) \ , \ \forall P \in \mathbb{P}^n(K_\sigma).$$

Alors on obtient

$$h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}(P) = h(P)$$

où $h(P)$ est la hauteur de Weil logarithmique définie en (1.1).

Regardons d'un peu plus près le cas d'une surfaces arithmétiques $\mathcal{X}$, les fibres sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ ayant donc la dimension 1 (c'est le cas considéré par Arakelov [2]), et dont la fibre générique X est de genre ≥ 1. On peut alors préciser le choix des métriques sur les faisceaux qui nous intéressent, de la façon suivante. Supposons de plus que chaque X_σ est munie d'un élément de volume $d\mu_\sigma$ tel que $\int_{X_\sigma(\mathbb{C})} d\mu_\sigma = 1$ (voir [10] pour un choix canonique de telles (1-1)-formes, à partir d'une base orthonormée de différentielles holomorphes). On appelle une telle donnée *surface d'Arakelov.*

Un *diviseur compactifié* sur $\mathcal{X}$ est une somme formelle finie

$$D_f + \sum_{\sigma \in S_{\infty,K}} \lambda_\sigma [X_\sigma]$$

où D_f est un diviseur sur $\mathcal{X}$ dans le sens classique et $\lambda_\sigma \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_\sigma = \lambda_{\overline{\sigma}}$. Le *groupe de Chow d'Arakelov* $\widehat{CH}^1(\mathcal{X}, d\mu_\sigma)$ est le groupe des diviseurs compactifiés modulo le sous-groupe des éléments de la forme

$$\operatorname{div}(f)_f - \sum_{\sigma \in S_{\infty,K}} \int_{X_\sigma(\mathbb{C})} \log |f|^2_\sigma d\mu_\sigma \cdot [X_\sigma]$$

pour $f \in K(\mathcal{X})$.

D'autre part, le *groupe de Picard compactifié* $\operatorname{Pic}_c(\mathcal{X}, d\mu_\sigma)$ est le groupe des classes d'isométries de faisceaux inversibles hermitiens dont les métriques sont permises, i.e. la forme de courbure est proportionnelle à $d\mu_\sigma$. On a un isomorphisme $\operatorname{Pic}_c(\mathcal{X}, d\mu_\sigma) \simeq \widehat{CH}^1(\mathcal{X}, d\mu_\sigma)$, donné par

$$\overline{\mathcal{L}} \mapsto \left(\operatorname{div}(s) \ , \ - \sum_{\sigma \in S_{\infty,K}} \int_{X_\sigma(\mathbb{C})} \log \|s\|^2_\sigma d\mu_\sigma \cdot [X_\sigma] \right)$$

où $s \in H^0(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ non nulle.

On peut alors définir un produit d'intersection d'Arakelov sur $\mathcal{X}$,

$$(\ , \ )_{Ar} : \mathrm{Pic}_c(\mathcal{X}, d\mu_\sigma) \times \mathrm{Pic}_c(\mathcal{X}, d\mu_\sigma) \to \mathbb{R}$$

qui étend le produit d'intersection usuel des diviseurs sur $\mathcal{X}$, et si D est l'image d'une section $\varepsilon_D : \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{K'} \to \mathcal{X}$ (K' une extension finie de K), alors $(\overline{\mathcal{L}}, O_{\mathcal{X}}(d))_{Ar} = \deg_{Ar} \varepsilon_D^* \overline{\mathcal{L}}$.

On peut maintenant interpréter la hauteur d'Arakelov d'un point sur une courbe définie sur un corps de nombres comme un nombre d'intersection : si $P \in X(\overline{\mathbb{Q}})$, alors la hauteur d'Arakelov de P par rapport au faisceau admissible $\overline{\mathcal{L}}$ est

$$h_{\overline{\mathcal{L}}}(P) = \frac{(\overline{\mathcal{L}}, D_P)_{Ar}}{[\mathbb{Q}(P) : \mathbb{Q}]}$$

où D_P est la fermeture schématique de P dans $\mathcal{X}$.

Gillet et Soulé ont généralisé le produit d'intersection aux variétés arithmétiques de dimension arbitraire ([13], [14]). Bost, Gillet et Soulé ont donné les propriétés de la hauteur définie utilisant cette théorie en [4] (voir la Proposition 2.1 ci-dessous).

Si $\mathcal{X}$ est une variété arithmétique de dimension d, on définit les groupes de Chow arithmétiques $\widehat{CH}^i(\mathcal{X})$ pour tout entier $i \geq 0$. Quand $\mathcal{X}$ est irréductible, $\widehat{CH}^0(\mathcal{X}) = \mathbb{Z}$. On peut définir ensuite un produit d'intersection

$$\widehat{CH}^i(\mathcal{X}) \times \widehat{CH}^j(\mathcal{X}) \longrightarrow \widehat{CH}^{i+j}(\mathcal{X}) \otimes \mathbb{Q} \ . \tag{2.11}$$

Si $\overline{\mathcal{L}}$ est un faisceau inversible hermitien sur $\mathcal{X}$, on peut définir la première classe de Chern arithmétique $\hat{c}_1(\overline{\mathcal{L}}) \in \widehat{CH}^1(\mathcal{X})$. Le produit d'intersection permet de définir $\hat{c}_1(\overline{\mathcal{L}})^i \in \widehat{CH}^i(\mathcal{X}) \otimes \mathbb{Q}$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$. Grâce à l'application

$$\deg : \widehat{CH}^d(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathbb{R} \ ,$$

on peut identifier $\hat{c}_1(\overline{\mathcal{L}})^d$ à un nombre réel.

Prenons maintenant un cycle $\mathcal{Y}$ de dimension $d_0 + 1$ de $\mathcal{X}$. On peut lui associer le nombre d'intersection $(\hat{c}_1(\overline{\mathcal{L}})^{d_0+1}/\mathcal{Y})$. Si en particulier Y est une sous-variété fermée de X, définie sur une extension finie K' de K, de dimension d_0, et $\mathcal{Y}$ est sa fermeture schématique dans $\mathcal{X}$, on peut alors définir la hauteur de Y par rapport à $\overline{\mathcal{L}}$:

$$h_{\overline{\mathcal{L}}}(Y) = \frac{(\hat{c}_1(\overline{\mathcal{L}})^{d_0+1}/\mathcal{Y})}{(d_0+1)[K' : \mathbb{Q}] \deg_L Y} \tag{2.12}$$

où $\deg_L Y = \deg(c_1(L)^{d_0} \cap [Y])$ est le degré géométrique de Y par rapport à L.

La proposition suivante regroupe quelques propriétés du produit d'intersection et de la hauteur définis ci-dessus :

Proposition 2.1 ([4], Propositions 3.2.1, 3.2.2, 3.2.4)**.** *Soit $\overline{\mathcal{L}}$ un faisceau inversible hermitien sur une variété arithmétique projective non-singulière $\mathcal{X}$.*

(i) Si Y est un cycle de dimension $d+1$ sur $\mathcal{X}$,

$$\deg_{L^{\otimes n}}(Y) = n^d \deg_L(Y) \qquad ; \qquad h_{\overline{\mathcal{L}}^{\otimes n}}(Y) = n\, h_{\overline{\mathcal{L}}}(Y) \ .$$

(ii) Si Y est le diviseur d'une fonction rationnelle sur une variété intègre, contenu dans une fibre spéciale, $h_{\overline{\mathcal{L}}}(Y) = 0$.

(iii) Si $f : \mathcal{X}' \to \mathcal{X}$ est un morphisme de variétés arithmétiques projectives non-singulières et Y est un cycle sur $\mathcal{X}'$,

$$h_{f^*\overline{\mathcal{L}}}(Y) = h_{\overline{\mathcal{L}}}(f_* Y) \ .$$

(iv) Soient $\mathcal{Y}$ un cycle irréductible de dimension $d+1$, et s une section de $\overline{\mathcal{L}}^{\otimes n}$ sur $\mathcal{Y}$. Alors

$$(\hat{c}_1(\overline{\mathcal{L}})^d / \mathrm{div}(s)) = n(\hat{c}_1(\overline{\mathcal{L}})^{d+1}/\mathcal{Y}) + \sum_{\sigma \in S_{\infty,K}} \int_{X_\sigma(\mathbb{C})} \log \|s_\sigma\| \ c_1\left(\overline{L}_\sigma\right)^d \delta_{Y_\sigma} \ .$$

Si $\overline{\mathcal{L}'}$ est un deuxième faisceau inversible hermitien sur $\mathcal{X}$ et s une section de $\overline{\mathcal{L}'}^{\otimes n}$ sur $\mathcal{Y}$. Alors pour tout $1 \leq i \leq d+1$

$$\begin{aligned}(\hat{c}_1(\overline{\mathcal{L}})^{d+1-i} \hat{c}_1(\overline{\mathcal{L}'})^{i-1} \quad / \quad \mathrm{div}(s)) &= n(\hat{c}_1(\overline{\mathcal{L}})^{d+1-i} \hat{c}_1(\overline{\mathcal{L}'})^{i}/\mathcal{Y}) + \\ &+ \sum_{\sigma \in S_{\infty,K}} \int_{X_\sigma(\mathbb{C})} \log \|s\|_\sigma \, c_1\left(\overline{L}_\sigma\right)^{d+1-i} c_1\left(\overline{L'}_\sigma\right)^{i-1} \delta_{Y_\sigma} \ .\end{aligned}$$

(v) Si $\mathcal{X}'$ est une variété arithmétique et $\overline{\mathcal{L}'}$ un faisceau inversible hermitien sur $\mathcal{X}'$ tels que $\left(\mathcal{X}, \overline{\mathcal{L}}\right)$ et $\left(\mathcal{X}', \overline{\mathcal{L}'}\right)$ coïncident sur la fibre générique X_K, il existe une constante C telle que pour tout cycle effectif Y sur X_K,

$$|h_{\overline{\mathcal{L}'}}(Y) - h_{\overline{\mathcal{L}}}(Y)| \leq C \ .$$

(vi) Si, pour tout $\sigma \in S_{\infty,K}$, la $(1,1)$-forme $c_1\left(\overline{L}_\sigma\right)$ est positive et pour un certain n, $\mathcal{L}^{\otimes n}$ est engendré par des sections globales "entières" (i.e. de norme sup *inférieure à* 1*), alors, pour tout cycle Y,*

$$h_{\overline{\mathcal{L}}}(Y) \geq 0 \ .$$

Remarque 2.1. On voit de par la définition de la hauteur même, ainsi que par certaines des propriétés ci-dessus combien il est important de trouver une section de $H^0(\mathcal{Y}, \mathcal{L})$ dont toutes les normes à l'infini sont petites. En particulier, une telle section avec ses normes inférieures à 1 assurerait la positivité de la hauteur. Des informations en ce sens sont données par le **Théorème de Hilbert-Samuel arithmétique** ([1], [12]). On remarque d'abord que $\Lambda = H^0(\mathcal{Y}, \mathcal{L}^n)$ est un réseau dans l'espace vectoriel $V = \bigoplus_{\sigma \in S_{\infty,K}} H^0(Y_\sigma, L_\sigma^n)$ muni de la norme "sup". Alors

$$\mathrm{Vol}(V, \Lambda) := \frac{\mu_V(B(V))}{\mu_V(V/\Lambda)} = n^{d+1} \frac{(\hat{c}_1(\overline{\mathcal{L}})^{d+1}/\mathcal{Y})}{(d+1)!} + O(n^{d+1}) \tag{2.13}$$

où $B(V)$ est la boule unité de V et $d = \dim Y$. Le théorème de Minkovski implique alors que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ il existe une section non-nulle $s \in H^0(\mathcal{Y}, \mathcal{L}^n)$ telle que

$$\|s\|_{\sup} \leq \exp\left(n\varepsilon - n[K : \mathbb{Q}] h_{\overline{\mathcal{L}}}(Y)\right) . \tag{2.14}$$

Le Théorème de Nakai-Moishezon arithmétique, dû à Zhang ([23] dans le cas des surfaces arithmétiques et [25] en général) donne des conditions pour que $H^0(\mathcal{Y}, \mathcal{L}^n)$ ait une base de sections petites. $\diamondsuit$

2.2. **Hauteurs normalisées.** Soit A une variété abélienne sur un corps de nombres K. Si L est un faisceau inversible et ample sur A, alors le faisceau $L' = L \otimes [-1]^* L$ est ample et symétrique. Supposons dès maintenant que L lui-même est ample et symétrique et fixons un isomorphisme $L \simeq [-1]^* L$. Le théorème du cube implique que le faisceau

$$\mathcal{D}_3(L) = p_{123}^* L \otimes p_{12}^* L^{-1} \otimes p_{13}^* L^{-1} \otimes p_{23}^* L^{-1} \otimes p_1^* L \otimes p_2^* L \otimes p_3^* L$$

est trivial sur A^3 (trivialisation unique à une constante multiplicative près). Si $(\mathcal{A}, \overline{\mathcal{L}})$ est un modèle compactifié du couple (A, L), on peut construire, comme précédemment, une hauteur. La question est de savoir si cette hauteur est normalisée, dans le sens suivant : si $x \in A$ et $n \in \mathbb{N}^*$, est-il vrai que $h([n]x) = n^2 h(x)$? La réponse est en général négative.

Si A a bonne réduction sur $\mathcal{O}_K$, soit $\mathcal{A}$ le modèle de Néron de A. Une structure cubiste sur L est la donnée d'un faisceau inversible hermitien $\overline{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}, \|\ \|_\sigma)$ sur $\mathcal{A}$ tel que la trace de $\mathcal{L}$ sur la fibre générique soit L, et que l'isomorphisme du cube devienne une isométrie si on munit $O_{\mathcal{A}^3}$, en toute place à l'infini, de la métrique triviale. L'existence de telles structures est prouvé par Moret-Bailly dans [18], qui construit, sur chaque L_σ, $\sigma \in S_{\infty,K}$, des métriques induisant une métrique constante sur $\mathcal{O}_{\mathcal{A}^3}$ ("métriques permises" - notons que ce sont les seules métriques à courbure invariante par translations). On montre alors que la hauteur $h_{\overline{\mathcal{L}}}$ construite ainsi est normalisée, dans le sens précisé plus haut, et que pour les points elle coïncide avec la hauteur de Néron -Tate associée à L.

Si, par contre, A n'a pas bonne réduction partout, on ne dispose pas d'une compactification canonique du modèle de Néron sur $\mathcal{O}_K$. Fixons, pour tout entier $p > 1$, un isomorphisme $[p]^* L \simeq L^{\otimes p^2}$. Soit $\mathcal{A}_0$ un modèle de A

sur $\mathcal{O}_K$ et $\mathcal{L}$ un faisceau ample et symétrique sur $\mathcal{A}_0$ qui étend L. Pour chaque $\sigma \in S_{\infty,K}$, il existe une unique métrique du cube sur L_σ qui fait de l'isomorphisme $[p]^*L_\sigma \simeq L_\sigma^{\otimes p^2}$ une isométrie. Pour chaque $n > 0$, soit $\mathcal{A}_n$ la normalisation de $\mathcal{A}_{n-1}$ dans le corps des fractions de A :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_n & \longleftarrow & A \\ [p]\downarrow & & \downarrow [p] \\ \mathcal{A}_{n-1} & \longleftarrow & A \end{array}$$

Ici la flèche $[p] : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}_{n-1}$ est le prolongement de $[p] : A \to A$ à $\mathcal{A}_n$. On défini

$$\mathcal{L}'_0 = \mathcal{L} \qquad ; \qquad \mathcal{L}'_n = [p]^*\mathcal{L}'_{n-1} \ .$$

Pour toute place à l'infini $\sigma \in S_{\infty,K}$, on obtient le faisceau

$$L'_{n,\sigma} = L_\sigma^{\otimes p^{2n}}$$

sur A_σ, qu'on munit de la métrique obtenue par image inverse à travers $[p]$. On choisit un faisceau inversible hermitien $\overline{\mathcal{L}_n}$ sur $\mathcal{A}_n$ tel que

$$\overline{\mathcal{L}_n}^{\otimes p^{2n}} \simeq \overline{\mathcal{L}'_n}$$

dans $\mathrm{Pic}(\mathcal{A}_n) \otimes \mathbb{Q}$. On obtient ainsi un modèle $(\mathcal{A}_n, \mathcal{L}_n)$ de (A, L) pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soient maintenant X un sous-schéma fermé de A, de dimension d_0, et $\mathcal{X}_n$ son adhérence schématique dans $\mathcal{A}_n$. Zhang ([26]) montre que la suite

$$h_{\overline{\mathcal{L}}_n}(X) = \frac{(\hat{c}_1(\overline{\mathcal{L}}_n)^{d_0+1}/\mathcal{X}_n)}{(d_0+1)[K:\mathbb{Q}]\deg_L X}$$

converge uniformément vers une fonction qu'on note $\hat{h}_L(X)$, indépendante des choix de $\mathcal{A}_0$ et $\mathcal{L}$. Elle vérifie, pour tout $x \in A$, la condition de normalisation

$$\hat{h}_L([n]x) = n^2\hat{h}_L(x) \quad , \quad n \in \mathbb{N}^* \ .$$

La fonction hauteur ainsi construite est compatible avec la hauteur normalisée de Philippon $\widehat{\mathfrak{h}}_L$.

2.3. **Le cas des courbes.** Soit C une courbe propre, lisse et géométriquement connexe de genre $g \geq 1$ définie sur le corps de nombres K. Soit D_0 un diviseur de degré 1 sur C et $\phi_{D_0} : C \to J$ le plongement de C dans sa jacobienne défini par D_0. Il existe sur J un faisceau inversible, ample et symétrique canonique, associé au diviseur theta. Soit $\hat{h}$ la hauteur normalisée construite ci-dessus associée à ce faisceau, qui étend la hauteur de Néron-Tate. Alors on peut associer à la courbe C la hauteur de son image dans J

$$h_{D_0}(C) = \hat{h}(\phi_{D_0}(C)) \tag{2.15}$$

D'autre part, soit $\mathcal{C}$ le modèle minimal régulier de C sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$, qu'on peut supposer semi-stable (après un éventuel élargissement de K). Comme nous avons déjà mentionné, on peut dans ce cas préciser les choix des métriques qu'on met à l'infini, grâce au fait que chaque C_σ est munie d'une forme volume canonique. En particulier, le faisceau dualisant relatif $\omega = \omega_{\mathcal{C}/\mathcal{O}_K}$ est canoniquement muni d'une métrique permise. Soit $\overline{\omega}$ le faisceau compactifié ainsi obtenu et soit $(\overline{\omega}, \overline{\omega})$ son auto-intersection. Posons alors

$$h(C) = \frac{(\overline{\omega}, \overline{\omega})}{[K : \mathbb{Q}]} \ . \tag{2.16}$$

Dans le cas où $g \geq 2$ et $\mathcal{C}$ est lisse sur $\mathcal{O}_K$, les deux hauteurs associées à C sont liées par la formule ([26])

$$h_{D_0}(C) = \frac{1}{8(g-1)} h(C) - \left(1 - \frac{1}{g}\right) \hat{h}(\phi_{D_0}(D)) \tag{2.17}$$

où D est choisi tel que $(2g-2)D$ soit un diviseur canonique. Si D_0 est choisi dès le départ avec cette propriété, alors

$$h_{D_0}(C) = \frac{1}{8(g-1)} h(C) \ . \tag{2.18}$$

Si $\mathcal{C}$ n'est pas lisse sur $\mathcal{O}_K$, mais seulement semi-stable, Zhang ([24]) raffine l'intersection d'Arakelov, en introduisant *l'accouplement admissible* $(\overline{\omega}, \overline{\omega})_a$. L'égalité (2.17) est alors vérifiée si on remplace $(\overline{\omega}, \overline{\omega})$ par $(\overline{\omega}, \overline{\omega})_a$.

Pour en savoir plus

Arakelov a défini l'intersection des diviseurs sur une surface arithmétique [2]. Il a introduit les fibres à l'infini et a utilisé les fonctions de Green pour estimer la contribution de ces fibres dans le calcul des nombre d'intersection. Faltings a développé cette théorie [10] et a prouvé, en particulier, le théorème de Riemann-Roch, le théorème de l'index de Hodge et la formule de Noether. Le théorème de l'index de Hodge a été aussi prouvé par Hriljac [16], qui a comparé le produit d'intersection d'Arakelov avec la hauteur de Néron-Tate. Une approche différente de la théorie d'intersection sur les surfaces arithmétiques est due à Deligne [8] et Elkik [9].

Gillet et Soulé ont défini les classes charactéristiques des fibrés métrisés [14] et ont généralisé la théorie d'Arakelov pour les variétés de dimension arbitraire [13], [14]. Un théorème de Riemann-Roch-Grothendieck pour les images directes des fibrés métrisés par des immersions est prouvé en [3]. Une version générale du théorème de Riemann-Roch est prouvée dans [15]. Burgos a défini les anneaux de Chow pour les variétés arithmétiques quasi-projectives en interprétant le produit des courants de Green comme un cas spécial de la structure multiplicative sur la cohomologie de Deligne-Beilinson [5].

La hauteur définie comme un produit d'intersection est utilisée par Faltings en [11]. Cette approche géométrique de la hauteur met en évidence le fait que cet invariant est l'analogue arithmétique du degré d'une variété projective (une illustration de l'analogie corps de fonctions - corps de nombres, voir par exemple [22]). En utilisant la théorie d'Arakelov et des fibrés métrisés en toute place (finie ou infinie), Zhang a défini la hauteur normalisée d'une sous-variété d'une variété abélienne [26]. Moret-Bailly décrit comment choisir les "métriques permises" sur les fibrés sur une variété abélienne [18]. En utilisant l'approche cohomologique de Burgos [5], Burgos, Kramer et Kühn [6] ont défini la hauteur par rapport à un faisceau inversible hermitien dont la métrique a des singularités logarithmiques le long d'un diviseur.

Parmi les textes expositoires en théorie d'Arakelov nous indiquons [7], [17], [19], [20], [21].

Références

[1] Abbes, A. ; Bouche, T. : *Théorème de Hilbert-Samuel "arithmétique"*, Ann. de l'Inst. Fourier **45** (1995), 375–401

[2] Arakelov, S. Ju. : *Intersection theory of divisors on arithmetic surfaces*, Math. USSR Izv. **8** (1974), 1167–1180

[3] Bismut, J.M. ; Gillet, H. ; Soulé, C. : *Complex immersions and Arakelov geometry*, dans *Grothendieck Festschrift* (ed. P. Cartier, L. Illusie, N. M. Katz, G. Laumon, Yu. Manin et K. A. Ribet), vol. 1, Progress in Mathematics, 87, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1990, 249–331

[4] Bost, J.-B. ; Gillet, H. ; Soulé, C. : *Heights of projective varieties and positive Green forms*, J. of the AMS **7** (1994), 903–1027

[5] Burgos, J. I. : *Arithmetic Chow rings and Deligne-Beilinson cohomology*, J. of Alg. Geom. **6** (1997), no. 2, 335–377

[6] Burgos, J. I. ; Kramer, J. ; Kühn, U. : *Cohomological arithmetic Chow rings*, preprint arxiv :math.NT/0404122

[7] Chinburg, T. : *An introduction to Arakelov intersection theory*, dans *Arithmetic Geometry* (ed. : G. Cornell, J. Silverman), Springer-Verlag, New York, 1986, 289–307

[8] Deligne, P. : *Le déterminant de la cohomologie*, Current trends in arithmetical algebraic geometry (Arcata, 1985), Contemp. Math. 67, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987, 93–177

[9] Elkik, R. : *Métriques sur les fibrés d'intersection*, Duke Math. J. **61** (1990), no. 1, 303–328

[10] Faltings, G. : *Calculus on Arithmetic Surfaces*, Ann. of Math. (2) **119** (1984), 387–424

[11] Faltings, G. : *Diophantine approximations on abelian varieties*, Ann. of. Math. (2) **133** (1991), 549–576

[12] Gillet, H. ; Soulé, C. : *Amplitude arithmétique*, C. R. Acad. Sci. Paris **307** (1988), 887–890

[13] Gillet, H. ; Soulé, C. : *Arithmetic intersection theory*, Publ. IHES **72** (1990), 94–174

[14] Gillet, H. ; Soulé, C. : *Characteristic classes for algebraic vector bundles with hermitian metrics I, II*, Ann. of Math. **131** (1990), 163–203, 205–238

[15] Gillet, H. ; Soulé, C. : *An arithmetic Riemann-Roch theorem*, Invent. Math. **110** (1992), no. 3, 473–543

[16] Hriljac, P. : *Heights and Arakelov's intersection theory*, Amer. J. of Math. **107** (1985), no. 1, 23–38

[17] Lang, S. : *Introduction to Arakelov theory*, Springer-Verlag, New York, 1988

[18] Moret-Bailly, L. : *Métriques permises*, dans *Séminaire sur les pinceaux arithmétiques : la conjecture de Mordell* (ed. : L. Szpiro), Astérisque **127** (1985), 37–57

[19] Soulé, C. : *Lectures on Arakelov geometry* (avec la collaboration de D. Abramovich, J.-F. Burnol et J. Kramer), Cambridge Studies in Adv. Math. **33**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992

[20] Soulé, C. : *Hermitian vector bundles on arithmetic varieties*, dans *Algebraic Geometry - Santa Cruz 1995*, Proc. Sympos. Pure Math. 62, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, 383–419

[21] Szpiro, L. : *Degrés, intersections, hauteurs*, dans *Séminaire sur les pinceaux arithmétiques : la conjecture de Mordell* (ed. : L. Szpiro), Astérisque **127** (1985), 11–28

[22] Weil, A. : *Sur l'analogie entre les corps de nombres algébriques et les corps de fonctions algébriques*, dans *Oeuvres Scient. I*, Springer Verlag, New York-Heidelberg, 1979, 236–340

[23] Zhang, S. : *Positive line bundles on arithmetic surfaces*, Ann. of Math. (2) **136** (1992), 569–587

[24] Zhang, S. : *Admissible pairing on a curve*, Invent. Math. **112** (1993), 171–193

[25] Zhang, S. : *Positive line bundles on arithmetic varieties*, J. of the AMS **8** (1995), 187–221

[26] Zhang, S. : *Small points and adelic metrics*, J. of Alg. Geom. **4** (1995), 281–300

3. Approche de la hauteur d'une sous-variété via les hauteurs de ses points

Soient $\mathcal{X}$ une variété arithmétique définie sur l'anneau des entiers d'un corps de nombres K, et $\overline{\mathcal{L}}$ un faisceau inversible métrisé sur X, ample et semi-positif, dont la métrique est lisse (pour les conditions de positivité des métriques, nécessaires pour les résultats de ce paragraphe voir [5], paragraphe 5). Soit $Y \subset X_K$ une sous-variété et posons, pour $1 \leq i \leq \dim Y + 1$,

$$e^i_{\overline{\mathcal{L}}}(Y) = \sup_{\substack{Z \subset Y \\ \operatorname{codim} Z = i}} \inf_{x \in (Y-Z)(\overline{K})} h_{\overline{\mathcal{L}}}(x) \tag{3.19}$$

(les *minimum successifs*).

Remarque 3.1. On a évidemment

$$e^1_{\overline{\mathcal{L}}}(Y) = \liminf h_{\overline{\mathcal{L}}}(x_n)$$

où $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ parcourt l'ensemble des *suites génériques* de Y, (i.e. dont tout fermé strict de Y contient au plus un nombre fini de points). En particulier, si x est un point de X, alors $e^1_{\overline{\mathcal{L}}}(x) = h_{\overline{\mathcal{L}}}(x)$.$\diamondsuit$

Le théorème suivant, dont la preuve utilise le Théorème de Nakai-Moishezon arithmétique, compare cette quantité à la hauteur de Y :

Théorème 3.1 (Zhang [5]). *Pour toute sous-variété Y de X_K, on a*

$$\frac{1}{\dim Y + 1}\left(e^1_{\overline{\mathcal{L}}}(Y) + \cdots + e^{\dim Y+1}_{\overline{\mathcal{L}}}(Y)\right) \le h_{\overline{\mathcal{L}}}(Y) \le e^1_{\overline{\mathcal{L}}}(Y)\ . \tag{3.20}$$

L'égalité $h_{\overline{\mathcal{L}}}(Y) = e^1_{\overline{\mathcal{L}}}(Y)$ est vraie s'il existe une suite générique de points de Y dont la hauteur tends vers $h_{\overline{\mathcal{L}}}(Y)$. Szpiro, Ullmo et Zhang ont montré qu'une telle suite vérifie une propriété d'équidistribution [3].

Dans le cas où la variété ambiante A est abélienne, munie de la hauteur normalisée $\hat{h}_L$ associée à un faisceau ample et symétrique L, on peut définir d'une manière analogue, pour une sous-variété X de A

$$\hat{e}^i_L(X) = \sup_{\substack{Z \subset X \\ \operatorname{codim} Z = i}} \ \inf_{x \in (X-Z)(\overline{K})} \hat{h}_L(x) \tag{3.21}$$

$(1 \le i \le \dim X + 1)$. Évidemment

$$\hat{e}^1_L(X) = \liminf \hat{h}_L(x_n)$$

où $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ parcourt l'ensemble des *suites génériques* de X.

On a dans cette situation :

Théorème 3.2 (Zhang [6]). *Pour toute sous-variété X de A*

$$\frac{1}{\dim X + 1}\left(\hat{e}^1_{\overline{\mathcal{L}}}(X) + \cdots + \hat{e}^{\dim X+1}_{\overline{\mathcal{L}}}(X)\right) \le \hat{h}_L(X) \le \hat{e}^1_L(X)\ . \tag{3.22}$$

On utilise le théorème précédent, sur la suite des modèles de A utilisée pour la construction de la hauteur normalisées.

Dans ce cas aussi, l'égalité à droite est caractérisée par une propriété d'équidistribution.

Pour en savoir plus

Dans l'article [5], Zhang définit les notions de positivité, d'amplitude et de semi-amplitude pour un faisceau inversible métrisé sur une variété arithmétique, en étendant ainsi les notions introduites en [4]. Il étudie l'existence des sections de norme petite d'un faisceau ample métrisé et prouve un théorème de Nakai-Moishezon arithmétique : si $\overline{\mathcal{L}}$ est un faisceau hermitien numériquement positif sur une variété arithmétique, alors le groupe $\Gamma(\mathcal{L}^{\otimes n})$ a une base dont les éléments sont des sections petites, si n est assez grand.

Cette base lui permet de comparer la hauteur d'une sous-variété avec les minimum essentiels des hauteurs de ses points. Des preuves pour les énoncés de ce paragraphe peuvent être trouvés aussi dans [1].

Soient A est une variété abélienne définie sur un corps de nombres K et X une sous-variété définie sur une extension finie de K. Les inégalités de Zhang implique le fait que les deux affirmations suivantes sont équivalentes (*Conjecture de Bogomolov généralisée*) :

– Si X n'est pas la translatée d'une sous-variété abélienne par un point de torsion, alors l'ensemble
$$X(\varepsilon) := \{x \in X(\overline{\mathbb{Q}}) \quad / \quad \hat{h}_L(x) \leq \varepsilon\}$$
n'est pas Zariski dense dans X.

– Si X n'est pas la translatée d'une sous-variété abélienne par un point de torsion, alors
$$\hat{h}_L(X) > 0\ .$$

La conjecture de Bogomolov, prouvée par Ullmo [2] dans le cas d'une courbe plongée dans sa jacobienne et par Zhang [7] dans la forme généralisée, assure la positivité de la hauteur d'une sous-variété d'une variété abélienne qui n'est pas la translatée d'une sous-variété abélienne par un point de torsion. La preuve dans les deux cas est basée sur la propriété d'équidistribution des suites génériques de points de hauteur petite (Szpiro, Ullmo et Zhang [3]).

Références

[1] Abbes, A. : *Hauteur et discrétude (d'après L. Szpiro, E. Ullmo et S. Zhang)*, Séminaire Bourbaki, Vol. 1996/97, Astérisque **245** (1997), Exp. No. 825, 4, 141–166

[2] Ullmo, E. : *Positivité et discrétion des points algébriques des courbes*, Ann. of Math. (2) **147** (1) (1998), 81–95

[3] Szpiro, L., Ullmo, E., Zhang, S. : *Equidistribution des petits points*, Invent. Math. **127** (1997), 337–347

[4] Zhang, S. : *Positive line bundles on arithmetic surfaces*, Ann. of Math. (2) **136** (1992), 569–587

[5] Zhang, S. : *Positive line bundles on arithmetic varieties*, J. of the AMS **8** (1995), 187–221

[6] Zhang, S. : *Small points and adelic metrics*, J. of Alg. Geom. **4** (1995), 281–300

[7] Zhang, S. : *Equidistribution of small points on abelian varieties* Ann. of Math. (2) **147** (1) (1998), 159–165

4. Hauteurs et morphismes de Belyi

4.1. **Théorème de Belyi et dessins d'enfants.** Un fameux théorème de Belyi caractérise les courbes qui peuvent être définies sur un corps de nombres :

Théorème 4.1 (Belyi, [3])**.** *Soit C une courbe algébrique définie sur $\mathbb{C}$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(a) C peut être définie sur un corps de nombres.

(b) Il existe un morphisme fini $\beta : C \to \mathbb{P}^1$ non-ramifié en dehors de 0, 1 *et* ∞.

(pour la preuve, voir [3], [10]).

On appelle *morphisme de Belyi* un revêtement fini $\beta : C \to \mathbb{P}^1$ non-ramifié en dehors de 0, 1 et ∞.

Un $*$-*morphisme* est un morphisme de Belyi $\beta : C \to \mathbb{P}^1$ tel que

: (i) soit $C = \mathbb{P}^1$ et $\{0, 1, \infty\} \subseteq \beta^{-1}(\{0, 1, \infty\})$;

: (ii) soit $C = (E, O)$ est une courbe elliptique définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et $O \in \beta^{-1}(\{0, 1, \infty\})$;

: (iii) soit $g(C) \geq 2$.

Un *couple de Belyi* est une paire (C, β), où C est une courbe projective, lisse sur C et $\beta : C \to \mathbb{P}^1$ est un morphisme de Belyi. Deux couples (C, β) et (C', β') sont isomorphes s'il existe un isomorphisme $\alpha : C \to C'$ tel que $\beta = \beta' \circ \alpha$. On dit qu'un morphisme de Belyi ($*$-morphisme, couple) β est *pur* si la multiplicité de chaque point au-dessus de 1 est 2.

Il est naturel de penser que certaines propriétés arithmétiques de la courbe C sont encodées dans les propriétés des morphismes de Belyi définis sur C. En particulier, Bogomolov et, indépendamment, Szpiro ont conjecturé que le degré des morphismes de Belyi pourrait être utilisé comme principal ingrédient dans la construction d'une théorie de la hauteur sur les espaces de modules de courbes. Cette idée est à la base des résultats de la dernière partie de ces notes. On indique ici les principales idées des démonstrations, les détails étant contenus dans [7]. On rappelle d'abord quelques propriétés des morphismes de Belyi.

Remarque 4.1. En caractéristique $p > 0$, une fonction avec la propriété (b) du théorème 4.1 existe pour toute courbe C (Abhyankar, [1]). Pour obtenir un analogue du théorème de Belyi dans ce cas, on doit imposer des conditions sur les indices de ramification (voir Saïdi, [8], Théorème 5.6, pour $p > 2$). $\diamondsuit$

Proposition 4.2 (Propriétés en genre zéro)**.** *(a) Soit $\beta : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ un morphisme fini tel que tous les points dans une même fibre ont le même* *indice de ramification. Alors β est un morphisme de Belyi, qui est soit cyclique, soit isomorphe à un morphisme de Belyi pur.*

(b) Si $\beta : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ est un morphisme de Belyi de degré d, alors

$$\#\beta^{-1}(\{0,1,\infty\}) = d + 2 \ .$$

Démonstration. (a) Soient d le degré du revêtement β, $\{P_1, ..., P_r\} \subset \mathbb{P}^1$ l'ensemble des points de branchement et e_i l'indice de ramification des points situés dans la fibre $\beta^{-1}(P_i)$, $i = 1, ..., r$. Evidemment $1 < e_i \leq d$. La formule de Hurwitz s'écrit successivement

$$-2 = -2d + \sum_{i=1}^{r} \frac{d}{e_i}(e_i - 1) \ ,$$

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{d}{e_i} = d(r-2) + 2 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{e_i} = r - 2 + \frac{2}{d} \ .$$

Si $r = 2$, alors $\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} = \frac{2}{d}$, et puisque $e_i \leq d$ on obtient $e_1 = e_2 = d$, le revêtement cyclique.

Si $r \geq 3$, supposons que $e_1 \leq e_i$, $i = 2, ..., r$. On obtient alors

$$r - 2 + \frac{2}{d} \leq \frac{r}{e_1} \quad \Longrightarrow \quad \frac{r}{2} + \frac{2}{d} \leq r(1 - \frac{1}{e_1}) \leq 2$$

ce qui implique $r = 3$ et $1 + \frac{2}{d} \leq \frac{3}{e_1}$, donc $e_1 = 2$. On obtient donc un revêtement isomorphe à un morphisme de Belyi pur.

On peut continuer avec le même type de raisonnement et déterminer une liste précise des indices de ramification possibles. Le même calcul est fait par Baldassarri et Dwork ([2]) (qui reconsidèrent un résultat de Klein), la liste en question étant liée à la liste de Schwarz des opérateurs différentiels hypergéométriques.

(b) C'est une conséquence de la formule de Hurwitz. Notons que c'est le nombre minimal de points situés dans l'image inverse de $\{0, 1, \infty\}$ par toute fonction rationnelle $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ "normalisée" (à coefficients dominants 1), suite au Théorème "*abc*" de Mason pour les polynômes. ∎

Remarque 4.2. *Soit $q : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ le morphisme induit par le polynôme*

$$q(x) = 4x(1 - x)$$

Si $\beta : C \to \mathbb{P}^1$ est un morphisme de Belyi, alors $f_\beta := q \circ \beta : C \to \mathbb{P}^1$ est pur, et

$$f_\beta = f_{\beta'} \Rightarrow \beta = \beta' \text{ ou } \beta = 1 - \beta' \tag{4.23}$$

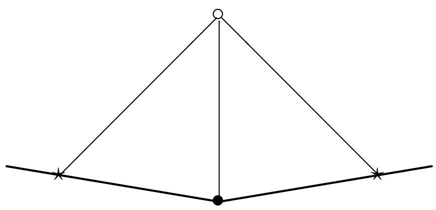
♢

Remarque 4.3. $\beta^{-1}(\{0,1,\infty\}) = (1-\beta)^{-1}(\{0,1,\infty\}) = f_\beta^{-1}(\{0,\infty\})$

Si $\beta : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$, alors β est un $*$-morphisme de Belyi si et seulement si f_β est un $*$-morphisme et $f_\beta(\{0,1,\infty\}) \subset \{0,\infty\}$. $\diamondsuit$

Prenons un morphisme de Belyi $\beta : C \to \mathbb{P}^1$. Alors $\beta^{-1}([0,1])$ est un graphe sur le modèle topologique de C, dont les sommets sont les images inverses de 0 et 1 (et on peut donc les marquer avec deux signes, disons $\bullet$ et $\circ$). Pour chaque sommet, le nombre des arêtes incidentes coïncide avec la multiplicité du point correspondant dans la fibre au-dessus de 0 ou de 1. D'autre part, dans chaque cellule on a une image inverse de ∞, dont la multiplicité coïncide avec le nombre des arêtes incidents à la cellule. Un tel graphe biparti est un "dessin d'enfants". On appelle dessin abstrait une classe d'isomorphisme de dessins. On dit qu'un dessin (abstrait) est pur si la valence de chaque sommet marqué avec un des deux signes est 2.

Dans l'autre sens, si on a un dessin pur, on choisit un point, marqué $\circ$, dans chaque cellule et un point, marqué $\star$, sur chaque arête. On obtient ainsi une triangulation de X_2 du type suivant :



En identifiant les points "$\star$" et les segments correspondants on obtient des espaces homéomorphes à une sphère. On identifie tous ces espaces avec $\mathbb{P}^1$, en identifiant $\star$ avec 1, $\bullet$ avec 0, $\circ$ avec ∞, et on obtient ainsi un morphisme $\beta : X_2 \to \mathbb{P}^1$, ramifié seulement au dessus de 0, 1 et ∞. On munit X_2 d'une structure de surface de Riemann telle que β soit une fonction rationnelle.

Correspondance de Grothendieck ([5], [9]). *Il y a une bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphisme des couples de Belyi purs et l'ensemble des dessins abstraits purs.*

Notons que si (C,β) et (C',β') sont isomorphes, alors un homéomorphisme entre les dessins correspondants est réalisé par l'isomorphisme entre C et C' qui donne l'équivalence. En particulier, si $C = C'$, alors le passage entre les deux graphes est donné par un élément de $\mathrm{Aut}(C)$.

4.2. **Degré des morphismes de Belyi.**

Définition 4.1. Soit C une courbe algébrique définie sur un corps de nombres. On appelle **degré de Belyi** de C le nombre

$$B(C) = \min\left\{\deg\beta \ / \ \beta : C \to \mathbb{P}^1 \text{ morphisme de Belyi}\right\} \ .$$

On appelle $b(C) = \log B(C)$ le degré de Belyi logarithmique de C.

Il est évident que $B(\mathbb{P}^1) = 1$. En général on a

Théorème 4.3 ([7])**.** *Fixons un réel $M > 1$. L'ensemble des courbes C (non-isomorphes) définies sur $\overline{\mathbb{Q}}$, de degré de Belyi $B(C) \leq M$ est fini. Plus précisément,*

$$\#\left\{C \textit{ courbe sur } \overline{\mathbb{Q}} \ / \ B(C) \leq M\right\} \leq 2\sum_{d=1}^{[M]}\sum_{g=0}^{\left[\frac{d}{2}\right]}\sum_{n=1}^{d-2g+1} G_g^*(n,d)$$

où $G_g^*(n,d)$ est le nombre de dessins à n sommets et d arêtes sur une surface topologique de genre g, tels que tout cycle ait un nombre pair d'arêtes.

Démonstration. ([7]) Soit $d \in \mathbb{Z}_{>0}$, $d \leq M$ fixé, $\beta : C \to \mathbb{P}^1$ un morphisme de Belyi pur, de degré $2d$, et g le genre de C. En utilisant la formule de Hurwitz on obtient $g \leq \frac{d}{2}$, donc un nombre fini de modèles topologiques possibles pour la courbe C.

Sur chaque modèle l'ensemble des dessins avec un nombre donné de sommets et arêtes est fini. La correspondance de Grothendieck et la Remarque 4.2 impliquent la finitude dans l'énoncé.

Pour rendre effectives ces considérations, on remarque que le graphe correspondant à un morphisme pur de degré $2d$, défini sur une courbe de genre g, a au plus $d - 2g + 1$ sommets. On obtient

$$\begin{aligned}
\#\left\{C \ / \ B(C) \leq M\right\} &\leq 2\#\left\{C \ / \ \exists\beta : C \to \mathbb{P}^1 \text{ pur}, \ \deg\beta \leq 2M\right\} \\
&\leq 2\sum_{d=1}^{[M]}\sum_{g=0}^{\left[\frac{d}{2}\right]}\sum_{n=1}^{d-2g+1} G_g^*(n,d) \ .
\end{aligned}$$

■

Un énoncé du type "l'ensemble des courbes C non-isomorphes définies sur un corps de nombres K, de degré de Belyi $B(C) \leq M$ est fini" n'est pas vrai. Il suffit de regarder les courbes planes $dy^2 = F(x)$, où $F \in K[X]$ est fixé, de degré supérieur à 3 et d est un entier positif sans facteurs carrés. On obtient une infinité de courbes non-isomorphes sur K, mais avec le même degré de Belyi, puisqu'elle sont isomorphes sur $\overline{\mathbb{Q}}$.

Remarque 4.4. On peut envisager plusieurs possibilités de définir un invariant avec une telle propriété de type Northcott. Une telle définition devra prendre en compte des propriétés arithmétiques des morphismes de Belyi. Par exemple une possible définition d'une "hauteur de Belyi" serait

$$h_B(C) = b(C) + \log D_K$$

où D_K est le discriminant du corps de définition d'un morphisme de Belyi de degré minimal, ou une quantité liée à ce discriminant.

Une autre manière de determiner une telle hauteur serait le calcul, dans le sens d'Arakelov, de la hauteur du graphe du morphisme de Belyi $C \to \mathbb{P}^1$ de degré minimal dans le produit $C \times \mathbb{P}^1$. $\diamondsuit$

On peut définir aussi le degré de Belyi des points algébriques sur une courbe définie sur un corps de nombres :

Définition 4.2. Soit C une courbe définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et $a \in C(\overline{\mathbb{Q}})$. On note

$$\mathcal{B}_a := \left\{\beta : C \to \mathbb{P}^1 \ \ * \text{-morphisme de Belyi} \quad / \quad a \in \beta^{-1}\{0, 1, \infty\}\right\}$$

et

$$B(a) = \min\{\deg(\beta) \quad / \quad \beta \in \mathcal{B}_a\} \ . \tag{4.24}$$

On appelle $B(a)$ le degré de Belyi de a. On appelle $b(a) = \log B(a)$ le degré de Belyi logarithmique de a.

Exemple 4.1. Si $a = \frac{m}{m+n}, m, n \in \mathbb{Z}_+$, le morphisme

$$\beta(x) = \frac{(m+n)^{m+n}}{m^m n^n} x^m (1-x)^n \tag{4.25}$$

est dans B_a, et on a, dans ce cas $B(a) \leq H(a) = m + n$, où $H(a)$ est la hauteur normalisée non-logarithmique de a.

Théorème 4.4 ([7])**.** *Soient C une courbe définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et $M > 1$ fixé. L'ensemble des points $a \in C\left(\overline{\mathbb{Q}}\right)$ de degré de Belyi $B(a) < M$ est fini.*

On peut donner une estimation du cardinal de cet ensemble, en fonction du nombre de dessins sur le modèle topologique de C, avec un nombre fixé de sommets et d'arêtes, tels que tout cycle ait un nombre pair d'arêtes.

Exemple 4.2. *Soit μ l'ensemble des racines de l'unité. Alors, pour tout $\rho \in \mu$, $H(\rho) = 1$, mais pour tout $M > 1$ fixé,*

$$\#\{\rho \in \mu \quad / \quad B(\rho) < M\} < \infty.$$

L'inégalité $B(\rho) \leq H(\rho)$ n'est donc vraie que pour un nombre fini de racines de l'unité.

Le théorème suivant fournit une majoration du degré de Belyi d'un point algébrique d'une courbe C en fonction de sa hauteur et de son degré algébrique.

Théorème 4.5 ([7])**.** *Soient C une courbe définie sur un corps de nombres K, de degré de Belyi $B(C)$, et $\beta : C \to \mathbb{P}^1$ un morphisme du Belyi qui réalise le minimum du degré,* $\deg \beta = B(C)$. *Soient $L = \beta^* \mathcal{O}(1)$, $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ un modèle propre de (X, L) sur* $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ *et $\overline{\mathcal{L}}$ le faisceau inversible hermitien dont les métriques à l'infini sont les images inverses des métriques usuelles sur $\mathcal{O}(1)$. Si $a \in C(\overline{\mathbb{Q}})$, $H = \exp(h_{\overline{\mathcal{L}}}(a))$ et $d = [\mathbb{Q}(\beta(a)) : \mathbb{Q}]$, alors*

$$B(a) < B(C) \left[\left(\prod_{i=1}^{d} (i+1)^{6^{i-1}(i!)} \right) H^{6^{d-1}(d!)^2} \right]^{(d+2)(d+5)} . \tag{4.26}$$

Remarque 4.5. Dans le théorème précédent $d \leq [\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}] \cdot d'$, où d' est le degré du corps de définition de β. On voit aussi dans ce contexte l'intérêt de choisir un tel β défini sur un corps de nombres "petit". $\diamondsuit$

Pour en savoir plus

Le théorème de Belyi [3] est connu comme un des résultats les plus surprenants de la géomètrie arithmétique, tant par son énoncé que par l'ingéniosité de sa démonstration. Ce fait a été rémarqué par Grothendieck en [5], qui décrit aussi la correspondance entre les fonctions de Belyi et les dessins d'enfants. Les détails de cette correspondance peuvent être trouvés dans [9].

Le fait que les morphismes de Belyi et plus précisément leur degré peuvent être utilisés pour prouver des résultats concernant la hauteur a été remarqué dans plusieurs textes. On se contente ici de mentionner [4]. La plupart des résultats concernant le dégré des morphismes de Belyi sont contenus dans [7]. Certains d'entre eux ont été obtenus indépendamment dans [6].

Références

[1] Abhyankar, S. : *Coverings of algebraic curves*, Amer. J. Math. **79** (1957), 825–856

[2] Baldassarri, F. ; Dwork, B. : *On second order linear differential equations with algebraic solutions*, Amer. J. Math. **101** (1979), no. 1, 42–76

[3] Belyi, G. V. : *On the Galois extensions of the maximal cyclotomic fields*, Math. USSR-Izv. **14** (1980), 247–256

[4] Elkies, N. : *ABC implies Mordell*, Internat. Math. Res. Notices **7** (1991), 99–109

[5] Grothendieck, A. : *Esquisse d'un Programme*, dans *Geometric Galois Actions* vol 1, (ed. L. Schneps, P. Lochak), Cambridge University Press, 1997, 5–48

[6] Khadjavi, L. S. : *An effective version of Belyi's theorem*, J. Number Theory **96** (2002), no. 1, 22–47

[7] Liţcanu, R. : *Propriétés du degré des morphismes de Belyi*, Monatshefte für Mathematik **142** (2004), no. 4, 327–340

[8] Saïdi, M. : *Revêtements modérés et groupe fondamental de graphe de groupes*, Compositio Math. **107** (1997), no. 3, 319–338

[9] Schneps, L. : *Dessins d'enfants on the Riemann sphere*, dans *The Grothendieck theory of dessins d'enfants* (ed. L. Schneps), London Math. Soc. Lect. Note Ser. **200**, Cambridge Univ. Press, 1994, 47–77

[10] Wolfart, J. : *The 'obvious' part of Belyi's theorem and Riemann surfaces with many automorphisms*, dans *Geometric Galois actions. 1. Around Grothendieck's "Esquisse d'un programme"* (ed. L. Schneps et al.), London Math. Soc. Lect. Note Ser. **242**, Cambridge Univ. Press, 1997, 97–112

Acknowledgements

This work was partially supported by the Research Training Networks (FP5) "Arithmetic Algebraic Geometry" (HPRN-CT-2000-00120) and "Galois Theory and Explicit Methods in Arithmetic" (HPRN-CT-2000-00114), the CEEX Programme CEx05-D11-11/04.10.2005 and the CRM Research Programme "Arakelov Geometry and Shimura Varieties".

Universitatea "Al. I. Cuza", Faculty of Mathematics, 700506 Iaşi, Romania ; E-mail : litcanu@uaic.ro