PETITS POINTS ET CONJECTURE DE BOGOMOLOV

RĂZVAN LIŢCANU

Résumé. This paper is devoted to the statement known as the Bogomolov conjecture on small points. We present the outline of Zhang's proof of the generalized version of the conjecture. An explicit bound for the height of a non-torsion variety of an abelian variety is obtained in the frame of Arakelov theory. Some further developments are mentioned.

0. Introduction

Soit C une courbe propre, lisse, géométriquement connexe de genre $g \geq 2$ définie sur un corps de nombres K. Bogomolov a proposé la conjecture suivante ([5]) :

Théorème 0.1 (Ullmo, [36])**.** *Il existe $\varepsilon > 0$ tel que l'ensemble*

$$\{P \in C(\overline{K}) \quad / \quad \hat{h}(\phi_{D_0}(P) \leq \varepsilon\}$$

soit fini.

où D_0 est un diviseur de degré 1 sur C tel que $(2g-2)D$ soit un diviseur canonique, et $\phi_{D_0} : C \to J$ le plongement de C dans sa jacobienne défini par D_0. Puisque les points de torsion sont caractérisés par l'annulation de la hauteur, on obtient une nouvelle preuve du théorème suivant, dû à Raynaud [26] :

Corollaire 0.2. *L'ensemble des points $P \in C(\overline{K})$ tels que $\phi_{D_0}(P)$ est de torsion dans J est fini.*[1]

Soit A une variété abélienne définie sur un corps de nombres K. Fixons un plongement $K \hookrightarrow \mathbb{C}$ et soit $\overline{\mathbb{Q}}$ la clôture algébrique de K dans $\mathbb{C}$. Soit $h : A(\overline{\mathbb{Q}}) \to \mathbb{R}$ la hauteur de Néron-Tate associée à un faisceau inversible ample et symétrique L sur A. Soit X une sous-variété de A définie sur une extension finie K' de K.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 14G40, 14H25, 14H30.

Key words and phrases. height, Arakelov theory, Bogomolov conjecture.

[1] L'énoncé de Raynaud est vrai en général sur un corps de caractéristique 0.

Définition 0.1. *On dit que X est de torsion si elle est la translatée d'une sous-variété abélienne par un point de torsion.*

Pour tout réel $\varepsilon \geq 0$, on définit aussi l'ensemble

$$X(\varepsilon) := \{x \in X(\overline{\mathbb{Q}}) \quad / \quad h(x) \leq \varepsilon\} \ .$$

La conjecture de Bogomolov se généralise alors d'une manière naturelle :

Théorème 0.3 (Zhang, [41])**.** *Soit X une sous-variété de A, définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$, qui n'est pas de torsion. Alors il existe une constante $\varepsilon > 0$ telle que l'ensemble $X(\varepsilon)$ ne soit pas Zariski dense dans X.*

En particulier, on obtient une nouvelle preuve de l'énoncé suivant, démontré par Raynaud [26], [27] (*la conjecture de Manin-Mumford*) :

Corollaire 0.4. *Soit X une sous-variété de A, définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$, qui n'est pas de torsion. Alors l'ensemble $X(\overline{\mathbb{Q}}) \cap A(\overline{\mathbb{Q}})_{tor}$ des points de $X(\overline{\mathbb{Q}})$ qui sont de torsion dans A n'est pas Zariski dense dans X.*

Les preuves de Ullmo et Zhang, dont les idées sont présentées dans la Section 2, sont basées sur un résultat d'équidistribution des petits points du a Szpiro, Ullmo et Zhang [34]. Ce résutat est présenté dans le paragraphe suivant.

En utilisant la hauteur normalisée définie par Philippon et des méthodes propres à l'approximation diophantienne, David et Philippon on donné une preuve effective de la conjecture de Bogomolov généralisée, en minorant par une constante positive la hauteur d'une sous-variété d'une variété abélienne, qui n'est pas de torsion. Le troisième paragraphe contient une preuve explicite qui reprend certaines idées de David et Philippon, mais avec une hauteur et des calculs dans le contexte arakelovien.

Le dernier paragraphe est consacré à un passage en revue de certains résultats partiels antérieurs aux preuves de Ullmo, Zhang et David-Philippon, ainsi qu'au développements ultérieurs.

On se rapporte à l'article [20] pour les définitions et certains résultats utilisés dans cet article. On garde aussi les conventions et les notations. Notamment, si $\mathcal{X}$ est une variété arithmétique définie sur l'anneau des entiers d'un corps de nombres K de fibre générique X, $\overline{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}, \| \, \|_\sigma)$ est un faisceau inversible hermitien sur $\mathcal{X}$ et Y est une sous-variété fermée de X, définie sur une extension finie K' de K, alors on note $h_{\overline{\mathcal{L}}}(Y)$ la hauteur d'Arakelov de Y par rapport à $\overline{\mathcal{L}}$, normalisée par le degré géométrique. Si A est une variété abélienne définie sur K et L est un faisceau inversible sur A, ample et symétrique, alors $\hat{h}_L(X)$ est la hauteur normalisée, par rapport à L, du sous-schéma fermé X de A.

1. Hauteur d'une sous-variété et hauteurs de ses points ; équidistribution

Soient $\mathcal{X}$ une variété arithmétique définie sur l'anneau des entiers d'un corps de nombres K, et $\overline{\mathcal{L}}$ un faisceau inversible métrisé sur X, ample et semi-positif, dont la métrique est lisse (pour les conditions de positivité des métriques, nécessaires pour les résultats de ce paragraphe voir [39]). Soit $Y \subset X_K$ une sous-variété et posons, pour $1 \leq i \leq \dim Y + 1$,

$$e^i_{\overline{\mathcal{L}}}(Y) = \sup_{\substack{Z \subset Y \\ \operatorname{codim} Z = i}} \inf_{x \in (Y-Z)(\overline{K})} h_{\overline{\mathcal{L}}}(x) \tag{1.1}$$

(les *minimum successifs*).

Remarque 1.1. On a évidemment

$$e^1_{\overline{\mathcal{L}}}(Y) = \liminf h_{\overline{\mathcal{L}}}(x_n)$$

où $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ parcourt l'ensemble des *suites génériques* de Y, (i.e. dont tout fermé strict de Y contient au plus un nombre fini de points).

Le théorème suivant compare cette quantité à la hauteur de Y, et caractérise le cas d'égalité :

Théorème 1.1. *(i) (**Zhang** [39])Pour toute sous-variété Y de X_K, on a*

$$\frac{1}{\dim Y + 1}\left(e^1_{\overline{\mathcal{L}}}(Y) + \cdots + e^{\dim Y+1}_{\overline{\mathcal{L}}}(Y)\right) \leq h_{\overline{\mathcal{L}}}(Y) \leq e^1_{\overline{\mathcal{L}}}(Y)\ . \tag{1.2}$$

*(ii)(**Szpiro, Ullmo et Zhang,** [34]) Supposons que $h_{\overline{\mathcal{L}}}(Y) = e^1_{\overline{\mathcal{L}}}(Y)$ et soit (x_n) une suite générique de points de Y telle que $h_{\overline{\mathcal{L}}}(x_n) \to h_{\overline{\mathcal{L}}}(Y)$. Alors elle vérifie la propriété d'équidistribution suivante : pour toute $\sigma \in S_{\infty,K}$ la suite*

$$\frac{1}{\#O(x_n)} \sum_{y\in O(x_n)} f(y)$$

converge vers $\int_{Y_\sigma(\mathbb{C})} f\mu$, pour toute f fonction continue sur $Y_\sigma(\mathbb{C})$, où $O(x_n)$ est la orbite de x_n sous Galois et

$$\mu = \frac{c_1(L_\sigma, \|\ \|_\sigma)^d}{\deg_L(Y)}\ .$$

Un point essentiel de la preuve ([39], [34]) est la possibilité de choisir convenablement, dans le contexte arakelovien, les métriques à l'infini sur le faisceau $\mathcal{L}$.

Dans le cas où la variété ambiante A est abélienne, munie de la hauteur normalisée $\hat{h}_L$ associée à un faisceau ample et symétrique L, on peut définir d'une manière analogue, pour une sous-variété X de A et $1 \leq i \leq \dim X + 1$,

$$\hat{e}^i_L(X) = \sup_{\substack{Z \subset X \\ \operatorname{codim} Z = i}} \inf_{x \in (X-Z)(\overline{K})} \hat{h}_L(x) \ . \tag{1.3}$$

Évidemment

$$\hat{e}^1_L(X) = \liminf \hat{h}_L(x_n)$$

où $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ parcourt l'ensemble des *suites génériques* de X.

On a dans cette situation :

Théorème 1.2. *(i) (**Zhang** [40]) Pour toute sous-variété X de A*

$$\frac{1}{\dim X + 1}\left(\hat{e}^1_{\mathcal{L}}(X) + \ldots + \hat{e}^{\dim X+1}_{\mathcal{L}}(X)\right) \leq \hat{h}_L(X) \leq \hat{e}^1_L(X) \ . \tag{1.4}$$

*(ii) (**Szpiro, Ullmo et Zhang,** [34]) Supposons que $\hat{h}_L(X) = \hat{e}^1_L(X)$ et soit (x_n) une suite générique des points de X telle que $\hat{h}_L(x_n) \to \hat{h}_L(X)$. Alors cette suite est équidistribuée, dans le sens du Théorème 1.1, par rapport à la mesure*

$$\mu = \frac{c_1(L_\sigma, \|\ \|_\sigma)^d}{\deg_L(X)} \ ,$$

$c_1(L_\sigma, \|\ \|_\sigma)^d$ étant la courbure de la métrique du cube fixée sur L_σ.

La preuve utilise le théorème précédent, sur une suite de modèles de A utilisée pour la construction de la hauteur normalisée.

La conjecture de Bogomolov généralisée (Théorème 0.3) peut alors être reformulée de la manière suivante : *si A est une variété abélienne définie sur un corps de nombres K et X est une sous-variété définie sur une extension finie de K, qui n'est pas de torsion, alors $\hat{h}_L(X) > 0$.*

2. Conjecture de Bogomolov : approche qualitative

On présente ici les principales idées de la preuve de la conjecture de Bogomolov généralisée (Théorème 0.3), preuve due à Zhang [41], qui étend la démonstration de Ullmo dans le cas d'une courbe plongée dans sa jacobienne ([36]). Soient A une variété abélienne sur le corps de nombres K, L un faisceau inversible ample et symétrique sur A et $\psi : [2]^*L \to L^{\otimes 4}$ un isomorphisme fixé. On muni L des métriques du cube qui font des ψ_σ des isométries. Il s'agit de montrer que si X n'est pas de torsion, il n'existe aucune suite générique de points de X dont les hauteurs normalisées tendent vers 0 (on appelle une telle suite une suite de petits points). Puisque $\hat{h}_L(X) \geq 0$, en tenant compte du théorème d'équidistribution, l'existence d'une telle suite impliquerait $\hat{h}_L(X) = 0$ et elle serait équidistribuée par rapport à la mesure $\mu = \frac{c_1(L_\sigma, \| \ \|_\sigma)^d}{\deg_L(Y)}$.

La démonstration du Théorème 0.3 se fait par l'absurde, en parcourant les pas suivants :

1. Réduction au cas où le fixateur de X dans A, $G(X) = \{a \in A \ / \ a+X = X\}$ est trivial. Essentiellement, on utilise une isogénie $A \to A' \times A''$, où $A' = A/G$ et A'' est la composante connexe de G contenant l'élément neutre. Une suite générique de petits points dans X fournit une telle suite dans $X' = X/G \subset A'$, qui est à fixateur trivial.

2. Soit pour tout entier $m \geq 2$ l'application

$$\begin{array}{rcl} \alpha_m : X^m & \to & A^{m-1} \\ (x_1, \ldots, x_m) & \mapsto & (x_2 - x_1, \ldots, x_m - x_{m-1}) \ . \end{array}$$

Alors, si $G(X)$ est trivial, pour m assez grand l'application α_m est quasi-finie de degré générique 1. On utilise le fait que, si on note, pour $x \in X$,

$$G(x) = \{a \in A \ / \ a + x \in X\} \ ,$$

alors $\cap_{x \in X} G(x) = G(X) = 0$, et donc on peut trouver $(\xi_1, \ldots, \xi_m) \in X^m$ pour m suffisament grand tel que $G(\xi_1) \cap \cdots \cap G(\xi_m) = 0$. Mais cette intersection est isomorphe à la fibre de α_m qui contient $(\xi_1, \ldots, \xi_m)$.

L'assertion implique qu'il existe des ouverts $U_m \subset X^m$ et $V_m \subset \alpha_m(X_m)$ tels que $\alpha_m : U_m \to V_m$ soit un isomorphisme. Notons aussi qu'un tel α_m possède une fibre de dimension exceptionnelle, $\alpha_m^{-1}(0, 0, \ldots, 0) \simeq X$.

3. Soient $pr_i : A^m \to A$ la i-ème projection et $L_m = \otimes_i pr_i^* L$, muni des métriques du cube induites par celles de L. Alors sa courbure est

$$\omega_{m,\sigma} = \sum_{i=1}^{m} pr_i^* c_1(L_\sigma, \| \ \|_\sigma)$$

et

$$\hat{h}_m(x_1, \ldots, x_n) := \hat{h}_{L_m}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{m} \hat{h}_L(x_i) \ .$$

4. On suppose qu'il existe une suite générique (x_n) de petits points dans X et soit m suffisament grand pour que l'application α_m de l'étape (2) soit quasi-finie de degré générique 1. On construit une suite génériques de petits points $(u_n) \subset U_m$ de la manière suivante : soit $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^m$, $\phi(n) = (\phi_1(n), \ldots, \phi_m(n))$ une bijection fixée. Puisque la suite (x_n) est Zariski dense en X, la suite $(y_n := (x_{\phi_1(n)}, \ldots, x_{\phi_m(n)}))$ est Zariski dense en X^m, ce qui entraine qu'elle a une sous-suite générique. En prenant éventuellement une sous-suite de celle-ci, on obtient une suite générique $(u_n) \subset U_m$. La suite

$(v_n := \alpha_m(u_n)) \subset V_m$ est elle aussi générique, et en plus (u_n) et (v_n) sont suites de petits points par rapport aux faisceaux hermitiens correspondants.

5. Le théorème d'équidistribution appliqué aux deux suites construites au pas précédent dit qu'elles sont équidistribuées par rapport aux mesures normalisées μ et ν construites à partir de $\omega_{m,\sigma}$, respectivement $\omega_{m-1,\sigma}$ de l'étape (3). Puisque $\alpha_m : U_m \to V_m$ est un isomorphisme et $\alpha_m(u_n) = v_n$ on obtient que $\alpha_m^{-1}(\nu) = \mu$ sur U_m et ensuite sur $X_\sigma^m(\mathbb{C})$.

6. Soit x un point lisse de $X_\sigma(\mathbb{C})$. La forme μ est non-nulle en $(x, x, \ldots, x) \in X_\sigma^m(\mathbb{C})$. Mais α_m envoie la diagonale de X^m en $(0, 0, \ldots, 0)$, ce qui entraîne que $\alpha_m^{-1}(\nu)$ s'annule en $(x, x, \ldots, x)$. La contradiction montre le théorème.

Remarque 2.1. Ullmo montre la conjecture de Bogomolov pour une courbe C plongée, via j, dans la jacobienne J en utilisant, dans le rôle de α_m, l'application $s : C^g \to J$, $(x_1, \ldots, x_g) \mapsto j(x_1) + \cdots + j(x_g)$ [36].

3. Minoration de la hauteur d'une sous-variété qui n'est pas de torsion

David et Philippon ont donné une démonstration indépendante de la conjecture de Bogomolov généralisée [12]. L'inégalité 1.2 implique le fait qu'il serait suffisant de montrer, si X est une sous-variété qui n'est pas de torsion de la variété abélienne A, que $\hat{h}_L(X) > 0$. David et Philippon trouvent une borne inférieure pour $\hat{h}_L(X)$, en utilisant des méthodes propres à l'approximation diophantienne. La définition de la hauteur, ainsi que les calculs, ne sont pas de nature "arakelovienne". Notons toutefois que la hauteur normalisée construite en [24] à partir des formes de Chow coïncide avec celle décrite dans la première section de ces notes.

Une version arakelovienne de ce résultat concernant une borne effective de la hauteur de X est donné en [19]. On présente dans ce paragraphe les éléments de la preuve, en soulignant le fait que, bien qu'elle reprend certaines idées de David et Philippon, elle est dans l'esprit des preuves qualitatives de Ullmo et Zhang.

Le théorème principal de ce paragraphe est le suivant :

Théorème 3.1. *Si X est une sous-variété d'une variété abélienne A, telle que X n'est pas la translatée d'une sous-variété abélienne, alors*

$$\widehat{h}_L(X) > C^{\gamma_X} \deg_L(X)^{-4\max(1, 2(\gamma_X - 1))(d+1)} (\log \deg_L(X))^{-4(d+1)}$$

où $C = C(A_{/K}, L)$ est une constante indépendante de X, B_X est la sous-variété abélienne de A engendrée par $X - X$, γ_X est le nombre minimal de $X - X$ dont la somme vaut B_X, $d = \dim B_X$.

Remarquons que l'estimation trouvée est géométrique, dans le sens où elle ne dépend pas du corps de définition de X, et polynomiale en $(\deg_L X)^{-1}$.

Si la sous-variété X est la translatée d'une sous-variété abélienne B de A par un point x_0 qui n'est pas de torsion, la minoration de sa hauteur n'est plus de nature géométrique. En effet, cette minoration sera controlée par la hauteur de x_0 :

Théorème 3.2. *Soient A une variété abélienne définie sur un corps de nombres K et L un faisceau inversible, ample et symétrique sur A. Si B est une sous-variété abélienne de A, $x_0 \in A$ est un point qui n'est pas de torsion et $X = x_0 + B$, alors*

$$\widehat{h}_L(X) = (\dim B + 1)\, h_{A/B}(x_0)$$

où $h_{A/B}(x_0) = \widehat{h}_L(x_0) - \widehat{h}_L(b_0)$, b_0 étant un point de B déterminé par x et L.

Les éléments de la preuve (due à Chambert-Loir) seront présentée dans le paragraphe suivant.

Revenons maintenant aux idées principales de la preuve du Théorème 3.1. Soient donc A une variété abélienne définie sur un corps de nombres K, de dimension g, et L un faisceau inversible, très ample et symétrique sur A. Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{L})$ un modèle de (A, L) sur $\mathcal{O}_K$. On munit $\mathcal{L}$ des métriques du cube à l'infini. On suppose de plus que le plongement projectif induit par L fait de A une variété projectivement normale. Sur $\mathcal{A}^m$ on considère les faisceaux $\mathcal{L}^{(m)} := \bigotimes_{i\in\{1,\dots,m\}} \mathcal{L}_i$, où on a noté par $\mathcal{L}_i$ l'image inverse $pr_i^*\mathcal{L}$.

Soient X une sous-variété de A, définie sur une extension finie K' de K, de dimension d_0, et $\mathcal{X}$ son adhérence schématique dans $\mathcal{A}$. On peut alors définir le degré de X et la hauteur de $\mathcal{X}$ par rapport à $\overline{\mathcal{L}}$. Supposons maintenant que X n'est pas la translatée d'une sous-variété abélienne de A.

On utilisera dans ce cas aussi un morphisme qui a une fibre de dimension exceptionnelle. On considère l'isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} \varpi & : & A^2 \longrightarrow A^2 \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & (x_1, x_1 - x_2) \end{array} .$$

Soit $W = \varpi\left(X^2\right)$ et $\mathcal{W}$ son adhérence schématique dans $\mathcal{A}_2$. On a

$$\widehat{h}_{L^{(2)}}(W) \leq 4^{2(d_0+1)} \widehat{h}_L\,(X)$$

(voir [12]), où $d_0 = \dim X$. Pour prouver le théorème 3.1 on trouvera une minoration pour $\widehat{h}_{L^{(2)}}(W)$.

Soient B la sous-variété abélienne engendrée par $X - X$ et $\mathcal{B}$ son adhérence schématique dans $\mathcal{A}$. Soient γ_X le nombre de copies de $X - X$ dont la somme vaut B et $d = \dim B$. Supposons pour l'instant que $\gamma_X = 1$. Si on regarde le morphisme surjectif

$$pr_2 : W \to B$$

sa fibre générique est de dimension $2d_0 - d$ et la condition "X n'est pas la translatée d'une sous-variété abélienne" implique

$$\dim\left(W \cap pr_2^{-1}(0)\right) = \dim(X) = d_0 > 2d_0 - d\ .$$

La stratégie de la preuve est la suivante : on trouvera un section d'une puissance de $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{B}$, avec un grand ordre d'annulation en 0 et de norme controlée. Son image inverse sur $\mathcal{W}$ aura un grand ordre d'annulation le long de la fibre $W \cap pr_2^{-1}(0)$, qui est la fibre de dimension exceptionnelle. L'estimation du volume d'un voisinage de cette fibre, la formule de Cauchy et la relation entre la hauteur de W et celle du diviseur de notre section ([8], Propositions 3.2.1) permettra de minorer la hauteur de W. Celle-ci à son tour permet de minorer la hauteur de X, à l'aide de la formule ci-dessus. On peut aussi remarquer que le cas traité en premier sera celui de la bonne reduction, où la hauteur normalisée est elle-même un nombre d'intersection.

Si δ, m et p sont des entiers positifs, le plongement

$$\Lambda := H^0\left(\mathcal{B}, \mathcal{L}^{\otimes \delta p^m}\right) \hookrightarrow V := \bigoplus_{\sigma \in S_{\infty,K}} H^0\left(B_\sigma, L_\sigma^{\otimes \delta p^m}\right)$$

fait de Λ un réseau de V. Sur V on considère la norme "sup" :

$$(f_\sigma)_{\sigma \in S_{\infty,K}} \in V \longmapsto \|(f_\sigma)\|_{\sup} = \max_{\sigma \in S_{\infty,K}} \sup_{x \in B_\sigma(\mathbb{C})} \|f_\sigma\|(x)\ .$$

On cherchera un élément de Λ tel que son image dans chaque espace $H^0\left(B_\sigma, L_\sigma^{\otimes \delta p^m}\right)$ ait un grande ordre d'annulation en 0_σ et dont on pourra contrôler la norme. Il nous faut pour ceci annuler les dérivées jusqu'à l'ordre correspondant. On a besoin donc de définir une base d'opérateurs différentiels d'ordre un sur un voisinage du point en question, base induite d'une même famille d'opérateurs différentiels sur X. On obtient cette famille en relevant une base d'opérateurs différentiels sur l'espace projectif, grace au lemme suivant, variante d'un résultat de Faltings ([16]) :

Lemme 3.3. *Soit $X \subset \mathbb{P}^N$ une variété irréductible sur un corps K, de dimension d et soit $x \in X$ un point lisse. Il existe un morphisme fini $\pi : X \to \mathbb{P}^d$ de degré $\deg X$, et une section globale non nulle $s \in H^0\left(\mathbb{P}^N, O(\delta)\right)$, $\delta \leq (N-d)\deg X$, tels que le faisceau d'idéaux de $V(s)$ annule $\Omega^1_{X/\mathbb{P}^d}$ et $x \notin V(s)$. En particulier, π est étale sur $X \setminus (X \cap V(s))$, donc en x. De plus,*

$$\mathrm{Norm}_\pi\left(s_{/X}\right) \in H^0\left(\mathbb{P}^d, O(\delta \deg X)\right)$$

définit une hypersurface, dont l'idéal annule, lui aussi, $\Omega^1_{X/\mathbb{P}^d}$.

On peut maintenant énoncer

Proposition 3.4. *Soit $r < 1$ un réel positif tel que pour toute place à l'infini $r\,|\widetilde{s}_\sigma(0_\sigma)| < 1$ et la projection de Faltings soit étale au dessus du disque de rayon $\max\{r, r\,|\widetilde{s}_\sigma(0_\sigma)|\}$, centré dans l'image de 0_σ ($\widetilde{s}$ étant une section convenable de $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$). Soit aussi $\varepsilon \in \left]0, \frac{1}{d+1}\right[$. Si $\delta p^m \gg 0$, il existe un élément non nul du réseau Λ dont l'indice en 0 est supérieur à $T := (d!)^{-1/d}\delta p^{(1-\varepsilon)m}$ et dont la norme* sup *vérifie*

(3.5)

$$\log \|f\|_{\sup} \leq C_1 \left(m\log p + \log\delta + p^{\varepsilon m} r^2 \log\delta + \log\frac{1}{r}\right) \delta p^{[1-\varepsilon(d+1)]m} \; .$$

Démonstration. L'argument qui nous permettra de choisir f est la version suivante du lemme de Siegel, dont la preuve s'appuie sur le théorème de Minkovski :

Lemme 3.5 (Lemme de Siegel)**.** *Soient V et $\widetilde{V}$ deux espaces vectoriels réels normés, de dimensions N et $\widetilde{N}$, avec des $\mathbb{Z}$-réseaux Λ, respectivement $\tilde{\Lambda}$, et $\phi : V \to \widetilde{V}$ une application linéaire surjective telle que $\phi(\Lambda) \subseteq \tilde{\Lambda}$. Soit $V' = \ker\phi$ et $\Lambda' = \Lambda \cap V'$. Il existe un élément $f \in \Lambda' \setminus \{0\}$ tel que*

$$\|f\|_V \leq 2 \left(\frac{2^N \, \|\phi\|^{\widetilde{N}}}{\mathrm{Vol}(\mathrm{V}, \Lambda)\lambda_1(\widetilde{\mathrm{V}}, \widetilde{\Lambda})^{\widetilde{N}}} \right)^{\frac{1}{N-\widetilde{N}}}$$

où $\mathrm{Vol}(\mathrm{V}, \Lambda)$ *est le covolume de Λ dans V et $\lambda_1\,(V, \Lambda)$ est la norme minimale d'un élément non-nul de Λ.*

On applique le lemme ci-dessus dans le cas de l'application linéaire

$$\phi : V \longrightarrow \mathbb{R}^{n\binom{d+T}{d}} \; ,$$

construite à partir de

$$\begin{array}{rcl} \phi_e : V & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (f_\sigma)_{\sigma \in S_{\infty,K}} & \longmapsto & \left(\widetilde{s}^{\,e}_\sigma\,(0_\sigma)\, D_{e\sigma}(\tilde{f}_\sigma)\,(0_\sigma) \right)_{\sigma \in S_{\infty,K}} \end{array}$$

où $D_{e\sigma}$ est un opérateur différentiel autour de $0_\sigma \in B_\sigma$ et $f_\sigma = \tilde{f}_\sigma \varphi_\sigma$, avec $\tilde{f}_\sigma$ une section de $\mathcal{O}_{B_\sigma}$ et φ un générateur de $\mathcal{L}^{\delta p^m}$ autour de la section nulle. On peut choisir ce générateur avec la norme bornée par une constante, grâce à un résultat de Ullmo [35] (et à la bonne réduction !). On a $\phi(\Lambda) \subset \mathcal{O}_{K'}^{\binom{d+T}{d}}$.

Pour estimer la norme de ϕ on utilise le lemme suivant, conséquence du lemme de Schwarz et de la formule de Cauchy :

Lemme 3.6. *Soit σ une place à l'infini fixée, $\| \ \|$ la métrique correspondante sur L_σ, δ un entier positif et*

$$f \in H^0(B_\sigma, L_\sigma^\delta)$$

Soit $r < 1$ un réel positif tel que la projection de Faltings soit étale au dessus de Δ_r, la boule de rayon r autour de $x = \pi_\sigma(0) = (1 : 0 : \dots 0)$. Alors il existe une constante positive C_0 telle que

$$\|D_e f\|(0) \leq C_0^{\delta r^2} \left(\prod_{i=1}^{d} e_i! \right) \frac{1}{r^e} \|f\|_{\sup} \ .$$

Si, de plus, π_σ est étale au dessus de la boule Δ_{2r}, $2r < 1$ et l'indice de f en 0 est supérieur à $T > 0$, il existe une constante C_0' telle que

$$\log \|f(z)\| \leq T \log\left(\frac{1}{2}\right) + C_0' \delta r^2 + \log \|f\|_{\sup}$$

pour tout $z \in \pi_\sigma^{-1}(\Delta_r)$.

Enfin, pour borner $\mathrm{Vol(V,\Lambda)}$ on fait appel au Théorème de Hilbert-Samuel arithmétique ([1]) :

$$|-\log \mathrm{Vol}(V, \Lambda)| = O((\delta p^m)^d \log(\delta p^m)) < (\delta p^m)^{d+1} p^{-\varepsilon m(d+1)} \ . \tag{3.6}$$

■

On utilise la section qu'on vient de trouver pour minorer la hauteur de W, et par la suite celle de X. On note toujours f la section de $\mathcal{L}^{(2)^{\otimes \delta p^m}}$ obtenue en prenant l'image inverse de f par pr_2. On a

$$\begin{aligned} \delta p^m \left(\hat{c}_1 \left(\overline{\mathcal{L}^{(2)}} \right)^{2d_0+1} / \mathcal{W} \right) &= \left(\hat{c}_1 \left(\overline{\mathcal{L}^{(2)}} \right)^{2d_0} / \mathrm{div}(f) \right) - \\ &\quad - \sum_{\sigma \in S_{\infty,K}} \int_{W_\sigma(\mathbb{C})} \log \|f_\sigma(z)\| c_1 \left(\overline{L_\sigma^{(2)}} \right)^{2d_0} \delta_{W_\sigma} \ . \end{aligned}$$

La bonne réduction fait que le premier terme est positif, et chaque intégrale peut s'écrire, si on note $d\mu = c_1 \left(\overline{L_\sigma^{(2)}} \right)^{2d_0} \delta_{W_\sigma}$,

$$\begin{aligned} \int_{W_\sigma(\mathbb{C})} \log \|f_\sigma(z)\| d\mu &= \int_{W_\sigma(\mathbb{C}) \cap (\pi \circ pr_2)^{-1}(\Delta_r)} \log \|f_\sigma(z)\| d\mu + \\ &\quad + \int_{W_\sigma(\mathbb{C}) \setminus (\pi \circ pr_2)^{-1}(\Delta_r)} \log \|f_\sigma(z)\| d\mu \ . \end{aligned}$$

Pour la première intégrale on utilise la majoration du $\log \|f_\sigma(z)\|$ fournie par le Lemme 3.6 et l'estimation suivante du volume d'un voisinage de la fibre au dessus de 0 :

Lemme 3.7. *Soit Δ_r le disque de rayon r dans $\mathbb{P}^d$. On a la minoration :*

$$\int_{W_\sigma(\mathbb{C})\cap(\pi\circ pr_2)^{-1}(\Delta_r)} c_1\left(\overline{L_\sigma^{(2)}}\right)^{2d_0} \delta_{W_\sigma} \geq C_2 d_X r^{2d_0}$$

(pour un résultat similaire voir [12], Lemme 4.3).

Pour la partie qui reste on utilise la borne de la norme de f donnée par la Proposition 3.4 et on obtient

Lemme 3.8. *Il existe une constante ε_0 telle que, si $\varepsilon \leq \varepsilon_0$,*

$$h_{\overline{\mathcal{L}^{(2)}}}(\mathcal{W}) \geq p^{-\varepsilon m(d+1)}\left[C_3\varepsilon^{2d_0}\frac{1}{d_X}p^{\varepsilon m(d-d_0)} - C_3'(m\log p + \log\delta)\right] .$$

Le fait que $d \geq d_0 + 1$ nous permet de choisir m et p convenablement de d'obtenir

Proposition 3.9. *Si X est une sous-variété d'une variété abélienne à bonne réduction partout, définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$, telle que X ne soit pas la translatée d'une sous-variété abélienne et $X - X$ soit une sous-variété abélienne, alors*

$$\widehat{h}_L(X) > C_4(d_X)^{-2\frac{d+1}{d-d_0-\frac{1}{2}}}(\log(d_X))^{-\frac{d+d_0+\frac{5}{2}}{d-d_0-\frac{1}{2}}} .$$

Si $X - X$ n'est pas une sous-variété abélienne, on note γ_X le nombre minimal de copies de $X - X$ dont la somme vaut B_X, la sous-variété abélienne de A engendrée par $X - X$. Une récurrence sur γ_X permet de prouver

Théorème 3.10. *Si X est une sous-variété d'une variété abélienne A à bonne réduction partout, définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$, telle que X ne soit pas la translatée d'une sous-variété abélienne, alors*

$$\widehat{h}_L(X) > C^{\gamma_X}\deg_L(X)^{-4\max(1,2(\gamma_X-1))(d+1)}(\log\deg_L(X))^{-4(d+1)}$$

où C est une constante indépendante de X, $d_0 = \dim X$ et $d = \dim B_X$.

Considérons maintenant le cas général, celui où A n'a pas nécessairement bonne réduction. On considère une suite de modèles $(\mathcal{A}_k, \mathcal{L}_k)$ de (A, L) sur $\mathcal{O}_K$, tel que $\lim_{k\to\infty} h_{\overline{\mathcal{L}_k}}(X) = \widehat{h}_L(X)$ pour toute sous-variété X de A, on fait des calculs analogues à ceux précédents (avec les changements dus à la mauvaise réduction). Par un passage à limite sur cette suite de modèles on obtient le Théorème 3.1.

Signalons seulement que par rapport au cas de la bonne réduction, il y a trois changements essentiels :

(1) La norme du générateur φ, utilisé dans la preuve de la Proposition 3.4, n'est plus bornée par une constante.

(2) La hauteur de la sous-variété abélienne B n'est plus nulle, et en consé-quence il y aura un terme de plus dans l'estimation (3.6).

(3) Les hauteurs des sous-variétés ne sont plus positives ou nulles, en particulier celle du diviseur de la section trouvée dans la Proposition 3.4.

4. Translatée d'une sous-variété abélienne par un point qui n'est pas de torsion

Ce paragraphe est consacré aux principaux éléments de la preuve du Théorème 3.2, due à Chambert-Loir (voir [10] pour les details de ce type d'argument).

Soient $d_0 = \dim X = \dim B$ et $d_X(= \deg_L X) = d_B(= \deg_L B)$. On a dans ce cas

$$h_{\overline{\mathcal{L}}}(X) = \frac{\left(\widehat{c}_1\left(\overline{\mathcal{L}}\right)^{d_0+1}/\mathcal{X}\right)}{d_X} = \frac{\left(\widehat{c}_1\left(t_{x_0}^*\overline{\mathcal{L}}\right)^{d_0+1}/\mathcal{B}\right)}{d_B}$$

où t_{x_0} est la translation par x_0 et $t_{x_0}^*\mathcal{L}$ est le modèle de $t_{x_0}^*L$. Mais

$$t_{x_0}^*L \otimes L^{-1} \in \mathrm{Pic}_0(A) \ ,$$

donc

$$t_{x_0}^*L = L \otimes Q$$

avec $Q \in \mathrm{Pic}_0(A)$. On obtient alors pour les faisceaux métrisés

$$t_{x_0}^*\overline{\mathcal{L}} = \overline{\mathcal{L}} \otimes \overline{\mathcal{Q}} \otimes \overline{\mathcal{L}}_{x_0} \ .$$

Alors

$$\left(\widehat{c}_1\left(t_{x_0}^*\overline{\mathcal{L}}\right)^{d_0+1}/\mathcal{B}\right) = $$
$$= \sum_{a+b+c=\dim B+1} \binom{\dim B+1}{a,b,c} \left(\widehat{c}_1\left(\overline{\mathcal{L}}\right)^a \widehat{c}_1\left(\overline{\mathcal{Q}}\right)^b \widehat{c}_1\left(\overline{\mathcal{L}}_{x_0}\right)^c/\mathcal{B}\right) \ .$$

Mais le support du faisceau $\overline{\mathcal{L}}_{x_0}$ est de dimension 1, donc $\widehat{c}_1\left(\overline{\mathcal{L}}_{x_0}\right)^c = 0$ si $c > 1$. Ceci implique

$$\begin{aligned}\left(\widehat{c}_1\left(t_{x_0}^*\overline{\mathcal{L}}\right)^{d_0+1}/\mathcal{B}\right) &= \sum_{a+b=\dim B+1} \binom{\dim B+1}{a,b} \left(\widehat{c}_1\left(\overline{\mathcal{L}}\right)^a \widehat{c}_1\left(\overline{\mathcal{Q}}\right)^b/\mathcal{B}\right) + \\ &\quad + \sum_{a+b=\dim B} \binom{\dim B+1}{a,b,1} \left(c_1\left(L\right)^a c_1\left(Q\right)^b/B\right) h_{\overline{\mathcal{L}}}(x_0) \ .\end{aligned}$$

On a
$$\sum_{a+b=\dim B} \binom{\dim B+1}{a,b,1} \left(c_1\left(L\right)^a c_1\left(Q\right)^b /B\right) = \left(\dim B+1\right) \deg_L B\ .$$

D'autre part, il existe un point $b_0 \in B$ tel que $Q_{/B} \simeq t^*_{b_0} L_{/B} \otimes L^{-1}_{/B}$ et donc
$$\sum_{a+b=\dim B+1} \binom{\dim B+1}{a,b} \left(\widehat{c}_1\left(\overline{\mathcal{L}}\right)^a \widehat{c}_1\left(\overline{\mathcal{Q}}\right)^b /\mathcal{B}\right) =$$
$$= -\left(\dim B+1\right) \deg_L B h_{\overline{\mathcal{L}}}(b_0)\ .$$

On obtient donc
$$h_{\overline{\mathcal{L}}}(X) = \left(\dim B+1\right)\left(h_{\overline{\mathcal{L}}}(x_0) - h_{\overline{\mathcal{L}}}(b_0)\right)\ ,$$
ce qui conclut la preuve.

5. Résultats partiels et développements ultérieurs

Szpiro [32], [33] a abordé pour la première fois la conjecture de Bogomolov dans le contexte de la théorie d'Arakelov. Soit C une courbe définie sur un corps de nombres K avec le modèle $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{O}_K$ et soit $c_1(\mathcal{L})$ la forme de courbure du faisceau $\mathcal{L}$. Szpiro a remarqué que si $c_1(\Omega^1_{\mathcal{C}/\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K})^2 > 0$, alors le Théorème 0.1 est vrai. D'autre part, l'implication inverse est vraie si un critère d'amplitude de type Nakai-Moishezon est valable. Un résultat de type Nakai-Moishezon a été prouvé par Zhang ([37] pour les surfaces arithmétiques et [39] en général), qui l'utilise pour obtenir le Théorème 1.2, (i) (voir aussi Kim [17], [18]). Dans ce contexte, des résultats partiels sur la conjecture de Bogomolov ont été obtenus par Burnol [9] et par Zhang [38], [40]. Zhang démontre la conjecture de Bogomolov généralisée pour une courbe plongée dans $\mathbb{G}_m^n$ [37] et pour les sous-variétés des tores [39]. Des présentations plus détaillées du rôle joué par la théorie d'Arakelov dans l'approche de la conjecture de Bogomolov sont dues à Abbes [2] et à Zhang [42].

Un analogue du théorème d'équidistribution (Théorème 1.2, (ii)) pour les tores, par une méthode plus élémentaire, a été établi par Bilu [4]. Schmidt [31] et Bombieri et Zannier [6] ont donné des preuves de la conjecture de Bogomolov généralisée pour des tores et fornissent des bornes explicites, exponentielles dans le degré de la sous-variété X, soit pour le minimum essentiel de la hauteur des points de X, soit pour la hauteur de X. David et Philippon [13] calculent une borne polynomiale en $\deg X$. Amoroso et David [3] fournissent la meilleure borne possible pour la hauteur de X, en reliant en même temps la conjecture de Bogomolov généralisée au problème de Lehmer généralisée.

Bombieri et Zannier [7] et David et Philippon [12] ont prouvé la conjecture de Bogomolov généralisée pour des variétés abéliennes à multiplications complexes, et Philippon [24]III pour des produits de courbes elliptiques.

David et Philippon ont repris en [15] la démonstration de la conjecture de Bogomolov généralisée dans [12] et donnent des minorations totalement explicites pour la hauteur normalisée d'une sous-variété d'une variété abélienne qui n'est pas de torsion et pour les minimums successifs de la hauteur normalisée des points.

L'analogue de la conjecture de Bogomolov généralisée pour les variétés semi-abéliennes a été prouvé par Chambert-Loir [10], dans le cas où la variété est une extension isotriviale, et par David et Philippon [14] dans le cas général.

Dans [25] Poonen construit une hauteur canonique $h : A(\overline{K}) \to \mathbb{R}$ sur une variété semi-abélienne A définie sur un corps de nombres (si A est abélienne, on peut prendre la hauteur normalisée associée à un faisceau ample et symétrique). Il propose le problème suivant : *Soient X une sous-variété fermée de A géométriquement intègre, Γ un sous-groupe de $A(\overline{\mathbb{Q}})$ de rang fini et*

$$\begin{array}{rcl} \Gamma' & = & \{x \in A(\overline{\mathbb{Q}}) \;/\; nx \in \Gamma \text{ pour un } n \in \mathbb{N}^*\} \\ \Gamma'_\epsilon & = & \{\gamma + z \;/\; \gamma \in \Gamma' \;,\; h(z) < \epsilon\} \;, \end{array}$$

Si $X_{\overline{\mathbb{Q}}}$ n'est pas la translatée d'une sous-variété semi-abélienne de $A(\overline{\mathbb{Q}})$ par un point de Γ', alors il existe un $\epsilon > 0$ tel que $X(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma'_\epsilon$ n'est pas Zariski dense en X ("Mordell-Lang plus Bogomolov"). Poonen et, indépendamment, Zhang [43] prouvent cette propriété dans toutes les situations où la conjecture de Bogomolov généralisée et le théoréme d'équidistribution des petits points ont lieu pour A.

Rémond [28] utilise les calculs ainsi que certaines des idées de David et Philippon [15] et prouve une version explicite de la conjecture de Lang démontrée par Faltings [16], en donnant une borne explicite du nombre des translatées :

Théorème 5.1. *Soient A une variété abélienne de dimension g définie sur un corps de nombres, $\mathcal{L}$ un faisceau inversible ample et symétrique sur A, X une sous-schéma fermé de dimension $m-1$ et Γ un sous-groupe de $A(\overline{\mathbb{Q}})$ de rang $r \in \mathbb{N}$. Alors il existe un entier S,*

$$S \leq (c(A, \mathcal{L}) \deg_{\mathcal{L}} X)^{(r+1)g^{5m^2}} \quad ,$$

des éléments $x_1, \ldots, x_S \in X(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma$ *et des sous-variétés abéliennes* $B_1, \ldots, B_S$ *de* A *de sorte que* $x_i + B_i \in A$ *pour* $i \in \{1, \ldots, S\}$ *et*

$$X(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma = \bigcup_{i=1}^{S} (x_i + B_i)(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma \ .$$

En plus, la constante $c(A, \mathcal{L})$ *(un terme de hauteur) peut être calculée explicitement.*

Par ailleurs, en utilisant les mêmes methodes, Rémond [29] donne des versions explicites pour un théorème "Mordell-Lang plus Bogomolov" pour des tores. Dans [30] il prouve ce théorème pour des variétés semi-abéliennes.

Dans une suite d'articles ([21], [22], [23]), Moriwaki, après avoir défini une fonction hauteur pour variétés définies sur un corps de degré de transcendance fini sur $\mathbb{Q}$, démontre la propriété d'équidistribution des points de petite hauteur ([21]), la conjecture de Bogomolov ([21], [22]) et le théorème "Mordell-Lang plus Bogomolov" ([23]) dans ce contexte.

Chambert-Loir [11] étudie des propriétés d'équidistribution aux places finies, dans le cadre des espaces de Berkovich.

Références

[1] Abbes, A. ; Bouche, T. : *Théorème de Hilbert-Samuel "arithmétique"*, Ann. de l'Inst. Fourier **45** (1995), 375–401

[2] Abbes, A. : *Hauteur et discrétude (d'après L. Szpiro, E. Ullmo et S. Zhang)*, Séminaire Bourbaki, Vol. 1996/97, Astérisque **245** (1997), Exp. No. 825, 4, 141-166

[3] Amoroso, F. ; David, S. : *Minoration de la hauteur normalisée dans un tore*, J. Inst. Math. Jussieu **2** (2003), 335–381

[4] Bilu, Y. : *Limit distribution of small points on algebraic tori*, Duke Math. J. **89** (1997), 465–476

[5] Bogomolov, F. A. : *Points of finite order on an abelian variety*, Math. USSR Izv. **17** (1981), 55–72

[6] Bombieri, E. ; Zannier, U. : *Algebraic points on subvarieties of* $(\mathbb{G}_m)^n$, Internat. Math. Res. Notices t. **7** (1995), 333–347

[7] Bombieri, E. ; Zannier, U. : *Heights of Algebraic Points on Subvarieties of Abelian Varieties*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), **23** (1996) no.4, 779–792

[8] Bost, J.-B. ; Gillet, H. ; Soulé, C. : *Heights of projective varieties and positive Green forms*, J. of the AMS **7** (1994), 903–1027

[9] Burnol, J.-F. : *Weierstrass points on arithmetic surfaces*, Invent. Math. **107** (1992), 421–432

[10] Chambert-Loir, A. : *Points de petite hauteur sur les variétés semi-abéliennes*, Ann. Sci. ENS **33** (2000), no. 4, 789–821

[11] Chambert-Loir, A. : *Mesures et équidistribution sur les espaces de Berkovich*, arXiv :0304023

[12] David, S. ; Philippon, P. : *Minoration des hauteurs normalisées des sous-variétés des variétés abéliennes*, dans *Number Theory* (ed. : V. Kumar Murty, M. Waldschmidt), Contemporary Math. **210**, 1998, 333–364

[13] David, S. ; Philippon, P. : *Minoration des hauteurs normalisées des sous-variétés des tores*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa **28** (1999), 489–543

[14] David, S. ; Philippon, P. : *Sous-variétés de torsion des variétés semi-abéliennes*, C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I, Math. **331**, no. 8 (2000), 587–592

[15] David, S. ; Philippon, P. : *Minoration des hauteurs normalisées des sous-variétés des variétés abéliennes II*, Comment. Math. Helv. **77** (2002), 639–700

[16] Faltings, G. : *Diophantine approximation on abelian varieties*, Ann. of Math. (2) **133** (1991), 549–576

[17] Kim, M. : *Numerically positive line bundles on an Arakelov variety*, Duke Math. J. **61** (1990), no. 3, 805–822

[18] Kim, M. : *Small points on constant arithmetic surfaces*, Duke Math. J. **61** (1990), no. 3, 823–833

[19] Liţcanu, R. : *Minoration des hauteurs des sous-variétés de variétés abéliennes. Etude du degré des morphismes de Belyi*, thèse, Université de Paris-Sud (Orsay), 1999

[20] Liţcanu, R. : *Valuations, intersections et fonctions de Belyi - quelques remarques sur la construction des hauteurs*, à paraître

[21] Moriwaki, A. : *Arithmetic height functions over finitely generated fields*, Invent. Math. **140** (2000), 101–142

[22] Moriwaki, A. : *The canonical arithmetic height of subvarieties of an abelian variety over a finitely generated field*, J. Reine Angew. Math. **530** (2001), 33–54

[23] Moriwaki, A. : *A generalization of conjectures of Bogomolov and Lang over finitely generated fields*, Duke Math. J. **107** (2001), no. 1, 85–102

[24] Philippon, P. : *Sur les hauteurs alternatives I, II, III*, Math. Ann **289** (1991) 255-283 ; Ann. Inst. Fourier **44** (1994) 1043-1065 ; J. Math. Pures et Appl. **74** (1995) 345–365

[25] Poonen, B. : *Mordell-Lang plus Bogomolov*, Invent. Math. **137** (1999), 413–425

[26] Raynaud, M. : *Courbes sur une variété abélienne et points de torsion*, Invent. Math. **71** (1983), 207–233

[27] Raynaud, M. : *Sous-variétés d'une variété abélienne et points de torsion*, dans *Arithmetic and Geometry, Vol. I* (ed. : J. Coates, S. Helgason), Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1983, 327–352

[28] Rémond, G. : *Décompte dans une conjecture de Lang*, Invent. Math. **142** (2000), 513–545

[29] Rémond, G. : *Sur le sous-variétés des tores*, Compositio Math. **134** (2002), 337–366

[30] Rémond, G. : *Approximation diophantienne sur les variétés semi-abéliennes*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup IVème série, **36** (2003), 191–212

[31] Schmidt, W. M. : *Heights of points on subvarieties of* $\mathbb{G}_m^n$, in *Number Theory 1993-1994* (ed. S. David), London Mathematical Society Series, t. 235, 157–187

[32] Szpiro, L. : *Small Points and Torsion Points*, Contemp. Math. **58** (1986), 251–260

[33] Szpiro, L. : *Sur les propriétés numériques du faisceau dualisant relatif d'une surface arithmétique*, dans *Grothendieck Festschrift* (ed. P. Cartier, L. Illusie, N. M. Katz, G. Laumon, Yu. Manin et K. A. Ribet), vol. III, Progress in Mathematics, 87, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1990, 229–246

[34] Szpiro, L., Ullmo, E., Zhang, S. : *Équidistribution des petits points*, Invent. Math. **127** (1997), 337–347

[35] Ullmo, E. : *Points entiers, points de torsion et amplitude arithmétique*, Amer. J. of Math. **117** (1995), 1039–1056

[36] Ullmo, E. : *Positivité et discrétion des points algébriques des courbes*, Ann. of Math. (2) **147** (1) (1998), 81–95

[37] Zhang, S. : *Positive line bundles on arithmetic surfaces*, Ann. of Math. (2) **136** (1992), 569–587

[38] Zhang, S. : *Admissible pairing on a curve*, Invent. Math. **112** (1993), 171–193

[39] Zhang, S. : *Positive line bundles on arithmetic varieties*, J. of the AMS **8** (1995), 187–221

[40] Zhang, S. : *Small points and adelic metrics*, J. of Alg. Geom. **4** (1995), 281–300

[41] Zhang, S. : *Equidistribution of small points on abelian varieties*, Ann. of Math. (2) **147** (1) (1998), 159–165

[42] Zhang, S. : *Small points and Arakelov Theory*, Proceedings of the I.C.M., Vol. II (Berlin, 1998). Doc. Math. 1998, Extra Vol. II, 217–225 (electronic)

[43] Zhang, S. : *Distribution of almost division points*, Duke Math. J. **103** (2000), no. 1, 39–46

Acknowledgements

This work was partially supported by the Research Training Networks (FP5) "Arithmetic Algebraic Geometry" (HPRN-CT-2000-00120) and "Galois Theory and Explicit Methods in Arithmetic" (HPRN-CT-2000-00114), the CEEX Programme CEx05-D11-11/04.10.2005 and the CRM Research Programme "Arakelov Geometry and Shimura Varieties".

Universitatea "Al. I. Cuza", Faculty of Mathematics, 700506 Iaşi, Romania ; E-mail : litcanu@uaic.ro