

FEUILLETAGES PAR VARIÉTÉS COMPLEXES ET PROBLÈMES D'UNIFORMISATION

LAURENT MEERSSEMAN

ABSTRACT. Ce texte est une introduction aux feuilletages par variétés complexes et aux problèmes d'uniformisation de tels feuilletages. Nous donnons en introduction une liste fondamentale de questions naturelles sur ces objets ainsi qu'un aperçu des résultats connus.

INTRODUCTION

Ce texte constitue une introduction aux feuilletages par variétés complexes, c'est-à-dire aux feuilletages d'une variété réelle dont le fibré tangent est muni d'un opérateur presque complexe intégrable. Ainsi les feuilles sont des variétés complexes qui forment une décomposition de la variété ambiante. Cette notion n'est pas nouvelle, loin de là (cf. les exemples du chapitre I); néanmoins, le point de vue adopté dans ces notes nous semble n'avoir été que peu développé jusqu'à présent et mériter une plus grande considération. Il consiste:

- à s'intéresser aux objets *abstraits* et *globaux*, et non plongés dans \mathbb{C}^n , cadre classique utilisé en analyse complexe. Ce choix entraîne que les problèmes, techniques et résultats décrits ici n'ont que peu de choses à voir avec ceux de l'analyse CR, qui traitent des objets plongés et en général d'un point de vue local. Ils se rapprochent beaucoup plus des études de structures géométriques sur une variété (cf. le texte de S. Dumitrescu). Un feuilletage par variétés complexes est en effet donné par l'existence d'un atlas modelé sur $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^p$, avec changements de cartes préservant les plaques $\mathbb{C}^n \times \text{Cste}$. Lorsque la codimension p est nulle, il s'agit donc d'une variété complexe.
- à considérer les familles différentiables de déformations de variétés complexes comme un des exemples fondamentaux de telles structures. En effet, lorsqu'un feuilletage par variétés complexes est différentiablement trivial, il s'agit d'une famille de déformations au sens de Kodaira-Spencer [K-S1]. On cherche alors à transposer des résultats classiques de théorie des déformations au cas feuilleté.

Notons que ces deux points de vue sont très différents. Dans le premier, on s'intéresse à des objets uniques, munis d'une structure géométrique généralisant

1991 *Mathematics Subject Classification.* 57R30, 32V99.

Key words and phrases. feuilletages par variétés complexes, structures CR.

Ce travail a bénéficié d'une aide de l'Agence Nationale de la Recherche portant la référence ANR-08-JCJC-0130-01.

la notion de structure complexe. Dans le second, on s'intéresse à des *familles* de variétés complexes, les feuilles du feuilletage. Cela donne lieu à deux séries de problèmes assez différents, mais entretenant entre eux des liens étroits.

D'une part, les questions fondamentales suivantes se posent:

Problème d'existence. *Existence ou non-existence de structure complexe sur un feuilletage réel donné; sur une variété différentiable donnée.*

Problème de plongement. *Critères de plongement ou obstructions au plongement d'un feuilletage donné dans une variété complexe (plongement C^∞ qui réalise les feuilles comme sous-variétés holomorphes).*

Problème des modules. *Déformations et espaces de modules de tels objets (le feuilletage réel sous-jacent étant fixé; seule la structure complexe le long des feuilles varie).*

D'autre part, on tombe sur les problèmes d'uniformisation mentionnés dans le titre. Grossso modo, il s'agit de comprendre les relations entre la structure complexe d'une feuille spéciale, à savoir une feuille compacte à holonomie contractante ou une feuille dense et la structure complexe du feuilletage dans un voisinage de la feuille spéciale; et d'étudier quand deux feuilletages sont CR-isomorphes, i.e. quand il existe un difféomorphisme feuilleté entre les deux qui soit un biholomorphisme en restriction à toute feuille. Cela donne les questions qui suivent:

Problème de rigidité. *Conditions pour que la structure complexe sur un feuilletage soit entièrement ou partiellement déterminée par la structure complexe sur une feuille spéciale.*

Problème d'isomorphisme. *Soient \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 deux feuilletages par variétés complexes difféomorphes. A quelles conditions sont-ils CR-isomorphes? En particulier, s'ils sont ponctuellement isomorphes, i.e. toute feuille de \mathcal{F}_1 est biholomorphe à la feuille correspondante de \mathcal{F}_2 , sous quelles conditions supplémentaires sont-ils CR-isomorphes?*

et enfin

Problème de trivialité. *Conditions sur \mathcal{F} pour qu'il soit CR-trivial? possède un revêtement CR-trivial?*

On connaît très peu de choses sur ces problèmes. Sans prétendre à l'exhaustivité, nous donnerons une vue d'ensemble des cas connus. Le cas qui nous intéresse est le cas de grande dimension, à savoir de dimension supérieure ou égale à deux, et de codimension un. De même que pour les variétés complexes, la dimension un est très particulière. Par ailleurs, la codimension un nous semble la plus intéressante, ne serait-ce que parce qu'elle contient les exemples des hypersurfaces Levi-plates.

Ce texte comporte trois chapitres. Le premier contient les définitions, propriétés et exemples de base de feuilletages à feuilles complexes, ainsi que la description détaillée d'un exemple exotique, suivant [M-V]. Cet exemple est important à plusieurs titres. D'une part, il montre que le point de vue abstrait adopté ici n'est pas vide, puisqu'il s'agit d'un exemple qui ne peut être plongé dans une 3-variété complexe et qui ne s'obtient pas par quelques manipulations très simples d'exemples plongés. D'autre part, on connaît la réponse à tous les problèmes posés plus haut dans le cas particulier de ce feuilletage. Il est à noter que ce feuilletage, présenté dans [M-V] comme un feuilletage de la sphère S^5 est en fait un feuilletage d'une 5-variété dont le groupe fondamental est non trivial. Nous élucidons cette différence; et nous montrons on ne peut espérer obtenir la sphère S^5 avec ce type de méthodes.

Dans le deuxième chapitre, nous nous intéressons aux déformations. Nous rappelons le b-a-ba de la théorie standard de Kodaira-Spencer pour les variétés compactes complexes et nous donnons une preuve complète, suivant [F-G], du théorème de Fischer-Grauert, qui résout le problème d'isomorphisme pour les familles de déformations triviales. Puis nous parlons succinctement des déformations de feuilletages et du problème de modules. Le lecteur est incité à comparer avec le texte de Marcel Nicolau sur les déformations de feuilletages transversalement holomorphes.

Enfin, dans le troisième chapitre, nous expliquons les lemmes de compactifications de [M-V2] qui traduisent les relations de contraintes entre structures complexes au voisinage d'une feuille spéciale compacte. Nous les utilisons pour répondre partiellement aux problèmes de rigidité et de trivialité pour certains types de feuilletages. Il faut souligner que ces lemmes, malgré leur aspect technique et anecdotique, jouent un rôle crucial dans presque tous les résultats que nous présentons. Ils constituent en fait le seul outil géométrique un tant soit peu général dont nous disposons pour étudier le voisinage d'une feuille compacte "attractante".

On ne trouvera pas vraiment de résultats nouveaux dans ce texte, qui est avant tout introductif et panoramique. Les applications que nous donnons des lemmes de compactification, en particulier la variante feuilletée du théorème de Fischer-Grauert, ne figurent dans aucun article, mais sont de simples variations autour des résultats de [M-V2]. Nous avons par contre tenu à donner une preuve complète de Fischer-Grauert, ne connaissant aucune référence où la trouver, en dehors de l'article original [F-G].

Un dernier mot. Lorsqu'on parle de feuilletages à feuilles complexes en codimension un et donc d'hypersurfaces Levi-plates, on ne peut faire l'impasse sur le problème du minimal exceptionnel, à savoir, sous sa forme faible, la non-existence d'un feuilletage par variétés complexes plongé dans l'espace projectif complexe. Il constitue sans conteste la question la plus célèbre de ce domaine. Nous nous

contenterons ici d'une présentation très brève au chapitre I en liaison avec le problème de plongement, mais nous ne démontrerons aucun résultat. On ne trouvera donc presque rien sur le minimal exceptionnel dans ce cours. En effet, les techniques développées ici ne sont pas adaptées à ce problème.

CHAPITRE I: DÉFINITIONS ET EXEMPLES

Dans ce chapitre, après avoir défini précisément ce qu'est un feuilletage par variétés complexes, nous passons en revue les exemples standards. Puis nous décrivons en détail l'exemple d'un feuilletage exotique par surfaces complexes, exemple suffisamment riche pour justifier l'intérêt de l'étude qui suit. Enfin, nous parlons des problèmes d'existence et de plongement. Comme référence générale sur les feuilletages, on pourra consulter [C-LN].

1. Notion de feuilletage par variétés complexes.

Soit X une variété différentiable connexe de dimension n . Un feuilletage *différentiable* de X de dimension p est grossièrement une partition de X en sous-variétés (immergées) connexes de dimension p , les feuilles, qui est localement isomorphe à un produit $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$.

La définition rigoureuse consiste à partir de la notion d'atlas feuilleté, à savoir un atlas modelé sur $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ et non sur \mathbb{R}^n .

Définition. Un *atlas feuilleté* de dimension p sur X est la donnée d'un atlas de variété différentiable sur X

$$\phi_\alpha: U_\alpha \subset X \longrightarrow \phi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$$

tel que les changements de cartes

$$\phi_{\alpha\beta}: \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \xrightarrow{\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}} \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

préservent la décomposition $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$, i.e. envoient les plaques $\mathbb{R}^p \times \{Cte\}$ sur les plaques $\mathbb{R}^p \times \{Cte\}$.

Les changements de cartes $\phi_{\alpha\beta}$ prennent donc la forme suivante

$$(x, y) \longmapsto \phi_{\alpha\beta}(x, y) = (t_{\alpha\beta}(x, y), n_{\alpha\beta}(y))$$

i.e. la "partie transverse" $n_{\alpha\beta}$ dépend uniquement de y , la coordonnée transverse du feuilletage.

Etant donné un atlas feuilleté sur X , on peut alors définir une relation d'équivalence dans chaque U_α par

$$x \sim y, \quad x, y \in U_\alpha \iff \phi_\alpha(x) \text{ et } \phi_\alpha(y) \text{ appartiennent à la même plaque.}$$

On globalise cette relation sur X en saturant par transitivité. Ainsi deux points x et y de X sont équivalents s'il existe une suite de points $x_0 = x, x_1, \dots, x_d = y$ tels que deux points successifs de cette suite soient localement équivalents dans une carte.

Les classes d'équivalence de cette relation forment les feuilles du feuilletage \mathcal{F} défini par l'atlas feuilleté dont on est parti. Elles s'obtiennent en recollant les plaques au moyen des changements de cartes tangentiels $t_{\alpha\beta}$. On vérifie aisément que ce sont des sous-variétés connexes immégrées.

Si maintenant on part d'une variété *complexe* X , on peut adapter les définitions précédentes pour obtenir un *feuilletage holomorphe* de X en prenant un atlas holomorphe modelé sur $\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^{n-p}$. Les feuilles constituent ici une partition de X en sous-variétés holomorphes de dimension p .

La notion de *feuilletage par variétés complexes* est un mélange des deux notions précédentes. Soit X une variété différentiable connexe de dimension n . On commence par définir un atlas modelé sur $\mathbb{C}^p \times \mathbb{R}^{n-2p}$:

Définition. Un *atlas feuilleté par variétés complexes* de dimension p sur X est la donnée d'un atlas

$$\phi_\alpha: U_\alpha \subset X \longrightarrow \phi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{C}^p \times \mathbb{R}^{n-2p}$$

tel que les changements de cartes $\phi_{\alpha\beta} = \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$:

(i) envoient les plaques $\mathbb{C}^p \times \{Cte\}$ sur les plaques $\mathbb{C}^p \times \{Cte\}$, i.e. s'écrivent, avec des notations analogues,

$$\phi_{\alpha\beta}(z, t) = (t_{\alpha\beta}(z, t), n_{\alpha\beta}(t))$$

(ii) sont globalement C^∞ et holomorphes en z .

Les feuilles, obtenues comme précédemment en recollant les plaques au moyen des changements de cartes tangentiels $t_{\alpha\beta}$, sont maintenant des variétés complexes. On obtient ainsi une partition de X en variétés complexes connexes de dimension p différentiablement immégrées dans X .

Le cas qui nous intéressera le plus est celui où la variété compacte X de dimension impaire $n = 2m + 1$ est munie d'un feuilletage par variétés complexes de codimension un.

Finissons ce paragraphe par quelques rappels sur les sous-fibrés involutifs. Soit \mathcal{F} un feuilletage de dimension p sur X . Le *fibré tangent au feuilletage* est le sous-fibré du fibré tangent TX dont les fibres $T_x\mathcal{F} \subset T_x X$ sont les espaces tangents aux feuilles.

Comme un feuilletage est localement isomorphe au feuilletage trivial de \mathbb{R}^n par $\mathbb{R}^p \times \{Cte\}$, le crochet de Lie sur TX stabilise $T\mathcal{F}$: le crochet de Lie de deux

champs de vecteurs tangents à \mathcal{F} est tangent à \mathcal{F} , ce que l'on écrit généralement sous la forme compacte

$$[T\mathcal{F}, T\mathcal{F}] \subset T\mathcal{F}.$$

Inversement, soit E un sous-fibré lisse de TX de dimension p . On dira qu'il est *involutif* s'il est stable par crochet de Lie

$$[E, E] \subset E.$$

Le théorème de Frobenius montre l'équivalence entre sous-fibrés involutifs et feuilletages.

Théorème 1.1 (Frobenius). *Soit E un sous-fibré lisse de TX . Alors il existe un feuilletage \mathcal{F} de X tel que $T\mathcal{F} = E$ si et seulement si E est involutif.*

Dans le cas où \mathcal{F} est un feuilletage par variétés complexes, son fibré tangent est un fibré complexe. Il n'est cependant pas vrai que tout sous-fibré lisse involutif de TX , qui est de surcroît un fibré complexe, est tangent à un feuilletage par variétés complexes. Nous clarifions ce point dans le paragraphe suivant.

2. Feuilletages par variétés complexes et structures CR.

Soit X une variété différentiable de dimension n et soit TX son fibré tangent.

Définition. Une *structure presque CR* de dimension $2p$ sur X est la donnée d'un couple (E, J) où:

- (i) E est un sous-fibré de TX de dimension $2p$.
- (ii) J est un morphisme lisse de E dont le carré est l'opposé de l'identité.

Le point (ii) signifie plus précisément que, pour tout $x \in X$, le morphisme J induit un opérateur linéaire

$$J_x: E_x \rightarrow E_x$$

dans la fibre E_x au-dessus de x , qui vérifie $J_x^2 = -Id$.

Remarque. Lorsque $n = 2p$, une structure presque CR n'est rien d'autre qu'une structure presque complexe.

Soit (E, J) une structure presque CR sur X . Comme dans le cas classique des structures presque complexes, on peut étendre \mathbb{C} -linéairement J en un opérateur défini sur le complexifié $E_{\mathbb{C}} = E \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ de E . Cet opérateur, appelons-le $J_{\mathbb{C}}$, est diagonalisable avec deux sous-espaces propres de même dimension associés aux valeurs propres i et $-i$. On écrit

$$E_{\mathbb{C}} = E^{(0,1)} \oplus E^{(1,0)}$$

la convention étant que $E^{(1,0)}$ est lié à la valeur propre i .

Observons que E est isomorphe à $E^{(1,0)}$ et devient donc un fibré complexe. Observons également que $E^{(0,1)}$ est le conjugué de $E^{(1,0)}$.

Le crochet de Lie défini sur TX peut être étendu \mathbb{C} -linéairement à $T_{\mathbb{C}}X = TX \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

Définitions. (i) Une structure (E, J) presque CR est dite *intégrable* si

$$[E^{(1,0)}, E^{(1,0)}] \subset E^{(1,0)}.$$

(ii) Une structure (E, J) presque CR est dite *Levi-plate* si

$$[E^{(1,0)}, E^{(0,1)}] \subset E_{\mathbb{C}}.$$

Une structure presque CR intégrable est aussi appelée structure CR.

Remarque. (i) Comme $E^{(0,1)}$ est le conjugué de $E^{(1,0)}$, on peut reformuler la condition d'intégrabilité en $[E^{(0,1)}, E^{(0,1)}] \subset E^{(0,1)}$.

(ii) Lorsque $n = 2p$, on retrouve la condition d'intégrabilité classique des structures presque complexes. Le théorème de Newlander-Nirenberg [N-N] affirme alors qu'une structure presque complexe intégrable est une structure complexe, i.e. est localement isomorphe à la structure standard où le morphisme J est la multiplication par i , ce qui permet de munir X d'un atlas de variété complexe.

(iii) Plus généralement, on définit la forme de Levi par

$$L: (v, w) \in E^{(1,0)} \times E^{(1,0)} \longmapsto \pi([V, \overline{W}]) \in T_{\mathbb{C}}X/E_{\mathbb{C}}$$

où V et W sont des champs de vecteurs locaux étendant v et w et π désigne la projection de $T_{\mathbb{C}}X$ sur $T_{\mathbb{C}}X/E_{\mathbb{C}}$. On vérifie que L est bien définie indépendamment des extensions choisies. Le rang et le signe des valeurs propres de L jouent un rôle fondamental dans l'étude des structures CR. Le cas Levi-plat, le seul qui nous intéressera dans ce texte, correspond au cas dégénéré $L \equiv 0$.

L'équivalent du théorème de Frobenius dans le cas des feuilletages par variétés complexes prend la forme suivante.

Proposition 2.1 *Soit (E, J) une structure presque CR sur X . Alors (E, J) est tangent à un feuilletage de X par variétés complexes si et seulement si*

- (i) (E, J) est intégrable.
- (ii) (E, J) est Levi-plate.

Preuve. Supposons (E, J) tangent à un feuilletage par variétés complexes. On peut donc localement représenter E comme l'ensemble des $\mathbb{C}^p \times \{Cte\}$ dans $\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{C}^p \times \mathbb{R}^{n-2p}$. Dans ce modèle local, J devient l'opérateur standard de

multiplication par i dans \mathbb{C}^p . Il est donc intégrable. D'autre part, E est involutif donc $E_{\mathbb{C}}$ est involutif, ce qui entraîne (E, J) Levi-plat.

Inversement, (E, J) intégrable et Levi-plat implique $E_{\mathbb{C}}$ involutif, donc E involutif. D'après le théorème de Frobenius (théorème 1.1), E est donc tangent à un feuilletage lisse. Représentons localement E par $\mathbb{R}^{2p} \times \mathbb{R}^{n-2p}$. Dans ce modèle local, J devient un opérateur presque CR tangent aux $\mathbb{R}^{2p} \times \{Cte\}$, ou, si l'on préfère, un opérateur presque complexe sur \mathbb{R}^{2p} à paramètres dans \mathbb{R}^{n-2p} . Mais par hypothèse, cet opérateur est intégrable pour chaque valeur du paramètre, donc peut être redressé sur i par le théorème de Newlander-Nirenberg à paramètres. Ceci implique que le feuilletage est en fait modelé sur $\mathbb{C}^p \times \mathbb{R}^{n-2p}$. \square

3. Premiers exemples.

a. Familles différentiables de déformations.

Soit I un intervalle ouvert et soit \mathcal{X} une variété lisse munie d'une submersion à fibres compactes et connexes $\pi: \mathcal{X} \rightarrow I$. Le lemme d'Ehresmann implique que les fibres de π munissent \mathcal{X} d'une structure de fibré localement trivial.

Donnons une preuve rapide de ce fait important. Soit $t \in I$. Pour $I_t \subset I$ voisinage de t suffisamment petit, on peut recouvrir $\pi^{-1}(I_t)$ par un nombre fini de cartes de submersion

$$\begin{array}{ccc} U_i & \xrightarrow{\phi_i} & J \times V_i \\ \pi \downarrow & & \downarrow \text{2nde proj.} \\ J & \xrightarrow{Id} & J \end{array}$$

où les V_i recouvrent la fibre marquée X_t . Dans chaque carte U_i , on peut ainsi définir un champ de vecteurs ξ_i tel que

$$\pi_*(\xi_i) = \frac{\partial}{\partial t}$$

en posant

$$\xi_i = (\phi_i)_* \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)$$

Soit alors α_i une partition de l'unité subordonnée aux U_i . Posons $\xi = \sum \alpha_i \cdot \xi_i$. C'est un champ globalement défini sur $\pi^{-1}(I_t)$. La linéarité de la différentielle entraîne

$$\pi_*(\xi) = \pi_* \left(\sum \alpha_i \cdot \xi_i \right) = \sum \alpha_i \cdot \pi_*(\xi_i) = \sum \alpha_i \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}.$$

Le flot Φ de ξ induit alors une trivialisation locale de π en posant

$$(x, s) \in X_t \times I_t \longmapsto \Phi_{s-t}(x) \in \pi^{-1}(I_t)$$

d'inverse

$$y \in \pi^{-1}(I_t) \longmapsto (\Phi_{t-\pi(y)}(y), \pi(y)) \in X_t \times I_t.$$

En fait, on a même mieux, en utilisant les propriétés des fibrés: \mathcal{X} est globalement difféomorphe au produit $X_t \times I$ (cf. [Hu]).

Si maintenant le sous-fibré de $T\mathcal{X}$ défini comme le noyau de $d\pi$ est muni d'une structure CR Levi-plate, on obtient un exemple de feuilletage par variétés complexes dont les feuilles sont les fibres X_t , qui deviennent ainsi des variétés complexes. Fixons t_0 dans I et voyons la fibre X_{t_0} comme une variété complexe. Un tel feuilletage est un exemple de *famille différentiable de déformations* de X_{t_0} , ou plus brièvement *déformation* de X_{t_0} , au sens de Kodaira-Spencer [K-S1].

Donnons un exemple concret de ce type de familles. Commençons par établir la proposition suivante, clef pour construire de nombreux exemples.

Proposition 3.1. *Soit (Y, \mathcal{G}) un feuilletage par variétés complexes. Soit G un groupe agissant sur Y . On suppose que l'action de G*

- (i) *est libre et propre.*
- (ii) *respecte \mathcal{G} , i.e. tout élément de G envoie feuilles de \mathcal{G} sur feuilles de \mathcal{G} .*
- (iii) *est différentiable et holomorphe en restriction aux feuilles.*

Alors X , l'espace quotient de Y par l'action de G , muni de la topologie quotient, admet une structure de variété feuilletée (X, \mathcal{F}) à feuilles complexes telle que la projection naturelle $\pi: Y \rightarrow X$ est différentiable et envoie les feuilles de \mathcal{G} holomorphiquement sur les feuilles de \mathcal{F} .

Cette proposition est une variation d'un résultat classique en théorie des revêtements. Nous nous contenterons de donner les grandes lignes de la preuve.

Esquisse de preuve.

L'hypothèse (i) permet de montrer que l'espace quotient de Y sous l'action de G , muni de la topologie quotient, est Hausdorff et que la projection naturelle $\pi: Y \rightarrow X$ est un revêtement topologique. Il en résulte qu'en tout point y , la variété Y est localement homéomorphe à X .

Munissons (Y, \mathcal{G}) d'un atlas feuilleté complexe. La propriété d'homéomorphisme précédente permet de définir des cartes feuilletées complexes sur X . Qui plus est, comme π est un revêtement, les changements de cartes associés sont des composées de changements de cartes de Y et d'action d'éléments g du groupe G

$$y \in Y \longmapsto g \cdot y \in Y.$$

Les hypothèses (ii) et (iii) entraînent que les éléments de G respectent le feuilletage et sont holomorphes le long des plaques, et donc que ces changements de cartes sont feuilletés complexes. \square

Suivant [M-K], si \mathbb{H} désigne le demi-plan de Poincaré, considérons l'action de \mathbb{Z}^2 sur $\mathbb{C} \times \mathbb{H}$ donnée par

$$(p, q) \in \mathbb{Z}^2 \quad (z, \tau) \in \mathbb{C} \times \mathbb{H} \longmapsto (z + p + q\tau, \tau) \in \mathbb{C} \times \mathbb{H}.$$

On vérifie aisément qu'il s'agit d'une action holomorphe, propre et libre. On obtient ainsi une structure de variété complexe sur le quotient \mathcal{M} , avec une projection holomorphe $\mathbb{C} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{M}$. D'autre part, la projection naturelle de $\mathbb{C} \times \mathbb{H}$ sur \mathbb{H} passe au quotient en une submersion holomorphe $\pi: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{H}$ à fibres compactes connexes. Plus précisément, la fibre \mathcal{M}_τ au-dessus de τ est la courbe elliptique

$$\mathbb{E}_\tau = \mathbb{C}/\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}.$$

N'importe quel chemin lisse $c: I \rightarrow \mathbb{H}$ définit par pull-back une famille différentiable de déformations

$$c^*\mathcal{M} = \{(t, x) \mid x \in \mathcal{M}_{c(t)}\} \longrightarrow I.$$

Bien sûr, cet exemple se généralise aisément. Dès que l'on a en main une submersion holomorphe à fibres compactes connexes, on a en main une famille holomorphe de déformations et, par restriction à un chemin ou à un lacet, une famille différentiable de déformations.

On peut objecter que ces familles différentiables ne manifestent pas un intérêt évident puisque les exemples s'obtiennent toujours, au moins localement, d'une famille holomorphe. Le théorème de Kuranishi [Ku] implique en effet qu'il existe une famille contenant toutes les petites déformations d'une variété complexe donnée; et cette famille est holomorphe. Toutefois, leur grand intérêt est de faire le pont entre la théorie des déformations et celle des feuilletages à feuilles complexes.

b. Suspensions.

Soit X une variété complexe. Appelons \tilde{X} son revêtement universel et $\pi_1(X)$ son groupe fondamental. Supposons donnée une représentation ρ de $\pi_1(X)$ dans les difféomorphismes du cercle et définissons l'action

$$\gamma \in \pi_1(X) \quad (z, \exp 2i\pi\theta) \in \tilde{X} \times \mathbb{S}^1 \longmapsto (\gamma \cdot z, \rho^{-1}(\gamma) \cdot \exp 2i\pi\theta) \in \tilde{X} \times \mathbb{S}^1$$

où l'action sur le premier facteur est l'action du groupe fondamental sur le revêtement universel.

Cette action est lisse, propre, libre, respecte le feuilletage trivial de $\tilde{X} \times \mathbb{S}^1$ par niveaux $\tilde{X} \times \{Cte\}$ et est holomorphe le long des feuilles. Le quotient est donc une variété lisse feuilletée par variétés complexes. Les feuilles sont des quotients de \tilde{X} et dépendent de la représentation ρ . Si aucun difféomorphisme $\rho(y)$ n'a de point fixe, toutes les feuilles sont biholomorphes à \tilde{X} . Si une orbite est dense

dans \mathbb{S}^1 , la feuille correspondante est dense dans le quotient. Si la représentation possède un point fixe, la feuille correspondante est biholomorphe à X .

c. Variétés de dimension trois.

Soit X une variété compacte orientée de dimension réelle trois. Il est bien connu [Li] que X admet un feuilletage \mathcal{F} orientable de codimension un. On peut transformer ce feuilletage en un feuilletage par surfaces de Riemann de la façon suivante.

Munissons X d'une métrique riemannienne h et \mathcal{F} d'une orientation. Ainsi les feuilles de \mathcal{F} deviennent des variétés riemanniennes orientées. On peut alors définir un opérateur J sur $T\mathcal{F}$ en décrétant que, pour $x \in X$, l'opérateur J_x coïncide avec la rotation d'angle $+\pi/2$ dans le plan $T_x X$. En se plaçant dans une carte feuilletée et en utilisant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à paramètres, on vérifie aisément que J est lisse. Il munit donc $T\mathcal{F}$ d'une structure presque CR. Mais les feuilles étant des surfaces réelles, tout opérateur presque complexe le long des feuilles est en fait complexe: une structure presque complexe est en effet définie par un sous-fibré de dimension un, donc automatiquement intégrable. Par la proposition 2.1, le feuilletage \mathcal{F} est donc à feuilles complexes.

Ainsi tout feuilletage lisse orienté sur une variété de dimension trois donne naissance à un feuilletage par surfaces de Riemann. Inversement, un feuilletage par surfaces de Riemann en dimension trois est orienté et muni d'une famille de métriques le long des feuilles, définie à facteur conforme près.

d. Feuilletage de Reeb et recollement de feuilletages.

Il résulte bien entendu du point précédent que le feuilletage de Reeb sur \mathbb{S}^3 peut être muni d'une structure complexe. Nous souhaitons en donner une preuve plus constructive en recollant deux composantes de Reeb. Cela nous permettra de plus de présenter un critère de recollement de feuilletages de codimension un.

Cela suppose d'étendre la notion de feuilletage par variétés complexes aux variétés à bord.

Définition. Soit X une variété réelle de dimension impaire $2n + 1$ à bord. Un *feuilletage par variétés complexes* de X est la donnée d'un atlas feuilleté de X modelé sur $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ (pour les points de l'intérieur de X) ou sur $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ (pour les points du bord ∂X de X).

Avec une telle définition, chaque composante connexe du bord de X est une feuille (et donc une variété complexe). Nous allons dans la suite recoller de tels feuilletages le long de leur bord. Pour cela, on se sert tout d'abord d'un modèle à

collier: il existe une unique structure différentiable (à difféomorphisme près) sur l'union

$$X_\partial = X \cup \partial X \times [0, 1[,$$

où $\partial X \subset X$ et $\partial X \times \{0\}$ sont identifiés, telle que les inclusions naturelles de X et de $\partial X \times [0, 1[$ dans X_∂ soient C^∞ (cf. [Hi]). Lorsque X est muni d'un feuilletage par variétés complexes, le bord ∂X possède une structure complexe induite, et le collier $\partial X \times [0, 1[$ acquiert un feuilletage naturel: les feuilles sont les composantes connexes de $\partial X \times \{Cte\}$ équipée de la structure complexe induite.

Définitions. (i) Soit (X, \mathcal{F}) une variété à bord munie d'un feuilletage lisse. Nous dirons que \mathcal{F} est *plat* si \mathcal{F} s'étend en un feuilletage de X_∂ qui coïncide avec le feuilletage lisse naturel du collier.

(ii) Soit (X, \mathcal{F}) une variété à bord feuilletée par variétés complexes. Nous dirons que \mathcal{F} est *CR-plat* si \mathcal{F} s'étend en un feuilletage par variétés complexes de X_∂ qui coïncide avec le feuilletage par variétés complexes naturel du collier.

Il y a bien deux conditions mélangées dans cette deuxième définition. Premièrement, on veut que le feuilletage *lisse* s'étende au collier, i.e. que le feuilletage soit plat. Deuxièmement, on veut que la structure complexe le long des feuilles s'étende à ce nouveau feuilletage.

L'intérêt de cette définition provient de la proposition suivante. Notons $X_1 \cup_\phi X_2$ le recollement de deux variétés X_1 et X_2 par un difféomorphisme ϕ entre leurs bords. Rappelons qu'il existe une unique structure différentiable sur cet espace pour laquelle les inclusions naturelles de X_1 et de X_2 sont lisses [Hi].

Proposition 3.2. (i) Soient (X_i, \mathcal{F}_i) deux feuilletages lisses à bord ($i = 1, 2$). Supposons les bords difféomorphes et les feuilletages plats. Alors, pour tout difféomorphisme ϕ de ∂X_1 dans ∂X_2 , il existe un feuilletage lisse sur $X_1 \cup_\phi X_2$ dont la restriction à X_1 (respectivement à X_2) est \mathcal{F}_1 (respectivement \mathcal{F}_2).

(ii) Soient (X_i, \mathcal{F}_i) deux feuilletages par variétés complexes à bord ($i = 1, 2$). Supposons les bords biholomorphes et les feuilletages CR-plats. Alors, pour tout biholomorphisme ϕ de ∂X_1 dans ∂X_2 , il existe un feuilletage par variétés complexes sur $X_1 \cup_\phi X_2$ dont la restriction à X_1 (respectivement à X_2) est \mathcal{F}_1 (respectivement \mathcal{F}_2).

Preuve. Soit $Y = X_1 \cup_\phi X_2$. Il résulte de nos définitions que les fibrés tangents $T\mathcal{F}_1$ et $T\mathcal{F}_2$ aux feuilletages se recollent continûment au bord, puisqu'au bord, ils s'identifient tous deux au fibré tangent du bord. Soit z un point du bord, et soit (x_1, \dots, x_{2n}, t) un système de coordonnées adapté à $\partial X_1 = \partial X_2 \subset Y$ dans un voisinage de z , c'est-à-dire que la sous-variété $\partial X_1 = \partial X_2$ de Y est localement représenté par $t = 0$. On suppose que le demi-espace des t négatifs correspond à X_1 , celui des t positifs à X_2 . Alors on peut trouver une 1-forme linéaire ω lisse

en x , continue en t et lisse en dehors de l'hyperplan $t = 0$ dont le noyau définit l'espace tangent $T\mathcal{F} = T\mathcal{F}_1 \cup T\mathcal{F}_2$. En particulier, les 1-formes

$$\omega^- = \omega_{|t \leq 0} \quad \text{et} \quad \omega^+ = \omega_{|t \geq 0}$$

sont lisses et définissent localement \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 . Mais comme ces feuilletages sont plats, on peut supposer que ω^- et ω^+ se prolongent en des 1-formes lisses en posant

$$\omega_{|t \geq 0}^- = dt \quad \text{et} \quad \omega_{|t \leq 0}^+ = dt.$$

Mais ceci implique que ω , obtenue en juxtaposant ω^- et ω^+ est en fait lisse, et donc que \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 se recollent en un feuilletage \mathcal{F} lisse de Y .

L'argument pour l'extension des structures complexes est similaire. Comme les structures complexes de \mathcal{F}_1 et de \mathcal{F}_2 sont les mêmes en restriction au bord, on peut choisir des opérateurs complexes J_1 sur $T\mathcal{F}_1$ et J_2 sur $T\mathcal{F}_2$ qui sont égaux sur le bord et définissent ainsi un opérateur complexe J sur $T\mathcal{F}$ qui, dans un système de coordonnées adapté au bord, est lisse en x , continu en t et lisse en dehors de l'hyperplan $t = 0$. En particulier,

$$J^- = J_{|t \leq 0} \quad \text{et} \quad J^+ = J_{|t \geq 0}$$

sont lisses et définissent localement la structure complexe de \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 . Une fois encore, la condition de platitude du feuilletage implique que localement, on peut supposer que toutes les dérivées en $t = 0$ de J^+ et J^- par rapport à la variable t sont nulles. En conséquence, J^+ et J^- définissent localement une structure de feuilletage par variétés complexes sur Y . \square

Voyons maintenant comment appliquer ces conditions générales au feuilletage de Reeb. Le feuilletage de Reeb de \mathbb{S}^3 est obtenu en recollant deux composantes de Reeb par un difféomorphisme échangeant parallèles et méridiens. Une composante de Reeb s'obtient en feuilletant un cylindre $\overline{\mathbb{D}} \times \mathbb{R}$ par les translatées verticales

$$(z, t) \in \mathbb{D} \times \mathbb{R} \quad t = \exp\left(\frac{1}{1 - |z|^2}\right) + Cte.$$

Notons que ce feuilletage s'étend de manière lisse au bord. On quotiente ensuite ce cylindre feuilleté par le groupe engendré par la translation verticale $t \mapsto t + 1$. En recollant deux composantes de Reeb, on obtient un feuilletage de \mathbb{S}^3 avec une unique feuille compacte, un tore $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ (le bord commun des deux tores pleins), toutes les autres feuilles étant difféomorphes à \mathbb{R}^2 et enroulées dans l'intérieur d'une des deux composantes, y faisant un nombre infini de tours.

Cependant, cette manière classique de présenter le feuilletage de Reeb ne permet pas de visualiser la structure complexe le long des feuilles, en particulier le long du bord. Pour y arriver, voici une autre construction d'une composante

de Reeb. Soit d un réel de $]0, 1[$ et τ un élément du demi-plan de Poincaré. Définissons

$$(3.1) \quad (z, t) \in \mathbb{C} \times [0, \infty[\setminus \{(0, 0)\} \longmapsto (\exp 2i\pi\tau \cdot z, d \cdot t) \in \mathbb{C} \times [0, \infty[\setminus \{(0, 0)\}$$

et considérons l'action de \mathbb{Z} sur $\mathbb{C} \times [0, \infty[\setminus \{(0, 0)\}$ engendrée par (3.1). Elle est holomorphe, libre, propre et préserve holomorphiquement le feuilletage par $\mathbb{C} \times \{Cte\}$, et ce aussi bien dans l'intérieur $\mathbb{C} \times]0, \infty[$ qu'au bord $\mathbb{C} \times \{0\}$. Le quotient est donc une variété à bord feuilletée par feuilles complexes. Dans l'intérieur, le domaine $\mathbb{C} \times [d, 1]$ est un domaine fondamental pour l'action et le quotient consiste à recoller le bord $\mathbb{C} \times \{d\}$ et le bord $\mathbb{C} \times \{1\}$ via l'application $z \mapsto \exp 2i\pi\tau \cdot z$. De plus, l'action n'identifie pas deux points d'une même feuille mais envoie la feuille $\mathbb{C} \times \{c\}$ sur la feuille $\mathbb{C} \times \{d \cdot c\}$. En conséquence, l'intérieur se projette sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ feuilleté par copies de \mathbb{C} enroulées dans cet intérieur de tore plein en y faisant une infinité de tours.

Le bord est quant à lui le quotient de \mathbb{C}^* par le groupe abélien multiplicatif engendré par l'homothétie $z \mapsto \exp 2i\pi\tau \cdot z$, i.e. est une courbe elliptique de module τ . Le tout est donc bien un feuilletage d'un tore plein par surfaces de Riemann, avec le bord comme feuille compacte biholomorphe à un tore complexe, et toutes les feuilles de l'intérieur biholomorphes à \mathbb{C} .

Il n'est pas aisés de comprendre géométriquement qu'il s'agit bien du feuilletage de Reeb. On peut tricher en remarquant que l'application

$$(z, t) \in \mathbb{C} \times]0, \infty[\longmapsto \left(\phi(z), \exp \left(\frac{1}{1 - |(\phi(z))^2|} \right) + \ln t \right) \in \mathbb{D} \times \mathbb{R}$$

pour ϕ un difféomorphisme de \mathbb{C} dans \mathbb{D} induit un difféomorphisme entre les revêtements universels des deux feuilletages. Ce difféomorphisme est feuilleté puisqu'il envoie la feuille $\mathbb{C} \times \{C\}$, pour C un réel strictement positif fixé, sur la feuille

$$F_C = \left\{ \left(w, \exp \left(\frac{1}{1 - |w^2|} \right) + \ln C \right), \quad w \in \mathbb{D} \right\}.$$

Plus encore, l'action engendrée par

$$(z, t) \in \mathbb{C} \times]0, \infty[\longmapsto (\exp(2i\pi\tau) \cdot z, dt) \in \mathbb{C} \times]0, \infty[$$

est conjuguée, via ce difféomorphisme, à une action qui envoie la feuille F_C sur la feuille $F_{C+\ln d}$. Enfin, en transportant la structure complexe le long des feuilles, toujours via ce difféomorphisme, on a en fait un isomorphisme CR entre les feuilletages.

À partir de là, on obtient une composante de Reeb et on peut espérer en recoller deux (avec des courbes elliptiques biholomorphes au bord) via la proposition 3.2 pour obtenir le feuilletage de Reeb. Cela nécessite que les feuilletages des composantes soient CR-plats, ... ce qui n'est pas le cas dans le modèle ci-dessus.

Pour le comprendre, il suffit d'adapter la construction précédente pour obtenir une composante de Reeb avec collier.

En effet, la construction que nous venons de faire peut s'étendre pour inclure un collier de courbes elliptiques de même module (ce qui est bien la condition de platitude de la proposition 3.2). Il suffit de considérer $\mathbb{C} \times [-1, \infty[\setminus \{0\} \times [-1, 0])$ et non plus $\mathbb{C} \times [0, \infty[\setminus \{0\}$, l'action sur le collier étant

$$(3.2) \quad (z, t) \in \mathbb{C}^* \times [-1, 0] \longmapsto (\exp 2i\pi\tau \cdot z, t) \in \mathbb{C}^* \times [-1, 0].$$

Action qui prolonge continûment, mais pas différentiablement, (3.1). Maintenant, si l'on remplace, dans (3.1) l'expression dt par $d(t)$ où d est une fonction lisse de $\mathbb{R}_{\geq 0}$ dans $\mathbb{R}_{\geq 0}$ vérifiant

- (i) La fonction d s'annule en 0 et se prolonge en une fonction C^∞ sur \mathbb{R} égale à l'identité sur $\mathbb{R}_{\leq 0}$.
- (ii) On a $0 < d'(t) < 1$ pour t non nul.

On obtient une nouvelle composante de Reeb définie par une action qui se prolonge différentiablement à l'action sur le collier (3.2), et donc une composante de Reeb CR-plate. On peut alors recoller deux de ces composantes par un difféomorphisme échangeant méridiens et parallèles et obtenir ainsi un feuilletage de \mathbb{S}^3 par surfaces de Riemann.

La condition de CR-platitude de la proposition 3.2 est *suffisante*. Mais est-elle nécessaire? La réponse dépend de ce que l'on veut faire. Dans le cas Reeb, il est bien connu que pour pouvoir identifier deux composantes de manière lisse, il faut, si l'on prend le modèle (3.1) avec d fonction, que d soit plate à l'identité en 0. Ceci provient du fait qu'*on doit échanger parallèles et méridiens*.

Pour comprendre cela en profondeur, il faut la notion d'holonomie. Le lecteur non averti peut se reporter au chapitre II où une brève introduction est faite. Considérons en effet le bord d'une composante de Reeb. C'est un tore donc son groupe fondamental est engendré par deux lacets. Choisissons deux générateurs, un parallèle et un méridien. Il n'est pas très difficile de voir que la fonction d représente l'holonomie du parallèle. L'holonomie du méridien est quant à elle triviale. Même chose pour l'autre composante. Mais lors du recollement afin d'obtenir la sphère, il résulte de l'échange méridiens/parallèles que l'holonomie de la feuille compacte est maintenant donnée par les deux germes de difféomorphismes suivants:

$$h_1(t) = \begin{cases} d(t) & \text{si } t \geq 0 \\ t & \text{si } t \leq 0 \end{cases} \quad h_2(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \geq 0 \\ d(t) & \text{si } t \leq 0; \end{cases}$$

donc d doit être plate à l'identité en 0 pour obtenir un feuilletage lisse. Mais d'après la discussion précédente, si d est plate à l'identité en 0, on vérifie l'hypothèse de la proposition 3.2.

Maintenant, on peut très bien identifier deux composantes de Reeb par l'identité sur le bord. On obtient comme variété non pas \mathbb{S}^3 mais $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$. Et cette fois, cela fonctionne même dans le cas où d est une homothétie. Cela revient exactement à considérer le quotient de $\mathbb{C} \times \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}$ par l'action

$$(3.3) \quad (z, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\} \longmapsto (\exp 2i\pi\tau \cdot z, d \cdot t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}.$$

On construit ainsi un feuilletage de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ par surfaces de Riemann, avec une feuille compacte biholomorphe à la courbe elliptique de module τ , et des feuilles non compactes copies de \mathbb{C} s'accumulant sur la feuille compacte.

Notons enfin que la construction que nous venons de donner a le grand avantage (par rapport à l'exemple 3.d) de se généraliser en dimension quelconque. En remplaçant \mathbb{C} par \mathbb{C}^n dans (3.1) et (3.2), on obtient des *composantes de Reeb généralisées*, à savoir des tores pleins $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^{2n}$ munis d'un feuilletage par variétés complexes plat. Le bord est une variété de Hopf (i.e. une variété complexe difféomorphe à $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{2n-1}$ de revêtement universel $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$), les autres feuilles sont des copies de \mathbb{C}^n s'accumulant sur le bord. On peut aussi étendre (3.3) à \mathbb{C}^n pour obtenir un feuilletage de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{2n}$. Il n'est plus possible par contre de recoller deux composantes de Reeb généralisées pour en déduire un feuilletage de la sphère \mathbb{S}^5 .

e. Hypersurfaces Levi-plates.

Soit X une variété complexe de dimension n et soit H une hypersurface réelle de X . En tout point x de H , on peut définir le sous-espace vectoriel complexe

$$H_x = T_x H \cap i \cdot T_x H$$

dont la dimension (complexe) est

$$\dim H_x = \dim_{\mathbb{R}} T_x H - n = 2n - 1 - n = n - 1.$$

Ce petit calcul montre que la dimension de H_x est indépendante de x , si bien que l'on peut définir globalement le fibré

$$\mathcal{H} \equiv TH \cap i \cdot TH$$

comme sous-fibré complexe de codimension un de TH . Autrement dit, \mathcal{H} est une structure presque CR de codimension un sur H . Elle est de plus intégrable puisqu'elle provient de la structure complexe de X . Si elle est de plus Levi-plate, cela nous donne un exemple de feuilletage par variétés complexes en utilisant la proposition 2.1. Ces *hypersurfaces Levi-plates* sont par construction plongées dans une variété complexe.

Le dernier feuilletage de l'exemple 3.d (formule (3.3)) nous donne un exemple concret d'une telle hypersurface. Considérons l'action engendrée par

$$(3.4) \quad (z, t) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} \setminus \{(0, 0)\} \longmapsto (d \cdot z, d \cdot t) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} \setminus \{(0, 0)\}.$$

Le quotient de $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ par cette action est une variété de Hopf X de dimension $n+1$. En restreignant (3.4) à $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}$, on définit une hypersurface Levi-plate H de X qui est CR isomorphe à l'exemple de (3.3). Autrement dit, on a plongé cet exemple dans une variété de Hopf.

4. Un feuilletage exotique par surfaces complexes.

Les exemples précédents ont en commun qu'ils s'obtiennent de constructions très classiques: quotient par une action propre, libre d'un feuilletage trivial, exemples plongés, ou transformation d'une métrique le long des feuilles en structure complexe le long des feuilles. Il n'y a donc aucun besoin pour les décrire de définir la notion abstraite de feuilletage à feuilles complexes.

Voici maintenant l'exemple d'un feuilletage par surfaces complexes qui ne peut être obtenu par les procédés précédents.

On prend comme point de départ le feuilletage de Lawson [La] sur la sphère \mathbb{S}^5 . Rappelons-en rapidement la construction. On considère \mathbb{S}^5 comme sphère unité de \mathbb{C}^3 , puis l'hypersurface complexe:

$$W = \{z \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\} \mid P(z) = z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 = 0\}.$$

Soit K l'intersection de W avec \mathbb{S}^5 . Comme W est un cône, cette intersection est transverse et K est une 3-variété lisse compacte. On peut être plus précis en remarquant que W est un \mathbb{C}^* -fibré principal sur la courbe elliptique

$$\mathbb{E} = \{[z] \in \mathbb{P}^2 \mid P(z) = z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 = 0\}$$

et que K s'identifie au fibré en cercles associé.

On décompose ensuite \mathbb{S}^5 en deux variétés à bord: \mathcal{N} , un voisinage tubulaire fermé de K dans \mathbb{S}^5 , et \mathcal{M} l'adhérence du complémentaire. Comme W est à fibré normal trivial dans \mathbb{C}^3 (le gradient de P trivialise holomorphiquement ce fibré), K est à fibré normal trivial dans \mathbb{S}^5 et \mathcal{N} est difféomorphe au produit de K par un disque. En particulier, le bord commun de \mathcal{N} et \mathcal{M} est difféomorphe à $K \times \mathbb{S}^1$.

On feuillette l'intérieur de \mathcal{N} en prenant les niveaux de la submersion

$$\pi: \text{Int } (\mathcal{N}) \simeq K \times \mathbb{D} \xrightarrow{\text{1ère proj.}} K \longrightarrow \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{S}^1$$

où la dernière flèche est une projection de $\mathbb{E} \simeq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ sur un de ses facteurs; et l'intérieur de \mathcal{M} en prenant les niveaux de la fibration de Milnor [Mi]

$$(4.1) \quad z \in \text{Int } (\mathcal{M}) \longmapsto \frac{P(z)}{|P(z)|} \in \mathbb{S}^1$$

associée à P .

Ces feilletages ne s'étendent pas au bord car, dans les deux cas, les feuilles arrivent transversalement au bord. Nous souhaitons les recoller en utilisant la proposition 3.2, en fait la version lisse de la proposition 3.2, puisqu'il n'y a pas de structure complexe pour l'instant. Il nous faut donc les modifier. C'est ce que Lawson fait au moyen du petit lemme astucieux suivant:

Lemme de tourbillonnement 4.1. *Soit X une variété à bord munie d'une submersion π sur le cercle dont la restriction au bord est également une submersion. Alors il existe un feilletage plat sur X qui coïncide, en dehors d'un collier du bord, avec le feilletage de l'intérieur de X donné par les niveaux de π .*

L'hypothèse de submersion au bord revient à dire que les niveaux de π intersectent transversalement le bord, comme c'est le cas pour les deux submersions précédentes.

Preuve. On considère un collier du bord

$$\phi: \partial X \times [0, 1[\longrightarrow X \text{ avec } \phi(x, 0) = x \text{ pour tout } x.$$

Puis on écrit

$$\begin{array}{ccccc} \partial X \times [0, 1[& \xrightarrow{\phi} & \text{Im } \phi & \xrightarrow{\text{inclusion}} & X \\ \pi_{|\partial X} \times \text{Id} \downarrow & & \downarrow \pi_{|\text{Im } \phi} & & \downarrow \text{pi} \\ \overline{\mathbb{D}}^* \simeq \mathbb{S}^1 \times [0, 1[& \xrightarrow{\text{projection}} & \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{\text{Id}} & \mathbb{S}^1 \end{array}$$

et on remarque que, en restriction à $\text{Im } \phi$, les niveaux de π sont aussi donnés par les images réciproques des rayons

$$\mathcal{R}_\theta = \exp i\theta \times [0, 1[\subset \overline{\mathbb{D}}^*$$

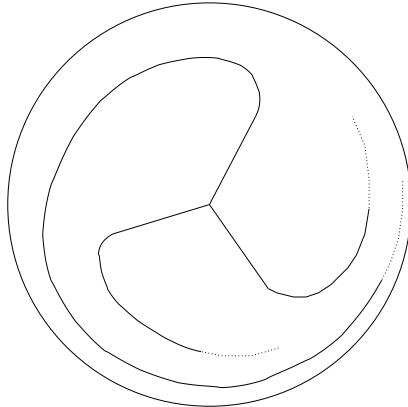
par

$$p = (\pi_{|\partial X} \times \text{Id}) \circ \phi^{-1}.$$

Faisons alors la modification suivante. Plutôt que de feuilleter $\overline{\mathbb{D}}^*$ par les rayons \mathcal{R}_θ et de prendre l'image réciproque de ce feilletage par p , feuilletons $\overline{\mathbb{D}}^*$ comme indiqué dans la figure ci-dessous et prenons l'image réciproque de ce nouveau feilletage dans $\text{Im } \phi$. On obtient un feilletage de $\text{Im } \phi$ qui prolonge le feilletage donné à l'extérieur de ce collier par les niveaux de π et qui est plat au bord, si l'on a choisi la spirale plate au bord. \square

On peut alors appliquer le lemme 4.1 aux deux submersions que l'on a et recoller les feilletages obtenus par la proposition 3.2, version lisse.

Voyons maintenant comment modifier ce feilletage pour obtenir une structure complexe le long des feuilles. Remarquons que les feuilles, prises séparément



comme variétés abstraites, possèdent toutes une structure complexe, condition bien évidemment nécessaire pour espérer aller plus loin.

On peut obtenir la feuille compacte comme quotient du fibré $W \rightarrow \mathbb{E}$ par le groupe engendré par une homothétie le long des fibres. En effet, on peut localement, dans chaque carte trivialisante du fibré définir une homothétie de rapport $\lambda \neq 0$ le long des fibres \mathbb{C}^* . Comme le groupe structural du fibré est \mathbb{C}^* agissant par homothétie (fibré principal), nos homothéties de rapport λ commutent avec les changements de cartes du fibré, donc se recollent en une application globale. Le résultat de tout cela est de munir la feuille compacte $K \times \mathbb{S}^1$ d'une structure complexe de fibré en courbes elliptiques sur \mathbb{E} . Il s'agit d'une surface de Kodaira primaire dans la classification d'Enriques-Kodaira des surfaces, cf. [B-H-P-V]. Les feuilles de l'intérieur, difféomorphes à $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}$, sont des variétés complexes comme produit $\mathbb{E} \times \mathbb{C}$ par exemple. Les feuilles de l'extérieur ont une structure complexe naturelle donnée par la fibration de Milnor (4.1).

La présentation du feuilletage incite à chercher à feuilleter par variétés complexes les parties \mathcal{N} et \mathcal{M} et à recoller en utilisant la proposition 3.2. Le problème est d'obtenir ces feuilletages CR-plats au bord directement, sans utiliser le lemme de tourbillonnement 4.1.

Attardons-nous un instant sur ce point. Sachant que le feuilletage obtenu sur \mathcal{N} et \mathcal{M} par tourbillonnement est difféomorphe au feuilletage initial par submersion *dans l'intérieur de \mathcal{N} et \mathcal{M}* , et que ce feuilletage tourbillonné est plat au bord, on peut avoir l'impression naïve qu'on a fait le plus difficile. Il ne reste plus qu'à étendre la structure complexe obtenue à l'intérieur par transfert de la structure complexe des niveaux de la submersion au bord. Cependant *rien ne dit que l'opérateur complexe associé n'explose pas au bord*. Plus encore, on se convainc facilement qu'il est illusoire de chercher à contrôler le comportement au bord lors du tourbillonnement. Voilà pourquoi on cherche à se passer du lemme 4.1.

Pour cela, on revient à la technique ultra-classique et déjà utilisée ici qui consiste à feuilleter “par quotient”.

Commençons par le feuilletage de la partie extérieure. Posons

$$Y = P^{-1}([0, \infty[) \setminus \{(0, 0, 0)\} \subset \mathbb{C}^3$$

et

$$\Lambda: z \in Y \longrightarrow (\lambda \omega \cdot z) \in Y$$

pour λ un réel strictement compris entre 0 et 1 et $\omega = \exp(2i\pi/3)$. Le difféomorphisme Λ respecte le feuilletage de Y par les niveaux de P , et engendre une action libre, propre, et holomorphe en restriction aux feuilles. Appelons Y_1 le quotient. Nous affirmons que la variété à bord Y_1 est difféomorphe à \mathcal{M} .

Pour montrer cela, remarquons déjà que le bord est bien $K \times \mathbb{S}^1$ comme voulu. En effet, l'action de Λ dans $\partial Y \simeq W$ a pour domaine fondamental le fibré en anneaux $\{\lambda \leq |z| \leq 1\}$ correspondant, avec recollement des bords; c'est-à-dire $K \times \mathbb{S}^1$, produit du fibré unitaire de W par un cercle. Appelons \mathcal{S}_λ cette surface complexe. Nous avons déjà vu qu'il s'agit d'une surface de Kodaira primaire.

D'autre part, le difféomorphisme

$$z \in \text{Int } Y \longmapsto \left(\frac{z}{(P(z))^{1/3}}, P(z) \right) \in P^{-1}(1) \times]0, \infty[$$

induit un difféomorphisme entre les feuilletages naturels de ces deux variétés. De plus, il conjugue Λ à

$$h: (x, t) \in P^{-1}(1) \times]0, \infty[\longrightarrow (\omega \cdot x, \lambda^3 \cdot t) \in P^{-1}(1) \times]0, \infty[$$

si bien que l'intérieur de Y_1 est difféomorphe au quotient de $P^{-1}(1) \times]0, \infty[$ par l'action engendrée par h . L'intérêt de cette description est de nous dire immédiatement que l'intérieur de Y_1 est un fibré sur le cercle de fibre $P^{-1}(1)$ et de monodromie donnée par la multiplication par ω sur $P^{-1}(1)$.

Pour bien comprendre ce que cette dernière observation signifie et ce qu'elle implique, rappelons quelques généralités sur les variétés qui fibrent sur le cercle. Soit $p: X \rightarrow \mathbb{S}^1$ un fibré localement trivial sur le cercle. Considérons son pull-back par le revêtement universel du cercle

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \longrightarrow & X \\ p_1 \downarrow & & \downarrow p \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{\exp 2i\pi \cdot} & \mathbb{S}^1. \end{array}$$

Comme \mathbb{R} est contractile, on en déduit que X_1 est trivial, i.e. difféomorphe au produit de $F = p^{-1}(1)$ par \mathbb{R} (voir [Hu]). Dès lors, le revêtement $X_1 \rightarrow X$ est obtenu par une \mathbb{Z} -action engendrée par

$$(x, t) \in F \times \mathbb{R} \longmapsto (h_t(x), t + 1) \in F \times \mathbb{R}$$

où h_t est, à t fixé, un difféomorphisme de F . On constate que X est difféomorphe à $F \times [0, 1]$ quotienté par la relation d'équivalence

$$(x, 0) \sim (h_0(x), 1).$$

Mais X est également difféomorphe au quotient de $F \times [t_0, t_0 + 1]$ par

$$(x, t_0) \sim (h_{t_0}(x), t_0 + 1)$$

pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$; tous ces quotients sont difféomorphes, cf. [Hi]. Autrement dit, dans l'action précédente, on peut supposer

$$t \in \mathbb{R} \quad h_t \equiv h_0.$$

Plus généralement, le même argument montre qu'on obtient des fibrés isomorphes si l'on prend deux fonctions h_0 et g_0 isotopes.

Cette discussion montre qu'un fibré localement trivial $p: X \rightarrow \mathbb{S}^1$ est entièrement déterminé, à isomorphisme près, par le type difféomorphe de la fibre F et par la classe d'isotopie de l'application h_0 de recollement; classe que l'on a coutume d'appeler la monodromie du fibré. Dans le cas où les fibres sont complexes, la conclusion devient: un fibré localement trivial $p: X \rightarrow \mathbb{S}^1$ à fibres complexes est entièrement déterminé, à isomorphisme CR près, par le type biholomorphe de la fibre F et par la classe d'isotopie (par biholomorphismes) de l'application de recollement h_0 .

Appliquons tout ceci à notre situation. Pour montrer que l'intérieur de Y_1 est difféomorphe à l'intérieur de \mathcal{M} , il suffit de montrer que l'intérieur de \mathcal{M} est un fibré localement trivial sur le cercle de même fibre et même monodromie que l'intérieur de Y_1 . Maintenant, l'application qui envoie un point z de l'intérieur de \mathcal{M} sur $P(z)/|P(z)|$ est un fibré localement trivial. C'est la fibration de Milnor dont la fibre est difféomorphe à la fibre de $Y_1 \rightarrow \mathbb{S}^1$. De plus, il résulte de [Mi, Lemma 9.4], que les monodromies coïncident. Ce qui prouve notre affirmation.

Il suffirait maintenant de vérifier que le feuilletage extérieur est lui aussi CR-plat afin de recoller les deux feuilletages par la proposition 3.2. Malheureusement, tel n'est pas le cas¹. En fait, le paramètre λ est à la fois le paramètre de contraction dans la feuille du bord et le paramètre de contraction transverse. Il doit être strictement inférieur à un pour donner un quotient compact et tendre vers un de façon plate pour donner la platitude...

Comment s'en sortir? En dédoublant ce paramètre. À l'intérieur ce qui permet de rendre sans problème le feuilletage plat est que le paramètre λ de contraction dans la feuille du bord est différent du paramètre d transverse. Mais pour réussir ce dédoublement, il faut remplacer la feuille compacte par un collier.

¹Suite à cette école d'été, G. Deschamps a montré dans [Des] qu'il y avait CR-platitude pour un choix bien particulier de la fonction d . Il arrive donc à se passer du collier que nous introduisons maintenant.

Soyons plus précis. On insère, dans la partie extérieure, un collier du bord. Pour cela, on définit

$$g: (z, t) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{R} \longmapsto P(z) - \phi(t) \in \mathbb{R}$$

où $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ est une fonction C^∞ surjective nulle sur $\mathbb{R}_{\leq 0}$ et à dérivée strictement positive sur $\mathbb{R}_{>0}$.

Posons alors

$$\Xi = g^{-1}(\{0\}) \setminus \{(0, 0, 0)\} \times \mathbb{R}$$

et remarquons que Ξ est l'union de

$$\Xi^- = g^{-1}(\{0\}) \cap \{(z, t) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{R} \mid t \leq 0, z \neq (0, 0, 0)\}$$

qui est difféomorphe à $W \times]-\infty, 0]$ et de

$$\Xi^+ = g^{-1}(\{0\}) \cap \{(z, t) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{R} \mid t \geq 0, z \neq (0, 0, 0)\}$$

qui est lui difféomorphe à Y . L'intersection de ces deux pièces est difféomorphe à W , si bien que Ξ est difféomorphe à Y augmenté d'un collier infini. En particulier, $\Xi \cap \{t \geq -1\}$ est difféomorphe à Y (voir [Hi]).

Ceci étant fait, on souhaite reproduire le même feuilletage que précédemment sur $Y \simeq \Xi^+$ et profiter du collier $\partial Y \times [-1, 0] \subset \partial Y \times]-\infty, 0] \simeq \Xi^-$ pour obtenir de la platitude. On commence pour cela par feuilleter Ξ^+ par les niveaux

$$L_t = \{(z, t) \in \Xi^+ \mid P(z) = \phi(t)\}$$

et Ξ^- par les niveaux

$$L_t = \{(z, t) \in \Xi^- \mid P(z) = 0\}.$$

Notons qu'il s'agit bien du même feuilletage que précédemment sur $Y \simeq \Xi^+$. Reste à quotienter pour récupérer la partie extérieure voulue. Soit $G: \Xi \rightarrow \Xi$ définie par

$$G: (z, t) \longmapsto (\lambda \omega \cdot z, h(t))$$

où $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction C^∞ constante égale à t sur $]-\infty, -1]$, sans point fixe sur $] -1, 0[$, nulle en 0 et égale à $t \mapsto \phi^{-1}(\lambda^3 \phi(t))$ pour $t > 0$.

C'est maintenant un simple exercice de vérifier que le groupe engendré par G agit librement, proprement sur Ξ , respecte le feuilletage et est holomorphe en restriction aux feuilles. Le quotient est donc une variété feuilletée par surfaces complexes. Il se décompose naturellement en trois parties. D'abord, le quotient de $\Xi \cap \{t \leq -1\}$ qui est CR-isomorphe au collier $\partial Y \times]-\infty, -1]$. Puis le quotient de $\Xi \cap \{-1 \leq t \leq 0\}$ qui est difféomorphe à $\partial Y \times [-1, 0]$ mais muni d'un feuilletage distinct où les feuilles de l'intérieur sont des copies de W s'accumulant sur les deux composantes connexes du bord. Enfin, le quotient de Ξ^+ qui est CR-isomorphe à Y_1 .

Si l'on considère les deux dernières pièces ensemble, à savoir le quotient de $\Xi \cap \{t \geq -1\}$, tout ce qui précède implique qu'il est difféomorphe à Y_1 muni d'un

collier fermé, donc difféomorphe à Y_1 , et est muni d'un feuilletage par surfaces complexes CR-plat au bord.

Passons au feuilletage de la partie intérieure. Soit $q: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{E}$ un revêtement de \mathbb{E} . Le pull-back du fibré $W \rightarrow \mathbb{E}$ par q est un \mathbb{C}^* -fibré principal sur \mathbb{C}^* . Ces fibrés sont classifiés à isomorphisme près par $H^1(\mathbb{C}^*, \mathcal{O}^*)$ le premier groupe de cohomologie de \mathbb{C}^* à valeurs dans \mathcal{O}^* , le faisceau des germes de fonctions holomorphes ne s'annulant pas. Mais comme \mathbb{C}^* est Stein et que son second groupe de cohomologie à valeurs dans le faisceau constant \mathbb{Z} est nul, il résulte de la suite exacte de l'exponentielle que $H^1(\mathbb{C}^*, \mathcal{O}^*)$ est nul. Autrement dit, tout \mathbb{C}^* -fibré principal sur \mathbb{C}^* est holomorphiquement trivial. On peut résumer cela en disant que l'on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* & \longrightarrow & W \\ \text{1ère proj.} \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C}^* & \xrightarrow{q} & \mathbb{E}. \end{array}$$

Mais ceci fait de $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ un \mathbb{Z} -revêtement de W . Un moment de réflexion montre que ce revêtement correspond à l'action engendrée par

$$(4.2) \quad (v, w) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \longmapsto (v \cdot \exp(2i\pi\omega), \phi(v) \cdot w) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$$

où ϕ est une fonction holomorphe bien choisie, cf. [De].

Soit $\mathcal{X} = \mathbb{C} \times (\mathbb{C} \times [0, \infty \setminus \{(0, 0)\})$ muni du feuilletage trivial par surfaces complexes. Dans [M-V], on considère alors l'action engendrée sur \mathcal{X} par les deux difféomorphismes commutants

$$\begin{cases} U: (v, w, t) \in \mathcal{X} \longmapsto (v, (\lambda\omega) \cdot w, d(t)) \in \mathcal{X} \\ T: (v, w, t) \in \mathcal{X} \longmapsto (\exp(2i\pi\omega) \cdot v, \phi(v) \cdot w, t) \in \mathcal{X} \end{cases}$$

pour d définie en (3.2).

Cette action est libre, propre, respecte le feuilletage trivial et est holomorphe le long des feuilles. Le quotient est donc une variété (à bord) feuilletée par surfaces complexes. Les propriétés de d entraîne la CR-platitude du feuilletage. Le bord est la surface \mathcal{S}_λ . Mais l'intérieur n'est pas \mathcal{N} , i.e. n'est pas difféomorphe à $K \times \mathbb{D}$. En fait, l'action engendrée par T pour t non nul a pour quotient $L \times \mathbb{R}$, où L est le fibré en droites de base \mathbb{E} obtenu de W en ajoutant une section nulle. Ensuite, l'action engendrée par U définit un fibré sur \mathbb{S}^1 de fibre L et de monodromie $w \mapsto \lambda\omega \cdot w$. Comme il s'agit d'une monodromie isotope à l'identité par biholomorphismes, le quotient est $L \times \mathbb{S}^1$ (cf. la discussion précédente sur les fibrés sur le cercle). Et $L \times \mathbb{S}^1$ n'est pas difféomorphe à $K \times \mathbb{D}$. On vérifie facilement que le groupe fondamental de $L \times \mathbb{S}^1$ est \mathbb{Z}^3 ; tandis que le groupe fondamental de $K \times \mathbb{D}$, c'est-à-dire celui de K est isomorphe au groupe nilpotent

de matrices (cf. [M-V])

$$(4.3) \quad \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in 3\mathbb{Z}.$$

Lorsqu'on recolle ce feuilletage avec le feuilletage de \mathcal{M} à l'aide de la proposition 3.2, on obtient donc un feuilletage par surfaces complexes sur une 5-variété dont le groupe fondamental est non-trivial. On remarquera qu'il est constitué de trois parties bien distinctes:

- (i) L'intérieur feuilleté par copies de L ; intérieur s'accumulant sur le bord S_1 , une surface elliptique biholomorphe à \mathcal{S}_λ .
- (ii) L'extérieur feuilleté par copies de la fibre de Milnor $P^{-1}(1)$ s'accumulant sur le bord S_2 , une surface elliptique biholomorphe à S_1 .
- (iii) Un collier joignant S_1 à S_2 et feuilleté par des copies de W s'accumulant sur chacune de ces deux surfaces.

Nous expliquons maintenant pourquoi on ne peut espérer obtenir ainsi un feuilletage de \mathbb{S}^5 . On revient pour cela à (4.2) et on note qu'il existe une fonction holomorphe A de \mathbb{C} dans \mathbb{C} qui soit le relèvement de ψ aux revêtements universels des espaces source et but. En d'autres termes, on a

$$z \in \mathbb{C} \quad \exp(2i\pi A(z)) = \phi(\exp(2i\pi z)).$$

Choisissons une détermination de

$$\tau = \log(\lambda\omega)$$

Dans ces conditions, l'action sur $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ engendrée par les quatre biholomorphismes suivants

$$\begin{cases} U_1: (z, x) \mapsto (z, x + 1) \\ U_2: (z, x) \mapsto (z, x + \tau) \\ T_1: (z, x) \mapsto (z + 1, x) \\ T_2: (z, x) \mapsto (z + \omega, x + A(z)) \end{cases}$$

représente l'action du groupe fondamental de \mathcal{S}_λ sur son revêtement universel $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$. On remarquera qu'on peut supposer

$$z \in \mathbb{C} \quad A(z + 1) = A(z) - 3$$

de telle sorte que

$$T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1 \circ U_1^3$$

les autres commutateurs étant triviaux. Ceci donne en effet une présentation du groupe fondamental de K , cf. (4.3) et [M-V].

Posons alors $w = \exp(2i\pi\tau^{-1}x)$. Nous pouvons réécrire \mathcal{S}_λ comme le quotient de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ par

$$\begin{cases} U: (z, w) \longmapsto (z, \exp(2i\pi\tau^{-1}) \cdot w) \\ T_1: (z, w) \longmapsto (z + 1, w) \\ T_2: (z, w) \longmapsto (z + \omega, \exp(2i\pi\tau^{-1}A(z)) \cdot w). \end{cases}$$

Posons enfin

$$\mathcal{X}_1 = \mathbb{C} \times (\mathbb{C} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \setminus \{(0, 0)\}).$$

Feuilleter \mathcal{N} avec revêtement universel feuilleté donné par le feuilletage trivial de \mathcal{X}_1 revient à trouver f, g des difféomorphismes de $\mathbb{R}_{\geq 0}$ tels que

$$(4.4) \quad f \circ d = d \circ f \quad g \circ d = d \circ g \quad f \circ g = g \circ f \circ d^3$$

On pourrait en effet définir

$$\begin{cases} U: (z, w, t) \in \mathcal{X}_1 \longmapsto (z, \exp(2i\pi\tau^{-1}) \cdot w, d(t)) \in \mathcal{X}_1 \\ T_1: (z, w, t) \in \mathcal{X}_1 \longmapsto (z + 1, w, f(t)) \in \mathcal{X}_1 \\ T_2: (z, w, t) \in \mathcal{X}_1 \longmapsto (z + \omega, \exp(2i\pi\tau^{-1}A(z)) \cdot w, g(t)) \in \mathcal{X}_1. \end{cases}$$

L'action engendrée par U, T_1 et T_2 est propre, libre, respecte le feuilletage trivial de \mathcal{X}_1 et est holomorphe le long des feuilles, que ce soit à l'intérieur ou au bord. Le quotient est donc feuilleté par surfaces complexes et s'identifie à \mathcal{N} .

L'existence d'un tel feuilletage par surfaces complexes sur \mathcal{N} revient ainsi à l'existence de f, g et d infiniment tangents à l'identité vérifiant (4.4), avec de plus d contractante, c'est-à-dire à une réalisation particulière du groupe nilpotent de matrices (4.3) dans les difféomorphismes de $[0, \infty[$.

Malheureusement, d'après un théorème célèbre de Plante et Thurston [P-T], toute représentation d'un groupe nilpotent dans les difféomorphismes C^2 de $[0, \infty[$ a son image abélienne. Autrement dit, il n'existe pas de tels difféomorphismes f, g et h même en classe C^2 .

Par contre, d'après [F-F], il existe trois C^1 -difféomorphismes f, g et d de l'intervalle fermé $[0, \infty[$ tels que

$$f'(0) = g'(0) = d'(0) = 1 \quad f \circ g = g \circ f \circ d^3 \quad f \circ d = d \circ f \quad g \circ d = d \circ g$$

donc en particulier tangents à l'identité en 0 à l'ordre 1. Si d pouvait être choisi sans point fixe sur $]0, \infty[$, ceci permettrait de construire un feuilletage par surfaces complexes transversalement C^1 sur \mathcal{N} , et donc sur \mathbb{S}^5 (comme les trois difféomorphismes sont tangents à l'identité à l'ordre 1, la proposition 3.2 permettrait de conclure qu'on peut recoller ce feuilletage avec celui de \mathcal{M} à l'ordre 1). Mais, toujours par un résultat de Plante, un groupe nilpotent finiment engendré agissant sur la droite réelle même par homéomorphismes préserve une mesure de

Radon sur \mathbb{R} , et, en conséquence, tous les commutateurs ont des points fixes (voir [F-F, section 3.2])².

En conséquence, il n'existe même pas d'homéomorphismes de $[0, \infty[$ vérifiant (4.4) avec d contractante. Il est vraisemblable que cet argument suffise à montrer qu'il n'existe pas de feuilletage par surfaces complexes de \mathcal{N} dont le revêtement universel feuilleté soit \mathcal{X}_1 feuilleté trivialement.

5. Problème d'existence.

Si l'on a en tête notre dernier exemple, il est tentant de se poser le problème d'existence suivant:

Structures complexes généralisées sur les sphères. *Pour quelles valeurs de n , la sphère \mathbb{S}^{2n-1} admet-elle un feuilletage par variétés complexes de codimension un?*

Néanmoins, une telle question est très vraisemblablement hors de portée. On sait que toutes les sphères de dimension impaire admettent un feuilletage réel de codimension un: c'est un corollaire immédiat du magnifique théorème de Thurston [Th]. On dispose même de descriptions relativement explicites de tels feuilletages dans de nombreux cas [D-L]. Cependant, pour mettre une structure complexe sur les exemples de [D-L], il faudrait disposer de résultats généraux sur les modifications de feuilletages, à savoir la possibilité de tourbillonner un feuilletage à feuilles complexes en gardant une structure complexe le long des feuilles. Or nous verrons au chapitre III des résultats qui montrent qu'on ne peut pas tourbillonner complexe. D'autre part, comme c'est d'ailleurs le cas pour la fameuse question de l'existence d'une structure complexe sur \mathbb{S}^6 , on se trouve particulièrement démunis pour montrer qu'une sphère donnée n'admet pas de feuilletage par variétés complexes. Même si on a réussi à montrer qu'un feuilletage réel donné n'admettait pas de structure complexe, on ne peut tout de même pas les essayer tous...

Ainsi, il apparaît vite que la question raisonnable est plutôt l'existence de structure complexe sur *un feuilletage donné*, et la recherche d'obstructions à l'existence d'une telle structure. Ainsi, bien que chaque feuille du feuilletage de Lawson de \mathbb{S}^5 admette une structure complexe on peut démontrer le

Théorème [M-V2]. *Le feuilletage de Lawson n'admet pas de structure complexe le long des feuilles.*

La preuve de ce résultat utilise les lemmes de compactifications présentés au chapitre III. Sous cette forme, le problème d'existence rejoint le problème de

²Je remercie Andres Navas qui m'a expliqué ces résultats sur les groupes nilpotents agissant sur $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

rigidité. Il s'agit de montrer que l'existence d'une feuille spéciale entraîne des contraintes trop fortes sur les structures complexes des feuilles avoisinantes pour qu'il existe une structure complexe globale. Il est vraisemblable que l'on puisse généraliser ce type de résultats.

6. Problème de plongement.

Il est très naturel de se demander sous quelle condition une variété réelle feuilletée par hypersurfaces complexes peut être plongée comme hypersurface Levi-plate d'une variété complexe. Cette question, que nous avons dénommée problème de plongement dans l'introduction, est une question très délicate qui dépend fortement du feuilletage et de la variété que l'on veut plonger.

A ce problème général est attaché le problème plus spécifique du minimal exceptionnel. Dans sa forme faible, il s'agit de montrer qu'il n'existe pas d'hypersurface Levi-plate dans l'espace projectif complexe \mathbb{P}^n . Pour $n \geq 3$ et des feuilletages analytiques réels, il s'agit d'un résultat de A. Lins Neto [LN], et pour des feuilletages lisses et $n \geq 3$, de Y.T. Siu [Si]. Par contre, la preuve dans le cas lisse et $n = 2$ de [Si2], de même que celle de [Oh] dans le cas analytique réel, semblent incomplètes.

Des formes plus fortes (où l'hypersurface est "singulière") de ce problème existent. On peut sans conteste dire qu'il s'agit de la question la plus connue de ce domaine. Elle a entre autres choses le grand mérite de faire converger approche géométrique et techniques analytiques. Un volume entier pourrait lui être consacrée. Nous nous contenterons de cette très brève introduction, en remarquant que, malheureusement, les outils développés dans ce cours ne sont pas adaptés pour le traiter.

Revenons au problème de plongement en lui-même. E. Ghys donne des résultats de plongement pour les feuilletages par surfaces de Riemann (en fait pour les laminations) dans [Gh]. A l'opposé, le feuilletage de Reeb ne peut être plongé, résultat de D. Barrett [Ba] qui vient d'être étendu par G. Della Sala à une large classe de feuilletages contenant une feuille compacte à holonomie plate à l'identité [DS]. En particulier, le feuilletage de [M-V] que nous avons construit dans la section 4 ne peut être plongé comme hypersurface Levi-plate d'une variété complexe. Dans les deux cas, c'est la topologie du feuilletage (feuille compacte à holonomie plate à l'identité) qui engendre des contraintes sur les structures complexes des autres feuilles et rend impossible un tel plongement.

CHAPITRE II: SURVOL DE LA THÉORIE DE KODAIRA-SPENCER DES DÉFORMATIONS ET THÉORÈME DE FISCHER-GRAUERT

Soit X_0 une variété compacte complexe et $\pi: \mathcal{X} \rightarrow I$ une déformation de X_0 . On identifie X_0 à la fibre centrale $\pi^{-1}(0)$. Nous avons déjà vu qu'une telle famille est différentiablement triviale par le lemme d'Ehresmann, en particulier toutes les fibres $X_t = \pi^{-1}(t)$ sont difféomorphes. Bien entendu, tout l'intérêt de la notion vient de ce qu'en général, les fibres ne sont pas biholomorphes.

L'objet de ce chapitre est de présenter quelques idées de la théorie des déformations de K. Kodaira et D.C. Spencer. Nous nous contenterons d'un survol avec pour but de montrer le théorème de Fischer-Grauert qui donne un critère nécessaire et suffisant pour qu'une telle famille soit CR-triviale. Nous expliquerons en détail la preuve de Fischer-Grauert, en admettant le théorème de rigidité de Kodaira-Spencer nécessaire. Ceci donne une réponse au problème d'isomorphisme pour les familles de déformations ponctuellement isomorphes à une famille triviale. Enfin, nous expliquerons brièvement comment étendre cette théorie aux feuilletages par variétés complexes. Comme référence sur les déformations, on pourra consulter [M-K] et [K].

Insistons sur le fait que, dans cette partie, nous déformons uniquement des variétés *compactes*. Rappelons également que nos variétés sont toujours supposées *connexes*.

1. L'application de Kodaira-Spencer.

Il est instructif de comprendre *pourquoi* une famille de déformations n'est pas forcément un produit à biholomorphisme près, c'est-à-dire pourquoi la preuve du lemme d'Ehresmann ne passe pas en complexe. Pour cela, reprenons-la point par point.

On commence par se donner un ensemble fini de cartes de submersions de \mathcal{X} (quitte à restreindre I), c'est-à-dire un recouvrement fini (U_α, ϕ_α) de \mathcal{X} par des cartes feuilletées vérifiant le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} U_\alpha & \xrightarrow{\phi_\alpha} & \mathbb{C}^n \times I \\ \pi \downarrow & & \downarrow \text{2nde proj.} \\ I & \xrightarrow{\text{identité}} & I \end{array}$$

où, pour simplifier les notations, nous supposerons $\pi(U_\alpha)$ égal à I pour tout α . Cette première étape passe sans problème au cas CR, il suffit de prendre des cartes feuilletées pour le feuilletage par variétés complexes et non simplement des cartes feuilletées pour le feuilletage lisse sous-jacent.

Ensuite, l'idée du lemme d'Ehresmann est de relever le champ de vecteurs $\partial/\partial t$ de la base en un champ de vecteurs transverse au feuilletage envoyant feuille sur feuille. Dans notre contexte, il nous faut un champ holomorphe le long des feuilles, c'est-à-dire holomorphe en z si l'on note (z, t) les coordonnées dans les cartes de submersion. Nous nommerons de tels champs CR.

Observons que, si un tel champ existe, son flot au temps t , bien défini pour t suffisamment petit, enverra X_0 biholomorphiquement sur X_t . En fait, de même que dans le cas C^∞ , nous avons un CR-isomorphisme entre \mathcal{X} et $X_0 \times I$. Ainsi, puisque nous avons déjà vu qu'il existe des déformations non triviales, c'est dans la construction de ce champ que doivent se poser les problèmes.

Localement, il n'y a aucune difficulté pour relever $\partial/\partial t$. Il suffit de poser

$$\xi_\alpha = (\phi_\alpha^{-1})_* \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)$$

où $\partial/\partial t$ désigne cette fois le champ $\partial/\partial t$ dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$.

Dans le cas réel, on recolle tous les ξ_α au moyen d'une partition de l'unité. C'est bien entendu ici que la démonstration échoue dans le cas CR. En utilisant une partition de l'unité, on perd le caractère holomorphe en z du champ de vecteurs.

Posons maintenant

$$(1.1) \quad \xi_{\alpha\beta} \equiv \xi_\alpha - \xi_\beta \text{ sur } U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$$

où l'on prendra soin que $\xi_{\alpha\beta}$ et $\xi_{\beta\alpha}$ ne sont pas identiques mais opposés. La collection $(\xi_{\alpha\beta})$ forme ainsi un ensemble de champs de vecteurs CR définis sur les intersections orientées $U_{\alpha\beta}$. Notons que

$$(\pi)_*(\xi_{\alpha\beta}) = (\pi)_*(\xi_\alpha) - (\pi)_*(\xi_\beta) = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$$

autrement dit ces champs sont tangents aux fibres de π .

S'ils sont tous nuls, alors les ξ_α se recollent holomorphiquement en z et nous pouvons adapter la preuve du lemme d'Ehresmann. En fait, si l'on peut trouver des champs η_α CR sur U_α tangents aux fibres et tels que

$$(1.2) \quad \xi_{\alpha\beta} \equiv \eta_\alpha - \eta_\beta$$

alors les champs $\xi_\alpha - \eta_\alpha$ se recollent globalement en un champ de vecteurs $\tilde{\xi}$ CR qui vérifie

$$(\pi)_*(\tilde{\xi}|_{U_\alpha}) = (\pi)_*(\xi_\alpha) - (\pi)_*(\eta_\alpha) = \frac{\partial}{\partial t} - 0 = \frac{\partial}{\partial t}$$

i.e. est un relèvement CR de $\partial/\partial t$.

L'obstruction au relèvement CR du champ $\partial/\partial t$ à \mathcal{X} est donc de nature cohomologique. En fait, on peut définir rapidement la cohomologie dont il s'agit de la manière suivante.

Pour $p \geq 0$, on définit une p -cochaîne de champs CR du recouvrement (U_α) comme la donnée d'un champ de vecteurs CR tangent aux fibres sur chaque intersection ordonnée de p ouverts du recouvrement (avec comme convention que changer l'ordre d'une telle intersection par une permutation σ revient à changer le signe du champ correspondant en multipliant par la signature de σ). L'ensemble des p -cochaînes, noté C^p , est un espace vectoriel sur \mathbb{C} .

On définit l'opérateur de cobord suivant

$$(\xi_{\alpha_1 \dots \alpha_p}) \in C^p \xrightarrow{\delta} (\delta \xi)_{\beta_1 \dots \beta_{p+1}} = \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^i \xi_{\beta_1 \dots \beta_{i-1} \beta_{i+1} \dots \beta_{p+1}} \in C^{p+1}$$

pour lequel on vérifie aisément l'identité $\delta \circ \delta \equiv 0$.

Enfin, on peut classiquement définir l'ensemble $H^p((U_\alpha), \Theta)$ des p -classes de cohomologie de champs CR du recouvrement (U_α) comme le quotient de l'espace vectoriel des p -cocycles

$$\{(\xi_{\alpha_1 \dots \alpha_p}) \in C^p \mid \delta \xi \equiv 0\}$$

par le sous-espace vectoriel des p -cobords δC^{p-1} .

Avec ces conventions, on vérifie aisément également que l'élément $(\xi_{\alpha\beta})$ de (1.1) est un 1-cocycle; et l'égalité (1.2) signifie que $(\xi_{\alpha\beta})$ est un 1-cobord. Dès lors, on peut reformuler les remarques précédentes en disant que le relèvement CR du champ $\partial/\partial t$ est possible si et seulement si la classe de cohomologie de $(\xi_{\alpha\beta})$ dans $H^1((U_\alpha), \Theta)$ est triviale.

Bien entendu, cette construction cohomologique n'est pas pleinement satisfaisante comme telle, puisque tout semble dépendre du choix d'un recouvrement particulier. Il y a un procédé classique, mais techniquement assez long, pour se débarrasser du choix de recouvrement en passant à une sorte de limite directe sur des recouvrements de plus en plus fins. On pourra consulter [K]. Ce que l'on trouve à la limite sont les groupes de cohomologie $H^p(\mathcal{X}, \Theta)$ à valeurs dans le faisceau Θ des germes de champs de vecteurs CR tangents aux fibres de π . On peut maintenant énoncer la:

Définition. Soit $\pi: \mathcal{X} \rightarrow I$ une déformation de X_0 compacte. L'*application de Kodaira-Spencer* de \mathcal{X} est l'application $\rho_{\mathcal{X}}$ de l'ensemble des champs de vecteurs C^∞ de I dans $H^1(\mathcal{X}, \Theta)$ définie par

$$\rho_{\mathcal{X}} \left(a(t) \frac{\partial}{\partial t} \right) = [(a(t) \xi_{\alpha\beta})]$$

les crochets désignant la classe de cohomologie.

On a alors la:

Proposition 1.1. *La famille $\pi: \mathcal{X} \rightarrow I$ est CR-triviale si et seulement si l'application de Kodaira-Spencer est nulle.*

Remarques. (i) Une façon plus rapide de définir l'application de Kodaira-Spencer - pour le lecteur ayant une certaine habitude des faisceaux - est de considérer la suite exacte courte de faisceaux suivante

$$0 \longrightarrow \Theta \longrightarrow T^\pi \mathcal{X} \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

où $T^\pi \mathcal{X}$ est le faisceau des germes de champs de vecteurs CR sur \mathcal{X} dont la projection par $(\pi)_*$ est constante en restriction à chaque fibre X_t , et N le faisceau quotient des deux autres.

La suite exacte longue en cohomologie débute par

$$0 \longrightarrow H^0(\mathcal{X}, \Theta) \longrightarrow H^0(\mathcal{X}, T^\pi \mathcal{X}) \longrightarrow H^0(\mathcal{X}, N) \xrightarrow{j} H^1(\mathcal{X}, \Theta) \longrightarrow \dots$$

et l'obstruction à la surjectivité de la flèche

$$H^0(\mathcal{X}, T^\pi \mathcal{X}) \longrightarrow H^0(\mathcal{X}, N)$$

est liée à la nature de j . Il ressort de la définition des faisceaux que $H^0(\mathcal{X}, N)$ s'identifie à l'ensemble des champs C^∞ sur I . Donc j s'identifie à l'application de Kodaira-Spencer.

(ii) L'application de Kodaira-Spencer est linéaire.

Finissons ce paragraphe en définissant l'application de Kodaira-Spencer ponctuelle. Soit $t \in I$. On compose $\rho_{\mathcal{X}}$ avec la flèche de restriction

$$(1.3) \quad H^1(\mathcal{X}, \Theta) \longrightarrow H^1(X_t, \Theta_t)$$

où Θ_t est la restriction de Θ à X_t . On remarque que cette composée appliquée à un champ ξ sur I ne dépend que de la valeur de ξ en t . On obtient ainsi l'*application de Kodaira-Spencer en un point t*

$$\rho_t: T_t I \simeq \mathbb{R} \longrightarrow H^1(X_t, \Theta_t)$$

Elle est, elle aussi, linéaire.

2. Relation entre applications de Kodaira-Spencer et théorème de rigidité.

La proposition 1.1 est un résultat de rigidité qui donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille soit CR-triviale. Malheureusement la condition cohomologique donnée est à peu près invérifiable en pratique. On peut même se demander s'il n'est pas plus simple de vérifier à la main la trivialité d'une famille pour en déduire que son application de Kodaira-Spencer est nulle. A l'inverse, l'application de Kodaira-Spencer *ponctuelle* est en général calculable. On notera en particulier que, d'après un théorème classique (voir [C-S] et [K2]), les groupes de cohomologie à valeurs dans Θ sont de dimension finie lorsque la variété est compacte, alors que les groupes de cohomologie pour une famille \mathcal{X}

sont en général de dimension infinie. On s'en convainc facilement en regardant l'exemple d'une famille triviale $\mathcal{X} = X_0 \times I$. Tout chemin lisse

$$c: I \longrightarrow H^p(X_0, \Theta_0)$$

induit un élément de $H^p(\mathcal{X}, \Theta)$. De surcroît, deux chemins distincts induisent deux éléments distincts. Supposons en effet que deux chemins diffèrent au point t de I , alors ils induiront deux classes de $H^p(\mathcal{X}, \Theta)$ dont les restrictions par (1.3) différeront. Ce sont donc deux classes distinctes.

Ainsi dans cet exemple, les groupes de cohomologie de \mathcal{X} “contiennent” un espace de chemins dans un espace vectoriel et ne sont donc même pas des espaces de Banach.

Ceci incite à rechercher un résultat de rigidité lié à une condition cohomologique portant sur les applications de Kodaira-Spencer *ponctuelles*.

Définition. Une déformation $\pi: \mathcal{X} \rightarrow I$ est dite *régulière* si la dimension de l'espace vectoriel $H^1(X_t, \Theta_t)$ est indépendante de $t \in I$.

Théorème 2.1 (Kodaira-Spencer, 1958, [K-S1]). *Soit $\pi: \mathcal{X} \rightarrow I$ une déformation régulière de X_0 compacte. Alors \mathcal{X} est CR-triviale au voisinage de 0 si et seulement si ρ_t est nulle pour tout t proche de 0.*

Ce théorème est une conséquence facile du résultat suivant.

Théorème 2.2 (Kodaira-Spencer, 1958, [K-S1]). *Soit $\pi: \mathcal{X} \rightarrow I$ une déformation régulière de X_0 compacte. Alors l'union disjointe des $H^1(X_t, \Theta_t)$ lorsque t varie possède une structure de fibré vectoriel sur I et $H^1(\mathcal{X}, \Theta)$ s'identifie aux sections lisses de ce fibré.*

En effet, il résulte du théorème 2.2 que, pour une déformation régulière, l'annulation pour tout t de l'application de Kodaira-Spencer *ponctuelle* entraîne l'annulation de l'application de Kodaira-Spencer de la famille. On peut donc déduire le théorème 2.1 de la proposition 1.1. On a même un résultat un peu plus fort:

Corollaire 2.3. *Soit $\pi: \mathcal{X} \rightarrow I$ une déformation régulière de X_0 compacte. Si ρ_t est nulle pour t dans un sous-ensemble de I localement dense en 0, alors \mathcal{X} est CR-triviale au voisinage de 0.*

Cela signifie que la section formée par les (ρ_t) est nulle sur un ensemble dense de points, donc identiquement nulle puisque C^∞ . On se retrouve ainsi sous les hypothèses du théorème 2.2.

Ce deuxième théorème de Kodaira-Spencer est un résultat difficile et profond. Il faut le voir comme un problème d'uniformisation. En effet, considérons simplement l'équivalence entre nullité de $\rho_{\mathcal{X}}$ et nullité de ρ_t pour tout t . D'une part, dire que $\rho_{\mathcal{X}}$ est nulle revient à dire qu'il existe un 0-cobord ξ , c'est-à-dire un

champ de vecteurs sur \mathcal{X} tangent aux fibres et holomorphes le long des fibres tel que

$$\delta\xi = \rho_{\mathcal{X}}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right).$$

Ce ξ peut être vu comme une famille (ξ_t) de champs holomorphes le long de X_t . Cette famille est *lisse* en t . D'autre part, dire que ρ_t est nulle pour tout t revient à dire qu'il existe une famille (η_t) de champs holomorphes le long de X_t telle que

$$\delta_t\eta_t = \rho_t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right).$$

La différence? Cette famille n'a aucune raison d'être lisse en t ... Pour montrer le théorème, il *suffit* de montrer que, si la famille est régulière, on peut toujours *choisir* les η_t de telle sorte qu'ils forment une famille lisse.

La meilleure manière de se rendre compte que cela n'a rien d'évident est de donner un contre-exemple au corollaire 2.3 pour des familles non régulières. Considérons la matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} 2 & t \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

où $t \in \mathbb{R}$. On définit sur $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\} \times \mathbb{R}$ l'action de \mathbb{Z} engendrée par les itérés de l'application

$$(z, w, t) \mapsto (A_t \cdot (z, w), t).$$

Le quotient définit une famille \mathcal{X} paramétrée par $t \in \mathbb{R}$. Chaque fibre est le quotient de $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par une application linéaire contractante, donc est difféomorphe à $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1$. En effet, voyons \mathbb{S}^3 comme la sphère unité euclidienne de \mathbb{C}^2 et posons $\mathcal{S}_t = A_t \cdot \mathbb{S}^3$. La variété lisse \mathcal{S}_t est difféomorphe à \mathbb{S}^3 et ne l'intersecte pas pour t suffisamment proche de 0. L'espace fermé (c'est-à-dire en incluant les deux sphères) compris entre \mathbb{S}^3 et \mathcal{S}_t forme un domaine fondamental \mathcal{D} pour l'action, et le quotient s'obtient de \mathcal{D} en identifiant $(z, w) \in \mathbb{S}^3$ à $A_t \cdot (z, w) \in \mathcal{S}_t$, donc est difféomorphe à $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1$. Une telle surface complexe est appelée *surface de Hopf (primaire)*.

Lemme 2.4. (i) *Toutes les fibres correspondant à un paramètre non nul sont biholomorphes, i.e. X_t et $X_{t'}$ sont biholomorphes dès que t et t' sont non nuls.*
(ii) *La fibre centrale n'est pas biholomorphe aux autres fibres, i.e. pour t non nul, X_t n'est pas biholomorphe à X_0*

C'est un exemple de ce que l'on appelle une famille à saut. Toutes les fibres en dehors de la fibre centrale sont les mêmes, et il y a un "saut de structure complexe" lorsqu'on passe de la fibre centrale aux autres.

Preuve. La preuve est élémentaire. Pour le point (i), on remarque simplement que l'application

$$\Phi_t(z, w) = (z/t, w),$$

définie pour tout t non nul, vérifie

$$A_1 \circ \Phi_t \equiv \Phi_t \circ A_t$$

donc passe au quotient en un biholomorphisme entre X_t et X_1 .

Venons-en au point (ii). Sachant que $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est le revêtement universel de chaque fibre, on en déduit que, pour t non nul, il y a un biholomorphisme entre X_t et X_0 si et seulement s'il existe un biholomorphisme Φ de $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tel que

$$A_t \circ \Phi \equiv \Phi \circ A_0 \quad \text{ou} \quad A_t \circ \Phi \equiv \Phi \circ A_0^{-1}$$

Par Hartogs, un tel biholomorphisme s'étend en un biholomorphisme de \mathbb{C}^2 fixant $(0,0)$. L'égalité précédente implique que la partie linéaire de Φ conjugue A_t et A_0 , ce qui est absurde. \square

Dans une telle famille, on peut relever $\partial/\partial t$ en un champ CR *en dehors de* 0, donc en $t \neq 0$, l'application ρ_t est nulle. C'est donc bien un contre-exemple au corollaire précédent pour des familles non régulières. On peut même, par un reparamétrage astucieux, obtenir un tel contre-exemple avec les applications de Kodaira-Spencer nulles même en 0 (cf. [K-S2]).

3. Théorème de Fischer-Grauert.

Le reste de cette partie est consacré à la preuve du résultat suivant, qui résout le problème de trivialité pour les déformations.

Théorème 3.1 (Fischer-Grauert, 1965, [F-G]). *Soit $\pi: \mathcal{X} \rightarrow I$ une déformation de X_0 compacte. Alors \mathcal{X} est localement triviale en 0 si et seulement si toutes les fibres X_t sont biholomorphes pour t proche de 0.*

En fait, le théorème de Fischer-Grauert est énoncé et démontré dans [F-G] pour des familles holomorphes. On le cite fréquemment en disant qu'une submersion holomorphe à fibres compactes et connexes est un fibré holomorphe localement trivial si et seulement si toutes les fibres sont biholomorphes. Néanmoins, la preuve s'adapte sans problème au cas des familles différentiables.

Avant de donner une preuve complète de ce théorème, voyons d'un peu plus près pourquoi l'hypothèse de compacité est essentielle. Nous nous proposons de construire une variété non compacte munie d'un feuilletage par variétés complexes de codimension un, homéomorphe à un produit, dont les feuilles sont toutes biholomorphes, mais qui n'est pas CR-isomorphe à un produit.

Pour cela, considérons la famille triviale $\mathbb{P}^1 \times I \rightarrow I$ et soit

$$s: I \rightarrow \mathbb{P}^1$$

une application continue *non* C^∞ . Posons

$$\mathcal{X} = \{([z:w], t) \in \mathbb{P}^1 \times I \mid [z:w] \neq s(t)\}.$$

Il s'agit d'une variété différentiable munie d'un feuilletage par surfaces de Riemann donnée par la projection naturelle sur I . La feuille au-dessus de t est $\mathbb{P}^1 \setminus \{s(t)\}$, donc biholomorphe à \mathbb{C} . De plus, \mathcal{X} est CR-homéomorphe à $\mathbb{C} \times I$. En effet, l'application

$$([z: w], t) \in \mathbb{P}^1 \times I \xrightarrow{\Phi} ([s_1(t)z - s_0(t)w: \bar{s}_0(t)z + \bar{s}_1(t)w], t) \in \mathbb{P}^1 \times I$$

où $s(t) = [s_0(t): s_1(t)]$, est un CR-homéomorphisme de $\mathbb{P}^1 \times I$ qui envoie la section s sur la section $[0: 1]$. Donc Φ induit par restriction un CR-homéomorphisme entre \mathcal{X} et $\mathbb{C} \times I$. Ce n'est pas un CR-difféomorphisme parce que la section s n'est pas C^∞ .

Nous affirmons qu'il n'existe pas de CR-difféomorphisme entre \mathcal{X} et $\mathbb{C} \times I$. Supposons le contraire. Alors le CR-isomorphisme Ψ entre \mathcal{X} et $\mathbb{C} \times I$ s'étendrait en un CR-isomorphisme de $\mathbb{P}^1 \times I$ dans lui-même, envoyant la section s sur la section $[0 : 1]$. En effet, Ψ s'étend continûment en posant

$$t \in I \quad \Psi(s(t), t) = ([0 : 1], t)$$

et cette extension est holomorphe à t fixé. Voyons Ψ comme une famille (Ψ_t) de biholomorphismes de \mathbb{P}^1 , c'est-à-dire de fractions rationnelles en (z, w) de degré un. Comme Ψ est lisse en t en dehors de la section s , les coefficients de ces fractions rationnelles peuvent être choisis lisses en t . Ce qui implique que Ψ est lisse partout, même aux points de la section s .

Mais alors, la section s serait C^∞ , contradiction.

Passons alors à la démonstration de Fischer-Grauert. Il s'agit, une nouvelle fois, d'un problème d'uniformisation. En fait, soit $(\phi_t)_{t \in I}$ une famille de biholomorphismes ponctuels entre X_0 et X_t . Il suffit de montrer qu'on peut choisir cette famille différentiable en t . La preuve de Fischer-Grauert se fait en trois étapes.

Première étape: On montre le

Lemme 3.2. *Pour tout $J \subset I$, l'ensemble*

$E_J = \{t \in J \mid \exists (t_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow t \text{ telle que } (\phi_{t_n}) \text{ converge uniformément vers } \phi_t\}$
est dense dans J .

Autrement dit, même si l'on a choisi les ϕ_t de manière totalement arbitraire, la suite (ϕ_t) possède une propriété de continuité.

Preuve. Il s'agit d'une utilisation très astucieuse de la propriété suivante:

L'ensemble \mathcal{C} des applications continues d'un espace métrique compact X dans $X \times J$ muni de la topologie de la convergence uniforme est de type dénombrable, c'est-à-dire contient une suite d'éléments $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dénombrable et dense.

Une preuve de ce fait se trouve dans [Bo, Chapitre 10]. Il a comme conséquence que toute famille *non dénombrable* d'éléments de \mathcal{C} possède un point d'accumulation. Supposons en effet le contraire; alors la famille en question, appelons la $(f_t)_{t \in A}$ est discrète, et, quitte à enlever les répétitions, on peut supposer tous les f_t deux-à-deux distincts. On peut trouver des voisinages V_t de f_t pour tout t tels que

$$V_t \cap V_{t'} = \emptyset \text{ dès que } t \neq t'.$$

La densité de la suite (y_n) dans \mathcal{C} entraîne qu'il existe au moins un $y_{n(t)}$ dans chaque V_t . Comme les V_t sont tous disjoints, ces $y_{n(t)}$ sont tous distincts. Ce qui contredit le fait qu'il y ait un nombre non dénombrable de V_t .

Pour conclure, il suffit de remarquer que t_0 appartient à E_J si et seulement si ϕ_{t_0} est un point d'accumulation de la famille $(\phi_t)_{t \in J}$ considérée comme famille d'éléments de vC . Mais d'après ce qui précède, dans tout voisinage de t_0 , il existe un tel point d'accumulation. \square

Deuxième étape:

On suppose $H^0(X_0, \Theta)$ nul, autrement dit X_0 n'a pas de champs de vecteurs holomorphes globaux mis à part le champ nul. L'idée est de montrer que l'application de Kodaira-Spencer ρ_t est nulle pour tout t dans E_I . Comme la famille \mathcal{X} est évidemment régulière (toutes les fibres sont biholomorphes), on conclut par le corollaire 2.3. Pour montrer la nullité de ρ_t en $t \in E_I$, on va construire un relèvement CR de $\partial/\partial t$ en ces points en revenant à la définition standard de dérivée d'une fonction comme limite d'un taux d'accroissement.

Pour formaliser tout cela, il y a beaucoup de notations à introduire. On commence par choisir une collection finie \mathcal{U} de cartes de submersions

$$i \in B \quad \psi_i: U_i \longrightarrow \mathbb{D}^n \times J$$

recouvrant $\pi^{-1}(J)$ pour J suffisamment petit. On suppose les U_i relativement compacts. On se place en un point $t \in E_J$ que nous identifierons, pour simplifier les écritures, avec 0. On suppose $\phi_0: X_0 \rightarrow X_0$ égal à l'identité (sinon, on remplace ϕ_t par $\phi_t \circ \phi_0^{-1}$). On se donne enfin un recouvrement $\mathcal{V} = (V_\alpha)_{\alpha \in A}$ fini de X_0 , plus fin que $\mathcal{U} \cap X_0$. Il existe donc une application $r: A \rightarrow B$ telle que

$$\alpha \in A \quad V_\alpha \subset X_0 \cap U_{r(\alpha)}.$$

Choisissons une suite

$$(\phi_{t_k}: X_0 \longrightarrow X_{t_k})$$

(que l'on renommera (ϕ_k)) convergeant uniformément vers $\phi_0 = Id$. Pour $k > k_0$ suffisamment grand, on a donc

$$\phi_k(V_\alpha) \subset U_{r(\alpha)}.$$

Définissons

$$(3.1) \quad \xi_\alpha^k = (\psi_i^{-1})_*(\psi_i \circ \phi_k - \psi_i) \quad \alpha \in A, \quad i = r(\alpha), \quad k > k_0$$

sur V_α . En écrivant

$$x \in U_i \quad \psi_i(x) = (z_i^1(x), \dots, z_i^n(x), t(x))$$

on a donc

$$x \in V_\alpha \quad \xi_\alpha^k(x) = (\psi_i^{-1})_*(z_i^1(\phi_k(x)) - z_i^1(x), z_i^n(\phi_k(x)) - z_i^n(x), t_k).$$

Cette formule définit un champ de vecteurs holomorphes sur $V_\alpha \subset X_0$ non tangent à X_0 (puisque t_k est non nul). Pour qu'il ressemble à un taux d'accroissement des ϕ_k , il faut au préalable le normaliser. A cette fin, on pose

$$\|\xi_\alpha^k\| = \sup_{x \in V_\alpha} \|\xi_\alpha^k\|(x) = \sup_{x \in V_\alpha} \max(|z_i^1(\phi_k(x)) - z_i^1(x)|, \dots, |z_i^n(\phi_k(x)) - z_i^n(x)|, |t_k|)$$

et

$$M_k = \max_{\alpha \in A} \|\xi_\alpha^k\|.$$

Notons que M_k est strictement positive, puisque $|t_k|$ l'est, et finie, par compacité relative des V_α et finitude de A . On peut donc poser

$$\eta_\alpha^k = \frac{1}{M_k} \xi_\alpha^k.$$

Pour tout $\alpha \in A$, la suite $((\psi_i)_* \eta_\alpha^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions holomorphes uniformément bornées par 1. Le théorème de Montel assure qu'elle converge uniformément vers une fonction holomorphe $(\psi_i)_* \eta_\alpha$. Les η_α définissent des champs de vecteurs sur V_α .

Lemme 3.3. *Les champs de vecteurs η_α se recollent en un champ holomorphe global non nul sur X_0 .*

Preuve. Il y a deux choses à prouver: d'une part, que les η_α se recollent, d'autre part que le champ ainsi défini est non nul. En ce qui concerne le premier point, on a sur $V_\alpha \cap V_\beta$, en posant $i = r(\alpha)$ et $j = r(\beta)$,

$$(\psi_i)_* \eta_\alpha^k = \frac{1}{M_k} (z_i^1(\phi_k(x)) - z_i^1(x), z_i^n(\phi_k(x)) - z_i^n(x), t_k)$$

et

$$(\psi_i)_* \eta_\beta^k = (\psi_{ji})_* (\psi_j)_* \eta_\beta^k = \frac{1}{M_k} (\psi_{ji})_* (z_j^1(\phi_k(x)) - z_j^1(x), z_j^n(\phi_k(x)) - z_j^n(x), t_k)$$

pour

$$(3.2) \quad (z_i, t) = \psi_{ji}(z_j, t)$$

Un simple calcul de développement limité donne alors, en utilisant (3.2),

$$\begin{aligned} \frac{1}{M_k} (z_i \circ \phi_k - z_i, t_k) &= \frac{1}{M_k} (\psi_{ji}(z_j \circ \phi_k, t_k) - \psi_{ji}(z_j, 0), t_k) \\ &= (\psi_{ji})_* \left(\frac{(z_i \circ \phi_k - z_i, t_k)}{M_k} + \text{termes de plus haut degré} \right) \end{aligned}$$

et, comme on a convergence uniforme de ϕ_k vers l'identité, on obtient, en passant à la limite,

$$(\psi_i)_* \eta_\alpha = (\psi_{ji})_* (\psi_j)_* \eta_\beta$$

ce qui montre que les η_α se recollent bien.

Pour le second point, on va montrer que la norme de η est égale à un. En fait, par continuité des fonctions impliquées et par compacité relative des V_α , pour tout $k > k_0$, il existe $\alpha_k \in A$ et $x_k \in V_{\alpha_k}$ tels que

$$\|(\psi_{i_k})_* \eta_{\alpha_k}^k\| (x_k) = 1$$

pour $i_k = r(\alpha_k)$. Par compacité de X_0 et finitude de A , on peut, quitte à prendre des sous-suites, passer à la limite en k et avoir

$$\|(\psi_{i_\infty})_* \eta_{\alpha_\infty}\| (x_\infty) = 1$$

montrant que η est non nul. \square

Ceci finit la preuve du théorème de Fischer-Grauert sous l'hypothèse qu'il n'y a pas de champ holomorphe global hormis le champ zéro. En effet, η n'étant pas le champ nul, il doit alors forcément être transverse à X_0 , autrement dit c'est un relèvement d'un multiple non nul de $\partial/\partial t$ en 0, à X_0 . Par définition, l'application de Kodaira-Spencer ρ_0 est donc nulle.

Troisième étape:

On se place maintenant dans le cas général. Le problème est que, si $H^0(X_0, \Theta)$ est non réduit à zéro, le champ η qu'on a construit dans la deuxième étape peut très bien être tangent à X_0 . Dans ce cas, il n'est pas un relèvement de $\partial/\partial t$ en 0 et on ne peut plus conclure que ρ_0 est nulle.

Pour remédier à ce problème, on va, pour chaque valeur de k , modifier les ξ_α^k pour être sûr qu'à la limite, le champ η ne sera pas tangent à X_0 .

La remarque cruciale est donnée par le lemme suivant.

Lemme 3.4. *Il existe un ensemble fini de points*

$$E = \{(x_1, \dots, x_p) \mid x_i \in X_0\}$$

tel que tout champ de vecteurs holomorphe tangent sur X_0 s'annulant en ces points est globalement nul.

Preuve. Supposons le contraire. Alors pour tout choix d'un entier n et d'une suite finie (x_1, \dots, x_n) de points de X_0 , il existe un champ holomorphe ξ sur X_0 tel que

$$(3.3) \quad \xi \not\equiv 0 \quad \text{et} \quad \xi(x_p) = 0$$

pour tout p compris entre 1 et n . On peut sans perte de généralité supposer ces champs de norme 1, et passer à la limite en utilisant Montel. On obtient ainsi que pour toute suite de points $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$, il existe un champ holomorphe ξ vérifiant

(3.3) pour tout p . Il suffit alors de choisir une suite de points localement dense pour arriver à une contradiction. \square

La stratégie de la preuve est maintenant claire. Si l'on peut choisir les ξ_α^k de telle sorte que η s'annule sur un ensemble E du lemme 3.4, on pourra conclure, comme dans la deuxième étape, que, η étant non nul, il ne peut être tangent.

Soit (x_1, \dots, x_p) vérifiant le lemme 3.4. Définissons

$$C_1 = \{\xi \in H^0(X_0, \Theta) \mid \xi(x_1) = 0\}$$

et choisissons un supplémentaire D_1 de C_1 dans $H^0(X_0, \Theta)$:

$$H^0(X, \Theta) = C_1 \oplus D_1$$

Passons au cran suivant. On définit

$$C_2 = \{\xi \in H^0(X_0, \Theta) \mid \xi(x_1) = \xi(x_2) = 0\}$$

et on choisit un supplémentaire de C_2 dans C_1 :

$$H^0(X, \Theta) = C_2 \oplus D_2 \oplus D_1$$

Et ainsi de suite, jusqu'à obtenir la décomposition

$$H^0(X, \Theta) = D_p \oplus \dots \oplus D_2 \oplus D_1.$$

Lemme 3.5. *Toute base de D_k , évaluée en x_k , forme une famille de vecteurs tangents linéairement indépendante.*

Preuve. Supposons le contraire. Alors il existerait un champ non nul ξ de D_k s'annulant en x_k . Mais D_k est inclus dans le sous-espace des champs s'annulant en x_1, \dots, x_{k-1} . Donc ξ est aussi un élément de

$$C_k = D_{k+1} \oplus \dots \oplus D_p,$$

contradiction. \square

Supposons pour simplifier que x_i appartienne à U_i et que $\psi_i(x_i)$ soit égal à zéro. Pour $k > k_0$, introduisons:

$$F_k = \psi_1 \circ \phi_k^{-1} \circ \psi_1^{-1}(\{z_1^1 = \dots = z_1^{\dim D_1} = 0 ; t = t_k\})$$

Prenons un voisinage de l'identité dans le groupe d'automorphismes de X_0 et faisons opérer ce voisinage sur x_1 . Appelons H_1 l'image par ψ_1 de l'ensemble obtenu.

Lemme 3.6. *Pour k suffisamment grand, F_k intersecte H_1 .*

Preuve. C'est un argument de transversalité. On remarque que

$$F_\infty = \{z_1^1 = \dots = z_1^{\dim D_1} = 0 ; t = 0\}$$

intersecte H_1 au moins en 0, donc H_1 et F_∞ ont un nombre d'intersection strictement positif, puisqu'il s'agit de sous-variétés holomorphes de X_0 .

Or F_k converge vers F_∞ , donc pour k suffisamment grand est homotope à F_∞ et a même nombre d'intersection. \square

En conséquence, pour $k > k_1$ avec k_1 suffisamment grand, il existe f_k biholomorphisme de X_0 tel que

$$(3.4) \quad \psi_1(\phi_k \circ f_k)(x_1) \in \{z_1^1 = \dots = z_1^{\dim D_1} = 0 ; t = t_k\}$$

Il résulte du lemme précédent que, plus k est grand, plus f_k peut être choisi proche de l'identité, de telle sorte que $\phi_k \circ f_k$ converge toujours uniformément vers l'identité.

Par abus de notation, appelons ϕ_k les applications $\phi_k \circ f_k$. On a donc maintenant un contrôle supplémentaire sur notre suite ϕ_k , à savoir la condition (3.4) sur la valeur de ϕ_k en x_1 .

Poussons le raisonnement un cran plus loin afin d'avoir en plus un contrôle sur la valeur de ϕ_k en x_2 . Appelons H_2 l'image par ψ_2 de l'orbite de x_2 sous les flots (pour des temps suffisamment petits) des champs de $D_2 \oplus \dots \oplus D_p$. Notons que tous ces automorphismes fixent x_1 , puisqu'ils proviennent de champs qui s'annulent en x_1 . On pose alors, de façon similaire à ce qui précède,

$$F_k = \psi_2 \circ \phi_k^{-1} \circ \psi_2^{-1}(\{z_1^1 = \dots = z_1^{\dim D_1} = 0 ; t = t_k\}).$$

Le même argument de transversalité implique que, pour $k > k_2 > k_1$ avec k_2 suffisamment grand, F_k et H_2 s'intersectent. On peut donc trouver une suite (f_k) de biholomorphismes de X_0 tels que l'on ait

- (i) $(\phi_k \circ f_k)$ convergent uniformément vers l'identité.
- (ii) on a

$$(3.5) \quad \psi_2(\phi_k \circ f_k)(x_2) \in \{z_1^1 = \dots = z_1^{\dim D_2} = 0 ; t = t_k\}$$

(iii) et (3.4) est toujours vérifiée.

En répétant ce processus, et en appelant encore ϕ_k les applications modifiées, on termine avec une suite (ϕ_k) convergeant uniformément vers l'identité telle que, pour tout i entre 1 et p

$$(3.6) \quad \psi_i(\phi_k)(x_i) \in \{z_1^1 = \dots = z_1^{\dim D_i} = 0 ; t = t_k\}$$

On construit alors le champ de vecteurs η à partir de cette nouvelle suite ϕ_k exactement comme dans la deuxième étape. Il ne reste plus qu'à vérifier le:

Lemme 3.7. *Le champ η n'est pas tangent à X_0 .*

Preuve. Supposons le contraire, et soit χ_1, \dots, χ_d une base de D_1 . Nous avons vu au lemme 3.5 qu'une telle base, évaluée en x_1 , est une famille de vecteurs

linéairement indépendants. Nous pouvons supposer que le mineur principal est non nul, à savoir

$$\det \begin{pmatrix} (z_1^1)_*\chi_1 & \dots & (z_1^d)_*\chi_1 \\ \vdots & & \vdots \\ (z_1^1)_*\chi_d & \dots & (z_1^d)_*\chi_d \end{pmatrix} (x_1) \neq 0$$

Au point x_1 , tous les champs de $D_2 \oplus \dots \oplus D_p$ s'annulent, donc $\eta(x_1)$ doit être une combinaison linéaire des $\chi_i(x_1)$. Appelons λ_i les coefficients. L'égalité (3.6) entraîne que les d premières coordonnées de $(\psi_1)_*\eta(x_1)$ sont nulles, donc tous les λ_i sont nuls, autrement dit η s'annule en x_1 .

On peut refaire le même raisonnement en x_2 et conclure que η s'annule en x_2 , et finalement que η s'annule en x_1, x_2, \dots, x_p . Ce qui implique que η est nul, puisque c'est un champ tangent. Or nous avons montré dans la deuxième étape que η était non nul. Contradiction. \square

Ceci permet de terminer la preuve du théorème de Fischer-Grauert exactement comme dans la deuxième étape.

4. Problème d'isomorphisme.

On peut reformuler le théorème de Fischer-Grauert en disant qu'une famille de déformations ponctuellement isomorphe à un produit est localement isomorphe à un produit. Il apparaît ainsi comme une réponse positive à un cas très particulier du problème d'isomorphisme. Si l'on reste dans les déformations, on sait depuis longtemps [K-S2] qu'il existe des exemples de familles différentiables ou holomorphes ponctuellement isomorphes sans être localement isomorphes. On peut donner un critère simple pour que isomorphisme ponctuel implique isomorphisme local pour des familles *holomorphes* [Me]; mais, pour des familles différentiables, la situation est beaucoup plus sauvage. Pour des feuilletages plus généraux, la question reste largement ouverte, excepté pour quelques cas où l'on dispose de résultats de rigidité (cf. Chapitre III).

5. Déformations de feuilletages à feuilles complexes.

Le formalisme de Kodaira-Spencer peut être étendu aux feuilletages à feuilles complexes pour étudier le problème de déformations. On s'intéresse alors à des familles de feuilletages à feuilles complexes, que nous supposerons ici holomorphes paramétrées par le disque unité. Grossso modo, il s'agit d'une variété feuilletée à feuilles complexes $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ munie d'une submersion lisse $\pi: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{D}$ holomorphe le long des feuilles telle que

- (i) La fibre $X_t = \pi^{-1}(t)$ munie du feuilletage \mathcal{F} restreint à X_t est un feuilletage par variétés complexes F_t .
- (ii) La variété feuilletée $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ est difféomorphe au produit $(X_0 \times \mathbb{D}, F_0 \times \mathbb{D})$ muni du feuilletage produit dont les feuilles sont les produits d'une feuille de F_0 par \mathbb{D} .

On supposera la fibre centrale X_0 compacte. Ainsi, toutes les fibres (X_t, F_t) sont les mêmes à difféomorphisme feuilleté près. On se contente de déformer la structure complexe le long des feuilles. Sous ces hypothèses, il est facile de construire une application de Kodaira-Spencer de l'espace tangent au disque en 0 à valeurs dans $H^1(X_0, \Theta_{F_0})$ où Θ_{F_0} est le faisceau des champs de vecteurs tangents au feuilletage F_0 et holomorphes le long des feuilles.

Le premier problème est que ce groupe peut très bien être de dimension infinie... Ainsi si (X_0, F_0) est le feuilletage produit d'une courbe elliptique \mathbb{E}_τ par un cercle, le groupe $H^1(X_0, \Theta_{F_0})$ code toutes les familles de courbes elliptiques proches de \mathbb{E}_τ paramétrées par un cercle et s'identifie à l'espace des lacets proches de \mathbb{E}_τ dans \mathbb{H} (cf. [M-V2], mais attention, on n'y parle pas exactement du même espace). Mais ce qui est encore plus grave que la dimension infinie est que l'opérateur $\bar{\partial}$ le long des feuilles n'est pas un opérateur elliptique. Souvenons-nous que les preuves des théorèmes de Kodaira-Spencer cités plus haut utilisent de la théorie du potentiel appliquée à l'opérateur $\bar{\partial}$. Ceci marche bien car cet opérateur est elliptique. Dans le cas feuilleté, l'opérateur à considérer est le $\bar{\partial}$ le long des feuilles. Comme il n'est pas elliptique, aucune des preuves fondées sur la théorie du potentiel ne se généralise. En fait, le bon cadre feuilleté pour généraliser la théorie des déformations est celui des feuilletages transversalement holomorphes (on consultera le texte de M. Nicolau), cas “inverse” de celui qui nous occupe ici.

Tout n'est pas perdu pour autant. Certains résultats, en particulier le théorème de rigidité sous la version: une variété à $H^1(X_0, \Theta_0)$ nul est rigide, et le théorème d'existence de Kodaira-Spencer peuvent être également démontrés sans théorie du potentiel, de façon élémentaire, à l'aide de la technique dite des séries majorantes (cf. [M-K]) Ce type de preuve peut s'adapter au cas feuilleté à feuilles complexes. On peut ainsi montrer le:

Théorème [Bu]. *Soit (X_0, F_0) un feuilletage par variétés complexes vérifiant la condition $H^1(X_0, \Theta_{F_0}) = \{0\}$. Alors (X_0, F_0) est quasi-rigide, i.e. toute famille de déformations (\mathcal{X}, vF) de (X_0, F_0) est localement isomorphe à un produit $(X_0 \times \mathbb{D}, F_0 \times \mathbb{D})$.*

Par quasi-rigide, on entend que le CR-isomorphisme entre la famille $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ et le produit $(X_0 \times \mathbb{D}, F_0 \times \mathbb{D})$ est uniquement transversalement de classe C^p , pour p arbitraire, mais fini, et non de classe C^∞ .

Théorème [Bu]. *Soit (X_0, F_0) un feuilletage par variétés complexes vérifiant les conditions $H^2(X_0, \Theta_{F_0}) = \{0\}$ et $H^1(X_0, \Theta_{F_0})$ de dimension finie. Pour toute classe $[\theta] \in H^1(X_0, \Theta_{F_0})$, et pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe une déformation de (X_0, F_0) paramétrée par le disque unité transversalement C^p dont l'application de Kodaira-Spencer en 0 a pour image $[\theta]$.*

Compte tenu des difficultés évoquées plus haut, il s'agit peu ou prou des seuls résultats que l'on peut espérer obtenir dans ce cadre. Notons qu'il n'est pas

du tout évident de calculer ces groupes de cohomologie sur un exemple donné. On trouvera de tels calculs, en fait pour le faisceau des germes de fonctions holomorphes le long des feuilles, dans [EK-S] et [SI].

CHAPITRE III: LEMMES DE COMPACTIFICATION ET THÉORÈME DE FISCHER-GRAUERT FEUILLETÉ

Le but de cette troisième partie est de montrer une version simple du lemme de compactification de [M-V2], de présenter le lemme de compactification uniforme et d'en tirer quelques applications, en particulier un théorème de Fischer-Grauert feuilleté. Les lemmes de compactification, qui à première vue, semblent des outils très techniques, ont en fait une gamme importante d'applications, en particulier aux problèmes de rigidité et de trivialité. Ils jouent un rôle-clé dans [M-V2] pour

- (i) d'une part, montrer que le feuilletage de Lawson n'admet pas de structure complexe. Par contre, on peut le munir d'une structure presque CR. On obtient ainsi un exemple feuilleté analogue aux exemples de surfaces presque complexes n'admettant pas de structure complexe [B-H-P-V].
- (ii) d'autre part, pour montrer que l'ensemble des structures complexes sur le feuilletage de [M-V] fixé à difféomorphisme près forme un espace vectoriel complexe de dimension finie. Cela doit être pensé comme un résultat de rigidité, puisque de tels espaces peuvent être de dimension infinie [M-V2].

Plutôt que de présenter ces théorèmes, à la démonstration longue et délicate, nous préférons donner d'autres applications de ces lemmes.

1. Holonomie d'une feuille compacte.

On s'intéresse à la nature du feuilletage au voisinage d'une feuille compacte L d'un feuilletage par variétés complexes \mathcal{F} de codimension un sur X . Oublions pour l'instant la structure complexe le long des feuilles et rappelons quelques notions de feuilletages. Pour plus de détails, on pourra consulter [C-LN].

Une feuille compacte est forcément plongée dans X et le théorème du voisinage tubulaire de Thom implique qu'il existe un voisinage U de L dans X et une rétraction $r: U \rightarrow L$. En fait, ce théorème donne l'existence d'un difféomorphisme entre U et un voisinage de la section nulle dans le fibré normal de L dans X . De plus, ce difféomorphisme envoie L sur la section nulle du fibré. La rétraction est alors claire. Puisque U a la structure d'un fibré localement trivial en disques sur L , on peut rétracter U sur L le long de ces disques.

Si U est choisi suffisamment petit, les disques, c'est-à-dire les images réciproques d'un point par r , sont transverses au feuilletage. Par ailleurs, si l'on restreint r à une feuille de U , c'est-à-dire une composante connexe de l'intersections d'une feuille de \mathcal{F} avec U , la transversalité avec les fibres de r entraîne qu'il s'agit d'une submersion locale en tout point (en fait, un ouvert d'un revêtement).

Dès lors, on dispose d'un moyen naturel de relever les chemins de L aux feuilles de U . Etant donnés un chemin c de L joignant x_0 à x_1 , et un point y de $r^{-1}(x_0)$, on considère l'unique feuille L_y de U passant par y . Comme r est un homéomorphisme local en restriction à L_y , on peut relever de façon unique le chemin c en un chemin \tilde{c}_y de L_y tel que $\tilde{c}_y(0) = y$. Remarquons que l'extrémité $\tilde{c}_y(1)$ de ce chemin a pour image par r le point x_1 .

Si l'on part d'un lacet c , on fabrique en particulier une application de $r^{-1}(x_0)$ dans lui-même en posant

$$y \in V \subset r^{-1}(x_0) \xrightarrow{\rho_c} \tilde{c}_y(1) \in r^{-1}(x_0)$$

où V est un voisinage de x_0 dans $r^{-1}(x_0)$ suffisamment petit pour que cette flèche soit bien définie.

On peut montrer que cette application est C^∞ ; on peut aussi montrer qu'elle ne dépend que de la classe d'homotopie de c dans L . Enfin, on peut montrer que l'application

$$[c] \in \pi_1(L, x_0) \longrightarrow \rho_{[c]}^{-1} \in \text{Diff}_{x_0}(r^{-1}(x_0))$$

du groupe fondamental de L basé en x_0 à valeurs dans le groupe des germes de difféomorphismes de $r^{-1}(x_0)$ fixant x_0 est un morphisme de groupes.

On l'appelle *morphisme d'holonomie* de L et on appelle *groupe d'holonomie* de L son image. On vérifie que, si l'on change le point-base et/ou la rétraction, le groupe d'holonomie est le même à isomorphisme près, et le morphisme d'holonomie est le même à conjugaison près (il va exister un difféomorphisme entre les deux transversales fixant les points-bases qui va conjuguer les deux morphismes).

Remarque. La puissance $^{-1}$ dans la définition du morphisme d'holonomie est nécessaire pour que ce soit bien un morphisme. Cela provient du fait que la composition des chemins est covariante, la composition des fonctions contravariante.

On peut montrer [C-LN] par une application presque directe, quoiqu'un peu technique à mettre en place, de la construction du groupe d'holonomie, que, si ce dernier est trivial, alors il existe un difféomorphisme *feuilleté* entre U et $L \times \mathbb{R}$.

Remarque. Si le fibré normal de L dans X est trivial, il existe un difféomorphisme entre U et $L \times \mathbb{R}$. Mais il n'a aucune raison d'être feuilleté, c'est-à-dire que le feuilletage sur U n'est pas envoyé par ce difféomorphisme sur le feuilletage trivial de $L \times \mathbb{R}$. Ceci nécessite que l'holonomie soit triviale.

Considérons maintenant le revêtement universel \tilde{U} de U . Sachant qu'il existe une rétraction de U sur L , on aura une rétraction de \tilde{U} sur \tilde{L} revêtement universel de L naturellement plongé dans \tilde{U} . Même si \tilde{L} est non compacte, on peut faire la même construction que précédemment et définir le groupe d'holonomie de \tilde{L} .

dans \tilde{U} . Comme \tilde{L} est simplement connexe, ce groupe est trivial, et donc il existe un difféomorphisme feuilleté entre \tilde{U} et un voisinage de \tilde{L} dans $\tilde{L} \times \mathbb{R}$.

Remarque. On prendra soin au fait que, si \tilde{L} est non compacte, un voisinage de \tilde{L} dans $\tilde{L} \times \mathbb{R}$ n'est en général pas saturé, i.e. il ne contient pas, à part \tilde{L} , de feuille complète du feuilletage. On prendra soin également que l'existence d'un difféomorphisme feuilleté entre \tilde{U} et un voisinage de \tilde{L} dans $\tilde{L} \times \mathbb{R}$ utilise fortement l'existence d'une rétraction. Dans le cas d'une feuille non compacte immergée non plongée, une telle rétraction n'existe pas et on ne peut rien conclure. Ainsi, un feuilletage linéaire irrationnel du tore de dimension deux donne un exemple d'une feuille non compacte simplement connexe bien que le feuilletage ne soit absolument pas trivial dans un voisinage de cette feuille.

Remarque. Si le morphisme d'holonomie n'est pas injectif, il n'est pas nécessaire de passer au revêtement universel pour obtenir la propriété de trivialité précédente, mais à un revêtement intermédiaire, appelé *revêtement d'holonomie* (correspondant au groupe d'holonomie vu comme sous-groupe du groupe fondamental).

2. Lemme de compactification.

Soit (X, \mathcal{F}) une variété feuilletée par variétés complexes de codimension un et soit L une feuille compacte de \mathcal{F} . Fixons un point-base x_0 , une rétraction $r: U \rightarrow L$ et donc une transversale locale $\sigma = r^{-1}(x_0)$.

Définition. On dira que l'holonomie de L est contractante si l'on peut choisir un système de générateurs

$$i \in I \quad h_i: \sigma \longrightarrow \sigma$$

définis sur σ toute entière (et non simplement sur un voisinage de x_0 dans σ dépendant de i) et n'ayant aucun autre point fixe que x_0 .

On dira par ailleurs que l'holonomie est plate à l'identité si, choisissant un difféomorphisme entre σ et \mathbb{R} , envoyant x_0 sur 0, et voyant le groupe d'holonomie comme un groupe d'applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} (par conjugaison au moyen de l'identification précédente), alors les éléments du groupe d'holonomie sont tangents à l'identité en 0 à tout ordre.

Supposons que le fibré normal de L soit trivial. Dans ce cas, le voisinage U est difféomorphe à $L \times \mathbb{R}$ et L disconnecte X en deux variétés à bord feuilletées X_+ et X_- . Nous dirons que \mathcal{F} est *CR-plat* en L , si les deux feuilletages à bord sur X_+ et X_- sont CR-plats au sens donné dans le chapitre I. Hypothèse que nous ferons dorénavant.

Définition. Soit M une variété complexe connexe. Nous dirons que M est compactifiable holomorphiquement s'il existe une variété compacte complexe H de dimension strictement inférieure à celle de M (éventuellement non connexe) et une structure de variété complexe M_H sur l'union disjointe $M \sqcup H$ telle que

- (i) La variété M_H est connexe et compacte.

(ii) Les inclusions naturelles $M \hookrightarrow M_H$ et $H \hookrightarrow M_H$ sont holomorphes.

Nous aurons aussi besoin d'une notion un peu plus fine, celle de compactification holomorphe *partielle*. Avant d'énoncer la définition précise, un exemple permettra de comprendre ce dont il s'agit. Considérons $M = \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. On peut compactifier holomorphiquement M au sens précédent en considérant l'inclusion

$$M \hookrightarrow M_H = \mathbb{P}^n$$

et H est alors l'union disjointe de 0 et de l'hyperplan à l'infini. Maintenant, on peut aussi compactifier *partiellement* en considérant

$$M \hookrightarrow \mathbb{C}^n \quad \text{ou} \quad M \hookrightarrow \mathbb{P}^n \setminus \{0\}$$

D'un autre côté, on ne veut pas considérer que

$$(1.1) \quad M \hookrightarrow \mathbb{P}^n \setminus (\{0\} \cup \{z_0 = z_1 = 0\})$$

pour $n \geq 2$ soit une compactification holomorphe partielle (ici $[z_0 : \dots : z_n]$ sont les coordonnées homogènes).

Qu'est-ce à dire? Il y a deux façons d'aller à l'infini dans $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ (et donc deux façons de construire des suites divergentes): soit on va vers 0 en prenant des points de norme euclidienne de plus en plus petite, soit on va vers l'infini en prenant des points de norme euclidienne de plus en plus grande. On veut qu'une compactification holomorphe partielle "bouche" au moins l'un des infinis, et une compactification holomorphe bouche tous les "infinis". Dans l'exemple (1.1), ce n'est pas le cas. La bonne notion pour formaliser cela est la notion topologique de bout.

Définition. Soit M un espace topologique. Un *bout* de M est une classe d'équivalence de suites d'ouverts connexes

$$U_1 \supset U_2 \supset \dots$$

tels que

- (i) Pour tout i , le bord de l'adhérence \bar{U}_i est compact.
- (ii) L'intersection de *tous* les \bar{U}_i est vide.

Où deux telles suites (U_i) et (V_i) sont équivalentes s'il existe une suite d'ouverts connexes $(W_i \subset U_i \cap V_i)$ qui vérifie encore (i) et (ii).

Ainsi $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ a deux bouts: le bout "0" représenté par exemple par la suite

$$i \in \mathbb{N}^* \quad U_i = \left\{ z \in M \mid \|z\| < \frac{1}{i} \right\}$$

et le bout "infini" représenté par la suite

$$i \in \mathbb{N}^* \quad V_i = \{z \in M \mid \|z\| > i\}.$$

Etant donné un bout E d'une variété complexe M représenté par une suite d'ouverts (U_i) ; et étant donnée une immersion $M \rightarrow N$ dans une variété complexe

N , l'*ensemble limite* de E dans N est l'intersection $\cap_{i \in \mathbb{N}^*} \bar{U}_i$, où cette fois \bar{U}_i désigne l'adhérence de U_i dans N .

Par exemple, l'adhérence du bout infini (respectivement du bout 0) de $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ dans \mathbb{P}^n est l'hyperplan à l'infini (respectivement le point 0). Nous pouvons maintenant définir la notion de compactification holomorphe partielle.

Définition. Soit M une variété complexe connexe. Soit H une variété compacte complexe *connexe* de dimension strictement inférieure à celle de M . Soit E un bout de M . Alors M admet une *compactification holomorphe partielle* du bout E par H s'il existe une structure de variété complexe M_H sur l'union disjointe de M et H telle que

- (i) Les injections naturelles de M dans M_H et de H dans M_H sont holomorphes.
- (ii) L'ensemble limite de E dans M_H est H .

Remarque. On fera attention que, dans la définition de compactification partielle, on exige que H soit connexe, contrairement à la définition de compactification. L'exemple de $\mathbb{C}^p \setminus \{0\}$ explique bien la raison de cette différence.

Revenons à la situation feuilletée du début de cette section, à savoir celle d'une feuille compacte L à fibré normal trivial et à holonomie contractante plate à l'identité. Sans oublier l'hypothèse du feuilletage CR-plat en L . Appelons comme d'habitude $\pi: U \rightarrow L$ la rétraction utilisée. Les feuilles non compactes de U s'accumulent sur L . En effet, l'hypothèse d'une holonomie contractante implique qu'une telle feuille, appelons la L' , coupe la transversale $\sigma = r^{-1}(x_0)$ en une suite infinie de points distincts qui s'accumulent sur x_0 . Nous nous intéressons aux feuilles dont l'ensemble limite (ou tout-au-moins l'ensemble-limite d'un ou de plusieurs de leurs bouts) est la feuille compacte. Remarquons également qu'au voisinage d'un tel bout, L' et le revêtement d'holonomie \bar{L} de L sont difféomorphes.

Nous pouvons énoncer

Lemme de compactification 2.1 [M-V2]. *Dans la situation précédente, supposons que le revêtement d'holonomie \bar{L} de L admette une compactification holomorphe $\bar{L}^c = \bar{L} \sqcup H$. Supposons de plus que l'action du groupe de transformations du revêtement s'étende à H comme l'identité³. Soit L' une feuille non compacte de U et soit E un bout de L' dont l'ensemble-limite soit L . Alors L' admet une compactification holomorphe partielle en E . De plus cette compactification holomorphe partielle est identique à l'infini à celle de \bar{L} .*

Expliquons ce que dit la dernière phrase. *Elle ne signifie pas que \bar{L} et L' sont biholomorphes au voisinage de E . Elle signifie simplement qu'ils sont asymptotiquement biholomorphes en E*

³Cette hypothèse, qui semble nécessaire, est manquante dans [M-V2].

Précisons. Choisissons un bout de L' , disons E , dont l'ensemble-limite est L . Comme nous l'avons dit, un voisinage de E dans L' est difféomorphe à un voisinage d'un bout de \bar{L} . On peut donc identifier les deux voisinages et les deux bouts à difféomorphisme près. On parlera simplement de V et de E . Notons que le voisinage V de E est juste, à difféomorphisme près, une composante connexe du complémentaire d'un \bar{U}_i pour i suffisamment grand.

Comme \bar{L} est compactifiable, elle est en particulier compactifiable en E . Il existe donc une structure de variété complexe \bar{V}_H sur $V \sqcup H$, qui étend celles de $V \subset \bar{L}$ et de H , pour H une variété compacte connexe fixée. Ce que dit le lemme de compactification, est qu'il existe une *autre* structure complexe V_H sur $V \sqcup H$, qui étend, elle, celles de $V \subset L'$ et H . Ces deux variétés ne sont en général pas biholomorphes car $V \subset \bar{L}$ et $V \subset L'$ ne sont en général pas biholomorphes. Mais on "ajoute" la même chose à l'infini, à savoir H .

L'idée de la preuve est très simple. On fait intervenir les structures complexes comme des opérateurs complexes en écrivant (V, J') pour $V \subset L'$ et (V, \bar{J}) pour $V \subset \bar{L}$. Le fait que l'ensemble-limite de E , bout de L' soit L , implique que l'on peut supposer que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un voisinage V_ϵ de E dans V tel que

$$(2.2) \quad \sup_{x \in V_\epsilon} \|J'_x - \bar{J}_x\| < \epsilon$$

où $\| - \|$ désigne une norme fixée sur le fibré des endomorphismes du fibré tangent de V .

Passons alors à $V \sqcup H$. L'hypothèse que l'action du groupe de transformations de \bar{L} s'étend comme l'identité sur H permet de supposer que la norme fixée est en fait la restriction d'une norme sur le fibré des endomorphismes du fibré tangent de $V \sqcup H$. Il résulte de l'hypothèse sur \bar{L} , que l'on peut supposer que l'opérateur complexe \bar{J} s'étend en un opérateur complexe J_H sur H . Mais (1.2), étendue à H , permet alors de conclure que J' s'étend également à H , avec même limite J_H .

La preuve n'est cependant pas complète, car l'extension de J' en J_H est seulement continue. Or si l'on veut en conclure que cela munit $V \sqcup H$ d'une structure de variété complexe, il faut utiliser le théorème de Newlander-Nirenberg. Mais cela suppose plus de régularité, à savoir, il faut que l'extension de J' en J_H soit de classe C^k pour k suffisamment grand.

On obtient plus de régularité en démontrant des inégalités (2.2), mais cette fois pour une norme de type C^k . C'est la partie la plus technique de la preuve, et c'est là où l'on utilise l'hypothèse que le feuilletage est plat en L (détails dans [M-V2]).

Avant de donner quelques nouvelles applications du lemme de compactification, voyons comment l'utiliser sur un exemple très simple. Bien entendu, on n'a pas besoin du lemme de compactification pour montrer le résultat qui suit, il existe des méthodes plus directes.

Lemme 2.2. *Soit \mathcal{F} le feuilletage de Reeb de \mathbb{S}^3 . Supposons-le muni d'une structure de feuilletage par variété complexe. Alors les feuilles non compactes sont toutes biholomorphes à \mathbb{C} .*

Souvenons-nous que tout choix d'une métrique et d'une orientation sur \mathbb{S}^3 détermine une structure de feuilletage par surfaces de Riemann sur \mathcal{F} ...

Preuve. Soit L la feuille compacte de \mathcal{F} . On remarque que son holonomie est contractante plate à l'identité et son fibré normal trivial. Munissons \mathcal{F} d'une structure de feuilletage par variété complexe plate en L . Alors L est une courbe elliptique, donc \bar{L} est \mathbb{C}^* , qui admet une compactification holomorphe en ajoutant deux points. L'action sur le revêtement \mathbb{C}^* est engendrée par une homothétie, qui s'étend comme l'identité à l'infini. Les feuilles non compactes ne peuvent être que \mathbb{C} ou \mathbb{D} par le théorème d'uniformisation de Riemann. Mais le lemme de compactification implique qu'elles admettent une compactification holomorphe par un point. Ce n'est pas possible pour \mathbb{D} .

Dans le cas où la structure complexe n'est pas plate en L , on travaille avec une seule composante de Reeb. Un simple argument de reparamétrage [M-V2] montre qu'on peut alors supposer la structure CR-plate en L sans perte de généralité. On raisonne ensuite comme précédemment. \square

3. Première application: impossibilité de tourbillonner.

Comme première application du lemme de compactification, nous allons montrer qu'il n'est en général pas possible de tourbillonner un feuilletage à feuilles complexes. Nous allons considérer deux situations différentes, utilisant des procédés de tourbillonnement distincts, quoique très proches.

Tout d'abord, revenons au feuilletage de Lawson. La partie $\text{Int } \mathcal{N}$ (cf. I.4) est feuilletée, avant utilisation du lemme de tourbillonnement, par les niveaux d'un fibré localement trivial

$$\pi: \text{Int } (\mathcal{N}) \simeq K \times \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{S}^1$$

à fibres difféomorphes à $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2$. Soit

$$(3.1) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La monodromie de ce fibré est donnée par (voir [M-V]) l'action sur $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{R}^2$ des itérés de

$$([x, y], M) \longmapsto (A \cdot [x, y], M)$$

On peut munir ce feuilletage d'une structure de feuilletage par variétés complexes. Pour cela, on choisit un chemin lisse

$$c: [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}$$

à valeurs dans le demi-plan de Poincaré tel que:

$$c(0) = A \cdot c(1) := \frac{c(1)}{1 - 3c(1)} \quad c^{(n)}(1) = c^{(n)}(0) = 0, \quad n \geq 1$$

Ce chemin s'étend en une application lisse \tilde{c} de \mathbb{R} dans \mathbb{H} en posant

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto A^{\text{Ent}(t)} \cdot c(t - \text{Ent}(t)) \in \mathbb{H}$$

où Ent désigne la partie entière. Construisons le quotient X de $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ par l'action de \mathbb{Z}^3 engendrée par

$$\begin{aligned} (z = x + iy, w, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{R} &\longmapsto ((z + 1, w, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{R}) \\ (z = x + iy, w, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{R} &\longmapsto ((z + \tilde{c}(t), w, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{R}) \\ (z = x + iy, w, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{R} &\longmapsto ((1 - 3\tilde{c}(t + 1))z, w, t + 1) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{R}. \end{aligned}$$

C'est un exercice de vérifier que la projection naturelle $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ descend en un fibré localement trivial $\pi': X \rightarrow \mathbb{S}^1$ de même fibre et monodromie que π . On remarque que le troisième générateur indique comment recoller $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \{t\}$ avec $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \{t + 1\}$; tandis que les deux premiers définissent l'action sur le premier facteur donnant pour quotient une courbe elliptique. Mais un calcul direct montre que l'application

$$(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \{t\} \longmapsto ((1 - 3\tilde{c}(t + 1))z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \{t + 1\}$$

envoie le réseau engendré par $(1, \tilde{c}(t))$ (sur le premier facteur) sur le réseau engendré par $(1 - 3\tilde{c}(t + 1), \tilde{c}(t + 1))$, i.e. descend en un biholomorphisme entre la courbe elliptique de module $\tilde{c}(t)$ et la courbe elliptique de module $\tilde{c}(t + 1)$ qui agit comme A sur le tore réel sous-jacent. Dès lors, il existe un difféomorphisme feuilleté entre X et $\text{Int}(\mathcal{N})$. Mais la construction munit X , donc $\text{Int}(\mathcal{N})$ d'une structure de feuilletage à feuilles complexes. La feuille au-dessus de $[t] \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est biholomorphe au produit de \mathbb{C} par la courbe elliptique de module $\tilde{c}(t)$.

On notera, et c'est essentiel, que dans cette construction, les feuilles ne peuvent avoir toutes le même module. On a le:

Théorème 3.1 [M-V2]. *Il n'existe pas de structure complexe le long des feuilles de la partie $v\mathcal{N}$ munie du feuilletage après tourbillonnement.*

On ne peut donc pas “tourbillonner complexe” cette partie \mathcal{N} . Une preuve de ce théorème se trouve dans [M-V2]. Elle est longue et délicate et utilise de façon essentielle le lemme de compactification. On suppose en fait l'existence d'une structure complexe sur le feuilletage de \mathcal{N} et on montre qu'il induit sur X , via l'identification précédente entre X et $\text{Int}(\mathcal{N})$, une structure complexe dont toutes les feuilles sont le produit de \mathbb{C}^* par une courbe elliptique \mathbb{E} de module fixé. On montre de plus que la matrice de monodromie A définie en (3.1) doit être un automorphisme de \mathbb{E} . Mais A n'est automorphisme d'aucune courbe elliptique. Plutôt que d'entrer dans les détails de cette preuve, nous préférons donner une

variante beaucoup plus facile, mais similaire quant à l'utilisation du lemme de compactification, de l'impossibilité de tourbillonner.

Soit (X, \mathcal{F}) une variété lisse feuilletée. Supposons qu'on puisse plonger un cercle dans X transversalement à \mathcal{F} . Soit N un voisinage tubulaire (ouvert) de ce cercle. D'après Thom, c'est un fibré en disques sur le cercle, donc, si l'on suppose X et \mathcal{F} orienté, c'est un fibré trivial: N est difféomorphe à $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^p$ (on suppose ici que X est de dimension réelle $2p + 1$, qui est le cas qui va nous intéresser). On retire alors N . L'intérieur de la variété à bord $X \setminus N$ est feuilleté par la trace de \mathcal{F} , qui arrive transversalement au bord. Suivant un procédé proche du lemme de tourbillonnement de Lawson, on modifie le feuilletage dans un collier du bord pour que les feuilles arrivent de façon plate au bord. On recolle enfin la composante \overline{N} enlevée en la munissant d'un feuilletage de Reeb grâce à la proposition 3.2 du chapitre I. On obtient un nouveau feuilletage \mathcal{F}' sur X , qui est difféomorphe à \mathcal{F} sur $X \setminus \overline{N}$. On peut trouver cette construction en détail dans [C-LN, p.45].

Supposons de plus \mathcal{F} à feuilles complexes. Munissons la composante de Reeb d'une des structures complexes construites au chapitre I, section 3.e. Il est naturel de se demander s'il existe une structure complexe sur \mathcal{F}' qui soit CR isomorphe avec celle induite par \mathcal{F} en restriction à $X \setminus \overline{N}$ l'est, et CR isomorphe avec la composante de Reeb complexe en restriction à \overline{N} . La réponse est non.

Proposition 3.2. *Dans la situation précédente, supposons $p > 1$, alors il n'existe pas de structure complexe le long des feuilles de \mathcal{F}' qui soit CR isomorphe avec celle induite par \mathcal{F} en restriction à $X \setminus \overline{N}$ l'est, et CR isomorphe avec la composante de Reeb complexe en restriction à \overline{N} .*

Preuve. Supposons le contraire. Soit L une feuille non compacte de \mathcal{F}' dans $X \setminus \overline{N}$ et soit L' la feuille correspondante de \mathcal{F} (on suppose fixé un difféomorphisme feuilleté entre \mathcal{F} et \mathcal{F}' en restriction à $X \setminus \overline{N}$). De par la construction et notre hypothèse de prolongement de la structure complexe, nous savons que L est *biholomorphe* à $L' \setminus \overline{\mathbb{D}^p}$.

Par ailleurs, L possède un bout qui s'accumule sur la feuille compacte ∂N . Cette feuille compacte est une variété de Hopf, i.e. de revêtement universel holomorphe $\mathbb{C}^p \setminus \{0\}$. L'holonomie de ∂N est contractante plate à l'identité. L'action (3.2) du chapitre I qui définit la composante de Reeb complexe s'étend à la compactification \mathbb{P}^p du revêtement universel comme l'identité à l'infini. Et \mathcal{F}' doit être CR-plat en ∂N , puisqu'il l'est du côté de la composante de Reeb. Nous pouvons donc appliquer le lemme de compactification 2.1 et conclure que les feuilles non compactes admettent une compactification holomorphe partielle en ajoutant un point ou en ajoutant un espace projectif \mathbb{P}^{p-1} comme c'est le cas pour $\mathbb{C}^p \setminus \{0\}$. En fait, en comparant avec ce qui se passe dans *l'intérieur* de la

composante de Reeb qu'on ajoute, on voit que la compactification doit se faire par un espace projectif.

Ainsi L admet une complémentation par un disque \mathbb{D}^p , et une autre complémentation par un espace projectif. Prenons une sphère $\mathcal{S} \simeq \mathbb{S}^{2p-1}$ plongée dans L proche du bout. Une telle hypersurface réelle peut être définie comme le niveau 0 d'une submersion lisse ρ définie dans un voisinage de \mathcal{S} à valeurs dans \mathbb{R} . Soit M un point de \mathcal{S} . On se place dans des coordonnées locales holomorphes (z_1, \dots, z_p) centrées en M . Considérons la hessienne complexe

$$H(M) = \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial z_i \bar{\partial} z_j} \right)_{i,j=1}^p.$$

Il est bien connu [G-R] que le nombre de valeurs propres strictement positives de cette matrice hermitienne ne dépend ni de ρ ni du système de coordonnées choisi. Plus encore, en regardant la complémentation $L \sqcup \mathbb{D}^p$, on en déduit par un calcul classique que \mathcal{S} , étant proche de $\partial \mathbb{D}^p$ est strictement pseudo-convexe, i.e. qu'en tout point M de \mathcal{S} , toutes les valeurs propres de $H(M)$ sont strictement positives. Mais en regardant la complémentation $L \sqcup \mathbb{P}^{p-1}$, on en déduit que \mathcal{S} doit être pseudo-concave (aucune valeur propre strictement positive). Contradiction. \square

Maintenant cette proposition ne signifie pas qu'il n'existe aucune structure complexe sur \mathcal{F}' , simplement qu'il faut se poser la question au cas par cas. En particulier, lorsque les feuilles sont de dimension un, nous avons déjà vu qu'une structure complexe sur un feuilletage est donnée lorsqu'on choisit une orientation et une métrique. Donc il existe toujours une structure complexe sur un feuilletage tourbillonné par surfaces de Riemann.

4. Deuxième application: théorème de Fischer-Grauert feuilleté.

Notre deuxième et principal but est d'obtenir un résultat de type Fischer-Grauert dans un cas feuilleté pour répondre au problème de trivialité. Précisons ce que cela veut dire ici dans un contexte où toutes les feuilles ne sont même pas difféomorphes.

Pour simplifier, nous nous placerons dans le cas particulier suivant. La variété X est munie d'un feuilletage de codimension un par surfaces complexes vF avec une feuille compacte à holonomie plate à l'identité dont le revêtement d'holonomie est globalement trivial. En d'autres termes, nous partons d'une suspension (lisse) d'une variété lisse M au-dessus de \mathbb{R} avec feuille compacte à holonomie plate à l'identité. Nous supposons aussi que le feuilletage quotient admet une structure complexe le long des feuilles.

Dans ces conditions, la trivialité CR du feuilletage signifie la trivialité CR de son revêtement d'holonomie. Cela revient à se demander quand la suspension dont nous sommes partis est une suspension CR.

Proposition 4.1. *On se place sous les hypothèses précédentes. Soient L la feuille compacte complexe et W son revêtement d'holonomie. On suppose que W*

admet une compactification holomorphe et que les transformations de revêtement s'étendent à cette compactification comme l'identité à l'infini. On suppose enfin que tous les bouts des feuilles non compactes s'accumulent sur L . Alors le revêtement d'holonomie de (X, \mathcal{F}) est CR trivial si et seulement si toutes les feuilles non compactes sont biholomorphes à W .

Pour prendre la mesure de cette proposition, il faut se rappeler l'exemple donné au chapitre II, section 3, d'une famille dont les fibres sont \mathbb{C} mais qui n'est pas CR triviale. Il s'agit bien d'une version du théorème de Fischer-Grauert pour des familles de variétés non compactes.

Cette proposition a malheureusement des hypothèses très restrictives. Donnons rapidement un exemple pour montrer qu'elle n'est pas vide. Soit d une fonction lisse de \mathbb{R} dans \mathbb{R} égale à $\text{Id} + \phi$, où ϕ est une fonction 1-périodique nulle et plate en 0.

On considère le quotient de $\mathbb{C}^n \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$ par l'action de \mathbb{Z}^2 engendrée par

$$(z, t) \mapsto (\lambda z, d(t)) \quad \text{et} \quad (z, t) \mapsto (z, t + 1).$$

Cela revient à considérer sur le cylindre $\mathbb{C}^n \setminus \{0\} \times [0, 1]$ un feuilletage dont les feuilles intérieures s'accumulent sur les deux composantes de bord; et à recoller les bords par la proposition 3.2 du chapitre I.

Pour montrer ce résultat, le lemme de compactification n'est pas suffisant. Il nous faut un lemme de compactification uniforme.

Lemme de compactification uniforme 4.2. *Sous les hypothèses de la proposition 4.1, le revêtement d'holonomie admet une compactification holomorphe $P: \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ obtenue en ajoutant la même sous-variété holomorphe H au bout de chaque fibre. De plus cette compactification est uniforme dans le sens suivant: il existe un plongement CR*

$$I: H \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{Z}$$

tel que $P \circ I$ est l'identité de \mathbb{R} .

Ce résultat se montre de façon similaire au lemme de compactification mais en travaillant cette fois dans le revêtement d'holonomie pour établir des estimées uniformes en le paramètre transverse. Les détails se trouvent dans [M-V2]. La preuve de la proposition 4.1 est maintenant immédiate. La compactification $P: \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ est une déformation de variétés compactes complexes. D'autre part, toutes les fibres sont biholomorphes. En effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$, il existe une injection holomorphe de W dans $P^{-1}(t)$, qui s'étend en un homéomorphisme de \overline{W} (la compactification du revêtement d'holonomie de L) dans $P^{-1}(t)$. Ces deux variétés sont donc biholomorphes. Mais alors le théorème de Fischer-Grauert implique que cette famille est CR-triviale. Et comme la compactification est *uniforme*, on en déduit que la famille originale (le revêtement d'holonomie de (X, \mathcal{F})) est triviale.

5. Troisième application: structures complexes des feuilles non compactes d'une composante de Reeb en dimension quelconque.

Comme troisième application, on peut montrer le résultat de rigidité suivant

Proposition 5.1. *Soit \mathcal{C} une composante de Reeb de dimension quelconque munie d'un feuilletage à feuilles complexes. Supposons la dimension complexe du feuilletage distincte de trois et supposons les feuilles non compactes de Stein. Supposons de plus que le bord soit une variété de Hopf homothétique (i.e. son revêtement universel holomorphe est $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ et l'action du groupe de transformations du revêtement est engendrée par une homothétie complexe). Alors toutes les feuilles non compactes sont des copies de \mathbb{C}^n .*

Ce résultat a été prouvé plus haut en dimension un (lemme 2.2). Mais la différence est significative. En dimension un, les feuilles non compactes sont forcément \mathbb{C} ou \mathbb{D} . En dimension plus grande, il existe une infinité non dénombrable de structures complexes de Stein deux-à-deux non biholomorphes sur \mathbb{R}^{2n} .

Remarquons que l'hypothèse: le bord est une variété de Hopf est nécessaire, car il existe, en dimension $n \geq 3$, des variétés complexes difféomorphes à $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{2n-1}$ dont le revêtement universel holomorphe est une hypersurface quasi-homogène de \mathbb{C}^{n+1} moins un point. Par contre, nous ne savons pas si le résultat reste vrai pour une variété de Hopf non homothétique.

La preuve de cette proposition est plus délicate. Nous nous contenterons de l'esquisser pour montrer où intervient le lemme de compactification uniforme.

Esquisse de preuve. On commence par appliquer le lemme de compactification uniforme. Comme la feuille compacte a pour revêtement universel $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, il implique que les feuilles non compactes admettent une compactification uniforme en ajoutant à toutes soit un point (en supposant qu'elles s'accumulent sur le bout 0 de $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$), ou en ajoutant un \mathbb{P}^{n-1} à l'infini (en supposant qu'elles s'accumulent sur le bout infini de $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$). Remarquons que l'hypothèse "variété de Hopf homothétique" est nécessaire pour l'appliquer: sinon l'action sur le revêtement universel ne s'étend pas à la compactification comme l'identité à l'infini.

Le premier cas correspond à admettre une compactification holomorphe homéomorphe à une sphère, ce qui n'est possible, puisque la dimension complexe est différente de trois, qu'en dimension un, déjà traitée.

On se trouve donc dans le deuxième cas. Après compactification, on a une famille de déformations dont toutes les fibres sont compactes homéomorphes à \mathbb{P}^n sauf la fibre centrale qui est \mathbb{P}^n privé d'un point. On peut montrer (ce n'est pas du tout évident!) que l'on peut modifier par chirurgie cette famille dans un voisinage de ce point manquant pour la remplacer par une véritable famille de déformations de \mathbb{P}^n . Comme \mathbb{P}^n est rigide, et qui plus est, comme le lemme de compactification uniforme nous donne une famille uniforme de diviseurs de cette famille avec de bonnes propriétés, on peut montrer que la famille est triviale.

Dès lors, fixons une feuille non compacte L . Un ouvert strictement pseudo-convexe de L est d'après ce qui précède, biholomorphe à un ouvert strictement pseudo-convexe de \mathbb{C}^n ; comme L est Stein, par unicité de la complétion Stein le long d'un bout strictement pseudo-convexe [Ro], on a $L = \mathbb{C}^n$. \square

6. Le problème de rigidité.

Comme nous l'avons vu dans ce chapitre, les lemmes de compactification donnent une réponse partielle au problème de rigidité dans le cas d'une feuille compacte "attractante". D'une part, ils semblent malheureusement trop spécialisés pour donner une vision assez complète de ce qui se passe au voisinage d'une telle feuille spéciale. D'autre part, nous ne connaissons pratiquement rien sur l'autre cas de feuilles spéciales, le cas d'un feuilletage minimal, i.e. dont toutes les feuilles sont denses. On s'attend pourtant à obtenir des résultats de rigidité du même type. Il semble nécessaire pour cela d'avoir un analogue, en un sens qui n'est pour l'instant pas du tout clair, aux lemmes de compactifications.

Notons que le problème de rigidité est en un certain sens le problème fondamental. Pour un feuilletage pour lequel on possède un résultat de rigidité, on peut en déduire des résultats d'isomorphismes, de modules et déformations, et même éventuellement de non-existence d'autres structures complexes.

REFERENCES

- [Ba] D.E. Barrett, *Complex Analytic Realization of Reeb's Foliation of \mathbb{S}^3* , Math. Z. **203** (1990), 355–361
- [B-H-P-V] W. Barth, K. Hülek, C. Peters, A. Van de Ven, *Compact Complex Surfaces*, Springer, Berlin 2004.
- [Bo] N. Bourbaki, *Eléments de Mathématiques, Topologie Générale*, Hermann, Paris 1963.
- [Bu] T. Burel, *Déformations de feuilletages à feuilles complexes*, Thèse, Dijon 2010.
- [C-LN] Geometric Theory of Foliations, C. Camacho, A. Lins Neto, Birkhäuser, Boston 1985.
- [C-S] H. Cartan, J.P. Serre, *Un théorème de finitude concernant les variétés analytiques compactes*, C. R. Acad. Sci. Paris **237** (1953), 128–130.
- [De] O. Debarre, *Complex Tori and Abelian Varieties*, AMS Providence, RI 2005.
- [Des] G. Deschamps, *Feuilletage lisse de \mathbb{S}^5 par surfaces complexes*, C.R. Acad. Sci. Paris **348** (2010), 1303–1306.
- [DS] G. Della Sala, *Non-embeddability of certain classes of Levi flat manifolds*, prépublication 2009.
- [D-L] A. H. Durfee, H. B. Lawson, *Fibered knots and foliations of highly connected manifolds*, Invent. Math. **17** (1972), 203–215.
- [EK-S] A. El Kacimi Alaoui, J. Slimène *Cohomologie de Dolbeault le long des feuilles de certains feuilletages complexes*, Ann. Inst. Fourier **60** (2010), 727–757.
- [F-F] B. Farb, J. Franks, *Groups of homeomorphisms of one-manifolds III: nilpotent subgroups*, Ergodic Theory and Dynam. Systems **23** (2003), 1467–1484.
- [F-G] W. Fischer, H. Grauert, *Lokal-triviale Familien kompakter komplexer Mannigfaltigkeiten*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II, 89–94, 1965.

- [Gh] E. Ghys *Laminations par surfaces de Riemann*. Dynamique et géométrie complexes (Lyon, 1997), pp. 49–95. Panor. Synthèses vol. 8, Soc. Math. France, Paris 1999.
- [G-R] R. Gunning, H. Rossi, Analytic functions of several complex variables, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ 1965.
- [Hi] M.W. Hirsch, Differential Topology, GTM 33 Springer, New York 1994.
- [Hu] D. Husemoller, Fibre Bundles, Springer, GTM 20 New York 1994.
- [K] K. Kodaira, Complex Manifolds and Deformation of Complex Structures, Springer, Berlin 1986.
- [K2] K. Kodaira, *On cohomology groups of compact analytic varieties with coefficients in some analytic faisceaux*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **39** (1953), 865–868.
- [K-S1] K. Kodaira, D.C. Spencer, *On deformations of complex analytic structures I*, Ann. Math. **67** (1958), 328–402.
- [K-S2] K. Kodaira, D.C. Spencer. *On deformations of complex analytic structures II*, Ann. Math. **67** (1958), 403–466.
- [Ku] M. Kuranishi, *New Proof for the Existence of Locally Complete Families of Complex Structures*, Proc. Conf. Complex Analysis (Minneapolis, 1964), 142–154, Springer, Berlin 1965.
- [La] H.B. Lawson, *Codimension-one foliations of spheres*, Ann. of Math. **94** (1971), 494–503.
- [Li] W.B.R. Lickorish, *A foliation for 3-manifolds*, Ann. Math. **82** (1965), 414–420.
- [LN] A. Lins Neto, *A note on projective Levi flats and minimal sets of algebraic foliations*, Ann. Inst. Fourier **49** (1999), 1369–1385.
- [Me] L. Meersseman, *Foliated Structure of the Kuranishi Space and Isomorphisms of Deformations Families of Compact Complex Manifolds*, Ann. Sci. de l'ENS **44(3)** (2011).
- [M-V] L. Meersseman, A. Verjovsky, *A smooth foliation of the 5-sphere by complex surfaces*, Ann. Math. **156** (2002), 915–930.
- [M-V2] L. Meersseman, A. Verjovsky, *On the moduli space of certain smooth codimension-one foliations of the 5-sphere*, J. Reine Angew. Math. **632** (2009), 143–202.
- [Mi] J. Milnor, Singular points of complex hypersurfaces Annals of Maths. Study 61, Princeton University Press, Princeton 1968.
- [M-K] J. Morrow, K. Kodaira, Complex manifolds, Holt, Rinehart and Winston, New York 1971.
- [Oh] T. Ohsawa, *Nonexistence of real analytic Levi flat hypersurfaces in P^2* , Nagoya Math. J. **158** (2000), 95–98.
- [P-T] J. Plante, W. Thurston, *Polynomial Growth in Holonomy Groups of Foliations*, Comment. Math. Helvetica **51** (1976), 567–584.
- [Ro] H. Rossi, *Attaching analytic spaces to an analytic space along a pseudoconcave boundary*, Proc. Conf. Complex Analysis (Minneapolis, 1964), 242–256, Springer, Berlin 1965.
- [Si] Y.T. Siu, *Nonexistence of smooth Levi-flat hypersurfaces in complex projective spaces of dimension ≥ 3* , Ann. Math. **151** (2000), 1217–1243.
- [Si2] Y.T. Siu, *$\bar{\partial}$ -regularity for weakly pseudoconvex domains in compact Hermitian symmetric spaces with respect to invariant metrics*, Ann. Math. **156** (2002), 595–621.
- [Sl] J. Slimène, *Le $\bar{\partial}_F$ pour certains feuilletages complexes*, Thèse 2008.
- [Th] W. P. Thurston, *Existence of codimension-one foliations*, Ann. Math. **104** (1976), 249–268.
- [Wa] F. Warner, Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups, GTM 94 Springer, Berlin 1983.

LAURENT MEERSSEMAN
INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE BOURGOGNE
B.P. 47870, 21078 DIJON CEDEX, FRANCE
AND
CENTRE DE RECERCA MATEMÀTICA
08193 BELLATERRA, SPAIN
E-mail address: laurent.meersseman@u-bourgogne.fr and Lmeersseman@crm.cat