

VARIÉTÉS CR POLARISÉES ET G -POLARISÉES, PARTIE I

LAURENT MEERSSEMAN

À la mémoire de Marco Brunella

ABSTRACT. Polarized and G -polarized CR manifolds are smooth manifolds endowed with a double structure: a real foliation \mathcal{F} (given by the action of a Lie group G in the G -polarized case) and a transverse CR distribution. Polarized means that (E, J) is roughly speaking invariant by \mathcal{F} . Both structures are therefore linked up. The interplay between them gives to polarized CR-manifolds a very rich geometry.

In this paper, we study the properties of polarized and G -polarized manifolds, putting special emphasis on their deformations.

INTRODUCTION.

Les variétés CR polarisées et les variétés CR G -polarisées sont des variétés lisses munies d'une double structure: un feuilletage réel \mathcal{F} et une distribution CR transverse (E, J) (par CR nous entendons CR intégrable). On suppose la distribution polarisée par le feuilletage, autrement dit possédant une propriété d'invariance par le feuilletage. Ceci lie intimement la composante réelle et la composante complexe de ces objets mixtes C^∞ /holomorphe. L'interaction réel/complexe leur donne une géométrie très riche et des propriétés de déformations remarquables.

Dans le cas G -polarisé, \mathcal{F} est donné par l'action d'un groupe de Lie réel G et la propriété de polarisation signifie que G préserve (E, J) . On obtient ainsi une notion a priori

Date: 2 décembre 2012.

2000 Mathematics Subject Classification. 32G07, 58D27, 53C12, 57S25.

Key words and phrases. Déformations de variétés complexes et de structures CR, espaces de modules locaux, feuilletages transversalement holomorphes, structures géométriques, actions de groupes de Lie sur des variétés.

Ce travail a une longue histoire. Il a débuté en 2008-2009 au cours d'une délégation au CNRS d'un an au Pacific Institute for Mathematical Sciences, sur le campus de la University of British Columbia, Vancouver, BC. Il s'est poursuivi à Dijon ensuite. Mais il n'a vraiment pris forme que deux ans plus tard, au Centre de Recerca Matemàtica de Bellaterra, comme partie principale du projet Marie Curie 27707 DEFFOL.

Je voudrais remercier d'une part le PIMS et le département de mathématiques de UBC, d'autre part le CRM pour leur hospitalité. Merci également au CNRS qui m'a donné l'occasion de cette délégation. Merci enfin à Marcel Nicolau et à Graham Smith pour de nombreuses et fructueuses discussions au cours de l'élaboration de ce travail.

Ce travail a été financé principalement par la bourse Marie Curie 27707 DEFFOL de la communauté européenne et, avant cela, partiellement par le projet COMPLEXE (ANR-08-JCJC-0130-01) de l'Agence Nationale de la Recherche.

à mi-chemin entre variété complexe (lorsque la dimension de G est nulle) et variété réelle homogène (lorsqu'elle est maximale). Toutefois, une analyse plus approfondie de la situation montre que ces objets sont beaucoup plus proches de la géométrie complexe que de la géométrie réelle. D'une part, si G est compact de dimension paire, alors une variété CR G -polarisée X est complexe avec \mathcal{F} holomorphe. D'autre part, si G est abélien, le produit $X \times G$ possède un atlas de variété complexe pour lequel les translations sur les fibres de $X \times G \rightarrow X$ sont holomorphes et ces fibres sont totalement réelles. Cette propriété fondamentale, qui signifie que le feuilletage réel \mathcal{F} peut être complexifié au sens de [H-S], rapproche les variétés \mathbb{R}^m -polarisées des variétés sasakiennes dont, rappelons-le, le produit avec $\mathbb{R}^{>0}$ admet une structure complexe kählerienne invariante par dilatations; mais sans aspect métrique ni forme de contact. Mais elle les relie également à la géométrie complexe non kählerienne. En particulier, on obtient des exemples triviaux de structures \mathbb{R}^m -polarisées en considérant une somme de Whitney de fibrés unitaires associée à une somme de Whitney de m fibrés en droites sur une variété compacte complexe. Et, ce qui est beaucoup plus intéressant, on obtient des exemples non-triviaux en considérant des quotients de certaines variétés LVM (cf. [LdM-V], [Me1] et [M-V] pour une présentation de cette classe de variétés non kähleriennes).

Dans le cas plus général des variétés polarisées, il n'y a pas d'action de groupe. La distribution CR transverse est invariante par holonomie, au sens où elle induit une structure transverse holomorphe pour le feuilletage. Cette propriété de polarisation entraîne une propriété de rigidité: ces structures possède, sous une hypothèse métrique classique, un espace de modules local¹ (au sens de Kuranishi) de dimension finie. La finitude est un quasi-miracle pour un espace de structures CR (on consultera à ce propos l'introduction de [Me2]). Elle reflète bien sûr l'existence d'un feuilletage transversalement holomorphe associé à la structure polarisée; cependant, ce résultat ne se ramène pas aux énoncés classiques de [EK-N] et [Gi] et sa preuve ne les utilise pas. De surcroît, cet espace est *géométrique*. Les submersions à base complexe fournissent le meilleur exemple de ce phénomène. Ici la distribution CR donne naissance à un feuilletage Levi-plat. En tant que structure polarisée, leur espace de modules local s'identifie à l'espace de Kuranishi de la base et ne dépend donc pas de la représentation définissant la suspension. En tant que structure CR, leur espace de modules² est généralement de dimension infinie, mais des variations infimes de la représentation peuvent avoir un espace de modules de dimension finie, et ce *sans que la géométrie du feuilletage Levi-plat ne soit affectée*. Ainsi, il n'y a pas moyen de lire la finitude de l'espace des modules sur la géométrie du feuilletage Levi-plat.

Il y a cependant un prix à payer pour obtenir cette finitude. Il faut identifier deux structures non pas modulo CR isomorphisme, mais si elles induisent la même structure transverse holomorphe sur \mathcal{F} . Agréablement, dans le cas Levi-plat (par exemple pour les submersions à base complexe), cette différence disparaît et l'identification se fait modulo CR-isomorphisme.

¹On parle ici d'espace de modules à type constant, pour reprendre la terminologie introduite en section 2, c'est-à-dire qu'on fixe la distribution et qu'on déforme uniquement l'opérateur CR sur cette distribution.

²Si tant est qu'on arrive à donner un sens précis à ce terme.

L’article comprend trois parties. La première contient une description infinitésimale des structures CR polarisées, les premiers exemples et tous les préliminaires nécessaires à la construction d’un espace de modules à la Kuranishi. La deuxième construit cet espace de modules, culminant avec les théorèmes 10.1, 13.1 et leurs corollaires; et finit par la description du cas Levi-plat, et de celui des submersions à base complexe (théorème 15.2). La troisième définit et étudie les variétés CR G -polarisées. On montre en section 17 que, dans le cas abélien, le produit par G d’une telle variété, et plus généralement tout G -fibré plat au-dessus d’elle, admet une structure complexe invariante par les translations du groupe et pour laquelle les fibres sont totalement réelles. Et on prouve en section 18 que, dans le cas G compact de dimension paire, une variété CR G -polarisée est une variété complexe munie d’un feuilletage holomorphe. On finit l’article par l’exemple non-trivial des structures \mathbb{R}^m -polarisées issues des variétés LVM.

Un deuxième article, incluant une étude plus poussée des variétés G -polarisées, ainsi que l’analyse des déformations à polarisation constante (c’est-à-dire sans fixer le fibré tangent de la structure CR), est prévu.

I. GÉNÉRALITÉS

1. STRUCTURES PRESQUE CR POLARISÉES

Soit X une variété réelle lisse (i.e. C^∞), compacte, connexe de dimension n . Soit TX son fibré tangent et soit

$$T_{\mathbb{C}}X = TX \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

son fibré tangent complexifié.

Remarque. Nous insistons sur le fait que la dimension de X est *arbitraire*. En particulier, X peut être *de dimension impaire*.

Soit (E, J) une structure presque CR de classe C^∞ de X .

Définition. Une *polarisation* de (E, J) est un supplémentaire N de E dans TX . Une structure presque CR munie d’une polarisation est dite *polarisée par N* ou plus simplement *polarisée* lorsqu’il n’y a pas d’ambiguïté.

Soit $E_{\mathbb{C}}$ le complexifié du sous-fibré E . Soit $J_{\mathbb{C}}$ l’extension de l’opérateur J à $E_{\mathbb{C}}$. On a une décomposition

$$(1.1) \quad E_{\mathbb{C}} = E^{0,1} \oplus E^{1,0}$$

où $E^{0,1}$, respectivement $E^{1,0}$, est le sous-fibré propre associé à la valeur propre $-i$, respectivement i . En tenant compte de la polarisation, ceci donne

$$(1.2) \quad \begin{aligned} T_{\mathbb{C}}X &= E^{0,1} \oplus E^{1,0} \oplus N \oplus iN \\ &= (E^{0,1} \oplus iN) \oplus i(\overline{E^{0,1} \oplus iN}) \\ &:= T \oplus i\overline{T}. \end{aligned}$$

Soit $G \rightarrow X$ le fibré réel lisse dont la fibre en $x \in X$ est la grassmannienne des n -plans réels de l'espace vectoriel complexe $(T_{\mathbb{C}}X)_x$. Dans (1.2), le fibré T est une section lisse de G .

Remarquons que T définit complètement la structure presque CR polarisée associée (E, J, N) . En effet, on a

$$(1.3) \quad E^{0,1} = T \cap iT \quad E^{1,0} = \overline{E^{0,1}}$$

ce qui définit $E_{\mathbb{C}}$ via (1.-2) et donc E . Mais on définit alors $J_{\mathbb{C}}$ comme la multiplication par i sur $E^{1,0}$ et par $-i$ sur $E^{0,1}$. En restriction à E , l'opérateur $J_{\mathbb{C}}$ devient J . Enfin, un calcul immédiat montre que

$$(1.4) \quad N = i\overline{T} \cap TX.$$

On vient de montrer

Proposition 1.1. *Les structures presque CR polarisées (lisses) sont en bijection avec les sections (lisses) T de G telles que*

- (i) $T \oplus i\overline{T} = T_{\mathbb{C}}X$
- (ii) $T \cap iT$ est un sous-fibré complexe de $T_{\mathbb{C}}X$
- (iii) $TX \cap i\overline{T}$ est un sous-fibré réel de TX
- (iv) $T = E^{0,1} \oplus iN$

2. STRUCTURES PROCHES

On munit $\Sigma(G)$, l'espace des *distributions* de G , c'est-à-dire des sections lisses de G , d'une norme Sobolev L_l^2 (pour $l > 0$ un entier donné) de la manière classique (cf. [Ku2, §IX]).

Soit T une structure presque CR polarisée. Soit T' une distribution proche de T en norme l . On peut voir T' comme un graphe de T dans $i\overline{T}$, i.e. il existe

$$(2.1) \quad \omega \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(T, i\overline{T})$$

telle que

$$(2.2) \quad T' = \{v - \omega(v) \mid v \in T\}.$$

Cependant, une distribution (2.2) ou, de façon équivalente, un morphisme (2.1), ne code pas forcément une structure presque CR polarisée. Le sous-fibré (2.2) doit vérifier les conditions (i), (ii), (iii) et (iv) de la proposition 1.1.

En fait, nous allons considérer deux cas particuliers distincts de structures proches, pour lesquelles on peut caractériser agréablement le morphisme (2.1) associé.

Soit T une structure presque CR polarisée. Soit T' une structure presque CR polarisée proche de T en norme l . Soit ω le morphisme associé à T' via (2.2). Appelons E' , $E'_{\mathbb{C}}$, $(E^{0,1})'$ et N' les sous-fibrés associés à T' .

Définitions. On dira que T' est une *déformation de T à type constant* si l'on a $E' \equiv E$ et $N' \equiv N$.

On dira que T' est une *déformation de T à polarisation constante* si l'on a simplement $N' \equiv N$.

Ainsi dans les deux cas, on laisse la polarisation fixe. Mais dans le premier, on se contente de modifier l'opérateur presque complexe J le long de E , qui, lui, reste fixe; tandis que dans le second, on modifie E et J .

Plaçons-nous à type constant. Alors le morphisme ω donné par (2.1) est nul sur N , qui ne varie pas. Qui plus est, $(E^{0,1})'$ est un sous-fibré complexe de $E'_\mathbb{C}$, si bien qu'il existe

$$(2.3) \quad \omega \in \text{Hom}_\mathbb{C}(E^{0,1}, E^{1,0})$$

tel que l'égalité (2.2) se réécrire

$$(2.4) \quad T' = (E^{0,1})' \oplus iN = \{v - \omega(v) \mid v \in E^{0,1}\} \oplus iN.$$

Et, ce qui est beaucoup plus intéressant, on obtient cette fois une caractérisation complète des déformations à type constant.

Proposition 2.1. *L'espace des déformations de T à type constant est en bijection avec l'espace des morphismes complexes de $E^{0,1}$ dans $E^{1,0}$ via l'identité (2.4).*

Preuve. Tout découle de la formule (2.4) couplée à la proposition 1.1. \square

Fixons E et N . Soit \mathcal{E}_{tc} l'ensemble des structures presque CR lisses polarisées (E, J, N) . Il s'agit d'un sous-ensemble de $\Sigma(G)$ que nous munissons de la topologie induite.

Complétons $\Sigma(G)$ en $\Sigma_l(G)$ pour la norme l ; l'espace \mathcal{E}_{tc} se complète en \mathcal{E}_{tc}^l . La proposition 2.1 a l'intéressant corollaire suivant.

Corollaire 2.2. *L'espace \mathcal{E}_{tc}^l est une variété de Banach \mathbb{C} -analytique.*

Preuve. On observe que la proposition 2.1 donne des cartes de variété de Banach \mathbb{C} -analytique. En effet, la bijection annoncée est en fait un homéomorphisme pour la topologie L_l^2 . Autrement dit, \mathcal{E}_{tc}^l a pour carte locale en

$$T = E^{0,1} \oplus iN$$

un voisinage de 0 dans l'espace de Banach $\text{Hom}_\mathbb{C}^l(E^{0,1}, E^{1,0})$ pour la norme l .

Par ailleurs, les changements de cartes de cet atlas sont simplement des changements de cartes de G . Qui plus est, ces changements de cartes ne touchent pas à la polarisation N et peuvent donc être choisis \mathbb{C} -analytiques. \square

Nous considérons maintenant les déformations à polarisation constante. Comme précédemment, le morphisme ω donné par (2.1) est nul sur N , qui ne varie pas. Ceci permet de prendre

$$\omega \in \text{Hom}_\mathbb{R}(E^{0,1}, i\bar{T})$$

mais on ne peut plus cette fois supposer ω complexe à valeurs dans $E^{1,0}$. Décomposons

$$(2.5) \quad \begin{cases} \omega = \omega_{1,0} + \omega_N \\ \text{avec } \omega_{1,0} \in \text{Hom}_\mathbb{R}(E^{0,1}, E^{1,0}) \text{ et } \omega_N \in \text{Hom}_\mathbb{R}(E^{0,1}, N). \end{cases}$$

Soit $w \in (E^{0,1})'$. Par (2.3), il existe $v \in E^{0,1}$ et $n \in N$ tels que

$$w = v \oplus \omega_{1,0}(-v) \oplus \omega_N(-v) \oplus in \in E^{0,1} \oplus E^{1,0} \oplus N \oplus iN.$$

Dès lors,

$$(2.6) \quad iw = iv \oplus i\omega_{1,0}(-v) \oplus (-n) \oplus i\omega_N(-v) \in E^{0,1} \oplus E^{1,0} \oplus N \oplus iN = T_{\mathbb{C}}X.$$

Mais $iw \in (E^{0,1})'$ et il existe donc $u \in E^{0,1}$ et $p \in N$ tels que

$$(2.7) \quad iw = u \oplus \omega_{1,0}(-u) \oplus \omega_N(-u) \oplus ip \in E^{0,1} \oplus E^{1,0} \oplus N \oplus iN.$$

En comparant (2.7) et (2.6), et en notant que la projection

$$w \in (E')^{0,1} \longmapsto v \in E^{0,1}$$

est un isomorphisme, on conclut que $\omega_{1,0}$ est en fait une forme complexe; et que

$$(2.8) \quad \omega_{N_{\mathbb{C}}}(v) := \omega_N(v) + i\omega_N(iv) \quad \text{pour } v \in E^{0,1}$$

est elle aussi une forme complexe.

En somme, nous voyons qu'on peut réécrire (2.2) comme

$$(2.9) \quad T' = (E^{0,1})' \oplus iN = \{v - \omega_{\mathbb{C}}(v) \mid v \in E^{0,1}\} \oplus iN.$$

où

$$(2.10) \quad \begin{cases} \omega_{\mathbb{C}} := \omega_{1,0} + \omega_{N_{\mathbb{C}}} \\ \text{avec } \omega_{1,0} \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(E^{0,1}, E^{1,0}) \text{ et } \omega_{N_{\mathbb{C}}} \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(E^{0,1}, N_{\mathbb{C}}). \end{cases}$$

Ce sont les formules équivalentes, pour une déformation à polarisation constante, aux formules (2.3) et (2.4).

Nous pouvons maintenant énoncer

Proposition 2.3. *L'espace des déformations de T à polarisation constante est en bijection avec l'espace des morphismes complexes de $E^{0,1}$ dans $E^{1,0} \oplus N_{\mathbb{C}}$ via l'identité (2.1).*

Preuve. Tout découle de la formule (2.9) couplée à la proposition 1.1. \square

Fixons N et définissons \mathcal{E}_{pc} comme l'ensemble des structures presque CR lisses polarisées (E, J, N) . Complétons-le en \mathcal{E}_{pc}^l pour la norme l . On montre de la manière que le corollaire 2.2 le

Corollaire 2.4. *L'espace \mathcal{E}_{pc}^l est une variété de Banach \mathbb{C} -analytique.*

3. STRUCTURES ET VARIÉTÉS CR POLARISÉES

Soit T une structure presque CR polarisée. On note $T^{\mathbb{C}}$ la distribution de $T_{\mathbb{C}}X$ égale en $x \in X$ au plus petit sous-espace vectoriel complexe de $(T_{\mathbb{C}}X)_x$ contenant le sous-espace réel T_x . Et on note $T_{\mathbb{C}}$ la distribution de $T_{\mathbb{C}}X$ égale en $x \in X$ au plus grand sous-espace vectoriel complexe de $(T_{\mathbb{C}}X)_x$ contenu dans le sous-espace réel T_x .

Il est immédiat que ces deux distributions sont en fait des sous-fibrés complexes de $T_{\mathbb{C}}X$ et qu'on a

$$(3.1) \quad T^{\mathbb{C}} = E^{0,1} \oplus N_{\mathbb{C}} \quad \text{et} \quad T_{\mathbb{C}} = E^{0,1}.$$

Définition. On dit que T est une structure presque CR polarisée *complètement intégrable*, ou, plus brièvement, une *structure CR polarisée* si $T^{\mathbb{C}}$ et $T_{\mathbb{C}}$ sont involutifs, i.e. si

$$[T^{\mathbb{C}}, T^{\mathbb{C}}] \subset T^{\mathbb{C}} \quad \text{et} \quad [T_{\mathbb{C}}, T_{\mathbb{C}}] \subset T_{\mathbb{C}}$$

Définition. Une variété réelle X munie d'une structure CR polarisée sera appelée *variété CR polarisée*.

Compte-tenu de (3.1), l'involutivité de $T_{\mathbb{C}}$ signifie exactement l'intégrabilité de la structure presque CR (E, J) . La complète intégrabilité est donc, comme son nom le suggère, plus forte que l'intégrabilité.

Observons que, T étant une distribution *réelle* de $T_{\mathbb{C}}X$, elle ne peut être involutive. Le mieux que l'on puisse demander est

$$[T, T] \subset T^{\mathbb{C}}$$

qui entraîne l'involutivité de $T^{\mathbb{C}}$. C'est la condition supplémentaire contenue dans la complète intégrabilité par rapport à l'intégrabilité classique.

Convenons de dire que (E, J, N) est *transversalement intégrable* si elle vérifie uniquement cette deuxième condition, à savoir l'involutivité de $T^{\mathbb{C}}$. Voici le sens de l'intégrabilité transverse.

Proposition 3.1. *Soit T une structure presque CR polarisée. Supposons T transversalement intégrable. Alors la polarisation N est tangente à un feuilletage transversalement holomorphe \mathcal{F} dont le fibré normal $N\mathcal{F}$ est \mathbb{C} -isomorphe au fibré complexe (E, J) .*

Preuve. Posons $F = T^{\mathbb{C}}$. On remarque que F est involutif et vérifie, d'après (3.1)

$$F + \overline{F} = T_{\mathbb{C}}X \quad \text{et} \quad F \cap \overline{F} = N$$

Par [Nir], on a immédiatement que N est le fibré tangent à un feuilletage transversalement holomorphe \mathcal{F} dont la structure transverse est donnée ainsi: la projection naturelle

$$(3.2) \quad \pi: TX \longrightarrow N\mathcal{F} := TX/T\mathcal{F}$$

est un isomorphisme entre E et le fibré normal $N\mathcal{F}$, qui permet de pousser la structure presque CR de E en une structure CR de $N\mathcal{F}$. Plus précisément, on étend π en une projection de $T_{\mathbb{C}}X$ à valeurs dans $N_{\mathbb{C}}\mathcal{F} := N\mathcal{F} \otimes \mathbb{C}$ et on obtient une décomposition

$$(3.3) \quad N_{\mathbb{C}}\mathcal{F} = N\mathcal{F}^{0,1} \oplus N\mathcal{F}^{1,0}$$

en posant

$$(3.4) \quad N\mathcal{F}^{0,1} = \pi_* E^{0,1} \quad \text{et} \quad N\mathcal{F}^{1,0} = \pi_* E^{1,0}.$$

Observons que l'involutivité de $T^{\mathbb{C}}$ entraîne, par passage au quotient, l'involutivité de $N\mathcal{F}^{0,1}$. Ce qui achève la preuve. \square

Ainsi, à toute structure presque CR polarisée transversalement intégrable (et donc a fortiori à toute structure CR polarisée), on associe un feuilletage transversalement holomorphe. Le lecteur non averti pourra se reporter à [Ni] pour plus de détails sur ces feuilletages.

Réiproquement, étant donné un feuilletage transversalement holomorphe \mathcal{F} de fibré tangent N et de fibré normal $N\mathcal{F}$, on peut associer une structure presque CR polarisée par N transversalement intégrable. En effet, comme \mathcal{F} est transversalement holomorphe, il existe une structure complexe sur $N\mathcal{F}$. Autrement dit, on a une décomposition (3.3) du fibré normal complexifié qui vérifie de plus

$$(3.5) \quad [N\mathcal{F}^{0,1}, N\mathcal{F}^{0,1}] \subset N\mathcal{F}^{0,1}.$$

Dans (3.5), le crochet utilisé est le crochet “quotient” sur $N\mathcal{F}$. Autrement dit, (3.5) signifie que, pour tous champs locaux ξ et η de $T_{\mathbb{C}}X$ dont la projection (3.2) appartient à $N\mathcal{F}^{0,1}$, on a

$$(3.6) \quad [\pi_* \xi, \pi_* \eta] := \pi_* [\xi, \eta] \in N\mathcal{F}^{0,1}.$$

Il suffit de choisir un sous-fibré E de TX qui soit une réalisation de $N\mathcal{F}$. La projection (3.2) induit un isomorphisme entre E et $N\mathcal{F}$ si bien que la décomposition (3.3) induit une décomposition

$$(3.7) \quad E_{\mathbb{C}} = E^{0,1} \oplus E^{1,0}$$

et l'involutivité (3.6) implique

$$(3.8) \quad [E^{0,1}, E^{0,1}] \subset E^{0,1} \mod N_{\mathbb{C}}.$$

Maintenant, (3.8) entraîne l'intégrabilité transverse de E , en prenant en compte (3.1) et le fait que $N_{\mathbb{C}}$ est involutif, puisque tangent à un feuilletage.

Le choix d'une réalisation E n'est cependant pas unique. On peut bien entendu rigidifier les choses en munissant X d'une métrique riemannienne et en prenant pour E le supplémentaire orthogonal de N dans TX , mais *il n'existe pas de choix canonique de E* .

Pour résumer ce que nous venons de dire, soit g une métrique riemannienne sur X . Définissons

$$(3.9) \quad \mathcal{E}_g = \{(E, J, N) \text{ structure presque CR polarisée lisse} \mid E \perp N\}.$$

C'est un sous-ensemble de \mathcal{E}_{pc} . On vient de prouver

Corollaire 3.2. *Fixons E et N . Alors il existe une bijection entre le sous-espace des éléments transversalement intégrables de \mathcal{E}_{tc} et l'ensemble des feuilletages transversalement holomorphes tangents à N .*

De plus, il existe une bijection entre le sous-ensemble des éléments transversalement intégrables de \mathcal{E}_g et l'ensemble des feuilletages transversalement holomorphes sur X .

Ainsi, une fois choisie une métrique riemannienne sur X , et à condition de prendre systématiquement la polarisation orthogonale, on peut identifier structure presque CR polarisée transversalement intégrable et feuilletage transversalement holomorphe.

Cependant, il n'est pas possible en général d'associer une structure presque CR polarisée complètement intégrable à un feuilletage transversalement holomorphe \mathcal{F} donné. En effet, cela suppose en plus que la réalisation E choisie de $N\mathcal{F}$ soit involutive *dans* TX , ce qui n'a aucune raison d'être vrai.

Il s'agit là d'un point fondamental, sur lequel nous souhaitons insister. Il suffit pour se convaincre de cette différence de comparer (3.8) avec

$$[E^{0,1}, E^{0,1}] \subset E^{0,1}$$

qui est la condition d'intégrabilité requise pour passer de l'intégrabilité transverse à la complète intégrabilité.

Finissons cette section en tirant quelques conséquences pratiques de la proposition 3.1. Soit T une structure presque CR transversalement intégrable. L'existence du feuilletage transversalement holomorphe \mathcal{F} signifie qu'il existe au voisinage de tout point des coordonnées feuilletées (z, t) telles que

$$(3.10) \quad N = T\mathcal{F} =_{loc} \text{Vect}_{\mathbb{R}}(\partial/\partial t_1, \dots, \partial/\partial t_d)$$

et

$$(3.11) \quad N_{\mathbb{C}}\mathcal{F} =_{loc} \text{Vect}_{\mathbb{C}}(\partial/\partial z_1, \dots, \partial/\partial z_p, \partial/\partial \bar{z}_1, \dots, \partial/\partial \bar{z}_p)$$

formules qui utilisent implicitement les égalités

$$(3.12) \quad d = \dim \mathcal{F} = \dim N \quad \text{et} \quad 2p = \dim E = \text{codim } \mathcal{F}.$$

Comme la projection (3.2) est un isomorphisme entre $E_{\mathbb{C}}$ et $N_{\mathbb{C}}\mathcal{F}$ qui, de plus, préserve (3.7) et (3.3), on en conclut qu'il existe, pour tout i entre 1 et p un unique vecteur e_i de $E^{0,1}$ dont la projection par π est égale à $\partial/\partial \bar{z}_i$. Ecrivons plus précisément

$$(3.13) \quad e_i = \partial/\partial \bar{z}_i + a_i^j \partial/\partial t_j$$

où les a_i^j sont des fonctions lisses en (z, t) à valeurs complexes.

Remarque. Notation Dans la formule (3.13), et puis systématiquement dans la suite du texte, nous utilisons la convention d'Einstein: un indice répété deux fois est sommé (et ce d'ailleurs, qu'il soit placé en haut, en bas, ou alterné).

On peut en fait montrer un peu plus, lorsqu'on est en présence d'une structure CR polarisée.

Lemme 3.3. *Soit T une structure presque CR polarisée transversalement intégrable et soit (z, t) un système local de coordonnées feuilletées. Alors il existe un unique p -uplet de vecteurs e_i de type (3.13) formant une base locale de $E^{0,1}$.*

Qui plus est, si T est complètement intégrable, les e_i vérifient la relation

$$(3.14) \quad [e_i, e_j] = 0 \quad \text{pour tout } i, j \text{ entre 1 et } p.$$

Preuve. Il suffit de montrer la nullité des crochets. Soient donc i et j deux entiers entre 1 et p . On décompose dans la base locale $(e_k, \bar{e}_k, \partial/\partial t_k)$ de $T_{\mathbb{C}}X$

$$(3.15) \quad [e_i, e_j] = \alpha_k e_k + \beta_k \bar{e}_k + \gamma_k \partial/\partial t_k.$$

Par complète intégrabilité, le crochet $[e_i, e_j]$ appartient à $E^{0,1}$, donc tous les β_k et les γ_k sont nuls. Mais la formule (3.13) implique que ce crochet est dirigé le long de $N_{\mathbb{C}}$. Finalement, les α_k aussi doivent être nuls, et (3.15) se transforme en (3.14). \square

Dans toute la suite, nous utiliserons systématiquement pour faire des calculs les coordonnées feuilletées et la base locale $(e_k, \bar{e}_k, \partial/\partial t_k)$ de $T_{\mathbb{C}}X$ associée. Par abus de notation, on écrira $(z, t) \in X$ pour $M \in X$ et M est représenté par (z, t) dans un système de coordonnées feuilletées.

Proposition 3.4. *Soit T une structure CR polarisée. Soit $(z, t) \in X$. Alors la forme de Levi de E en (z, t) est donnée par la matrice*

$$(3.16) \quad \begin{pmatrix} [\bar{e}_1, e_1] & \dots & [\bar{e}_1, e_p] \\ \vdots & & \vdots \\ [\bar{e}_p, e_1] & \dots & [\bar{e}_p, e_p] \end{pmatrix} (z, t).$$

Preuve. Par définition, la forme de Levi est (à normalisation près)

$$(v, w) \in E^{1,0} \times E^{1,0} \longmapsto p_{N_{\mathbb{C}}}[v, \bar{w}] \in N_{\mathbb{C}}.$$

Dans la base locale \bar{e}_i de $E^{1,0}$, cela donne exactement l'expression (3.16). \square

Nous verrons dans la section suivante des exemples non Levi-plats.

4. EXEMPLES DE VARIÉTÉS CR POLARISÉES

Variétés sasakiennes. Rappelons qu'une variété lisse compacte riemannienne (X, g) est sasakienne si son cône riemannien

$$(4.1) \quad \mathcal{C}(X) = (X \times \mathbb{R}_{>0}, r^2 g + dr^2)$$

(où r est la coordonnée de $\mathbb{R}_{>0}$) admet une structure complexe J invariante par dilatations

$$(4.2) \quad (x, r) \in \mathcal{C}(X) \longmapsto (x, \lambda r) \in \mathcal{C}(X)$$

et kählerienne pour sa métrique.

En identifiant X à l'hypersurface $X \times \{1\}$ de $\mathcal{C}(X)$, on la munit d'une structure CR $(E, J|_E)$ de codimension un. Par ailleurs, si l'on définit

$$(4.3) \quad \xi = J r \frac{\partial}{\partial r}$$

on vérifie facilement (cf. [B-G] et [Sp]) que ξ est un champ tangent à X dont le flot est transverse à E et préserve la structure CR. Autrement dit, si Φ_t désigne le flot de ξ , on a

$$(4.4) \quad (\Phi_t)_* E^{0,1} = E^{0,1}$$

et

$$(4.5) \quad \text{Vect}_{\mathbb{R}} \xi \oplus E = TX.$$

Mais la version infinitésimale de (4.4) est

$$(4.6) \quad [\xi, E^{0,1}] \subset E^{0,1}$$

c'est-à-dire exactement l'intégrabilité transverse de E pour la polarisation

$$(4.7) \quad N = \text{Vect}_{\mathbb{R}} \xi.$$

Combinée à l'intégrabilité de $E^{0,1}$, on obtient ainsi qu'une variété sasakienne est une variété CR polarisée.

Observons que cela donne de nombreux exemples non Levi-plats.

Structures CR de codimension réelle une invariantes sous l'action d'un flot transverse. Il s'agit d'une généralisation - sans métrique kähleriennne transverse - de l'exemple précédent. On part de (E, J) structure CR de codimension réelle une sur X et on suppose que (E, J) est invariante sous l'action d'un flot transverse. Autrement dit, il existe un champ ξ sur X de flot Φ_t vérifiant (4.4) et (4.5).

On voit alors par (4.6) que (E, J) est polarisée pour (4.7).

Feuilletages transversalement holomorphes de codimension complexe une. Soit \mathcal{F} un feuilletage transversalement holomorphe de codimension complexe une sur X . Choisissons une distribution E de TX isomorphe à $N\mathcal{F}$. Le corollaire 3.2 entraîne que E munie de la structure CR héritée de $N\mathcal{F}$ est transversalement intégrable, et donc polarisée par raison de dimension.

Dans le cas particulier d'un flot transversalement holomorphe sur une variété de dimension 3, on dispose d'une classification complète d'après M. Brunella et E. Ghys [Br], [Gh]: fibrations de Seifert, feuilletages linéaires du tore T^3 , feuilletage stable associé à une suspension d'un difféomorphisme hyperbolique de T^2 , suspension d'un automorphisme de \mathbb{P}^1 , feuilletages transversalement affines sur $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ et enfin feuilletages de \mathbb{S}^3 induits par un champ de vecteurs holomorphe de \mathbb{C}^2 dans le domaine de Poincaré et quotients.

Suspensions à base complexe. Soit B une variété compacte complexe. Soit \overline{B} un revêtement galoisien de B de groupe Γ et soit

$$(4.8) \quad \rho: \Gamma \longrightarrow \text{Diff}(F)$$

une représentation de Γ dans les difféomorphismes d'une variété lisse compacte F .

L'action fibrée

$$(4.9) \quad (z, t) \in \overline{B} \times F \longmapsto (g \cdot z, (\rho(g)^{-1}(t)) \in \overline{B} \times F$$

où $g \in \Gamma$ agit par translations sur \overline{B} , définit par passage au quotient une variété

$$(4.10) \quad X := \overline{B} \times F/\langle \Gamma \rangle$$

qui fibre sur B de fibre F .

Comme B est complexe, le feuilletage vertical de $\overline{B} \times F$ par copies de F descend en un feuilletage transversalement holomorphe \mathcal{F} sur X . De surcroît, le feuilletage horizontal par copies de \overline{B} descend en un feuilletage par variétés complexes \mathcal{G} sur X . Toutes les feuilles sont des revêtements holomorphes de B . Notant E le fibré tangent de \mathcal{G} , on voit aisément que E est une structure CR polarisée. En fait, pour (z, t) système de coordonnées locales de $\overline{B} \times F$, et donc de X , on a que

$$(4.11) \quad e_i = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}.$$

Ces exemples de structures CR polarisées sont toutes Levi-plates.

5. ACTION D'UN DIFFÉOMORPHISME PROCHE DE L'IDENTITÉ

Dans cet article, ainsi que nous l'avons signalé dans l'introduction et au vu des définitions de la section 2, nous travaillons toujours à polarisation fixée. De ce fait, étant donnée une structure presque polarisée T , les difféomorphismes f que nous utiliserons vont préserver la polarisation N de T , i.e. vont vérifier

$$(5.1) \quad (f_*N)_x = N_{f(x)} \quad \text{pour tout } x \in X.$$

On notera $\text{Diff}_N(X)$ le groupe des difféomorphismes C^∞ de X préservant N , et $\text{Diff}_N^l(X)$ le groupes des difféomorphismes de classe L_l^2 qui complète $\text{Diff}_N(X)$ pour la norme l .

Supposons T complètement intégrable. Dans ce cas, $\text{Diff}_N(X)$ est le groupe des difféomorphismes \mathcal{F} -feuilletés, c'est-à-dire envoyant une feuille de \mathcal{F} sur une feuille de \mathcal{F} . En coordonnées (z, t) , on a alors

$$(5.2) \quad f(z, t) = (h(z), g(z, t)).$$

Soit T' une déformation de T à polarisation constante codée par $\omega_{\mathbb{C}}$ (au sens de (2.9)). Soit f un élément de $\text{Diff}_N(X)$. Considérons la distribution f_*T' de $T_{\mathbb{C}}X$. Tenant compte de la décomposition

$$(5.3) \quad T' = (E^{0,1})' \oplus iN$$

on obtient

$$(5.4) \quad f_*T' = f_*(E^{0,1})' \oplus iN.$$

En particulier, il ressort de (5.4) que f_*T' est une structure presque CR polarisée par N . Supposons f suffisamment proche de l'identité pour que f_*T' soit une déformation à polarisation constante de T . Codons-la par le morphisme $\alpha_{\mathbb{C}}$. Notre objectif est de relier $\alpha_{\mathbb{C}}$ à $\omega_{\mathbb{C}}$.

On se place comme d'habitude dans une carte locale feuilletée et on suppose que f est suffisamment proche de l'identité pour être à valeurs dans cette même carte. On peut donc écrire

$$(5.5) \quad \omega_{\mathbb{C}} = \omega_{1,0} \oplus \omega_{N_{\mathbb{C}}} = \omega_{ij} e_i^* \otimes \bar{e}_j \oplus n_{ij} e_i^* \otimes \partial/\partial t_j$$

pour ω_{ij} et n_{ij} des fonctions lisses en (z, t) à valeurs complexes et

$$(5.6) \quad \alpha_{\mathbb{C}} = \alpha_{1,0} \oplus \alpha_{N_{\mathbb{C}}} := \alpha_{ij} e_i^* \otimes \bar{e}_j \oplus p_{ij} e_i^* \otimes \partial/\partial t_j$$

pour α_{ij} et p_{ij} des fonctions lisses en (z, t) à valeurs complexes.

Posons

$$(5.7) \quad \partial_i = \partial/\partial z_i \quad \bar{\partial}_i = \partial/\partial \bar{z}_i \quad \partial_{t_i} = \partial/\partial t_i.$$

Proposition 5.1. *Sous les hypothèses et notations précédentes, on a*

$$(5.8) \quad \alpha_{lj}(\bar{\partial}_k \bar{h}_l - \omega_{ki} \partial_i \bar{h}_l) = \omega_{ki} \partial_i h_j - \bar{\partial}_k h_j$$

pour $j, k = 1, \dots, p$; et

$$(5.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_{lj}(\bar{\partial}_k \bar{h}_l - \omega_{ki} \partial_i \bar{h}_l) = n_{ki} \partial_i g_j - \bar{\partial}_k g_j - a_k^l \partial_{t_l} g_j \\ \quad + \omega_{ki}(\partial_i g_j + \bar{a}_i^l \partial_{t_l} g_j - \partial_i h_l \bar{a}_l^j - \partial_i \bar{h}_l a_l^j) \\ \quad + \bar{\partial}_k \bar{h}_l a_l^j + \bar{\partial}_k h_l \bar{a}_l^j \end{array} \right.$$

pour $j = 1, \dots, d$ et $k = 1, \dots, p$.

Preuve. C'est un calcul fastidieux mais direct. De (3.13) et (5.2), on déduit les formules

$$(5.10) \quad f_* e_i = \bar{\partial}_i \bar{h}_j e_j + \bar{\partial}_i h_j \bar{e}_j + (\bar{\partial}_i g_j + a_i^l \partial_{t_l} g_j - \bar{\partial}_i \bar{h}_l a_l^j - \bar{\partial}_i h_l \bar{a}_l^j) \partial/\partial t_j$$

et

$$(5.11) \quad f_* \partial/\partial t_j = \partial_{t_i} g_j \partial/\partial t_j.$$

Soit k un entier compris entre 1 et p . On va calculer

$$(5.12) \quad f_*(e_k - \omega_{\mathbb{C}}(e_k))$$

de deux façons différentes. Tout d'abord, à partir de (5.5), on a immédiatement que (5.12) vaut

$$(5.13) \quad f_* e_k - \omega_{kl} f_* \bar{e}_l - n_{kl} f_* \partial/\partial t_l$$

et on utilise ensuite (5.10) et (5.11) pour obtenir une première expression explicite de (5.12), à savoir

$$(5.14) \quad \begin{aligned} & (\bar{\partial}_k \bar{h}_j - \omega_{ki} \partial_i \bar{h}_j) e_j + (\bar{\partial}_k h_j - \omega_{ki} \partial_i h_j) \bar{e}_j \\ & + \left(\bar{\partial}_k g_j + a_k^l \partial_{t_l} g_j - \bar{\partial}_k \bar{h}_l a_l^j - \bar{\partial}_k h_l \bar{a}_l^j \right. \\ & \quad \left. - \omega_{ki}(\partial_i g_j + \bar{a}_i^l \partial_{t_l} g_j - \partial_i h_l \bar{a}_l^j - \partial_i \bar{h}_l a_l^j) - n_{ki} \partial_{t_i} g_j \right) \frac{\partial}{\partial t_j}. \end{aligned}$$

Mais par ailleurs, par définition de $\alpha_{\mathbb{C}}$, et en appliquant (5.4) et (5.6), il doit exister $v = v_i e_i$ tel que (5.12) vaille

$$(5.15) \quad v_i e_i - v_i \alpha_{il} \bar{e}_l - v_i p_{il} \partial / \partial t_l.$$

Voilà la deuxième expression de (5.12). En comparant (5.14) et (5.15), on tombe sur (5.8) et (5.9). \square

II. DÉFORMATIONS À TYPE CONSTANT

Dans toute cette partie, on fixe une structure polarisée T , et on utilise librement les notations associées, comme (1.2), (2.3), (2.4).

6. EQUATIONS D'INTÉGRABILITÉ

Soit T' une déformation à type constant de T . On la code par

$$(6.1) \quad \omega = \omega_{ij} e_i^* \otimes \bar{e}_j.$$

La proposition suivante exprime en fonction des ω_{ij} les différentes intégrabilités de T' .

Proposition 6.1. *La structure presque CR polarisée T' est*

(i) *transversalement intégrable si et seulement si, pour tout i et j entiers compris entre 1 et p , et tout k compris entre 1 et d , on a*

$$(6.2) \quad ((\bar{\partial}_j + a_j^l \partial_{t_l}) \omega_{il} - (\bar{\partial}_i + a_i^l \partial_{t_l}) \omega_{jl}) \bar{e}_l + [\omega_{il} \bar{e}_l, \omega_{jl} \bar{e}_l] = 0$$

et

$$(6.3) \quad \partial_{t_k} \omega_{ij} = 0.$$

(ii) *intégrable si et seulement si, pour tout i et j entre 1 et p , on a (6.2) et*

$$(6.4) \quad \omega_{ik} [e_j, \bar{e}_k] = \omega_{jk} [e_i, \bar{e}_k].$$

Ainsi T' est polarisée si et seulement si elle vérifie (6.2), (6.3) et (6.4).

Preuve. (i) Il faut vérifier l'involutivité de $(T')^{\mathbb{C}}$. A partir de (2.4), de (3.1) et du lemme (3.3), on voit qu'il suffit de vérifier que

$$(6.5) \quad L_{ij} = [e_i - \omega(e_i), e_j - \omega(e_j)] \in (T')^{\mathbb{C}}$$

et

$$(6.6) \quad M_{ik} = [e_i - \omega(e_i), \partial / \partial t_k] \in N_{\mathbb{C}}.$$

Maintenant (6.5) est vérifiée si et seulement si

$$L_{ij}^{1,0} = -\omega(L_{ij}^{0,1})$$

ce qui, en utilisant (3.14), donne

$$(6.7) \quad L_{ij}^{1,0} = (e_j \cdot (\omega(e_i)) - e_i \cdot (\omega(e_j)) + [\omega(e_i), \omega(e_j)]) = 0.$$

Il suffit maintenant de développer (6.7) en tenant compte de (3.13) et (6.1) pour obtenir (6.2).

De même, (6.5) est équivalent à

$$M_{ik}^{1,0} = M_{ik}^{0,1} = 0$$

soit, après développement, exactement (6.3).

(ii) On veut maintenant que

$$(6.8) \quad L_{ij} = [e_i - \omega(e_i), e_j - \omega(e_j)] \in (E')^{0,1}$$

ce qui entraîne (6.7), et donc (6.2); mais aussi

$$(6.9) \quad L_{ij}^{N_{\mathbb{C}}} = 0.$$

Un calcul direct donne alors

$$(6.10) \quad \begin{aligned} L_{ij}^{N_{\mathbb{C}}} &= [e_j, \omega(e_i)]^{N_{\mathbb{C}}} - [e_i, \omega(e_j)]^{N_{\mathbb{C}}} \\ &= \omega_{ik}(e_j \cdot \bar{e}_k) - \omega(e_i) \cdot e_j - \omega_{jk}(e_i \cdot \bar{e}_k) + \omega(e_j) \cdot e_i \\ &= \omega_{ik}[e_j, \bar{e}_k] - \omega_{jk}[e_i, \bar{e}_k] \end{aligned}$$

et finalement (6.4). \square

7. FORMES ISOCHRONES

Compte-tenu de (7.3), il est tentant de travailler avec des formes ω indépendantes de t . Le lemme suivant montre que c'est possible.

Lemme 7.1. *Soient (z, t) des coordonnées locales définies sur $U \subset X$. Soit ω une 1-forme complexe sur $E^{0,1}$ à valeurs dans $E^{1,0}$. On suppose que les coefficients de ω dans la base $e_i^* \otimes \bar{e}_j$ (cf. (7.1)) sont indépendants de t .*

Alors, dans tout autre système de coordonnées locales feuilletées (w, s) sur U , les coefficients de ω dans la base $f_i^ \otimes \bar{f}_j$ associée sont indépendants de s .*

Preuve. C'est un calcul sans difficulté. Les deux systèmes de coordonnées sont reliés par

$$(7.1) \quad (w, s) = (h(z), g(z, t))$$

avec h holomorphe et g de classe C^∞ . Partant de l'écriture (3.13) des e_i , et appliquant la jacobienne du changement de cartes (7.1), on obtient

$$(7.2) \quad e_i = \bar{\partial}_i \bar{h}_j \partial / \partial \bar{w}_j + (\bar{\partial}_i g_j + a_i^k \partial g_j / \partial t_k) \partial / \partial s_j.$$

Mais l'unicité du lemme 3.3 entraîne que l'on a

$$(7.3) \quad e_i = \bar{\partial}_i \bar{h}_j f_j$$

d'où, par dualité,

$$(7.4) \quad e_i^* = \bar{\partial}_j \bar{h}_i^{-1} f_j^*$$

et finalement

$$(7.5) \quad \omega = \omega_{ij} e_i^* \otimes \bar{e}_j = \omega_{ij} \bar{\partial}_k \bar{h}_i^{-1} \partial_j h_l f_k^* \otimes \bar{f}_l.$$

Comme h ne dépend pas de t , ni h^{-1} de s , on voit que les coefficients de ω dans la base $e_i^* \otimes \bar{e}_j$ sont indépendants de t si et seulement si ses coefficients dans la base $f_k^* \otimes \bar{f}_l$ sont indépendants de s . \square

Remarque. Insistons sur le fait que ce sont les *coefficients* de ω dans la base $e_i^* \otimes \bar{e}_j$ qui sont indépendants de t , pas les $e_i^* \otimes \bar{e}_j$ eux-mêmes, qui dépendent en général de t via les coefficients a_i^j de (3.13).

Plus généralement, si ω est cette fois une q -forme sur $E^{0,1}$ à valeurs dans $E^{1,0}$, on a localement

$$(7.6) \quad \omega = \omega_{i_1 \dots i_q, j} e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_q}^* \otimes \bar{e}_j$$

et dans un autre système de coordonnées (7.1),

$$(7.7) \quad \omega = \omega_{i_1 \dots i_q, j} \bar{\partial}_{k_1} \bar{h}_{i_1}^{-1} \dots \bar{\partial}_{k_q} \bar{h}_{i_q}^{-1} \partial_j h_l f_{k_1}^* \wedge \dots \wedge f_{k_q}^* \otimes \bar{f}_l.$$

De même que dans la preuve du lemme 7.1, comme h ne dépend pas de t , ni h^{-1} de s , on voit que les coefficients de ω dans la base e sont indépendants de t si et seulement si ses coefficients dans la base f sont indépendants de s .

Définition. Soit ω une q -forme sur $E^{0,1}$ à valeurs dans $E^{1,0}$. On dira que ω est *isochrone* si, dans toute écriture locale (7.6), les coefficients $\omega_{i_1 \dots i_q, j}$ sont indépendants de t .

On notera A^q le \mathbb{C} -espace vectoriel des q -formes isochrones lisses sur $E^{0,1}$ à valeurs dans $E^{1,0}$ et, comme d'habitude, A_l^q son complété pour la norme l .

Ainsi l'espace A^1 représente l'espace des déformations isochrones de T à type constant, c'est-à-dire qui vérifient l'équation (6.3). L'espace A^0 , l'espace des champs isochrones de $E^{1,0}$, va quant à lui jouer un rôle particulier, puisqu'il va nous permettre de coder les difféomorphismes dont nous allons nous servir.

Dans la preuve classique de Kuranishi de construction d'un espace versel de déformations pour les variétés compactes complexes, on utilise le fait que le groupe $\text{Diff}^l(X)$ est une variété de Banach modelée sur l'espace des champs de vecteurs de classe L_l^2 de X . De plus, si \exp désigne l'exponentielle d'une connexion linéaire fixée sur X , l'application

$$(7.8) \quad e: \xi \in W_l \subset \Omega_l^0(T) \longmapsto \exp(\Re \xi) \in \text{Diff}^l(X)$$

est une carte locale explicite en l'identité pour W_l voisinage suffisamment petit de 0.

Dans notre cas, nous avons besoin d'une application (7.0) qui *en plus* vérifie

$$(7.9) \quad e(A_l^0 \cap W_l) \subset \text{Diff}_N^l(X).$$

Nous ne savons pas si une telle application existe en général. Ceci est relié au problème de savoir si $\text{Diff}_N^l(X)$ est une variété Banachique.

Pour continuer, nous ferons donc l'hypothèse très classique suivante.

Définition. Nous dirons que E possède une *connexion invariante par holonomie* (CIH) si E possède une connexion linéaire qui induit sur $N\mathcal{F}$, via l'isomorphisme (3.2), une connexion linéaire invariante par le pseudo-groupe d'holonomie de \mathcal{F} .

Dans ces conditions, considérons une connexion obtenue sur TX en sommant une CIH sur E et une connexion linéaire quelconque sur $T\mathcal{F}$. L'exponentielle associée à une telle connexion permet de définir une application e qui vérifie (7.9).

Remarque. Le premier et le dernier exemple de la section 4 possèdent une CIH. Dans le deuxième, c'est aussi le cas si les orbites du flot sont fermées.

Il est toutefois important de noter que, contrairement au cas classique de [Ku2], les difféomorphismes obtenus ainsi ne recouvrent pas un voisinage de l'identité dans $\text{Diff}_N(X)$. En effet, dans l'écriture locale

$$(7.10) \quad e(\chi)(z, t) = (h(z), g(z, t))$$

la partie g ne dépend pas de χ mais uniquement des coefficients a_i^j .

Soit ω une déformation à type constant de T . À un difféomorphisme f préservant N , on associe la déformation à type constant

$$(7.11) \quad f \cdot \omega := (f_*\omega)^{1,0}$$

i.e. on fait agir f sur ω comme dans la proposition 5.1 (notre $f_*\omega$ n'est rien d'autre que le $\alpha_{\mathbb{C}}$ de la proposition 5.1); mais nous ne gardons que la partie $(1, 0)$ de $f_*\omega$ afin de retomber sur une déformation à type constant.

Géométriquement, cela signifie la chose suivante. Nous ne regardons pas l'action de f sur E , puisqu'elle ne préserve pas en général E (il faudrait sinon travailler avec le groupe des difféomorphismes préservant N et E ce qui poserait bien des problèmes dans la suite - en particulier car il est souvent trop petit); nous regardons l'action de f sur le fibré quotient TX/N , identifié à E via la projection naturelle (3.2). En d'autres termes, même si f ne préserve pas E , il préserve $N\mathcal{F}$ et modifie la structure complexe sur $N\mathcal{F}$. Mais comme nous avons une identification fixe entre E et $N\mathcal{F}$, tout cela permet de définir sans ambiguïté la déformation à type constant induite par f .

Maintenant l'intérêt est que cette action préserve les formes isochrones.

Lemme 7.2. *Soit $f \in \text{Diff}_N(X)$ et soit $\omega \in A^1$. Alors la déformation à type constant $f \cdot \omega$ est isochrone.*

Preuve. De par la définition (7.11), la forme $f \cdot \omega$ est donnée localement par la formule (5.8). Comme ω est isochrone et que h (une des composantes de f , cf. (5.2)) est indépendante de t , on voit que les coefficients de $f \cdot \omega$ sont indépendants de t , i.e. que cette forme est isochrone. \square

En particulier, en combinant (7.11) et (7.8), on obtient une application \mathbb{C} -analytique

$$(7.12) \quad (\chi, \omega) \in A_{l+1}^0 \cap W_{l+1} \times A_l^1 \longmapsto e(\chi) \cdot \omega = (e(\chi)_*\omega)^{1,0} \in A_l^1.$$

On remarque en effet que l'application e est \mathbb{C} -analytique de même que l'application $*$ (cf. [Ku2]) et la projection sur A_l^1 .

8. L'OPÉRATEUR $\bar{\partial}$

Soit T' une déformation à type constant de T codée par ω . Supposons que T' soit transversalement intégrable. Alors ω est isochrone. De plus l'équation (6.2) se simplifie en

$$(8.1) \quad (\bar{\partial}_j \omega_{il} - \bar{\partial}_i \omega_{jl}) \bar{e}_l + [\omega_{il} \bar{e}_l, \omega_{jl} \bar{e}_l] = 0$$

qu'il est tentant, par comparaison avec le cas classique, de simplifier en

$$(8.2) \quad \bar{\partial}\omega + [\omega, \omega] = 0.$$

Ceci signifie d'abord que l'on pose

$$(8.3) \quad [\omega, \alpha] := -\frac{1}{2} e_i^* \wedge e_j^* \otimes [\omega(e_i), \alpha(e_j)].$$

Ainsi (8.3) appliquée à la paire de vecteurs (e_j, e_i) donne (8.2).

Remarque. Ce crochet est égal à $-1/2$ -fois celui de Kuranishi, d'où la différence dans les formules d'intégrabilité.

Ceci suppose ensuite qu'on ait en coordonnées locales (en utilisant (6.1))

$$(8.4) \quad \bar{\partial}\omega := \bar{\partial}_j \omega_{il} e_j^* \wedge e_i^* \otimes \bar{e}_l.$$

On peut étendre facilement cette formule à tout

$$(8.5) \quad \chi = \chi_i \bar{e}_i \in A^0$$

en écrivant en coordonnées locales

$$(8.6) \quad \bar{\partial}\chi := \bar{\partial}_j \chi_i e_j^* \otimes \bar{e}_i$$

et à tout $\omega \in A^q$, décomposé selon (8.6)

$$(8.7) \quad \bar{\partial}\omega := \bar{\partial}_j \omega_{i_1 \dots i_q, l} e_j^* \wedge e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_q}^* \otimes \bar{e}_l.$$

On a

Lemme 8.1. *Les équations (8.4), (8.6) et (8.7) définissent globalement des opérateurs*

$$(8.8) \quad \bar{\partial}: A^q \longrightarrow A^{q+1}.$$

De plus, ces opérateurs forment une suite exacte

$$(8.9) \quad 0 \longrightarrow H^0 \longrightarrow A^0 \xrightarrow{\bar{\partial}} A^1 \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}} A^p \longrightarrow 0$$

où H^0 est l'espace vectoriel des champs holomorphes de $E^{1,0}$.

Preuve. Vérifions par calcul que $\bar{\partial}$ est globalement défini pour les champs. Pour cela, on se place dans un nouveau système de coordonnées (7.1). Soit χ un élément de A^0 . On tire de (8.5) et (7.3) la formule

$$(8.10) \quad \chi = \chi_i \partial_i h_j \bar{f}_j$$

d'où, par (8.6)

$$(8.11) \quad \begin{aligned} \bar{\partial}\chi &= \bar{\partial}_l(\chi_i \partial_i h_j) f_l^* \otimes \bar{f}_j \\ &= \bar{\partial}_m \chi_i \bar{\partial}_l \bar{h}_m^{-1} \partial_i h_j f_l^* \otimes \bar{f}_j \end{aligned}$$

en utilisant le fait que h est holomorphe. Mais (7.5) implique que cette formule coïncide avec (8.6). Ceci montre que $\bar{\partial}$ est globalement défini de A^0 dans A^1 .

Pour étendre la définition de $\bar{\partial}$ à A^q pour $q > 0$, il suffit d'utiliser la formule de Cartan. Ainsi, pour une 1-forme ω , on peut définir globalement $\bar{\partial}$ en posant, pour ξ et η des champs de $E^{0,1}$,

$$(8.12) \quad \bar{\partial}\omega(\xi, \eta) = -(\bar{\partial}(\omega(\xi)))\eta + (\bar{\partial}(\omega(\eta)))\xi - \omega([\xi, \eta]).$$

Mais on vérifie immédiatement que cette formule, appliquée localement à (e_i, e_j) donne exactement (8.4) (à cause de (3.14)). Autrement dit, les définitions locale (8.4) et globale (8.12) sont identiques, donc le $\bar{\partial}$ de (8.4) est bien un opérateur global de A^1 dans A^2 .

Par induction, en comparant la formule de Cartan au rang q à la formule (8.7), on montre de même que (8.7) est bien un opérateur global de A^q dans A^{q+1} .

Enfin, puisque $\bar{\partial}$ vérifie la formule de Cartan, on a automatiquement

$$(8.13) \quad \bar{\partial} \circ \bar{\partial} \equiv 0$$

et on en déduit aisément la suite exacte (8.9). \square

Observons que les opérateurs (8.8), de par leur définition locale, s'étendent en des opérateurs continus

$$(8.14) \quad \bar{\partial}: A_l^q \longrightarrow A_{l-1}^{q+1}.$$

Rappelons maintenant que les espaces A_l^q sont des espaces de Hilbert. On peut donc associer à $\bar{\partial}$ son adjoint de Hilbert

$$(8.15) \quad \bar{\partial}^*: A_{l-1}^{q+1} \longrightarrow A_l^q$$

défini par

$$(8.16) \quad (\bar{\partial}\omega, \alpha)_{l-1} = (\omega, \bar{\partial}^*\alpha)_l$$

pour tout $\omega \in A_l^q$ et $\alpha \in A_{l-1}^{q+1}$.

Remarque. Nous voulons insister sur le fait que nous utilisons ici, et dans toute la suite, l'adjoint de Hilbert, et non pas l'adjoint des opérateurs différentiels. D'ailleurs, tel que nous l'avons défini, $\bar{\partial}$ n'est même pas un opérateur différentiel, puisqu'il est défini sur A^q qui n'est pas l'espace des sections lisses d'un fibré vectoriel sur X , mais l'espace des sections lisses *isochrones* d'un tel fibré, cf. la discussion en début de section 9.

9. L'OPÉRATEUR \bar{D}

Les espaces A^q définis en section 8 ne sont pas des espaces de sections d'un fibré vectoriel. En fait, soit

$$(9.1) \quad \Omega^q(E^{0,1}) \otimes E^{1,0}$$

le fibré des q -formes sur $E^{0,1}$ à valeurs dans $E^{1,0}$. On voit que A^q est un sous-espace strict de l'espace des sections de $\Omega^q(E^{0,1}) \otimes E^{1,0}$. Plus précisément, il s'agit du sous-espace des sections isochrones.

De ce fait, l'opérateur $\bar{\partial}$ de la section 8, défini sur les A^q n'est pas un opérateur différentiel. On peut toutefois remédier à ce problème en l'étendant en un opérateur différentiel agissant sur les sections de $\Omega^q(E^{0,1}) \otimes E^{1,0}$. Pour cela, on dénote par $A^q(t)$ ces espaces de sections et on pose pour

$$(9.2) \quad \chi = \chi_i \bar{e}_i \in A^0(t)$$

l'opérateur

$$(9.3) \quad \bar{\partial}\chi = (e_j \cdot \chi_i) e_j^* \otimes \bar{e}_i \in A^1(t)$$

qu'on étend par la formule de Cartan (8.12) aux p -formes. Observons que (9.3) redonne (8.6) lorsque χ est isochrone.

Lemme 9.1. *L'opérateur défini en (9.3) est globalement défini et induit une suite exacte*

$$(9.4) \quad 0 \longrightarrow H^0(t) \longrightarrow A^0(t) \xrightarrow{\bar{\partial}} A^1(t) \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}} A^p(t) \longrightarrow 0$$

où $H^0(t)$ est l'espace vectoriel des champs C^∞ de $E^{1,0}$ holomorphes en la variable z .

Preuve. C'est une adaptation directe du lemme 8.1. \square

L'opérateur ainsi étendu est alors un opérateur différentiel d'ordre 1. Toutefois, il n'est pas elliptique, et le complexe (9.4) n'est pas non plus elliptique.

On peut pourtant associer à $\bar{\partial}$ un opérateur induisant un complexe elliptique. Pour cela, on considère le fibré $\Omega^q(T^\mathbb{C}) \otimes E^{1,0}$ des q -formes sur $T^\mathbb{C}$ à valeurs dans $E^{1,0}$. Soit \mathcal{A}^q l'espace des sections globales lisses de $\Omega^q(T^\mathbb{C}) \otimes E^{1,0}$. On définit localement, pour

$$(9.5) \quad \chi = \chi_i \bar{e}_i \in \mathcal{A}^0 = A^0(t)$$

l'opérateur

$$(9.6) \quad \bar{D}\chi := \bar{\partial}_k \chi_i e_k^* \otimes \bar{e}_i + \partial_{t_k} \chi_i dt_k \otimes \bar{e}_i.$$

Le premier terme du membre de droite n'est rien d'autre que le $\bar{\partial}$ défini en (9.3).

Lemme 9.2. *L'opérateur local \bar{D} de la formule (9.6) est un opérateur globalement défini.*

Preuve. Elle est tout-à-fait similaire à celle du lemme 8.1. On se place dans un nouveau système de coordonnées (8.1). Soit χ un élément de \mathcal{A}^0 décomposé comme en (9.5). En utilisant le fait que f_j^* est nulle sur $T^\mathbb{C}$, on trouve que

$$(9.7) \quad dt_k = \bar{\partial}_j g_k^{inv} f_j^* + \partial_{s_j} g_k^{inv} ds_j$$

où

$$(9.8) \quad (z, t) = (h^{-1}(w), g^{inv}(w, s)).$$

Couplé à (8.10), (9.7) permet de calculer

$$(9.9) \quad \begin{aligned} \bar{D}(\chi) &= \bar{\partial}_k(\chi_i \partial_i h_j) f_k^* \otimes \bar{f}_j + \partial_{s_k}(\chi_i \partial_i h_j) ds_k^* \otimes \bar{f}_j \\ &= \bar{\partial}_m \chi_i (\bar{\partial}_k h_m^{-1} f_k^* \otimes \partial_i h_j \bar{f}_j) \\ &\quad + \partial_{t_m} \chi_i (\bar{\partial}_k g_m^{inv} f_k^* + \partial_{s_k} g_m^{inv} ds_k^*) \otimes \partial_i h_j \bar{f}_j \end{aligned}$$

ce qui donne, en tenant compte de (7.3), (7.4) et (9.7), exactement la définition (9.6). \square

Comme dans la preuve du lemme 8.1, on étend ensuite \bar{D} aux autres \mathcal{A}^q en utilisant la formule de Cartan et on obtient une suite exacte

$$(9.10) \quad 0 \longrightarrow H^0 \longrightarrow \mathcal{A}^0 \xrightarrow{\bar{D}} \mathcal{A}^1 \xrightarrow{\bar{D}} \dots \xrightarrow{\bar{D}} \mathcal{A}^p \longrightarrow 0.$$

Lemme 9.3. *Le complexe (9.10) est un complexe elliptique.*

Preuve. On calcule la suite associée de symboles. Soit $(z, t, v) \in T^*X$. En utilisant la décomposition

$$(9.11) \quad v = v^{1,0} \oplus v^{0,1} \oplus v^{N_{\mathbb{C}}} \in E^{1,0} \oplus E^{0,1} \oplus N_{\mathbb{C}} = T_{\mathbb{C}}X$$

on vérifie que le symbole de \bar{D} appliqué à un élément ω de $\Omega^q(T^*X) \otimes E^{1,0}$ en (z, t, v) vaut

$$(9.12) \quad (v^{1,0} + v^{N_{\mathbb{C}}}) \wedge \omega.$$

On vérifie facilement, à partir de (9.12), l'exactitude de la suite (9.10). \square

On notera que l'opérateur \bar{D} restreint à \mathcal{A}^q est exactement l'opérateur $\bar{\partial}$.

Remarque. On notera par contre que l'opérateur local $\partial_t = \bar{D} - \bar{\partial}$ n'est pas bien défini globalement. Ceci est lié au fait qu'on n'a pas en général de décomposition locale $d = \partial + \bar{\partial} + \partial_t$.

10. MODÈLE LOCAL DE L'ESPACE DES DÉFORMATIONS À TYPE CONSTANT TRANSVERSALEMENT INTÉGRABLES ET DE L'ESPACE DES FEUILLETAGES TRANSVERSALEMENT HOLOMORPHES À TYPE DIFFÉRENTIABLE FIXÉ

Nous sommes maintenant en mesure de décrire localement l'espace des déformations à type constant transversalement intégrables et celui des feuilletages transversalement holomorphes à type différentiable fixé.

Soit \mathcal{T}_{tc}^l l'ensemble des structures presque CR polarisées transversalement intégrables de classe L^2_l à E et à N fixés. C'est un sous-espace \mathbb{C} -analytique de la variété de Banach \mathcal{E}_{tc}^l . Via le corollaire 2.2 et la proposition 6.1, il s'identifie localement en T à un voisinage de 0 dans

$$(10.1) \quad \{\omega \in A_l^1 \mid \bar{\partial}\omega + [\omega, \omega] = 0\}.$$

On pose

$$(10.2) \quad \Phi_l: \omega \in A_l^1 \longmapsto (\bar{\partial}\omega + [\omega, \omega], \bar{\partial}^*\omega) \in A_{l-1}^2 \times A_{l+1}^0$$

et

$$(10.3) \quad K_l = \Phi_l^{-1}(0, 0).$$

Décomposons enfin

$$(10.4) \quad A_l^0 = H^0 \oplus (A_l^0)^\perp$$

et posons

$$(10.5) \quad \Xi_l: (\chi, \omega) \in (A_{l+1}^0)^\perp \cap W_{l+1} \times K_l \longmapsto e(\chi) \cdot \omega \in \mathcal{T}_{tc}^l.$$

Nous pouvons énoncer le théorème de structure locale de \mathcal{T}_{tc}^l .

Théorème 10.1. *Supposons que T possède une CIH. Alors,*

- (i) *Au voisinage de 0, l'espace K_l est un ensemble analytique de dimension finie.*
- (ii) *L'application Ξ_l est un isomorphisme \mathbb{C} -analytique local en $(0, 0)$.*

Ainsi un voisinage de 0 dans \mathcal{T}_{tc}^l , c'est-à-dire un voisinage de T dans l'espace analytique des déformations à type constant de T transversalement intégrables est isomorphe analytiquement à un voisinage de $(0, 0)$ dans le produit de K_l par l'espace vectoriel $(A_l^0)^\perp$.

De surcroît, rappelons que $\text{Diff}_N^{l+1}(X)$ agit analytiquement sur \mathcal{T}_{tc}^l et que, si ω est un point de K_l , l'image $\Xi_l((A_{l+1}^0)^\perp \cap W_{l+1}, \omega)$ est incluse dans l'orbite de ω pour cette action. On a donc

Corollaire 10.2. *L'espace analytique K_l est une section locale analytique en T de l'action de $\text{Diff}_N^{l+1}(X)$ sur \mathcal{T}_{tc}^l .*

Par section locale analytique en T , nous entendons un espace analytique plongé qui rencontre toutes les orbites de l'action passant suffisamment près de T en au moins un point (mais pas forcément unique).

Ainsi toute structure CR transversalement intégrable proche de 0 est isomorphe à un point de K_l . Plus encore,

Corollaire 10.3. *Soit L un espace analytique et soit $(\omega_t)_{t \in L}$ une famille analytique de déformations L_l^2 transversalement intégrables à type constant de T , i.e. l'application*

$$(10.6) \quad t \in L \longmapsto \omega_t \in A_l^1$$

est analytique. On suppose que T admet une CIH.

Alors il existe un germe d'application analytique en $0 \in L$ (point tel que $\omega_0 = 0$)

$$(10.7) \quad f: (L, 0) \longrightarrow (K_l, 0)$$

*telle que les germes de L en 0 d'une part et du pull-back f^*K_l en 0 d'autre part soient isomorphes.*

Preuve. C'est une conséquence immédiate du théorème 10.1 et du fait que Ξ_l est analytique.

□

Il faut voir ce corollaire comme un équivalent de la propriété classique de complétude de la théorie des déformations de Kodaira-Spencer.

La preuve du théorème 10.1 est donnée en section 12, à l'aide des préliminaires de la section 11.

Enfin, notons que le contenu du théorème 10.1 peut être transposé au cas des feuilletages transversalement holomorphes. En effet, d'après le corollaire 3.2, il existe une bijection entre \mathcal{T}_{tc} et l'ensemble des feuilletages transversalement holomorphes tangents à N . Convenons de dire qu'un tel feuilletage est de classe L_l^2 si la structure transverse est de classe L_l^2 (le feuilletage étant quant à lui supposé C^∞). Ainsi l'ensemble des feuilletages L_l^2 s'identifie à \mathcal{T}_{tc}^l .

On peut maintenant énoncer

Théorème 10.3. *Soit \mathcal{F} un feuilletage transversalement holomorphe de classe L_l^2 sur X . On suppose qu'il existe une structure CR polarisée T sur X de feuilletage associé \mathcal{F} . On suppose enfin que T admette une CIH. Alors l'ensemble des feuilletages transversalement holomorphes de classe L_l^2 sur X proches de \mathcal{F} et difféomorphes à \mathcal{F} forme un \mathbb{C} -espace analytique localement isomorphe à $K_l \times (A_{l+1}^0)^\perp$.*

Preuve. Le corollaire 3.2 affirme que l'ensemble des feuilletages transversalement holomorphes de classe L_l^2 sur X difféomorphes à \mathcal{F} est en bijection avec \mathcal{T}_{tc}^l . On applique le théorème 10.1. \square

Qui plus est, on retrouve la propriété de complétude 10.2. Ainsi K_l est un espace “complet” pour le feuilletage transversalement holomorphe \mathcal{F} .

Il est intéressant de comparer ce théorème avec les résultats classiques de [EK-N] et [Gi] sur les déformations de feuilletages transversalement holomorphes à type différentiable fixe. Dans [Gi] –qui contient les énoncés les plus généraux–, on montre un théorème de versalité sous les hypothèses suivantes:

- i) Il existe une CIH sur le fibré normal.
- ii) Un certain opérateur différentiel est à image fermée.

On voit donc que notre théorème peut être considéré comme un analogue du résultat de versalité cité. D'une part, nous pouvons nous passer de l'hypothèse ii), ce qui représente un gain indéniable, ce type d'hypothèse étant très difficile à vérifier en pratique. Mais d'autre part, nous n'avons pas la versalité, simplement la complétude, et nous devons supposer que le feuilletage base admette une structure CR polarisée.

En ce sens, les deux énoncés ne sont pas exactement comparables.

L'absence de versalité n'est d'ailleurs pas sans conséquence. Il en résulte que nous ne savons pas si le germe de K_l est *unique*. Ainsi la dépendance de K_l en l n'est pas claire (voir cependant le corollaire 15.3), de même que la dépendance en T de l'énoncé 10.3.

Pour résumer, il faut donc comprendre les théorèmes 10.1 et 10.3 comme des énoncés affirmant l'existence d'un espace complet de *dimension finie*, c'est-à-dire comme des énoncés de *rigidité*.

11. L'OPÉRATEUR Δ

Classiquement, les constructions d'espaces de modules locaux “à la Kuranishi” nécessite l'introduction d'un opérateur elliptique dont le noyau est l'espace tangent à l'espace en question, sa dimension finie provenant ainsi directement de l'ellipticité de l'opérateur.

Dans notre cas, cela supposerait d'utiliser le laplacien associé à \bar{D} . Cependant, ce choix entraîne beaucoup de problèmes. En effet, ce laplacien ne va pas en général respecter les espaces A^q . Cela provient du fait qu'il faut pour le construire choisir une métrique riemannienne sur X ; et qu'il faudrait pour qu'il préserve les formes isochrones, que la métrique soit elle-même isochrone, c'est-à-dire invariante par l'holonomie du feuilletage transversalement holomorphe. Mais une telle métrique n'existe pas forcément, il faut supposer le feuilletage riemannien. C'est l'hypothèse faite par exemple dans [EK-N] où le même problème se pose (cf. section 10).

Pour se passer de cette hypothèse supplémentaire, nous allons travailler avec l'opérateur

$$(11.1) \quad \Delta := \bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial}: A_l^q \longrightarrow A_l^q$$

qui, rappelons-le, est construit à partir de l'adjoint *hilbertien* de $\bar{\partial}$. Ce n'est pas un opérateur différentiel, juste un opérateur linéaire entre espaces de Hilbert. Nous allons montrer qu'il est Fredholm, notion bien connue pour être en quelque sorte l'équivalent pour les opérateurs linéaires de l'ellipticité pour les opérateurs différentiels. Bien sûr, cela va nous priver des résultats de régularité des opérateurs différentiels elliptiques, ce qui n'est pas sans conséquence pour passer des structures de classe L_l^2 aux structures C^∞ , mais globalement cela ne va changer grand chose.

Proposition 11.1. *L'opérateur Δ est un opérateur de Fredholm auto-adjoint.*

Preuve. L'opérateur Δ est de façon évidente auto-adjoint, si bien qu'il suffit de montrer que son noyau est de dimension finie. Ceci implique en effet que son conoyau est de dimension finie, et donc que son image est fermée (cf. [Pa]).

Maintenant, $\omega \in A_l^q$ est dans le noyau de Δ si et seulement si

$$(11.2) \quad \bar{\partial}\omega = \bar{\partial}^*\omega = 0.$$

Soit Ω_{inv}^q le faisceau des germes de q -formes sur $E^{0,1}$ à valeurs dans $E^{1,0}$, qui soient isochrones et $\bar{\partial}$ -fermées. L'équation (11.2) entraîne

$$(11.3) \quad \text{Ker } \Delta \subset H^0(X, \Omega_{inv}^q).$$

Il suffit donc de montrer que ce groupe est de dimension finie. Ce qui est le contenu du lemme 11.2 suivant, qui conclut donc la preuve. \square

Lemme 11.2. *Les groupes de cohomologie $H^0(X, \Omega_{inv}^q)$ sont de dimension finie.*

Preuve. C'est un résultat classique, qu'on peut trouver dans [D-K] ou [G-M]. Alternativement, on le retrouve facilement en notant que, si Ω^q désigne le faisceau des germes

de q -formes sur $T^{\mathbb{C}}$ à valeurs dans $E^{1,0}$, qui sont isochrones et $\bar{\partial}$ -fermées, alors l'inclusion naturelle

$$(11.4) \quad \Omega_{inv}^q \subset \Omega^q$$

induit une inclusion des groupes de cohomologie

$$(11.5) \quad H^0(X, \Omega_{inv}^q) \subset H^0(X, \Omega^q).$$

Or, on obtient, à partir de (9.10), une résolution

$$(11.6) \quad 0 \longrightarrow \Omega^q \longrightarrow \Omega^q(T^{\mathbb{C}}) \otimes E^{1,0} \xrightarrow{\bar{D}} \Omega^{q+1}(T^{\mathbb{C}}) \otimes E^{1,0} \xrightarrow{\bar{D}} \dots$$

qui est elliptique par le lemme 9.2. \square

Remarque. Il est bien connu que les groupes $H^i(X, \Omega_{inv}^q)$ peuvent être de dimension infinie pour $i > 0$.

Comme conséquence de la proposition 11.1, il existe un opérateur

$$(11.7) \quad G: A_l^q = \text{Ker } \Delta \oplus \text{Im } \Delta \longrightarrow \text{Im } \Delta$$

tel que l'on ait

$$(11.8) \quad G\Delta(\omega) = \Delta G(\omega) = \omega_1 \quad \text{pour } \omega = \omega_0 \oplus \omega_1 \in \text{Ker } \Delta \oplus \text{Im } \Delta.$$

12. PREUVE DU THÉORÈME 10.1

Nous prouvons d'abord le (i). L'application Φ_l définie en (10.2) est quadratique, de partie linéaire en 0 égale à

$$(12.1) \quad \omega \in A_l^1 \longmapsto (\bar{\partial}\omega, \bar{\partial}^*\omega) \in A_{l-1}^2 \times A_{l+1}^0.$$

Elle est donc analytique en 0, de différentielle donnée par (12.1); et dès lors, par (10.3), K_l est un espace analytique, éventuellement de dimension infinie, cf. [Do1]. Mais, par (12.1), l'espace tangent de Zariski de K_l en 0 est le noyau de l'opérateur Δ appliqué aux 1-formes, qui est de dimension finie par la proposition 11.1.

Nous prouvons maintenant le (ii). L'action de $\text{Diff}_N^{l+1}(X)$ sur la variété de Banach A_l^1 est analytique (cf. [Do1]). De plus l'application e définie en (7.8) –essentiellement l'exponentielle pour une métrique riemannienne sur X – est analytique. Il en est donc de même de Ξ_l . Etendons Ξ_l à

$$(12.2) \quad \tilde{\Xi}_l: (\chi, \omega) \in (A_{l+1}^0)^\perp \cap W_{l+1} \times \text{Ker } \bar{\partial}^* \longmapsto e(\chi) \cdot \omega \in A_l^1.$$

Calculons sa différentielle en $(0, 0)$. On a

Lemme 12.1. *La différentielle de $\tilde{\Xi}_l$ en $(0, 0)$ est égale à*

$$(12.3) \quad d_{(0,0)} \tilde{\Xi}_l(\xi, \alpha) = \alpha - \bar{\partial}\xi.$$

Preuve. On se place en cartes locales. Sachant que, d'après (3.13) et (7.8), on a, pour s petit,

$$(12.4) \quad e(s\chi_i e_i)(z, t) \simeq (z_1 + s\chi_1, \dots, z_p + s\chi_p, t_1 + s\chi_i \bar{a}_{i1}, \dots, t_d + s\chi_i \bar{a}_{id})$$

où le signe \simeq signifie égalité à l'ordre un en s , on en déduit que la formule (5.8), sous l'hypothèse

$$\alpha_s := e(s\chi) \cdot \omega$$

s'écrit en cartes locales à l'ordre 1 en s

$$(12.5) \quad e(s\chi) \cdot \omega \simeq \omega - s\bar{\partial}\chi$$

et donc la différentielle de Ξ_l en $(0, 0)$ est (12.3). \square

Il suffit maintenant de montrer que (12.3) est inversible. Il s'ensuivra que $\tilde{\Xi}_l$ est un isomorphisme analytique local, d'après la version du théorème d'inversion locale de [Do2]. Et par restriction aux structures transversalement intégrables, il en sera de même de Ξ_l . La preuve du théorème 10.1 se termine donc avec le

Lemme 12.2. *La différentielle (12.3) est inversible.*

Preuve. Considérons l'application

$$(12.6) \quad \Gamma: \alpha \in A_l^1 \longmapsto (-G\bar{\partial}^* \alpha, \alpha - \bar{\partial}G\bar{\partial}^* \alpha) \in A_{l+1}^0 \times A_l^1.$$

On voit que la première composante appartient en fait à $\text{Im } \Delta$, c'est-à-dire à $(A_{l+1}^0)^\perp$. De plus, on a

$$(12.7) \quad \begin{aligned} \bar{\partial}^*(\alpha - \bar{\partial}G\bar{\partial}^* \alpha) &= \bar{\partial}^* \alpha - \Delta G\bar{\partial}^* \alpha \\ &= \Delta G\bar{\partial}^* \alpha - \Delta G\bar{\partial}^* \alpha = 0 \end{aligned}$$

car $\text{Im } \bar{\partial}^*$ est orthogonal au noyau de Δ (qui n'est autre que le noyau de $\bar{\partial}$ puisque nous sommes sur les 0-formes), donc inclus dans l'image de Δ , ce qui conclut par (11.8).

Dès lors, la deuxième composante de Γ est à valeurs dans $\text{Ker } \bar{\partial}^*$. Enfin, on a

$$(12.8) \quad \begin{aligned} \Gamma \circ d_{(0,0)} \tilde{\Xi}_l(\xi, \alpha) &= \Gamma(\alpha - \bar{\partial}\xi) \\ &= (G\Delta\xi, \alpha - \bar{\partial}\xi + \bar{\partial}G\Delta\xi) \\ &= (\xi, \alpha) \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. \square

13. MODÈLE LOCAL DE L'ESPACE DES DÉFORMATIONS À TYPE CONSTANT COMPLÈTEMENT INTÉGRABLES

Soit \mathcal{C}_{tc}^l l'ensemble des structures CR polarisées de classe L_l^2 à E et à N fixés. C'est un sous-espace \mathbb{C} -analytique de la variété de Banach \mathcal{E}_{tc} . Via le corollaire 2.2 et la proposition 6.1, il s'identifie localement en T à un voisinage de 0 dans

$$(13.1) \quad \{\omega \in A_l^1 \mid \bar{\partial}\omega + [\omega, \omega] = 0 \text{ et vérifie (6.4)}\}.$$

Remarquons que, si l'on pose

$$(13.2) \quad F_l = \{\omega \in A_l^1 \mid \omega \text{ satisfait (6.4)}$$

on définit ainsi un sous-espace vectoriel fermé de A_l^1 tel que, via les identifications (13.1) et (10.1),

$$(13.3) \quad \mathcal{C}_{tc}^l = \mathcal{T}_{tc}^l \cap F_l.$$

Posons enfin

$$(13.4) \quad K_l^0 := \pi_{K_l} \circ \Xi_l^{-1}(F_l) = \pi_{K_l} \circ \Xi_l^{-1}(\mathcal{C}_{tc}^l)$$

où π_{K_l} désigne la projection sur K_l ; et

$$(13.5) \quad \Xi_l^0 := (\Xi_l)|_{((A_l^0)^\perp \times K_l^0)}.$$

Le théorème de structure locale de \mathcal{T}_{tc}^l s'obtient alors comme conséquence directe du théorème 10.1.

Théorème 13.1.

- (i) *Au voisinage de 0, l'espace K_l^0 est un ensemble analytique de dimension finie.*
- (ii) *L'application Ξ_l^0 est un isomorphisme \mathbb{C} -analytique local en $(0, 0)$.*

Preuve. Par (10.5), l'espace K_l^0 est la projection sur le facteur K_l de l'espace analytique $\Xi_l^{-1}(F_l)$. Il s'agit donc d'un sous-espace analytique de K_l . \square

Remarque. Il n'est pas vrai que K_l^0 soit donné comme l'intersection de K_l et de F_l . Ceci vient de ce que l'action des difféomorphismes que nous avons définie ne préserve pas l'intégrabilité complète, mais simplement l'intégrabilité transverse. Ceci ne change pas grand chose au niveau *théorique*, mais pose des problèmes pratiques: cela rend très difficile le *calcul explicite* de K_l^0 sur des exemples.

On dispose aussi des deux mêmes corollaires qu'en section 10.

Corollaire 13.2. *L'espace analytique K_l^0 est une section locale analytique en T de l'action de $\text{Diff}_N^{l+1}(X)$ sur \mathcal{C}_{tc}^l .*

Ainsi toute structure CR polarisée proche de 0 est isomorphe à un point de K_l . Plus encore,

Corollaire 13.3. *Soit L un espace analytique et soit $(\omega_t)_{t \in L}$ une famille analytique de déformations L_l^2 complètement intégrables à type constant de T , i.e. l'application*

$$(13.6) \quad t \in L \longmapsto \omega_t \in A_l^1$$

est analytique. On suppose que T admet une CIH.

Alors il existe un germe d'application analytique en $0 \in L$ (point tel que $\omega_0 = 0$)

$$(13.7) \quad f: (L, 0) \longrightarrow (K_l^0, 0)$$

*telle que les germes de L en 0 d'une part et du pull-back $f^*K_l^0$ en 0 d'autre part soient isomorphes.*

Preuve. C'est une conséquence immédiate du théorème 13.1 et du fait que Ξ_l^0 est analytique. \square

Là encore, il faut voir ce corollaire comme un équivalent de la propriété classique de complétude de la théorie des déformations de Kodaira-Spencer.

14. LE CAS LEVI-PLAT

Dans cette section, nous supposons que T est Levi-plate. On peut alors simplifier les résultats précédents. En effet, d'une part, l'équation d'intégrabilité (6.4) est automatiquement vérifiée par application de la proposition 3.4. On a donc

Lemme 14.1. *Soit T' une déformation à type constant de T . Alors T' est transversalement intégrable si et seulement si T' est complètement intégrable.*

D'autre part, comme conséquence directe de ce lemme, on voit que les espaces K_l et K_l^0 sont identiques.

Proposition 14.2. *Supposons que T admette une CIH. Alors les modèles locaux K_l des déformations à type constant transversalement intégrables et K_l^0 des déformations à type constant polarisées sont identiques.*

Ainsi le théorème 13.1 se réduit au théorème 10.1 dans le cas Levi-plat. Si l'on regarde de plus près l'action des difféomorphismes (6.9), on voit qu'elle respecte cette fois la complète intégrabilité, et donc en particulier la nullité de la forme de Levi. Au fond, toutes ces propriétés découlent du fait que la Levi platitude est une propriété de la distribution E , alors qu'en général, la forme de Levi dépend fortement de la distribution $E^{0,1}$.

Allons plus loin. La présence de deux feuilletages transverses entraîne l'existence d'un atlas produit.

Proposition 14.3. *Supposons T Levi-plate. Soit \mathcal{G} le feuilletage Levi-plat. Alors on peut trouver un atlas feuilleté pour \mathcal{F} et \mathcal{G} simultanément, i.e. un atlas dont les changements de cartes sont du type*

$$(14.1) \quad (w, s) = (h(z), g(t))$$

Preuve. On définit \mathcal{F} par une collection de submersions

$$(14.2) \quad f_i: U_i \longrightarrow \mathbb{C}^p$$

telles qu'il existe des biholomorphismes

$$(14.3) \quad \phi_{ij}: f_i(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{C}^p \longrightarrow f_j(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{C}^p$$

vérifiant

$$(14.4) \quad f_j \equiv \phi_{ij} \circ f_i \quad \text{sur } U_i \cap U_j.$$

De même, définissons \mathcal{G} par une collection de submersions

$$(14.5) \quad g_i: U_i \longrightarrow \mathbb{R}^d$$

vérifiant

$$(14.6) \quad g_j \equiv \psi_{ij} \circ g_i \quad \text{sur } U_i \cap U_j.$$

pour des difféomorphismes ψ_{ij} bien choisis.

Il suffit maintenant de prendre comme cartes feuilletées

$$(14.7) \quad x \in U_i \longmapsto (f_i(x), g_i(x)) = (z, t) \in \mathbb{C}^p \times \mathbb{R}^d$$

et on voit que les changements de cartes seront du type

$$(14.8) \quad (w, s) = (\phi_{ij}(z), \psi_{ij}(t))$$

donc du type (14.1). \square

Définition. On appellera un atlas vérifiant (14.1) un atlas *isochrone*. Les cartes qu'il contient seront aussi dites *isochrones*.

Maintenant ceci implique immédiatement le

Corollaire 14.4. *Dans une carte feuilletée isochrone, on a*

$$(14.9) \quad e_i = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}.$$

Supposons maintenant que T possède une CIH. Alors, pour $\chi \in A^0$ suffisamment petit, on déduit de (14.9) que, dans une carte feuilletée isochrone,

$$(14.10) \quad e(\chi)(z, t) = (h(z), t).$$

Ceci a pour conséquence que (7.9) devient

$$(14.11) \quad e(A_l^0 \cap W_l) \subset \text{Diff}_{E, N}^{0, l}(X)$$

où $\text{Diff}_{E, N}^{0, l}$ désigne le groupe des difféomorphismes de X de classe L_2^l qui préservent E et N et fixent les feuilles de N (c'est le sens de l'exposant 0 dans la notation). Donc (7.12) est en fait

$$(14.12) \quad e(\chi) \cdot \omega = e(\chi)_* \omega$$

pour ω dans A^1 .

En résumé,

Corollaire 14.5. *Supposons T Levi-plate et admettant une CIH. Alors l'application e est à valeurs dans les difféomorphismes de X fixant E et N et l'action (7.12) coïncide avec l'action standard des difféomorphismes.*

Ainsi, dans le cas Levi-plat, on identifie deux structures polarisées proches si elles sont CR-isomorphes et non pas si elles induisent le même feuilletage transversalement holomorphe.

15. LE CAS DES SUSPENSIONS À BASE COMPLEXE

Dans cette situation, on va pouvoir donner une très jolie description de l'espace K_l . Commençons par observer le

Lemme 15.1. *Soit X une suspension à base complexe B . Alors la structure polarisée induite admet une CIH.*

Preuve. Notons π la submersion de X sur B . Il découle de la construction rappelée en section 4 que

$$(15.1) \quad E \simeq \pi^* TB.$$

Il suffit maintenant de prendre une connexion quelconque sur TB et de la relever à E via (15.1). \square

Enonçons le

Théorème 15.2. *Soit X une submersion à base complexe. Soit K_l l'espace local de structures polarisées proches de T .*

Alors K_l s'identifie naturellement à l'espace de Kuranishi de la base B .

Le mot “naturellement” prendra tout son sens dans la preuve. Mais avant de passer à celle-ci, donnons un exemple frappant d’application du théorème.

Feuilletages linéaires sur le tore T^3 . Soit \mathbb{E}_τ la courbe elliptique de module $\tau \in \mathbb{H}$. Soit Γ le groupe d’automorphismes du revêtement

$$(15.2) \quad \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{E}_\tau.$$

Fixons un réel α et définissons la représentation

$$(15.3) \quad \rho: p \in \mathbb{Z} \simeq \Gamma \longmapsto \left([x] \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \mapsto [x + p\alpha] \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \right) \in \text{Diff}(\mathbb{S}^1).$$

La suspension

$$(15.4) \quad X = \mathbb{E}_\tau \times_\rho \mathbb{S}^1$$

est un tore réel T^3 muni d'un feuilletage \mathcal{F} par cercles et d'un feuilletage transverse \mathcal{G} dit linéaire. Si α est un rationnel p/q , alors les feuilles de \mathcal{G} sont toutes compactes et isomorphes à la même courbe elliptique \mathbb{E}_σ , un revêtement de degré q de \mathbb{E}_τ . Si α est irrationnel, toutes les feuilles de \mathcal{G} sont denses et isomorphes à \mathbb{C}^* .

Par application du théorème 15.2, l'espace K_l de déformations à type constant s'identifie à l'espace de Kuranishi de \mathbb{E}_τ , c'est-à-dire à un voisinage de τ dans le demi-plan de Poincaré \mathbb{H} .

Le point remarquable est que *cet espace de déformations est totalement indépendant de la pente α .*

Il est instructif de comparer cet espace avec celui des déformations de la structure CR E à type différentiable fixé, i.e. de l'ensemble des structures CR Levi-plates proches de E et induisant le même feuilletage.

Lorsque α est rationnel, alors cet espace s'identifie à l'espace des lacets C^∞ à valeurs dans \mathbb{H} proches du lacet constant égal à σ (cf. [Me2]).

On trouve dans [Sl] des calculs de cohomologie qui montrent que, dans le cas irrationnel, cet espace dépend des propriétés arithmétiques de α . Il est de dimension 1 lorsque α vérifie une condition diophantienne. Lorsque cette condition n'est pas vérifiée, on ne connaît pas cet espace, mais les calculs de [Sl] effectués dans un cas très proche suggèrent fortement qu'il est de dimension infinie.

Pour comprendre le lien entre [Sl] et le théorème 15.2, il suffit de se rappeler que nous ne considérons que les structures CR *polarisées* proches de E et induisant le même feuilletage. Ainsi l'espace des structures polarisées est un sous-espace parfois strict de l'espace des structures CR Levi-plates proches à type différentiable fixé.

Plus précisément, tenant compte de la proposition 3.1, on voit que, dans le cas rationnel, le fait d'être polarisée implique que toutes les feuilles de \mathcal{G} doivent être isomorphes à la même courbe elliptique. Dans l'espace des lacets précédemment décrit, on ne voit donc que les lacets constants proches de σ . Plus encore, le fait d'être polarisé entraîne que la feuille doit admettre un quotient fini d'ordre q (le dénominateur de la pente α). En d'autres termes, on ne déforme pas la feuille \mathbb{E}_σ arbitrairement, mais on déforme le revêtement $\mathbb{E}_\sigma \rightarrow \mathbb{E}_\tau$ de degré q . Voilà pourquoi l'on tombe à la fin sur un voisinage de τ dans \mathbb{H} .

Enfin, dans le cas irrationnel, les structures polarisées sont également les structures CR qui sont invariantes par le groupe Γ , donc descendantes à la courbe \mathbb{E}_τ .

Preuve du théorème 15.2. Appelons comme d'habitude J l'opérateur CR et appelons J_B l'opérateur complexe de B . La submersion π est une submersion CR au sens où elle envoie chaque feuille de \mathcal{G} holomorphiquement sur B . On peut donc choisir un modèle différentiable dans lequel

$$(15.5) \quad J = (\pi|_{\mathcal{G}})^* J_B$$

ce qu'on peut reformuler en

$$(15.6) \quad \pi^* E_B^{0,1} = E^{0,1}$$

où $E_B^{0,1}$ est le sous-fibré des champs $(0, 1)$ de J_B .

On note A_B^p l'espace des p -formes sur $E_B^{0,1}$ à valeurs dans $E_B^{1,0}$. Il résulte de (15.6) que

$$(15.7) \quad A^p = \pi^* A_B^p.$$

En effet, une p -forme isochrone sur X se relève en une p -forme isochrone Γ -invariante sur $\overline{B} \times F$. Mais sur un tel produit, le caractère isochrone signifie la constance sur les fibres F . Et une p -forme Γ -invariante et constante sur les fibres F n'est rien d'autre que le relevé d'une p -forme sur B .

Par ailleurs l'opérateur $\bar{\partial}$ descend lui aussi comme opérateur $\bar{\partial}$ de B ; et son dual fait de même.

On voit donc au final que

$$(15.8) \quad \pi_*(K_l) = \{\omega \in A_{B,l}^1 \mid \bar{\partial}\omega + [\omega, \omega] = \bar{\partial}^*\omega = 0\}.$$

On serait alors tentés de conclure directement qu'il s'agit de l'espace de Kuranishi de B en comparant (15.8) avec les définitions formellement identiques de [Ku2] et [Ku3].

Il y a toutefois un petit problème. Dans la définition de l'espace de Kuranishi l'opérateur $\bar{\partial}^*$ est le dual de l'opérateur $\bar{\partial}$ *en tant qu'opérateur différentiel*. Or dans notre cas, nous avons utilisé (cf. (8.15), (8.16) et la remarque qui suit) l'adjoint de *Hilbert*. Ce ne sont pas du tout les mêmes opérateurs!

Pour surmonter ce problème, notons tout d'abord que le groupe $\text{Diff}_{E,N}^{0,l}(X)$ consiste en des difféomorphismes qui sont constants sur les fibres F et donc se projette sur $\text{Diff}^l(B)$. En tenant compte des corollaires 13.3 et 14.5, on en déduit que l'espace π_*K_l est un espace de déformations de B complet en J_B .

Mais alors la théorie classique de Kodaira-Spencer permet de conclure que π_*K_l est isomorphe à l'espace de Kuranishi de B si nous arrivons à montrer que la dimension de son espace tangent de Zariski en J_B est égale à la dimension du premier groupe de cohomologie $H^1(B, \Theta)$ de B à valeurs dans le faisceau Θ des champs holomorphes.

Ce groupe peut se calculer, via les isomorphismes de Dolbeault et en tenant compte de (15.7), en prenant le quotient du noyau de l'opérateur $\bar{\partial}$ sur A^1 par l'image de $\bar{\partial}$ sur A^0 ; ou encore, ce qui ne change rien, par le quotient du noyau de l'opérateur $\bar{\partial}$ sur A_l^1 par l'image de $\bar{\partial}$ sur A_{l+1}^0 .

Maintenant, on montre facilement, grâce à (11.8) et (11.2), que le noyau de l'opérateur Δ sur A_l^1 coïncide exactement avec ce quotient. Or d'après (12.1), le noyau de Δ est la dimension de Zariski de K_l . Ce qui termine la preuve. \square

Corollaire 15.3. *Sous les hypothèses du théorème 15.2, l'espace K_l est indépendant de l .*

Preuve. Soient $l \neq l'$. Il suffit de composer les deux isomorphismes naturels de la preuve du théorème 15.2 pour obtenir un isomorphisme entre K_l et $K_{l'}$. \square

Corollaire 15.4. *Dans le cas particulier où T est une structure CR polarisée de codimension zéro, l'espace K_l (et l'espace K_l^0 qui lui est égal) s'identifient à l'espace de Kuranishi de la variété complexe compacte (X, T) .*

Ainsi les théorèmes 10.1 et 13.1 sont bien des généralisations du théorème de Kuranishi.

III. VARIÉTÉS CR G -POLARISÉES

Dans toute cette partie, G est un groupe de Lie réel connexe de dimension d . On notera \mathfrak{G} son algèbre de Lie et \exp_G son application exponentielle.

16. VARIÉTÉS CR G -POLARISÉES

Définition. Une variété lisse compacte X de dimension $2p + d$ est une variété CR G -polarisée si elle est munie

- (i) d'une action localement libre de G .
- (ii) d'une distribution CR E de dimension $2p$ transverse aux orbites de G et respectée par l'action.

Lorsque d vaut 0, le groupe G est réduit à un point et une variété CR G -polarisée n'est rien d'autre qu'une variété complexe.

Lorsque p vaut 0, le groupe G a même dimension que X , si bien qu'une variété CR G -polarisée est alors une variété homogène (réelle) G/Γ avec Γ réseau de G .

Ainsi cette notion est en quelque sorte une interpolation entre variété complexe et variété homogène. Nous verrons cependant dans les sections suivantes qu'elle est en fait plus proche des variétés complexes.

L'action localement libre de G induit un feuilletage réel \mathcal{F} sur X et on a une décomposition du fibré tangent

$$(16.1) \quad TX = T\mathcal{F} \oplus E.$$

De plus, la G -invariance du point (ii) signifie que

$$(16.2) \quad (g \cdot)_* E^{0,1} = E^{0,1} \quad \text{pour tout } g \in G$$

où $g \cdot$ désigne l'action de g sur X .

Proposition 16.1. *Une variété CR G -polarisée est une variété CR polarisée par $N = T\mathcal{F}$.*

Preuve. Le pseudo-groupe d'holonomie de \mathcal{F} est constitué d'éléments de G agissant sur le fibré normal. Il résulte donc de (16.2) que \mathcal{F} est transversalement holomorphe et que E est une réalisation intégrable de sa structure holomorphe transverse. On conclut par le corollaire 3.2. \square

On peut construire sur X des cartes feuilletées de la manière classique suivante. Etant donné $x \in X$ on se donne une section locale transverse au feuilletage

$$(16.3) \quad i: (\mathbb{C}^p, 0) \longrightarrow (X, x)$$

et on pose

$$(16.4) \quad (z, t) \in U \times \mathfrak{G} \longmapsto (\exp_G t) \cdot i(z) \in X.$$

Nous appellerons de telles cartes G -adaptées.

Finissons cette section en indiquant quels exemples de la section 4 sont G -polarisés.

Variétés sasakiennes. C'est l'exemple standard de structure CR G -polarisée. Ici, le groupe G est \mathbb{R} qui agit sur X via le flot du champ de Reeb défini en (4.3). Nous avons déjà vu en section 4 que ce flot préserve la structure CR.

Structures CR de codimension réelle une invariantes sous l'action d'un flot transverse. Elles sont, elles aussi et pour les mêmes raisons, automatiquement \mathbb{R} -polarisées, cf. section 4.

Feuilletages transversalement holomorphes de codimension complexe une. Nous avons vu en section 4 qu'un tel feuilletage donnait automatiquement une structure CR polarisée sur X , en choisissant une distribution E transverse. Mais cette fois une telle structure n'est pas forcément G -polarisée. D'une part, il faut que ce feuilletage provienne d'une action localement libre d'un groupe G . D'autre part, même en supposant une telle action, il faut encore que G préserve la structure CR sur E , condition qui va dépendre fortement du choix de cette distribution transverse.

Suspensions à base complexe. Elles deviennent G -polarisées lorsque la fibre F est un groupe de Lie G , forcément compact, et que la représentation ρ est à valeurs dans les translations du groupe.

17. LE G -CÔNE ET LES G -FIBRÉS PLATS

Ainsi que nous l'avons rappelé en section 4, une variété riemannienne est sasakienne si son cône riemannien (4.1) admet une structure kählerienne invariante par dilatations. Dans le cas abélien, les variétés CR G -polarisées admettent une caractérisation analogue. Pour l'énoncer, nous avons besoin de quelques définitions.

Définition. Soit X une variété lisse. On appelle G -cône de X le fibré trivial $G \times X \rightarrow X$. On le notera $\mathcal{C}_G(X)$.

Pour faire court, on appellera G -fibré un fibré principal de fibre et de groupe structural G . On rappelle qu'un G -fibré est plat s'il possède une connexion de courbure nulle. Un G -fibré plat sur une base simplement connexe est trivial [No, Ch. II, §8]. Tout G -fibré plat sur X est donc quotient du G -cône de son revêtement universel \tilde{X} .

Définition. Soit $\pi: P \rightarrow X$ un G -fibré plat sur une variété lisse X et soit $H \subset TP$ une connexion de courbure nulle. Soit J une structure complexe sur P . On dira que

- (i) J est *invariante par translations* si J est invariante par l'action naturelle de G sur les fibres de P .
- (ii) J est *orthogonale aux fibres* si

$$(17.1) \quad v \in \text{Ker } d\pi \implies Jv \in H.$$

Observons que, si P possède une structure complexe orthogonale aux fibres, les fibres de P sont *totallement réelles* dans P , i.e. pour tout $x \in X$, le fibré tangent complexe de la fibre en x est réduit à zéro:

$$(17.2) \quad T\pi^{-1}(x) \cap JT\pi^{-1}(x) = \{0\}.$$

Lorsque P est le G -cône de X , la condition d'orthogonalité aux fibres se réécrit plus simplement. Ecrivant abusivement

$$(17.3) \quad T\mathcal{C}_G(X) = TX \oplus \mathfrak{G}$$

on demande que

$$(17.4) \quad J(\mathfrak{G}) \subset TX.$$

La propriété fondamentale des variétés G -polarisées abéliennes est la suivante.

Théorème 17.1. *Soit X variété lisse compacte. On identifie X à l'hypersurface $X \times \{e\}$ de son G -cône. Soit G un groupe de Lie connexe.*

- i) *Supposons G abélien et supposons que X admette une structure CR G -polarisée (E, J) . Alors J s'étend en une structure complexe invariante par translations et orthogonale aux fibres sur $\mathcal{C}_G(X)$.*
- ii) *Réciproquement, supposons que $\mathcal{C}_G(X)$ admette une structure complexe invariante par translations et orthogonale aux fibres. Alors la structure CR induite sur X est G -polarisée et G est abélien.*

Plus généralement, on a le

Théorème 17.2. *Soit X une variété CR G -polarisée. On suppose G abélien. Soit P un G -fibré plat sur X et H une connexion plate.*

Alors il existe une structure complexe J sur P munie de H invariante par translations et orthogonale aux fibres. De surcroît, la projection naturelle

$$(17.5) \quad \pi_*: H \longrightarrow X$$

projette J sur la structure CR de X .

et le

Théorème 17.3. *Soit X variété lisse compacte. Supposons qu'il existe un G -fibré plat P sur X de connexion plate H admettant une structure complexe J invariante par translations et orthogonale aux fibres.*

*Alors la projection π_*J (cf. (17.5)) définit une structure G -polarisée sur X . De plus, G est abélien.*

Preuve des théorèmes 17.1, 17.2 et 17.3. Le théorème 17.1 est une application directe des théorèmes 17.2 (pour la partie i)) et 17.3 (pour la partie ii)) en utilisant la connexion triviale (17.3).

Commençons donc par prouver le théorème 17.2. Soit P un G -fibré plat et H une connexion plate sur G . Nous allons construire deux types de champs fondamentaux. Soit $\xi \in \mathfrak{G}$. On pose d'une part

$$(17.6) \quad (x, g) \in P \longmapsto \xi_*(x, g) := H_{(x, g)} \left(\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (\exp_G(s\xi) \cdot x) \right) \in T_{(x, g)} P$$

où $H_{(x, g)}(w)$ est le relevé horizontal en (x, g) du vecteur $w \in T_x X$; et d'autre part,

$$(17.7) \quad (x, g) \in P \longmapsto \xi^*(x, g) := \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \left(x, \exp_G(s\xi) \cdot g \right) \in T_{(x, g)} P.$$

Par définition, ξ_* est un champ horizontal, tandis que ξ^* est un champ vertical.

Appelons comme d'habitude J la structure CR. On étend J à P de la manière suivante. On pose d'une part

$$(17.8) \quad J_{(x, g)} v := H_{(x, g)} (J_x(\pi_* v))$$

pour $v \in H_{(x,g)}$ vérifiant $\pi_* v \in E$; et d'autre part

$$(17.9) \quad J\xi_* = \xi^* \quad \text{et} \quad J\xi^* = -\xi_*$$

pour $\xi \in \mathfrak{G}$. On obtient ainsi un opérateur presque complexe sur P .

Montrons qu'il est intégrable. Pour cela, notons que

$$(17.10) \quad TP^{0,1} = H^{0,1} \oplus \text{Vect}_{\mathbb{C}}\{\xi_* + i\xi^* \mid \xi \in \mathfrak{G}\}$$

où $H^{0,1}$ est le relevé horizontal de $E^{0,1}$.

Observons que $H^{0,1}$ est involutif puisque $E^{0,1}$ l'est et que la connexion est plate. Plaçons-nous localement et utilisons les champs e_i . Soit $\xi \in \mathfrak{G}$. Comme l'action de G préserve $E^{0,1}$, on a la propriété infinitésimale (cf. (4.4) et (4.6))

$$(17.11) \quad [e_j, \pi_* \xi_*] \in E^{0,1}$$

et comme par définition $\pi_* \xi_*$ est dans N , on a de plus

$$(17.12) \quad [e_j, \pi_* \xi_*] \in E^{0,1} \cap N = \{0\}$$

d'où

$$(17.13) \quad [He_j, \xi_*] = 0.$$

Maintenant, la définition (17.7) montre que ξ^* ne dépend pas des coordonnées en X . En fait, c'est immédiat si le fibré est trivial; et c'est une propriété qui passe aux quotients par un groupe discret, donc c'est vrai pour tout fibré plat. Ainsi

$$(17.14) \quad [He_j, \xi^*] = 0.$$

Enfin, on a, pour tout $\xi \in \mathfrak{G}$, et tout $\eta \in \mathfrak{G}$,

$$(17.15) \quad [\xi_*, \eta^*] = 0.$$

On conclut de (17.15), (17.14) et (17.13) et de la commutativité de G que $TP^{0,1}$ est involutif.

Les définitions (17.6) et (17.7) impliquent immédiatement que la structure complexe ainsi définie est orthogonale aux fibres. Enfin, on déduit de (17.14) et (17.15) et de la commutativité de G que

$$(17.16) \quad [\xi^*, TP^{0,1}] \subset TP^{0,1}$$

pour tout $\xi \in \mathfrak{G}$, donc que la structure J est invariante par translations. Le théorème 17.2 est démontré.

Montrons maintenant le théorème 17.3. Soit X variété lisse compacte. Supposons qu'il existe un G -fibré plat P sur X de connexion plate H admettant une structure complexe J invariante par translations et orthogonale aux fibres.

Pour tout $\xi \in \mathfrak{G}$, on définit ξ^* comme en (17.7), et on pose

$$(17.17) \quad \xi_* := J\xi^*.$$

La propriété d'orthogonalité aux fibres signifie que ξ_* est un champ horizontal. L'invariance par translations implique que les ξ_* sont G -invariants. On en déduit que

$$(17.18) \quad [\xi_*, \eta^*] = 0$$

puis, en écrivant la nullité du tenseur de Niejenhuis,

$$(17.19) \quad [\xi^*, \eta^*] = -[\xi_*, \eta_*].$$

Mais, le premier crochet est vertical, et par platitude le deuxième horizontal, donc ils sont en fait nuls. Ceci prouve que G est abélien, mais aussi que l'ensemble des champs $\pi_*\xi_*$ lorsque ξ varie dans \mathfrak{G} forme une sous-algèbre de Lie des champs de vecteurs de X isomorphe à \mathfrak{G} . Autrement dit, on définit ainsi une action de G sur X . Comme ces champs ne s'annulent pas, cette action est localement libre.

En outre, on vérifie aisément que, si l'on pose

$$(17.20) \quad \mathbb{C}H := H \cap JH$$

alors d'une part on a

$$(17.21) \quad \mathbb{C}H = \{v + JV(Jv) \mid v \in H\}$$

pour V projection verticale de $H \oplus \mathfrak{G}$ sur \mathfrak{G} ; et d'autre part, on en déduit que

$$(17.22) \quad H = \mathbb{C}H \oplus J\mathfrak{G}.$$

On peut donc définir

$$(17.23) \quad H^{0,1} := \{v + iJv \mid v \in \mathbb{C}H\}$$

et la projection

$$(17.24) \quad E^{0,1} = \pi_* H^{0,1}$$

munit X d'une structure CR transverse au feuilletage défini par l'action de G .

La propriété d'invariance par translations signifie que cette structure est invariante par l'action de G . Il s'agit donc bien d'une structure CR G -polarisée et le théorème 17.3 est démontré. \square

18. VARIÉTÉS CR G -POLARISÉES ET VARIÉTÉS COMPACTES COMPLEXE

Le but de cette section est d'associer à une variété CR G -polarisée des variétés compactes complexes.

Le premier résultat est le

Théorème 18.1. *Soit X une variété CR G -polarisée. On suppose G compact de dimension paire. Alors X est une variété compacte complexe, la structure CR sur E est induite de X et le feuilletage \mathcal{F} est holomorphe.*

Preuve. Par le fameux théorème de Samelson [Sa], G possède une structure complexe J invariante par les translations à gauche. Comme l'action de G sur X est localement libre, les champs fondamentaux de l'action

$$(18.1) \quad \xi_*(x) = \left(\frac{d}{ds}_{|s=0} (\exp(s\xi) \cdot x) \right) \quad \text{pour } \xi \in \mathfrak{G}, x \in X$$

ne s'annulent pas si bien que l'on peut définir une structure presque complexe le long des feuilles de \mathcal{F} par

$$(18.2) \quad J_{\mathcal{F}}\xi_* := (J\xi)_*.$$

Comme par ailleurs,

$$(18.3) \quad [\xi_*, \eta_*] = [\xi, \eta]_*$$

cette structure est intégrable et on munit ainsi \mathcal{F} d'une structure complexe. Maintenant, on a

$$(18.4) \quad TX = E \oplus T\mathcal{F}$$

si bien qu'on peut définir

$$(18.5) \quad J_X := J \oplus J_{\mathcal{F}}$$

sur X . Il reste à vérifier que cette structure presque complexe est intégrable. Mais localement les champs $(0, 1)$ de E sont engendrés par les e_i et les champs $(0, 1)$ de \mathcal{F} par les

$$(18.6) \quad \xi_* + i(J\xi)_* \quad \xi \in \mathfrak{G}.$$

Or, les premiers sont stables par crochet par intégrabilité de la structure CR de E , et on vient de montrer que les seconds le sont. Enfin, les crochets

$$(18.7) \quad [e_i, \xi_* + i(J\xi)_*]$$

restent $(0, 1)$ par G -invariance de $E^{0,1}$ (cf. (17.11)). Par définition cette structure est feuilletée et \mathcal{F} est donc holomorphe. Enfin, par définition, elle induit la structure J sur E . \square

Corollaire 18.2. *Si G est compact, alors X ou $X \times \mathbb{S}^1$ admet une structure complexe telle que la structure CR sur E soit induite de X et telle que le G -feuilletage \mathcal{F} de X , respectivement le $G \times \mathbb{S}^1$ -feuilletage de $X \times \mathbb{S}^1$ soit holomorphe.*

Preuve. Pour G de dimension paire, c'est exactement le théorème 18.1. Si G est de dimension impaire, alors $G \times \mathbb{S}^1$ agit localement librement sur $X \times \mathbb{S}^1$. Il suffit maintenant de transporter la structure CR de X sur $X \times \mathbb{S}^1$ en faisant agir $G \times \mathbb{S}^1$ sur $X \times \{e\} \subset X \times \mathbb{S}^1$ pour obtenir une $G \times \mathbb{S}^1$ -polarisation de $X \times \mathbb{S}^1$. On conclut de nouveau par le théorème 18.1. \square

Remarquons que la preuve du théorème 18.1 n'utilise pas la compacité et s'étend au cas où G est non compact mais admet une structure de groupe de Lie complexe, ou tout au moins une structure complexe invariante par translations à gauche. On a donc

Corollaire 18.3. *Soit X une variété CR G -polarisée. On suppose que G admet une structure complexe invariante par translations à gauche. Notons $G_{\mathbb{C}}$ cette variété complexe. Alors,*

(i) *La variété X est une variété compacte complexe $X_{\mathbb{C}}$, la structure CR sur E est induite de $X_{\mathbb{C}}$ et le feuilletage \mathcal{F} est holomorphe.*

(ii) Soit P un G -fibré principal plat sur X . Alors il existe une structure complexe sur P telle que la projection naturelle sur X soit un fibré holomorphe localement trivial de base $X_{\mathbb{C}}$, de fibre $G_{\mathbb{C}}$ et de groupe structural G .

Remarque. Pour que le (ii) soit valable, il faut supposer que le groupe structural de P agisse à gauche sur les fibres de P .

Preuve. Il nous reste uniquement à montrer le (ii). Recouvrons P de cartes locales de fibré, i.e. localement difféomorphes à $X \times G$. Comme le fibré P est plat, on peut supposer les changements de cartes du type

$$(18.8) \quad (x, g) \longmapsto (\phi(x), \psi(x) \cdot g)$$

avec ψ localement constante. On munit P localement de la structure complexe produit des cartes. Les changements de cartes (18.8) préservent cette structure complexe, puisqu'ils sont constitués d'une part de changements de cartes holomorphes de X , d'autre part de translations à gauche de G localement constantes. \square

En particulier, le corollaire 18.3 s'applique au cas G abélien de dimension paire et permet de munir tout G -fibré plat sur X d'une structure complexe. Il est particulièrement intéressant de comparer cette structure à celle donnée par le théorème 17.2.

Proposition 18.4. Soit X une variété CR \mathbb{R}^m -polarisée. Supposons m pair. Soit P un G -fibré plat sur X . Alors, la structure complexe de P donnée par le théorème 17.2 n'est pas biholomorphe à celle donnée par le corollaire 18.3.

Preuve. On constate que la structure complexe du théorème 17.1, i) est orthogonale aux fibres de $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^m}(X) \rightarrow X$; alors que celle du corollaire 18.3 est une structure de fibré holomorphe principal sur cette projection. \square

Remarque. Lorsque G vaut \mathbb{R} , il existe également deux structures complexes sur le \mathbb{R} -cône de X : celle donnée par le théorème 17.1, i) et celle donnée par le corollaire 18.2 (en passant au revêtement $X \times \mathbb{R} \rightarrow X \times \mathbb{S}^1$). Mais une lecture attentive des preuves de ces deux résultats montre qu'elles sont biholomorphes.

Dans certains cas, on peut associer à X une autre variété compacte complexe. La définition suivante est consistante avec [Sp] et [B-G].

Définition. Une variété CR G -polarisée X est dite *régulière* lorsque l'action localement libre de G sur X provient d'une action libre d'un groupe compact $H = G/\Gamma$ pour Γ réseau de G . On appellera *quotient régulier de G* un tel groupe.

Elle est dite *quasi-régulière* si l'action provient d'une action avec stabilisateurs finis d'un groupe compact $H = G/\Gamma$ pour Γ réseau de G . On appellera *quotient quasi-régulier de G* un tel groupe.

Enfin, elle est dite *irrégulière* si elle n'est pas quasi-régulière.

Proposition 18.5. *Soit X une variété CR G -polarisée régulière. Soit H un quotient régulier de G . Alors,*

- (i) *le quotient X/H est une variété compacte complexe Y .*
- (ii) *Si de plus G est de dimension paire, alors la projection $X \rightarrow Y$ est un fibré holomorphe H -principal.*

Preuve. L'action de H est libre et propre par définition, donc le quotient Y est une variété lisse. Par ailleurs, H étant quotient de G par un réseau, le feuilletage qu'il induit sur X est exactement le feuilletage \mathcal{F} . Le quotient Y s'identifie donc à l'espace des feuilles de \mathcal{F} , et la structure CR transverse G -invariante descend en une structure complexe.

Pour le (ii), on applique le théorème 18.1 à H et on note que la structure complexe ainsi obtenue sur X est préservée par l'action de H . On conclut par le théorème de Holmann. \square

Ceci motive la

Définition. On appellera *variété quotient de X* une variété compacte complexe construite de cette manière.

Remarque. Lorsque X est quasi-régulière, on obtient un quotient Y qui est une orbifold. On peut facilement adapter tous les résultats qui suivent au cas quasi-régulier.

19. LE CAS ABÉLIEN

Supposons G abélien. Soit X une variété CR G -polarisée. Le théorème 17.2 entraîne que tout G -fibré plat P sur X admet une structure complexe invariante par translations. Soit Γ un réseau cocompact. Le quotient

$$(19.1) \quad Z = P/\Gamma$$

où Γ agit sur les fibres de P via son inclusion dans G , est une variété compacte complexe.

Définition. On appellera *variété associée à P* une variété compacte complexe construite de cette manière.

Par définition, une variété associée à P est un fibré *réel* G/Γ -principal sur X . *Mais ce n'est pas un fibré holomorphe* sur X , puisque les fibres G/Γ sont totalement réelles dans P (cf. Proposition 18.4).

Plaçons-nous dans le cas où l'action de G est régulière. Soit H le groupe quotient associé. Nous pouvons donc définir la variété quotient Y . Nous souhaitons maintenant éclaircir la relation entre P et Y . Le feuilletage de X peut être remonté à P en utilisant la connexion plate. Ce feuilletage de P est lui aussi donné par une action dont les champs fondamentaux sont les images par J des champs fondamentaux de l'action de G sur les fibres de P (cf. (17.6), (17.7)). Appelons *horizontale* cette action et *verticale* l'action sur les fibres de P .

On peut donc faire agir $G \times G$ sur P , le premier facteur agissant horizontalement et le deuxième verticalement. Appelons *complète* cette action de $G \times G$ sur P .

Notons que le groupe abélien $G \times G$ a une structure de groupe de Lie complexe obtenue en décrétant que dans la décomposition de son algèbre de Lie

$$(19.2) \quad \mathfrak{K} = \mathfrak{G} \oplus \mathfrak{G}$$

le premier terme est la partie réelle et le second la partie imaginaire. On notera $(G \times G)_{\mathbb{C}}$ ce groupe de Lie complexe.

Observons que la structure complexe de $(G \times G)_{\mathbb{C}}$ descend en une structure de groupe de Lie complexe sur $G \times H$ et sur $G/\Gamma \times H$. On les notera $(G \times H)_{\mathbb{C}}$ et $(G/\Gamma \times H)_{\mathbb{C}}$.

Proposition 19.2. *Soit X une variété CR G -polarisée régulière avec G abélien. Soit H un quotient régulier de G . Soit enfin P un G -fibré plat sur X . On munit P de la structure complexe donnée par le théorème 17.2. Alors*

- (i) *L'action complète de $(G \times G)_{\mathbb{C}}$ sur la variété complexe P est holomorphe.*
- (ii) *La variété quotient Y est le quotient de P par l'action complète de $G \times G$.*
- (iii) *La variété P est un fibré holomorphe principal sur Y de groupe $(G \times H)_{\mathbb{C}}$.*
- (iv) *On a un diagramme commutatif*

$$(19.3) \quad \begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\Gamma} & Z \\ \downarrow (G \times H)_{\mathbb{C}} & & \downarrow (G/\Gamma \times H)_{\mathbb{C}} \\ Y & \xrightarrow{Id} & Y \end{array}$$

dont les flèches verticales sont des fibrés holomorphes principaux.

Preuve. On observe que dans la preuve du théorème 17.2, la structure complexe des orbites de l'action complète coïncide avec celle de $(G \times G)_{\mathbb{C}}$. De plus, chaque élément de G agissant verticalement agit holomorphiquement, par invariance par translations de la structure complexe de P . De même, comme l'action horizontale de G sur P est infinitésimalement J fois la verticale, chaque élément agissant horizontalement agit holomorphiquement. Ceci prouve le (i).

Prenons le quotient de P par l'action complète en deux temps. D'une part, par définition, le quotient de P par l'action verticale est X et l'action horizontale descend en l'action de G sur X . D'autre part, par régularité, cette action se réduit à une action effective de H dont le quotient est Y . On obtient ainsi un diagramme commutatif (18.3), mais pour l'instant sans savoir qu'il s'agit d'un diagramme de fibrés.

L'action complète de $G \times H$ sur P est une action libre, propre et d'après le (i), holomorphe avec orbites qui s'identifie à $(G \times H)_{\mathbb{C}}$. Il est alors facile de terminer la preuve. \square

Finissons cette section avec l'exemple suivant.

Variétés sasakiennes. Faisons un petit tour d'horizon des notions précédentes lorsque X est une variété sasakienne. On a alors $G = \mathbb{R}$ et le \mathbb{R} -cône s'identifie au cône riemannien (différentiablement, le \mathbb{R} -cône n'étant pas muni d'une métrique particulière) par

$$(19.4) \quad (x, t) \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X) \longmapsto (x, \exp t) \in \mathcal{C}(X).$$

Il n'y a pas d'autre fibrés plats, tout \mathbb{R} -fibré plat étant automatiquement trivial.

Le cas régulier (cf. [Sp]) correspond au cas où le flot provient d'une action libre de \mathbb{S}^1 . Il est alors bien connu que la variété quotient Y est une variété projective et que X est un fibré unitaire d'un fibré en droites sur Y . Enfin le cône riemannien muni de sa structure complexe est le \mathbb{C}^* -fibré principal associé sur Y (cf. [Sp] pour des énoncés plus précis).

20. VARIÉTÉS CR \mathbb{R}^m -POLARISÉES ET VARIÉTÉS LVM

Le but de cette section est de relier les variétés CR \mathbb{R}^m -polarisées et les variétés LVM. On renvoie à [LdM-V], [Me1] et [M-V] pour une présentation de ces variétés compactes complexes non kähleriennes. Nous utiliserons directement les notations et résultats de [M-V].

Pour prendre la mesure du théorème 20.2 énoncé ci-dessous, remarquons qu'on déduit facilement de la section 17 le résultat suivant.

Proposition 20.1. *Soit Y une variété compacte complexe. Soit m un entier naturel et soient L_1, \dots, L_m des fibrés en droites sur Y . Munissons-les de métriques riemanniennes et appelons C_1, \dots, C_m les fibrés en cercles unitaires associés. Appelons X la variété $C_1 \oplus \dots \oplus C_m$.*

Alors X est une variété CR \mathbb{R}^m -polarisée régulière pour $H = (\mathbb{S}^1)^m$. Son \mathbb{R}^m -cône est le $(\mathbb{C}^)^m$ fibré principal*

$$(20.1) \quad P := L_1 \setminus \{0\} \oplus \dots \oplus L_m \setminus \{0\}$$

et sa variété quotient est Y .

Preuve. Choisissons un flot engendrant chaque action circulaire sur X . On obtient ainsi une \mathbb{R}^m -action sur X dont le quotient est Y . On voit immédiatement que P est différentiablement le \mathbb{R}^m -cône de X et que la structure complexe de P est invariante par translations et orthogonale aux fibres. On conclut par le théorème 17.1, ii). \square

On a même mieux. Un fibré en cercles sur une variété complexe Y est \mathbb{R} -polarisé si et seulement si c'est le fibré unitaire d'un fibré en droites sur Y . Il s'agit d'une conséquence directe de [H-S].

Ceci montre qu'il est très facile de construire des variétés CR \mathbb{R}^n -polarisées régulières. Comme dans le cas sasakien, il est beaucoup plus difficile de construire des exemples *irréguliers*. Pour y arriver, nous allons utiliser les variétés LVM. Rappelons que ces variétés non kähleriennes possèdent toujours un feuilletage transversalement kählien donné par une action de \mathbb{C}^m . Qui plus est, sous une condition de rationalité dite condition (K), ce feuilletage est à feuilles compactes (voir [M-V, Theorem A]).

Définition. Soit N une variété LVM. On dira qu'elle vérifie la condition (K0) si

- (i) L'action transversalement kählienne de [M-V, Theorem A] se réduit à une action de $(\mathbb{C}^*)^m$.
- (ii) L'action de $(\mathbb{S}^1)^m$ induite du point (i) est libre.

Nous appellerons *action* (K0) l'action de $(\mathbb{S}^1)^m$ sur une variété LVM vérifiant la condition (K0).

Remarquons que cette condition est loin d'être vide. En effet, si N vérifie la condition (K) de [M-V], le point (i) de la condition (K0) est vérifié; et si N vérifie la condition de non-singularité de [M-V, Corollary B, (ii)], elle satisfera de plus au point (ii). Le corollaire H de [M-V] montre que de tels exemples existent au-dessus de n'importe quelle variété torique projective lisse, et ce avec un nombre de points indispensables arbitrairement grand (voir [M-V, Definition 1.8]). Mais remarquons également, et c'est fondamental pour la suite, qu'il y a aussi de nombreux exemples où N vérifie la condition (K0) mais pas la condition (K), puisque cette dernière implique que l'action transversalement kählerienne se réduit à une action de $(S^1)^{2m}$.

On a le

Théorème 20.2. *Soit N une variété LVM vérifiant la condition (K0). On suppose que N possède au moins un point indispensable. Alors*

- (i) *Le quotient de N par l'action (K0) est une variété CR \mathbb{R}^m -polarisée X .*
- (ii) *La variété X est quasi-régulière si et seulement si N vérifie la condition (K).*

Ce théorème donne ainsi de nombreux exemples de variétés CR \mathbb{R}^m -polarisées irrégulières.

Preuve. Le quotient de N par l'action libre et propre (K0) est une variété lisse X munie d'une action de \mathbb{R}^m . En effet, l'action holomorphe commutative initiale de \mathbb{C}^m sur N est, de par la condition (K0), une action commutative de $(\mathbb{C}^*)^m$. Cette action se décompose naturellement en l'action (K0) d'une part et une action de \mathbb{R}^m d'autre part. Ces deux actions commutant, la \mathbb{R}^m -action descend à X .

Lemme 20.3. *La \mathbb{R}^m -action sur X est localement libre.*

Preuve du lemme 20.3. Elle est induite de la \mathbb{C}^m -action transversalement kählerienne qui est localement libre [M-V, §2]. \square

Le quotient X est donc muni d'un feuilletage réel de dimension m . La structure transversalement kählerienne de N descend en une structure transversalement kählerienne sur ce feuilletage.

Considérons alors la 2-forme transversalement kählerienne ω de N (appelée forme d'Euler canonique dans [M-V]). Lorsqu'on identifie N différentiablement avec la sous-variété réelle \mathcal{N} de l'espace projectif complexe \mathbb{P}^{n-1} (cf. [M-V, formule (8)]), il s'agit simplement de la restriction à \mathcal{N} de la forme de Fubini-Study du projectif.

L'hypothèse de l'existence d'un point indispensable entraîne que \mathcal{N} vit en fait dans un ouvert affine du projectif, et donc que ω est exacte. Soit α une 1-forme de N dont la différentielle est ω . On a maintenant le

Lemme 20.4. *On peut prendre α invariante par l'action (K0).*

Preuve du lemme 20.4. En fait, si l'on suppose que \mathcal{N} est incluse dans la carte affine (w_1, \dots, w_{n-1}) de \mathbb{P}^{n-1} correspondant à $z_1 = 1$, elle s'écrit

$$(20.2) \quad \mathcal{N} = \{w \in \mathbb{C}^{n-1} \mid \Lambda_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \Lambda_{i+1} |w_i|^2 = 0\}.$$

Il résulte de ce qui a été rappelé de la forme ω qu'on peut prendre

$$(20.3) \quad \alpha = \frac{\sum w_i d\bar{w}_i - \bar{w}_i dw_i}{1 + \sum |w_i|^2}.$$

Par ailleurs, nous affirmons que l'action (K0) se fait par multiplication des coordonnées par des nombres complexes de module 1, donc préserve α .

Pour montrer cela, il faut revenir à la construction des variétés LVM et de l'action transversalement kähleriennes. Par définition, N est la projectivisation de l'espace des feuilles de Siegel (i.e. fermées et ne contenant pas l'origine) du feuilletage de \mathbb{C}^n donné par l'action

$$(20.4) \quad (T, z) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n \longmapsto \left(z_i \exp \langle \Lambda_i, T \rangle \right)_{i=1}^n \in \mathbb{C}^n.$$

Nous renvoyons à [M-V, §1] pour plus de détails. En tenant compte du fait que z_1 est une coordonnée indispensable, on peut réécrire N comme le quotient d'un ouvert U de \mathbb{C}^{n-1} (correspondant aux feuilles de Siegel) par l'action

$$(20.5) \quad (T, w) \in \mathbb{C}^m \times U \longmapsto A_T(w) := \left(w_i \exp \langle \Lambda_{i+1} - \Lambda_1, T \rangle \right)_{i=1}^{n-1} \in U.$$

De plus, N s'identifie au modèle C^∞ (20.-3).

Ensuite, l'action transversalement kähleriennes est l'action induite sur N par l'action

$$(20.6) \quad (S, w) \in \mathbb{C}^m \times U \longmapsto B_S(w) := \left(w_i \exp \langle \Re(\Lambda_{i+1} - \Lambda_1), T \rangle \right)_{i=1}^{n-1} \in U$$

et l'action (K0) est la projection à N de (20.6) pour $S \in (\mathbb{S}^1)^m \subset \mathbb{C}^m$.

Cette action ne préserve pas directement le modèle (20.2). Toutefois, étant donné $w \in \mathcal{N}$ et $S \in (\mathbb{S}^1)^m$, un calcul direct montre que la feuille de l'action A passant par $B_S(w)$ coupe \mathcal{N} en un point unique égal à

$$(20.7) \quad A_{-S} \circ B_S(w).$$

Autrement dit, l'action (K0) transposée au modèle (20.2) s'écrit

$$(20.8) \quad (w, S) \in \mathcal{N} \times (\mathbb{S}^1)^m \longmapsto \left(w_i \exp \langle \Im(\Lambda_{i+1} - \Lambda_1), iS \rangle \right)_{i=1}^{n-1} \in \mathcal{N}.$$

Ces formules prouvent ce que nous affirmions: l'action (K0) préserve la forme (20.3). \square

La 1-forme α descend donc en une 1-forme β sur X . Cette forme n'est, par contre, pas invariante par le feuilletage de X . Appelons p la projection de N sur X . La différentielle p_* définit un morphisme surjectif

$$(20.9) \quad p_*: \text{Ker } \alpha \subset TN \longrightarrow \text{Ker } \beta \subset TX.$$

Le point-clef est que ce morphisme envoie la distribution CR de codimension un de N

$$(20.10) \quad (\bar{E}, \bar{J}) = \text{Ker } \alpha \cap i\text{Ker } \alpha$$

en la distribution CR de codimension m de X

$$(20.11) \quad (E, J) = p_*(\text{Ker } \alpha \cap i\text{Ker } \alpha)$$

invariante par l'action de \mathbb{R}^m , et transverse aux orbites de cette action. Ainsi X est munie d'une structure CR \mathbb{R}^m -polarisée. Ceci montre le (i).

Maintenant X est quasi-régulière si et seulement si la \mathbb{R}^m -action sur X provient d'une $(\mathbb{S}^1)^m$ -action; c'est-à-dire, tenant compte de la condition (K0) si et seulement si l'action transversalement kählérienne sur N est donnée par une action de tores. Or d'après le théorème A de [M-V], c'est le cas si et seulement si la condition (K) est vérifiée. Ceci montre le (ii). \square

Remarque. Contrairement au cas de la proposition 20.1, la variété LVM N n'est pas en général une variété associée au \mathbb{R}^m -cône de X , car le fibré en tores $N \rightarrow X$ n'est pas un fibré trivial.

Remarque. Ainsi que nous l'avons signalé plus haut, on peut facilement établir une version orbifold du théorème 20.2, (i) en relaxant l'hypothèse (ii) dans la définition de la condition (K0). Tous les résultats de [M-V] sont en effet énoncés pour le cas orbifold. Bien que plus technique, une telle version a l'avantage de correspondre à une condition (K0) plus facile à manier.

Remarque. Il n'est pas clair que le même type de résultat soit vrai pour les variétés de [Bo], qui généralisent les variétés LVM. En effet, il n'y a pas d'équivalent connu à la forme ω , car il n'y a pas forcément de feuilletage *transversalement kählérien* sur un tel objet, cf. [CF-Z].

REFERENCES

- | | |
|---------------------------------|--|
| CRM Preprint Series number 1130 | <p>[Bo] F. Bosio. <i>Variétés complexes compactes: une généralisation de la construction de Meersseman et de López de Medrano-Verjovsky</i>, Ann. Inst. Fourier 51 (2001), 1259–1297.</p> <p>[B-G] C. P. Boyer, K. Galicki. <i>Sasakian Geometry</i>. Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press. Oxford 2007.</p> <p>[Br] M. Brunella. <i>On transversely holomorphic flows I</i>, Invent. Math. 126 (1996), 265–279.</p> <p>[CF-Z] S. Cupit-Foutou, D. Zaffran. <i>Non-kähler manifolds and GIT-quotients</i>, Math. Z. 257 (2007), 783–797.</p> <p>[Do1] A. Douady. <i>Le problème des modules pour les variétés analytiques complexes</i>, Sémin. Bourbaki 277 (1964/65).</p> <p>[Do2] A. Douady. <i>Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné</i>, Ann. Inst. Fourier 16 (1966), 1–95.</p> <p>[D-K] T. Duchamp, M. Kalka. <i>Deformation theory for holomorphic foliations</i>, J. Differential Geom. 14(3) (1979), 317–337.</p> <p>[EK-N] A. El Kacimi, M. Nicolau. <i>Déformations des feuilletages transversalement holomorphes à type différentiable fixe</i>, Publ. Mat. 33(3) (1989), 485–500.</p> <p>[Gh] E. Ghys <i>On transversely holomorphic flows II</i>, Invent. math. 126 (1996), 281–286.</p> |
|---------------------------------|--|

- [Gi] J. Girbau. *A versality theorem for transversely holomorphic foliations of fixed differentiable type*, Ill. Jour. Math. **36(3)** (1992), 428–446.
- [G-H-S] J. Girbau, A. Haefliger, D. Sundararaman. *On deformations of transversely holomorphic foliations*, J. Reine Angew. Math. **345** (1983), 122–147.
- [G-M] X. Gómez-Mont. *Transversal holomorphic structures*, J. Differential Geom. **15** (1980), 161–185.
- [H-S] A. Haefliger, D. Sundararaman. *Complexifications of Transversely Holomorphic Foliations*, Math. Ann. **272** (1985), 23–27.
- [K-S1] K. Kodaira, D.C. Spencer. *On deformations of complex analytic structures I*, Ann. of Math. **67** (1958), 328–402.
- [K-S2] K. Kodaira, D.C. Spencer. *On deformations of complex analytic structures II*, Ann. of Math. **67** (1958), 403–466.
- [Ku1] M. Kuranishi. *On the locally complete families of complex analytic structures*, Ann. of Math. **75** (1962), 536–577.
- [Ku2] M. Kuranishi. *New Proof for the Existence of Locally Complete Families of Complex Structures*. Proc. Conf. Complex Analysis (Minneapolis, 1964), 142–154. Springer, Berlin 1965.
- [Ku3] M. Kuranishi. *Deformations of Compact Complex Manifolds*. Les presses de l'université de Montréal. Montréal 1971.
- [LdM-V] S. López de Medrano, A. Verjovsky. *A new family of complex, compact, non symplectic manifolds*, Bol. Soc. Mat. Bra. **28(2)** (1997), 253–269.
- [Me1] L. Meersseman. *A new geometric construction of compact complex manifolds in any dimension*, Math. Ann. **317** (2000), 79–115.
- [Me2] L. Meersseman. *Kuranishi type moduli spaces for proper CR submersions fibering over the circle*, 2012. [arXiv:1210.1244v1](https://arxiv.org/abs/1210.1244v1)
- [M-V] L. Meersseman, A. Verjovsky. *Holomorphic principal bundles over projective toric varieties*, J. Reine Angew. Math. **572** (2004), 57–96.
- [Ni] M. Nicolau. *Deformations of Holomorphic and Transversely Holomorphic Foliations*, Panoramas & Synthèses. To appear 2012.
- [Nir] L. Nirenberg. *A complex Frobenius theorem*, Seminar of Analytic Functions, Institute for Advanced Studies, Princeton, 1957, 172–189.
- [No] K. Nomizu. *Lie groups and differential geometry*. The mathematical Society of Japan 1956.
- [Pa] R. Palais. *Seminar on the Atiyah-Singer Index Theorem*. Annals of Mathematics Studies **57** (1965), Princeton University Press. Princeton, N.J.
- [Sa] H. Samelson. *A class of complex-analytic manifolds*, Portugaliae Math. **12** (1953), 129–132.
- [Sl] J. Slimène. *Deux exemples de calcul explicite de cohomologie de Dolbeault feuilletée*, Proyecciones **27** (2008), 63–80.
- [Sp] J. Sparks. *Sasaki-Einstein manifolds*. Surveys in differential geometry. Volume XVI. Geometry of special holonomy and related topics. Surv. Differ. Geom. **16**. Int. Press, Somerville, MA 2011, 265–324.