MATEMATICAS TERCER CURSO

GEOMETRIA III

1.- PREMILINARES.
Particiones de la unidad.- Teorema de la función inversa y de las funciones implícitas.

2.- CURVAS DE R^n.
Definiciones, ejemplos.- Orden de contacto de dos curvas, su cálculo.- Variedades lineales osculadoras en cada punto de la curva.

3.- CURVAS DE R^n (CONTINUACION).
Fórmulas de Frenet.- Determinación (salvo desplazamientos) de una curva por sus coeficientes de Frenet.- Cálculo efectivo de dichos coeficientes.

4.- CAMPOS VECTORIALES Y DERIVACIONES EN UN ABIERTO DE R^n.
Los vectores en cada punto como derivadas direccionales.- El espacio de las derivadas en un punto.- Campos vectoriales y grupos uniparamétricos de transformaciones.- El corchete de Poisson de dos campos como derivada de Lie.

5.- SUBVARIEDADES PRAMETRIZADAS DE R^n.
Definición.- Diferenciabilidad de aplicaciones entre subvariedades.- La noción de espacio tangente.

6.- LA NOCION DE VARIEDAD DIFERENCIABLE.
Definición y ejemplos.- Funciones diferenciables.- Variedades para compactas y segundo axioma de numerabilidad.- Particiones de la unidad.

7.- ESPACIO TANGENTE. CAMPOS TENSORIALES Y FORMAS DIFERENCIABLES.
Espacio tangente en un punto.- Aplicación lineal tangente.- Campos vectoriales.- Campos tensoriales y formas diferenciables.- La diferencial exterior.- Derivaciones en el álgebra tensorial y esterior.

8.- SUBVARIEDADES. TEOREMA DE FROBENIUS.
Subvariedades de una variedad diferenciable.- Foliaciones.- Teorema de Frobenius local y global.

9.- DERIVACIOŃ COVARIANTE Y SEGUNDA FORMA CUADRATICA FUNDAMENTAL EN LAS SUBVARIEDADES DE R^n.
Segunda forma cuadrática de una hipersuperficie de R^n como la mejor aproximación cuadrática posible de la hipersuperficie en cada punto: Presentación primitiva de Meusnier y Dupin.- Segunda forma cuadrática de una subvariedad cualquiera de R^n.- Curvaturas principales, lineas de curvatura, lineas asintóticas.- Derivación covariente.- Ecuaciones de Gauss-Codazzi.

10.- VARIEDADES DE RIEMANN: GENERALIDADES.
Definición.- Cálculo de la derivada covariante.- Teorema egregio de Gauss para hipersuperficies de R^n.- Extensión de la derivada covariante a todas las capas tensoriales y a las formas diferenciales.- Punto de vista de Elie Cartan.- Formas de conexión y curvatura.- Ecuaciones de estructura.

11.- PROBLEMAS VARIACIONALES EN LAS VARIEDADES DE RIEMANN: GEODESICAS.
Geodésicas como extremales de la longitud.

12.- VARIEDADES DE RIEMANN: APLICACION EXPONENCIAL Y COORDENADAS NORMALES GEODESICAS.
Noción de fibrado tangente.- Aplicación exponencial.- Coordenadas normales geodésicas.- Distancia geodésica.- Diferenciabilidad de la aplicación exponencial.

13.- VARIEDADES DE RIEMANN: EL TEOREMA DE HOPF-RINOW.
La noción de completitud.- Ejemplos.- El teorema de Hopf-Rinow.

14.- VARIEDADES DE RIEMANN. TRANSPORTE PARALELO.
Transporte paralelo.- Paralelismo absoluto en váriedades simplemente conexas: el paralelismo absoluto equivale a la anulación del tensor de curvatura.

15.- CURVATURA EN LAS VARIEDES DE RIEMANN.
Identidades de Bianchi.- Tensor de Riemann-Cristoffel.- Curvaturas seccionales.- Variedes de Riemann de curvatura seccional constante: teorema de Schur.- Isometrías e isometrías infinitesimales.- Ecuaciones de Killing.

16.- DETERMINACION DE UNA HIPERSUPERFICIE DE R^n POR SUS DOS PRIMERAS FORMAS CUADRATICAS FUNDAMENTALES.
Referencial móvil de Elie Cartan en una hipersuperficie de R^n.- Papel de las dos primeras formas cuadráticas fundamentales en la determinación de la referencia móvil.- Ecuaciones de Gauss-Codazzi en términos de la referencia móvil.- Teorema de Bonnet local.- Teorema de Bonnet global.

17.- REVESTIMIENTOS DE VARIEDADES DIFERENCIALES. EL REVESTIMIENTO UNIVERSAL.
Definiciones y ejemplos.- Introducción del primer grupo de homotopía.- Levantamiento de curvas.- Aplicación natural del primer grupo de homotopía de la base en la fibra.- Revestimiento universal: existencia y unicidad.

18.- GRUPOS DE LIE: GENERALIDADES.
Definiciones y ejemplos.- Campos invarientes por la izquierda.- Algebra de Lie.- Formas invarientes por la izquierda.- Ecuaciones de Maurer-Cartan.- Aplicación exponencial.

19.- GRUPOS DE LIE: LOS TRES TEOREMAS FUNDAMENTALES DE SOPHUS LIE.
Determinación local de la ley de mutiplicación del grupo a partir del conocimiento del algebra de Lie: caso particular del segundo teorema fundamental de Lie.- Tercer teorema fundamental de Lie.- Actuación de un grupo de Lie como grupo de transformaciones de una variedad diferenciable: primer y segundo teoremas de Lie.

20.- SUBGRUPOS DE LIE Y MORFISMOS DE GRUPOS DE LIE.
Subgrupos de Lie.- Dada una subálgebra de Lie existe un único ubgrupo de Lie.- Determinación de un morfismo de grupos de Lie por el corfismo de sus correspondientes álgebras.- Representación adjunta.- Ideales del álgebra de Lie y subgrupos normales.

21.- INTEGRACION EN VARIEDADES Y FORMULA DE STOKES.
Variedades con borde.- Orientación en variedades.- Orientación inducidad en el borde.- Integración sobre variedades orientadas.- Fórmula de Stokes.- Volumen en una variedad de Riemann: Fórmula de Green.- Integración invariente en un grupo de Lie Compacto.

22.- HOMOLOGIA SINGULAR: GENERALIDADES.
Cadenas singulares.- Operador borde.- Homología singular (con coeficientes enteros).

23.- HOMOLOGIA SINGULAR: AXIOMAS DE EILENBERG-STEENROD.
Teorema de invariancia de homotopía.- Homología relativa y sucesión exacta de homología de un par.- Subdivisiones baricéntricas y teorema de escisión.

24.- HOMOLOGIA SINGULAR DE COMPLEJOS ESFERICOS Y CW-COMPLEJOS.
Grupos de homología de las esferas.- Homología de los complejos esféricos y CW-complejos.- Ejemplos.

25.- HOMOLOGIA SINGULAR CON COEFICIENTES REALES. COHOMOLOGIA SINGULAR.
Caso particular del teorema de los coeficientes universales.

26.- FORMULA DE STOKES PARA CADEMAS ENUNCIADO DEL TEOREMA DE "DE RAHM".
Integración sobre cademas singulares.- Segunda versión de la fórmula de Stokes.- Enunciado del teorema de De Rahm.

27.- COHOMOLOGIA CON VALORES EN UN HAZ.
Generalidades sobre haces y pre-haces.- Haces finos.- Cohomología con valores en un haz.

28.- DEMOSTRACION DEL TEOREMA DE "DE RAHM".

30.- TEORIA ELEMENTAL DE MORSE (CONTINUACION).
Demostración de los dos teoremas fundamentales de la teoría elemental de Morse.

29,- TEORIA ELEMENTAL DE MORSE.
Puntos críticos no degenerados de una función diferenciable.- Lema de Morse (sin demostraciones) sobre un ejemplo de la teoría elemental de Morse.

31.- TEORIA ELEMENTAL DE MORSE.
Aplicaciones: Teorema de Reeb.- Cálculo de grupos de cohomología de determinadas variedades mediante aplicación de la teoría de Morse.

BIBLIOGRAFIA

HICKS J. Notes on differential geometry. Van NostrandCompany 1965.

WARNER F.W. Foundations of differentiable manifolds and Lie Groups. Scott Foresman and Company 1971.

DE RAHM G. Variétés differentiable. Hermann 1960.

MILNOR J. Morse theory. Priceton University Press 1963.

KOBAYASHI K. and NOMIZU Foundations of differential geometry. Interscience publishers. vol. I 1963. y vol. II 1969.

GODEMENT R. Théory des faisceaux. Hermann 1964.

PONTRYAGIN L.S. Topological groups. Gordon and Breach 1966.

GREENBERG M. Lectures on Algebraic Topology. Benjamin 1971.

WALLACE A.H. Algebraic Topology. Benjamin 1971.

ARTICULOS DE EXTRAORDINARIO INTERES EXPOSITIVO SOBRE ALGUNA DE LAS MATERIAS DESARROLLADAS EN EL CURSO.

DE RAHM G. Sur la réductibilité d'un espace de Riemann. Commentarii Mathematici Helvetici. vol. 26 (1952).

WEIL A. Sur les théorémes de De Rahm. Commentarii Mathematici Helvetici, Vol. 26 (1952).