

PROGRAMA DE L'ASSIGNATURA
"CÀLCUL DE PROBABILITATS I PROCESSOS ESTOCÀSTICS"
4art curs de Matemàtiques
Curs 1980-81

Prof. Dra. Marta Sanz-Solé

I. Teoria de la mesura.

1.- Estructures mesurables. Famílies especials de conjunts: àlgebres i σ -àlgebres (tribus). Exemples. Classes monòtones. Teorema de les classes monòtones: classes monòtones i tribu generada per un àlgebra.

2.- Mesures. Mesures σ -additives. Mesures de probabilitat. Propietats. Espais de mesura. Continuitat monòtona seqüencial i σ -additivitat. Teorema de Vitali-Hahn-Saks en el cas monòton. Mesures exteriors. Exemples. Espais de mesura complets. Completació d'un espai mesurable.

3.- Extensió de mesures. 1er Teorema de Carathéodory. Mesures σ -finites : 2on Teorema de Carathéodory. Unicitat de l'extensió. Completació de l'extensió. Teorema d'aproximació.

4.- Mesures de Lebesgue-Stieltjes en \mathbb{R}^n . Mesures de Lebesgue-Stieltjes i funcions de distribució. Propietats. Exemples: la mesura de Lebesgue en \mathbb{R}^n .

5.- Funcions mesurables. Propietats de les funcions mesurables numèriques. Funcions mesurables positives.

6.- Integral de Lebesgue. Definició de la integral. Propietats. Teoremes bàsics: Teorema de la convergència monòtona. Lema de Fatou. Teorema de la convergència dominada. Comparació entre la integral de Lebesgue i la integral de Riemann.

7.- Altres teoremes. Teorema de Jordan-Hahn: Descomposició d'una mesura amb signe. Variació total d'una mesura. Propietats. Teorema de Radon-Nikodym: mesures absolutament contínues i existència de densitats. Teorema de descomposició de Lebesgue: L'espai de les mesures signades. Mesures singulars i teorema de Lebesgue.

8.- Espais L^p . Desigualtats de Hölder i de Minkowski. Seminormes N_p . Teorema de Fisher-Riesz: completitud dels L^p .
L'espai L^∞

9.- Producte d'espais mesurables i Teorema de Fubini. Semi-àlgebra dels rectangles mesurables i tribu producte. Seccions mesurables. Teorema de la mesura producte. Integració respecte d'una mesura producte. Teorema de Fubini.

10.- Probabilitat sobre un producte numerable d'espais. Cilindres mesurables en l'espai producte. Teorema de Ionescu-Tulcea.

Bibliografia.

- 1.1. Ash, R. "Real Analysis and Probability" Academic Press.
- 1.2. Bartle, R. "The elements of Integration" Wiley, 1966
- 1.3. Berberian "Measure and Integration" Chelsea, Nova York, 1965.
- (*) 1.4. Carathéodory "Algebraic theory of measure and integration". Chelsea, 1963.
- (*) 1.5. Halmos, P. "Measure theory". Van Nostrand, Nova York, 1950
- 1.6. Marle "Mesures et Probabilités". Hermann, Paris, 1974
- 1.7. Métivier, M. "Notions fondamentales de la théorie des Probabilités". Dunod, Paris, 1972.

- 1.8. Munroe, M. "Introduction to measure and integration" Add. Wesley, Cambridge Mass., 1953.
- 1.9. Neveu, J. "Bases Mathématiques du Calcul de Probabilités" Masson. Paris, 1970.

(*) molt clàssics.

II Probabilitat.

- 1.- Variabls i vectors aleatoris. Funcions de distribuci3 i densitat d'una variable aleat3ria. Esperança d'una funció d'una variable aleat3ria. Funcions de distribuci3 i densitat conjunta. Variança, covariança i coeficient de correlaci3. Matriu de covariàncies. Distribucions clàssiques.
- 2.- Convergència de variables aleat3ries. Convergència q.s. Convergència en probabilitat, ~~Metritzabilitat~~ de la convergència estocàstica. Convergència quasi uniforme. Teorema d'Egoroff.
- 3.- Equiintegrabilitat. Famílies uniformement integrables de variables aleat3ries. Condicions d'equiintegrabilitat. Equiintegrabilitat i convergència.
- 4.- Independència. Definició. Tribus independents i condicions de independències. Condicionament i independència. Formula de Bayes. Integració respecte de la probabilitat condicionada. Variables aleat3ries independents. Distribuci3 conjunta i independència. Esperança d'un producte de variables independents. Llei del zero-un. Convoluci3 de mesures finites i suma de variables aleat3ries independents.
- 5.- Esperança condicionada. Esperança condicionada respecte d'una tribu: Definició, propietats de linealitat i convergència seqüencial. El cas de L^2 : Esperança condicionada com projecci3 en un espai de Hilbert. Desigualtat de Jensen: aplicaci3 de les funcions convexes a desigualtats entre esperances condicionades. Esperança condicionada respecte d'una família de variables. Probabilitats condicionades regulars i distribucions.
- 6.- Convergència feble de mesures sobre espais mètrics. Condicions equivalents. El cas de la recta real: convergència en distribuci3. Aplicaci3 a la convergència en llei de v.a.
- 7.- Compacitat feble de mesures. Teorema de Helly. Conjunts "tight" i conjunts relativament compactes de mesures finites en la recta real. Teorema de Prohorof.

8.- Funcions característiques. Transformada de Fourier de mesures finites. Convolució i transformada de Fourier. Funcions característiques d'algunes distribucions importants. Funció característica d'un vector aleatori. Funció característica de variables aleatòries independents. Funció característica i moments, Fórmula d'inversió. Caracterització d'una mesura a partir de la seva funció característica. Teorema de P. Lévy-Cramer.

9.- Teoremes límit. Desigualtat de Xebixef. Llei feble dels grans nombres. Desigualtat de Kolmogorov. Llei forta dels grans nombres. Teorema del límit central: Sumes normalitzades de variables aleatòries. Condició de Lindeberg. Teorema de Lindeberg. Casos particulars.

10.- Lleis infinitament divisibles. Definició. Disposicions triangulars. Caracterització de les lleis inf. divisibles. Lleis de Poisson compostes.

11.- Lleis estables. Definició. Tipus de lleis. Teorema dels tipus de convergència. Caracterització de les lleis estables. Lleis estables simètriques. Domini d'atracció.

Bibliografia.

1.1, 1.7, 1.9.

- 2.1 Billingsley, P. "Convergence of Probability Measures". Wiley. Nova-York, 1968.
- 2.2 Breiman, L. "Probability". Addison-Wesley. Reading Mass. 1968.
- 2.3 Chung, K. "A course in Probability theory". Academic Press. Nova York 1974.
- 2.4 Feller, W. "Introducción a la teoria de Probabilidades y sus aplicaciones." Vol. I i II Limusa, Mèxic 1975, 1978.
- (*)- 2.5 Gnedenko "The theory of Probability" Mir Publishers Moscú, 1978
- (*)- 2.6 Kolmogorof "Foundations of Probability". Chelsea, Nova York, 1950.

- 2.7 Krickeberg, K. "Teoria de la probabilidad" Ed. Teide Barcelona, 1973.
- 2.8 Lamperti, J. "Probability" Benjamin/Cummings. Reading Mass., 1966.
- 2.9 Loève, M. "Probability theory". Van Nostrand. Toronto, Nova York, 1963.
- 2.10 Parthasarathy, K.R. "Probability Measures on Metric Spaces" Academic Press. Nova York, 1972.

(*) molt clàssics.

III Estadística

- 1.- Idees generals sobre Mostreig. Mostreig aleatori simple. Mostreig sense reemplaçament. Funció de distribució empírica. Teorema de Glivenko-Cantelli. Estadístics d'una mostra. La mitjana i la variança empírica.
- 2.- Distribucions de probabilitats ususals en Estadística. Llei gamma. Llei beta. Suma i quocient de distribucions gamma independents. Llei ji-quadrat (χ^2). Teorema de l'addició de lleis χ^2 . Teorema de Cochran.
- 3.- Distribució d'estadístics d'una mostra d'una variable normal. Distribució de la mitjana i la variança: Teorema de Fisher. La llei de Student.
- 4.- Estimació en models paramètrics. Estimació puntual. Estimadors centrats. Estimadors consistents. Estimadors eficients. La fita de Fréchet-Cramer-Rao. El mètode de màxima versemblança. Propietats. El mètode dels moments. Estimació per intervals de confiança.

5.- Test d'hipòtesis. Què vol dir fer un test. Nivell de significació, extensió i potència d'un test. El lema de Neyman-Pearson. Test de la raó de màxima versemblança. Construcció d'un test a partir de regions de confiança. Test de la bondad d'ajustament: el test χ^2 .

Bibliografia.

- 3.1. Breiman, L. "Statistics" Houghton and Mifflin. Boston, 1973.
- 3.2. Cramér, H. "Métodos matemáticos en Estadística" Aguilar Madrid, 1970.
- 3.3. Fourgeaud-Fuchs "Statistique" Dunod. Paris, 1972.
- 3.4. Kendall and Stuart "The Advanced theory of Statistics" (3 vol.) Griffin and Company limited. London, 1967-68.
- 3.5. Larson, H. "Introduction to Probability theory and Statistical Inference" Wiley, Nova York, 1974

Calcul de Probabilitats i Processos Estocàstics", 4art. curs
Matemàtiques.

- BRANCA APLICADA
1. Ash "Real Analysis and Probability" Academic Press.
 2. Metivier, M. "Notions fondamentales de la théorie de Probabilitats" Dunod, Paris, 1972.
 3. Neveu, J. "Bases Mathématiques du Calcul des Probabilités" Masson, Paris, 1970.
 4. Breiman, L. "Probability" Addison-Wesley. Reading Mass, 1968.
 5. Chung, K. "A course in Probability theory" Academic Press. New York, 1974.
 6. Lamperti, J. "Probability" Benjamin Cumming. Reading Mass, 1966.
 7. Gnedenko "The theory of Probability" Mir Publishers, Moscú, 1978.
 8. Loève, M. "Probability theory" Van Nostrand. Toronto, 1963.
 9. Krikeberg, K. "Teoria de la Probabilidad. Ed. Teide. Barcelona, 1973.
 10. Breiman, L. "Statistics". Houghton an Mifflin. Boston, 1973.
 11. Kendall and Stuart. "The advanced theory of Statistic" (3 vol.) Griffin and Company Limited. London 1967-68.
 12. Feller "Introducción a la Teoria de Probabilidades y sus Aplicaciones" Vol. I i II. Limusa, Mèxic 1975-78.